事前の仕事割り当て問題

末廣，英生

(Citation)
国民経済雑誌,189(5):81-98

(Issue Date)
2004-05

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00055927

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00055927

事前の仕事割り当て問題

末　廣　英　生

本稿は，プリンシパルが，コスト係数の分布が異なる複数のエージェントを収益性の異なる仕事に配置し，それからコスト係数が実現して各エージェントとプリンシパル・エージェント関係に入るというゲームを研究する。特に，このゲームでプリンシパルが選択する最適な事前の仕事割り当てが，エージェントのコスト係数の分布のリストと，仕事の収益性のリストという環境パラメーターにどのように依存するかを調べる。そして，コスト係数の確率順序に従って優秀なエージェントの順に収益性の高い仕事に配置することが事前の最適な仕事割り当てとなることを証明する。さらに，この結果を，それが事後的に最適な仕事割り当てとなる可能性を最大にする事前の仕事割り当てであり，また仕事に関する事前の比較優位に従った仕事割り当てである，ということから説明できることを示す。

キーワード　人材配置，情報非対称性，プリンシパル・エージェント関係

1 問　　題

組織は，複数の仕事に利用可能な限られた人材を配置して収益をあげている。組織が想定している職務のリストと利用可能な人材のリストが与えられているとき，人材の適切な職務配置は，組織がそのパフォーマンスをできるだけ高めるために解決しなければならない基本的な問題である。

適材適所ということが組織のパラメーターにどのように依存して決まるかということは，人材を配置する担当者に，リストにある職務と人材の性質が完全に分かっている場合には，比較的よく分かっている。それは数理計画の問題として解かれうる。その結果は，人的資源管理の入門的教科書（例えば Lazear (1998) の第 4 章）にも書かれている。

人材を配置する担当者に，リストにある職務と人材の性質が完全には分からない場合には，適材適所がどのように見いだされるかは新たな問題となる。普通，職務の性質は人材を配置する担当者には良く知られているから，この問題は人材の性質が人材を配置する担当者にあらかじめよく分からない場合に起こると考えて良い。そして，働く側の本人の方が自分の状況をより詳しく知っているという場合には，人材の適切な配置の問題は，非対称情報に由来する困難な問題になる。

このような状況での最適な人材の配置を調べる方法で，最も標準的な経済学の方法は，配置すべき人材を集めて人材配置のためのゲームを行うことができると想定し，そのゲームの最適な設計の結果生じる人材配置の性質を分析する，というものである。このような集権的人材配置ゲームが実行可能ならば，それが他のどのような方法よりも優れていることは，すでに Melumad, Mookherjee, and Reichelstein (1995) によって証明されている。そして，この集権的人材配置ゲームによって実現される人材配置は，非対称情報下の資源配分というより一般的な問題として，メカニズムデザインと呼ばれる一連の研究によって詳しく分析されている。その結果は，ゲーム理論の上級の教科書（例えば Fudenberg and Tirole (1991) の第7章）にも書かれている。

しかし，たとえ職務配置において情報非対称性の問題がある場合でも，組織において職務配置が何らかの意味でこの集権的人材配置ゲームを通じて行われることはほとんどない。それは，人材は実際に仕事を通じて形成されていく，という事実に由来すると思われる。すなわち，人は，そのキャリアのほとんどにおいて，特定の仕事に割り当てられ，その仕事をやってみて初めてその仕事のやり方を知り，その仕事を実際に行うことを通じてそれに必要な能力を高める。したがって，人は，仕事を実際にやってみて初めてその仕事に必要な能力に照らして自分の実際の能力がどの程度かを認識する。だから，ある人をある仕事に配置する時点では，その人がその仕事にどれだけ適した人材であるかは，職務配置の担当者はもちろんその人本人にもよく分からない。その結果，現に仕事をしている時には，その人がその仕事にどの程度適した人材であるかについて，職務配置の担当者と本人との間に情報非対称性が起こるが，その配置を決める時点ではそれは存在しない，というのが組織における一般的な状況であろう。これは，つまり，集権的人材配置ゲームを考える前提が，組織における人材配置の時点で実際に成立していることがほとんどない，ということである。

この状況での人材配置はどのようになるであろうか。それは，経験的には良く知られている。たとえば，複数の候補者の中からの昇進は，典型的にこの状況である。ある人をそのポストに昇進させた場合実際にどの程度の働きができるかは，昇進の決定時点では，昇進前のポストでの彼の働きに基づいて推測するしかない。昇進前のポストでの働きは，職務配置の担当者も本人もそれなりに把握できる。しかし，彼が実際に昇進してそのポストで仕事を始めれば，彼がそのポストに適した人材か否かは，通常職務配置の担当者がそれを察知する前に本人がそれを知る。本人は仕事の最中にそれを知るが，職務配置の担当者はそれを事後的にしか判断できないからである。このような状況で行われる昇進の決定は，通常経験的に「最もできそうな人を昇進させる」というものである。昇進させなかった人が配置される仕事と昇進した人のポストを比較すると，配置が行われた仕事の性質は，昇進した人のポストは昇進させなかった人が配置される仕事に較べて「大事な仕事」である，と考えて良い。したがっ

て，経験則は，「大事な仕事には最もできそうな人をつけよ」というものであろう。

このような人材配置がなぜ行われるのかを理論的に説明する研究は十分ではない。本稿は，この問題を，「大事な仕事」とは収益性の高い仕事のことである，そして「最もできそうな人」とは努力するためのコストが低くてすむ可能性が高い個人のことである，という限定的な場合について解く。そして，この意味で「大事な仕事には最もできそうな人をつけよ」という経験則が正しいことを証明する。さらに，その経験則が成立する理由の代替的な２つの説明を与える。

2 モ デ ル

プリンシパル，エージェント１，エージェント２の３人の個人からなる組織を考える。プリンシパルは，仕事１と仕事２の２つの仕事の差配権と，それらの仕事からあがる収益の所有権を持っている。どちらの仕事も１人のエージェントによってなされるべき仕事である。１人のエージェントが仕事 j に割り当てられ，水準 $e \in R_+$ の努力を注いでその仕事をすると，その仕事から $y_j = f_j(e)$ の収益があがる。ここに，収益の関数は，正数のパラメーター α_j によって $f_j(e) = a_j\sqrt{e}$ と書けるとする。この関数形は３人の個人間に共通に知られている。

プリンシパルが行う仕事の差配とは，次の２つである。第１に，仕事の割り当てを行う。１つの仕事割り当てとは，各エージェント i に彼に割り当てる仕事 j を対応させる関数 $j = a(i)$ のことである。それは，ベクトルの形で，$a = (a(1), a(2))$ とも書ける。プリンシパルにとって利用可能な仕事の割り当ては，$a' = (a'(1), a'(2)) = (1, 2)$ と $a'' = (a''(1), a''(2)) = (2, 1)$ の２通りである。

第２に，割り当てた仕事の下での各エージェントへの仕事の報酬を設計する。仕事 j にエージェント i が割り当てられたとき，仕事 j にエージェント i が割り当てられたという事実，その仕事 j から実際にあがった収益 y，およびその時エージェント i に支払われた報酬額 w は，裁判所がそれを確認可能であると想定する。したがって，仕事 j に割り当てられたエージェント i に対する報酬は，その仕事からあがる収益に応じた報酬の支払い方として契約できる。すなわち，プリンシパルは，仕事 j から収益 y があがれば，その仕事に割り当てたエージェント i に報酬 $w = g_{ij}(y)$ を支払うという関数 $g_{ij} : R_+ \to R_+$ が契約できる。

エージェント i は，どちらの仕事であれ，割り当てられた仕事で水準 e の努力を注ぐことに対して，個人的に努力費用 $c_i = \theta_i e$ を負担する。コストの係数 θ_i がとりうる値のバリエーションは，エージェント１とエージェント２に共通に $\Theta = \{\underline{\theta}, \overline{\theta}\}$ である。ここに $\underline{\theta} < \overline{\theta}$ である。プリンシパル，エージェント１，エージェント２の３人とも，エージェント i のコスト係数の実際の値が $\theta_i = \underline{\theta}$ であるのかそれとも $\theta_i = \overline{\theta}$ であるのかを，あらかじめ知ることはできない。それは，事前には $\theta_i = \underline{\theta}$ である可能性が確率 p_i（ただし $0 < p_i < 1$）で，$\theta_i = \overline{\theta}$ である

可能性が確率 $1-p_i$ であると見積もられており，この見積もりは3人の個人に共通して知られている。また，θ_1 の値と θ_2 の値とは確率的に独立であり，このことも3人の個人に共通して認識されている。ただし，各エージェントはひとたび仕事に配置されると，その仕事を実際に行うまでに，自分のコスト係数の値を完全に理解できると想定する。従って，エージェント i は実際に努力水準を選ぶ段では，θ_i の値を完全に知っている。しかし，プリンシパルと残りのエージェントの θ_i に関する認識は，その段階でも以前の段階と全く変わらない。

エージェント i のコスト係数が θ_i の時に，プリンシパルがエージェント i を仕事 j に配置し，報酬契約 $w=g_{ij}(y)$ が合意され，エージェント i が努力水準 e_i を注いで仕事 j を行ったなら，仕事 j から収益 $y_j=f_j(e_i)$ があがり，仕事 j からのプリンシパルの利得は $y_j-g_{ij}(y_j)$ となり，エージェント i の利得は $g_{ij}(y_j)-\theta_i e_i$ となる。

エージェント1もエージェント2も，プリンシパルの行う仕事の差配を，仕事の割り当てであれ報酬の設計であれ，その都度拒否することができる。エージェント i がプリンシパルの仕事の差配を拒否したならば，彼に割り当てられようとしていた仕事が j であれば，プリンシパルは仕事 j からの収益の機会を失う。すなわち，仕事の差配は1回だけ行われ，再交渉はない。また，拒否したエージェント i は利得ゼロを受け取る。

全体を通して，物事は，次の順で生起する。

1. プリンシパルは，仕事の割り当て a を a' か a'' のいずれかに決めて，各エージェント i に彼への仕事割り当て案 $a(i)$ を提示する。
2. 各エージェント i は，独立に同時に，自分への仕事の割り当て $a(i)$ を受け入れるか拒否するかを選択する。拒否すれば，プリンシパルとエージェント i との関係はここでうち切られ，プリンシパルは仕事 $a(i)$ からの収益の機会を失い，エージェント i は利得ゼロを受け取る。
3. 仕事を受け入れたエージェント i のコスト係数 θ_i が実現し，その値がエージェント i の私的情報となる。
4. プリンシパルは，仕事を受け入れたエージェント i に対し，割り当てた仕事 $a(i)$ を行う上での報酬契約 $g_{ia(i)}: R_+\to R_+$ を提示する。
5. エージェント i は，契約 $g_{ia(i)}: R_+\to R_+$ を受け入れるか拒否するかを選択する。拒否すれば，プリンシパルとエージェント i との関係はここでうち切られ，プリンシパルは仕事 $a(i)$ からの収益の機会を失い，エージェント i は利得ゼロを受け取る。
6. 契約 $g_{ia(i)}: R_+\to R_+$ を受け入れたエージェント i は，自ら努力水準 e_i を選んで割り当てられた仕事 $a(i)$ を行う。その時，エージェント i は $\theta_i e_i$ の努力費用を負担する。
7. 仕事 $a(i)$ の収益 $y_{a(i)}=f_{a(i)}(e_i)$ が実現し，契約 $g_{ia(i)}: R_+\to R_+$ に従って，報酬 $g_{ia(i)}(y_{a(i)})$ がエージェント i に支払われる。

ステップ3から7は，プリンシパルと仕事 $a(i)$ を受け入れたエージェント i との間の，通常の単一エージェントのプリンシパル・エージェント関係に他ならない。それが解かれたとすると，ステップ1からステップ2は，プリンシパル，エージェント1，エージェント2の3人のプレーヤーによる完全情報ゲームとなる。

ここに示したモデルでは，エージェント i に対する報酬設計は，エージェント i が彼への仕事割り当て $a(i)$ を受け入れた後ではじめて提示される。実際の組織を見ると，仕事の割り当て $a(i)$ と，もしその割り当てを受け入れたなら適用される報酬契約 $g_{ia(i)}: R_+ \to R_+$ が同時にステップ1で提示される，ということがある。この代替的生起順で物事が起きる場合でも，エージェント i が実際に仕事 $a(i)$ をする段階であらためて仕事それ自体を拒否できるならば，本稿の分析結果は全く同じように妥当する。仕事を実行する段階で仕事を拒否する可能性は，実際の組織で見られる。たとえばエージェントの利得が負になることが高い確率でエージェントの健康被害をもたらすことを意味し，θ_i は一貫してエージェント i の私的情報であるにもかかわらず，健康被害の発生は裁判所によって確認可能で，その際にはエージェントがプリンシパルに多額の損害賠償を請求できるとすれば，エージェントが仕事を拒否することは可能であり，また実際にそうなるであろう。

我々の関心は，ステップ1におけるプリンシパルの仕事割り当てが，この組織のパラメーターにどの様に依存して決まるか，という問題である。組織のパラメーターのうち，次の2つの関係に焦点を当てる。

想定1　仕事に収益性の違いがある。仕事1は仕事2よりも収益性が高い，すなわち $\alpha_1 > \alpha_2$。

想定2　エージェント間で，潜在的な仕事遂行能力に違いがある。エージェント1はエージェント2よりも潜在的な仕事遂行能力が高い，すなわち $p_1 > p_2$。

そして，プリンシパルの最適な仕事割り当てが，$p_1 > p_2$ の意味で潜在的な仕事遂行能力が高いエージェント1を $\alpha_1 > \alpha_2$ の意味で収益性の高い仕事1に割り当てるということになるのか否か，を問うのである。

$\alpha_1 > \alpha_2$ による仕事の収益性の高低という概念は，生産関数 $y_1 = f_1(e)$ が生産関数 $y_2 = f_2(e)$ よりも次の2重の意味で高い収益性を持つということに注意しよう。すなわち，第1に，すべての $e \in R_+$ について，$f_1(e) > f_2(e)$ つまり仕事1の方が仕事2より収益が多い。第2に，すべての $e \in R_+$ について，$f'_1(e) > f'_2(e)$ つまり仕事1の方が仕事2より限界収益性が高い。

同様に，$p_1 > p_2$ によるエージェントの潜在的な仕事遂行能力の高低という概念は，エージェントのコスト係数に関する強い確率順序を意味することに注意しよう。すなわち，確率変数 θ_1 は確率変数 θ_2 に対し，第1次確率順序（first order stochastic ordering）の意味で優れているだけでなく，より強い尤度比順序（likelihood ratio ordering）の意味で優れ

ている。

3　事前の最適な仕事割り当て

ステップ１から７で与えられるゲームで結果的にプリンシパルが選択する仕事の割り当てを，直接求める。

まず，すでに述べたように，ステップ３から７は，プリンシパルと仕事を受け入れたエージェントとの間の，通常の単一エージェントのプリンシパル・エージェント関係に他ならない。その結果を予測する方法は良く知られている。今，エージェント i に仕事 j が割り当てられ，エージェント i がその割り当てを受け入れてステップ３に至ったとせよ。ならば，顕示原理（Revelation Principle）により，一般性を失うことなく，プリンシパルがエージェント i を割り当てた仕事 j から得ることのできる期待利得の最大値は，プリンシパルが設計する契約 $g_{ij}: R_+ \to R_+$ を次のクラスに限って達成できる期待利得の最大値に等しい（Dasguputa, P., P. Hammond, and E. Maskin (1979), R. Myerson (1979)）。すなわち，エージェント i のコスト係数が $\underline{\theta}$ の時に選択すべき努力水準 $e_{ij}(\underline{\theta})$ とその努力水準の下であがるべき収益 $f_j(e_{ij}(\underline{\theta}))$ に対する報酬額 $w_{ij}(\underline{\theta})$ のペアーと，エージェント i のコスト係数が $\overline{\theta}$ の時に選択すべき努力水準 $e_{ij}(\overline{\theta})$ とその努力水準の下であがるべき収益 $f_j(e_{ij}(\overline{\theta}))$ に対する報酬額 $w_{ij}(\overline{\theta})$ のペアーとの組 $(\boldsymbol{e}_{ij}, \boldsymbol{w}_{ij}) = ((e_{ij}(\underline{\theta}), w_{ij}(\underline{\theta})), (e_{ij}(\overline{\theta}), w_{ij}(\overline{\theta})))$ で，次の条件を満たすものである。

IC 条件　エージェント i のコスト係数が θ_i の時，θ_i に対応する努力水準 $e_{ij}(\theta_i)$ を選んで報酬 $w_{ij}(\theta_i)$ を受け取ることを，$\theta'_i \neq \theta_i$ に対応する努力水準 $e_{ij}(\theta'_i)$ を選んで報酬 $w_{ij}(\theta'_i)$ を受け取るよりも強くあるいは少なくとも同程度に望む。

IR 条件　エージェント i のコスト係数が θ_i の時，θ_i に対応する努力水準 $e_{ij}(\theta_i)$ を選んで報酬 $w_{ij}(\theta_i)$ を受け取ることを，契約を拒否するよりも強くあるいは少なくとも同程度に望む。

ここに，$(\boldsymbol{e}_{ij}, \boldsymbol{w}_{ij})$ を直接メカニズムと言う。直接メカニズムは，IC 条件と IR 条件を満たすとき実行可能であると言う。プリンシパルがエージェント i に割り当てた仕事 j から得ることのできる期待利得の最大値は，実行可能なメカニズムの下で，エージェント i のコスト係数が θ_i の時，現に θ_i に対応する努力水準 $e_{ij}(\theta_i)$ を選んで報酬 $w_{ij}(\theta_i)$ が払われる場合に実現できる期待利得の最大値に等しい。

顕示原理によって保証されるこの事実を明示的に書き下すと，プリンシパルがエージェント i に割り当てた仕事 j から得ることのできる期待利得の最大値は，次の最大化問題の最大値である。

$$[\mathrm{P}_1]\quad \max_{(e_{ij}(\underline{\theta}),\, w_{ij}(\underline{\theta})),\,(e_{ij}(\bar{\theta}),\, w_{ij}(\bar{\theta}))} \; p_i\left(\alpha_j\sqrt{e_{ij}(\underline{\theta})}-w_{ij}(\underline{\theta})\right)+(1-p_i)\left(\alpha_j\sqrt{e_{ij}(\bar{\theta})}-w_{ij}(\bar{\theta})\right)$$

$$\text{subject to}\quad w_{ij}(\underline{\theta})-\underline{\theta}e_{ij}(\underline{\theta})\geq w_{ij}(\bar{\theta})-\underline{\theta}e_{ij}(\bar{\theta})$$
$$w_{ij}(\bar{\theta})-\bar{\theta}e_{ij}(\bar{\theta})\geq w_{ij}(\underline{\theta})-\bar{\theta}e_{ij}(\underline{\theta})$$
$$w_{ij}(\underline{\theta})-\underline{\theta}e_{ij}(\underline{\theta})\geq 0$$
$$w_{ij}(\bar{\theta})-\bar{\theta}e_{ij}(\bar{\theta})\geq 0$$

この最大化問題の解，つまり最適直接メカニズムを $(e^*_{ij},\ w^*_{ij})=((e^*_{ij}(\underline{\theta}),\ w^*_{ij}(\underline{\theta})),\ (e^*_{ij}(\bar{\theta}),\ w^*_{ij}(\bar{\theta})))$ と書く。それは，次のように求められることが知られている（この分析は，そのまま Laffont and Martimort (2002) の第 2 章にある）。まず，直接最適メカニズムは，問題［P_1］の 4 つの制約条件のうち，$\underline{\theta}$ の IC 条件と $\bar{\theta}$ の IR 条件を等式

$$w^*_{ij}(\underline{\theta})-\underline{\theta}e^*_{ij}(\underline{\theta})=w^*_{ij}(\bar{\theta})-\underline{\theta}e^*_{ij}(\bar{\theta}),\quad w^*_{ij}(\bar{\theta})-\bar{\theta}e^*_{ij}(\bar{\theta})=0 \qquad (1)$$

で満たし，残りの $\bar{\theta}$ の IC 条件と $\underline{\theta}$ の IR 条件は厳密な不等式で満たす。問題［P_1］から厳密な不等式で成り立つ制約条件を削除し，(1)の 2 つの等式制約によって目的関数から $w_{ij}(\underline{\theta})$，$w_{ij}(\bar{\theta})$ を消去すると，問題［P_1］は次の最大化問題によって $e_{ij}(\underline{\theta})$，$e_{ij}(\bar{\theta})$ を決める問題に帰着される。ここに，$\Delta\theta=\bar{\theta}-\underline{\theta}$ と記した。

$$[\mathrm{P}_2]\quad \max_{e_{ij}(\underline{\theta}),\, e_{ij}(\bar{\theta})} \; p_i\left(\alpha_j\sqrt{e_{ij}(\underline{\theta})}-\underline{\theta}e_{ij}(\underline{\theta})\right)+(1-p_i)\left(\alpha_j\sqrt{e_{ij}(\bar{\theta})}-\left(\bar{\theta}+\frac{p_i}{1-p_i}\Delta\theta\right)e_{ij}(\bar{\theta})\right)$$

これを解くと，最適直接メカニズムが指定する努力水準が，次のように明示的に計算される。

$$e^*_{ij}(\underline{\theta})=\left(\frac{\alpha_j}{2\underline{\theta}}\right)^2,\quad e^*_{ij}(\bar{\theta})=\left(\frac{\alpha_j}{2\left(\bar{\theta}+\frac{p_i}{1-p_i}\Delta\theta\right)}\right)^2$$

最適直接メカニズムが指定する報酬水準は，これを先の等式条件(1)に代入して，次のように明示的に計算される。

$$w^*_{ij}(\underline{\theta})=\underline{\theta}\left(\frac{\alpha_j}{2\underline{\theta}}\right)^2+\Delta\theta\left(\frac{\alpha_j}{2\left(\bar{\theta}+\frac{p_i}{1-p_i}\Delta\theta\right)}\right)^2,\quad w^*_{ij}(\bar{\theta})=\bar{\theta}\left(\frac{\alpha_j}{2\left(\bar{\theta}+\frac{p_i}{1-p_i}\Delta\theta\right)}\right)^2$$

そして，エージェント i を仕事 j に割り当てるときの（実行可能か否かを問わない）直接メカニズムの集合上で定義される関数

$$V_{ij}(e_{ij},\, w_{ij})=p_i\left(\alpha_j\sqrt{e_{ij}(\underline{\theta})}-w_{ij}(\underline{\theta})\right)+(1-p_i)\left(\alpha_j\sqrt{e_{ij}(\bar{\theta})}-w_{ij}(\bar{\theta})\right)$$

を考えると，プリンシパルがエージェント i に割り当てた仕事 j から得ることのできる期待利得の最大値は，次式で与えられることがわかる。

$$V_{ij}(e_{ij}^*, w_{ij}^*) = p_i \underline{\theta}\left(\frac{\alpha_j}{2\underline{\theta}}\right)^2 + (1-p_i)\left(\bar{\theta} + \frac{p_i}{1-p_i}\Delta\theta\right)\left(\frac{\alpha_j}{2\left(\bar{\theta} + \frac{p_i}{1-p_i}\Delta\theta\right)}\right)^2$$

エージェント i が仕事 j を割り当てられたとき，ステップ３でプリンシパルが彼に提示する契約から期待できる利得 $p_i(w_{ij}^*(\underline{\theta}) - \underline{\theta} e_{ij}^*(\underline{\theta})) + (1-p_i)(w_{ij}^*(\bar{\theta}) - \bar{\theta} e_{ij}^*(\bar{\theta}))$ は，IR 条件より非負である。よってステップ２でエージェント i は必ず割り当てを受け入れる。ゆえに，プリンシパルがステップ１で仕事割り当て a を選択することから期待できる利得は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & V_{1a(1)}(e_{1a(1)}^*, w_{1a(1)}^*) + V_{2a(2)}(e_{2a(2)}^*, w_{2a(2)}^*) \\ &= \left\{p_1 \underline{\theta}\left(\frac{\alpha_{a(1)}}{2\underline{\theta}}\right)^2 + (1-p_1)\left(\bar{\theta} + \frac{p_1}{1-p_1}\Delta\theta\right)\left(\frac{\alpha_{a(1)}}{2\left(\bar{\theta} + \frac{p_1}{1-p_1}\Delta\theta\right)}\right)^2\right\} \\ &\quad + \left\{p_2 \underline{\theta}\left(\frac{\alpha_{a(2)}}{2\underline{\theta}}\right)^2 + (1-p_2)\left(\bar{\theta} + \frac{p_2}{1-p_2}\Delta\theta\right)\left(\frac{\alpha_{a(2)}}{2\left(\bar{\theta} + \frac{p_2}{1-p_2}\Delta\theta\right)}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

この値を，代替的な仕事割り当て a' と a'' とで比較する。ならば次の結論を得る。

命題１　$\alpha_1 > \alpha_2$ かつ $p_1 > p_2$ の時，プリンシパルがステップ１で選択する仕事割り当ては a' である。すなわち，事前の最適な仕事割り当ては，潜在的な仕事遂行能力が相対的に高いエージェントを，収益性が相対的に高い仕事に割り当てることである。

(証明)　プリンシパルが仕事割り当て a' から期待できる利得と，仕事割り当て a'' から期待できる利得の差は，それを直接計算すると，

$$\begin{aligned} & [V_{11}(e_{11}^*, w_{11}^*) + V_{22}(e_{22}^*, w_{22}^*)] - [V_{12}(e_{12}^*, w_{12}^*) + V_{21}(e_{21}^*, w_{21}^*)] \\ &= (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(p_1 - p_2)\frac{(\Delta\theta)^2}{4\underline{\theta}(\bar{\theta} - p_1\underline{\theta})(\bar{\theta} - p_2\underline{\theta})} \end{aligned}$$

$\underline{\theta} < \bar{\theta}$, $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < 1$ より，これは $\alpha_1 > \alpha_2$ かつ $p_1 > p_2$ の時正である。(証明終)

4　分析の準備：希少資源としての仕事と仕事遂行能力

命題１で確かめられた結論は直接計算の結果である。この結論が得られるのはなぜか，をどうしたらうまく説明できるだろうか。

プリンシパルがステップ１で解いている問題は，資源配分問題である。プリンシパルにとって利用可能な資源に希少性がなければ，資源配分の問題はトリビアルな問題，すなわちどのような資源利用であっても構わないという結果になるはずである。従って，命題１は，事前の仕事割り当ての問題には資源の希少性があるということを示唆している。命題１の結論がなぜ得られるかを説明するには，その希少性とは何かをハッキリさせておく必要がある。

プリンシパルが資源の希少性に直面しているとして，その希少性ということに2種類の区別されるべき希少性がある。第1は，純粋に技術上の希少性である。プリンシパルがもつ仕事は2つしかなく，それらの収益性はパラメーター α_1, α_2 で与えられるものである。それが，今想定しているように $\alpha_1>\alpha_2$ なら，仕事1は仕事2では実現できない収益性を持つ仕事という意味で希少である。同じく，プリンシパルが仕事を頼めるエージェントは2人しかなく，それらの潜在的な仕事遂行能力はパラメーター p_1, p_2 で与えられるものである。それが，今想定しているように $p_1>p_2$ なら，エージェント1はエージェント2では期待できない潜在的な仕事遂行能力を持つという意味で希少である。

第2は，制度に由来する希少性である。プリンシパルは，プリンシパル・エージェント関係を通じて仕事を割り当て，エージェントが実際に努力水準を選んで仕事をする，という制度の下で仕事からあがる収益を実現している。あるエージェントにある潜在的仕事遂行能力があったとして，それを実際に活用する上でプリンシパルは情報コストを負担しなければならない。そのコストが低いエージェントの仕事遂行能力は，情報コストが高いエージェントのそれに較べて希少である。

プリンシパルが直面している資源の2種類の希少性のうち，第1の技術上の希少性の性質を明らかにする。それは，問題にしている組織の効率性を調べれば分かる。この組織で，エージェント1とエージェント2のコスト係数がそれぞれ θ_1, θ_2 で，仕事割り当て a が行われ，エージェント1とエージェント2はそれぞれ e_1, e_2 の努力水準で仕事をし，エージェント1とエージェント2にそれぞれ w_1, w_2 の報酬が支払われたとせよ。この時のプリンシパル，エージェント1，エージェント2の利得は，それぞれ $(\alpha_{a(1)}\sqrt{e_1}-w_1)+(\alpha_{a(2)}\sqrt{e_2}-w_2)$, $w_1-\theta_1 e_1$, $w_2-\theta_2 e_2$ となる。この利得の合計

$$(\alpha_{a(1)}\sqrt{e_1}-\theta_1 e_1)+(\alpha_{a(2)}\sqrt{e_2}-\theta_2 e_2)$$

を組織の事後的効率性と呼ぶ。この式で，θ_1, θ_2 は組織にとってのパラメーターであり，a, e_1, e_2 が組織にとっての選択変数である。

今仕事の割り当て a が与えられたものとして，パラメーター θ_1, θ_2 の下で，組織の事後的効率性を最大にする選択変数 e_1, e_2 を求める問題を考える。それは，コスト係数 θ_i のエージェント i に仕事 j が割り当てられたとしたときの問題

$$[\mathbf{P}_3]\quad \max_{e_i}\quad \alpha_j\sqrt{e_i}-\theta_i e_i$$

を個別に解くことで答えられる。この問題の解を $\hat{e}_{ij}(\theta_i)$ と書いて，事後的に効率的な努力水準と呼ぶ。ここに，この解は，仕事 j に関する問題であることと，仕事 j に割り当てられているエージェントのコスト係数が θ_i であるということだけに依存し，エージェント i の仕事遂行能力の潜在的高さを示すパラメーター p_i によらないことに注意しよう。実際，この値を具

体的に計算すると

$$\hat{e}_{ij}(\theta_i)=\left(\frac{\alpha_j}{2\theta_i}\right)^2$$

であるから

$$\hat{e}_{11}(\underline{\theta})=\hat{e}_{21}(\underline{\theta}),\ \hat{e}_{11}(\bar{\theta})=\hat{e}_{21}(\bar{\theta}),\ \hat{e}_{12}(\underline{\theta})=\hat{e}_{22}(\underline{\theta}),\ \hat{e}_{12}(\bar{\theta})=\hat{e}_{22}(\bar{\theta}) \tag{2}$$

である。仕事の割り当て a が与えられたものとして，パラメーター θ_1，θ_2 の下で，事後的に効率的な努力水準 $\hat{e}_{1a(1)}(\theta_1)$，$\hat{e}_{2a(2)}(\theta_2)$ が行われることによって実現される組織の事後的効率性を，仕事の割り当て a の事後的効率性と言って，$W_a(\theta_1, \theta_2)$ と書くことにする。それは次式で表わされる。

$$\begin{aligned} W_a(\theta_1, \theta_2)&=\left(\alpha_{a(1)}\sqrt{\hat{e}_{1a(1)}(\theta_1)}-\theta_1\hat{e}_{1a(1)}(\theta_1)\right)+\left(\alpha_{a(2)}\sqrt{\hat{e}_{2a(2)}(\theta_2)}-\theta_2\hat{e}_{2a(2)}(\theta_2)\right)\\ &=\theta_1\left(\frac{\alpha_{a(1)}}{2\theta_1}\right)^2+\theta_2\left(\frac{\alpha_{a(2)}}{2\theta_2}\right)^2 \end{aligned}$$

パラメーター θ_1，θ_2 が実現する前に仕事割り当て a を選択し，パラメーター θ_1，θ_2 が実現した後にその仕事割り当てが動かせないものとした事後的に効率的な努力水準 $\hat{e}_{1a(1)}(\theta_1)$，$\hat{e}_{2a(2)}(\theta_2)$ が行われることによって実現される組織の事後的効率性の期待値を，事前の仕事割り当て a の効率性と言うことにする。それは次式で表わされる。

$$\begin{aligned} E[W_a(\theta_1, \theta_2)]&=\left\{p_1\left(\alpha_{a(1)}\sqrt{\hat{e}_{1a(1)}(\underline{\theta})}-\underline{\theta}\hat{e}_{1a(1)}(\underline{\theta})\right)+(1-p_1)\left(\alpha_{a(1)}\sqrt{\hat{e}_{1a(1)}(\bar{\theta})}-\bar{\theta}\hat{e}_{1a(1)}(\bar{\theta})\right)\right\}\\ &\quad+\left\{p_2\left(\alpha_{a(2)}\sqrt{\hat{e}_{2a(2)}(\underline{\theta})}-\underline{\theta}\hat{e}_{2a(2)}(\underline{\theta})\right)+(1-p_2)\left(\alpha_{a(2)}\sqrt{\hat{e}_{2a(2)}(\bar{\theta})}-\bar{\theta}\hat{e}_{2a(2)}(\bar{\theta})\right)\right\}\\ &=\left\{p_1\underline{\theta}\left(\frac{\alpha_{a(1)}}{2\underline{\theta}}\right)^2+(1-p_1)\bar{\theta}\left(\frac{\alpha_{a(1)}}{2\bar{\theta}}\right)^2\right\}+\left\{p_2\underline{\theta}\left(\frac{\alpha_{a(2)}}{2\underline{\theta}}\right)^2+(1-p_2)\bar{\theta}\left(\frac{\alpha_{a(2)}}{2\bar{\theta}}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

事前の仕事割り当てのうちその効率性を最大にする仕事割り当てを見いだす問題

$$[\mathbf{P}_4]\quad \max_a \quad E[W_a(\theta_1, \theta_2)]$$

の解は，この組織が持つ資源の技術上の希少性だけで決まってくる。そして，その解は次のようになる。

命題２　1．この組織に資源の技術上の希少性の問題が起こるのは，つまり

$$E[W_{a'}(\theta_1, \theta_2)]\neq E[W_{a''}(\theta_1, \theta_2)]$$

となるのは，$\alpha_1\neq\alpha_2$ かつ $p_1\neq p_2$ の時であり，かつその時に限る。

2．$\alpha_1>\alpha_2$ かつ $p_1>p_2$ の時，事前の仕事割り当ての効率性は，a' の方が a'' よりも高い。すなわち，事後的に効率的な努力水準が行われることによって実現される組織の事後的効率性の期待値は，潜在的な仕事遂行能力が相対的に高いエージェントを，収益性が相対的に高い仕事に割り当てることによって最大化される。

(証明)　事前の仕事割り当て a' の効率性と事前の仕事割り当て a'' の効率性の差を直接計算すると

$$E[W_{a'}(\theta_1,\theta_2)]-E[W_{a''}(\theta_1,\theta_2)]=\frac{1}{4}(p_1-p_2)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\left(\frac{1}{\underline{\theta}}-\frac{1}{\overline{\theta}}\right)$$

$\underline{\theta}<\overline{\theta}$ より，主張が従う。(証明終)

命題2によって，想定1と想定2の2つの想定があることでこの組織には資源の技術上の希少性が生じる，ということが分かる。さらに，命題2を命題1と比較すると，プリンシパルにとっての資源の希少性は技術上の希少性と制度に由来する希少性の合計であるが，そのうち資源の希少性が基本的な希少性である，ということが分かる。

想定1と想定2の下でこの組織が直面する資源の技術上の希少性は，どのように生じているのだろうか。それを見るために，パラメーター θ_1，θ_2 の下で選択変数 a, e_1，e_2 のすべてが選択できるときの最適な a を求める問題，つまりパラメーター θ_1，θ_2 の下で組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当ての問題

$$[\mathbf{P}_5(\theta_1,\theta_2)]\quad \max_a \quad W_a(\theta_1,\theta_2)$$

を考察しよう。パラメーター θ_1，θ_2 がとりうる4通りの可能性の各々に対応して，組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当ての問題が考えられる。このうち，$\theta_1=\theta_2$ の場合は，明らかに a'，a'' の両方が最適解である。つまり，組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当ての問題にとって，資源の希少性は $\theta_1\neq\theta_2$ の場合に問題となる。そして，組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当ての問題の解と事前の仕事割り当てのうちその効率性を最大にする仕事割り当ての問題の解に関して，次の対応関係が成り立つ。

補題1　$p_1>p_2$ とせよ。ならば，問題 $[\mathrm{P}_4]$ の解が a' である為の必要十分条件は，問題 $[\mathrm{P}_5(\underline{\theta},\overline{\theta})]$ の解が a' であることである。すなわち，事前の仕事割り当てのうちその効率性を最大にする仕事割り当てが a' である為の必要十分条件は，$\theta_1=\underline{\theta}$, $\theta_2=\overline{\theta}$ の場合に組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当てが a' であることである。

(証明)　事前の仕事割り当て a' の効率性と事前の仕事割り当て a'' の効率性との差をとって整理すると，次のようになる。

$$\begin{aligned}
&E[W_{a'}(\theta_1,\theta_2)]-E[W_{a''}(\theta_1,\theta_2)]\\
=&\Big\{\Big(p_1(\alpha_1\sqrt{\hat{e}_{11}(\underline{\theta})}-\underline{\theta}\hat{e}_{11}(\underline{\theta}))+(1-p_1)(\alpha_1\sqrt{\hat{e}_{11}(\overline{\theta})}-\overline{\theta}\hat{e}_{11}(\overline{\theta}))\Big)\\
&+\Big(p_2(\alpha_2\sqrt{\hat{e}_{22}(\underline{\theta})}-\underline{\theta}\hat{e}_{22}(\underline{\theta}))+(1-p_2)(\alpha_2\sqrt{\hat{e}_{22}(\overline{\theta})}-\overline{\theta}\hat{e}_{22}(\overline{\theta}))\Big)\Big\}\\
&-\Big\{\Big(p_1(\alpha_2\sqrt{\hat{e}_{12}(\underline{\theta})}-\underline{\theta}\hat{e}_{12}(\underline{\theta}))+(1-p_1)(\alpha_2\sqrt{\hat{e}_{12}(\overline{\theta})}-\overline{\theta}\hat{e}_{12}(\overline{\theta}))\Big)\\
&+\Big(p_2(\alpha_1\sqrt{\hat{e}_{21}(\underline{\theta})}-\underline{\theta}\hat{e}_{21}(\underline{\theta}))+(1-p_2)(\alpha_1\sqrt{\hat{e}_{21}(\overline{\theta})}-\overline{\theta}\hat{e}_{21}(\overline{\theta}))\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

$$=(p_1-p_2)\left\{\left((\alpha_1\sqrt{\hat{e}_{11}(\underline{\theta})}-\underline{\theta}\hat{e}_{11}(\underline{\theta}))+(\alpha_2\sqrt{\hat{e}_{22}(\overline{\theta})}-\overline{\theta}\hat{e}_{22}(\overline{\theta}))\right)\right.$$
$$\left.-\left((\alpha_1\sqrt{\hat{e}_{21}(\overline{\theta})}-\overline{\theta}\hat{e}_{21}(\overline{\theta}))+(\alpha_2\sqrt{\hat{e}_{12}(\underline{\theta})}-\theta\hat{e}_{12}(\underline{\theta}))\right)\right\}\qquad \text{((2) を用いて消去)}$$
$$=(p_1-p_2)(W_{a'}(\underline{\theta},\overline{\theta})-W_{a''}(\underline{\theta},\overline{\theta}))$$

よって，$p_1>p_2$ の下では，事前の仕事割り当て a' の効率性が事前の仕事割り当て a'' の効率性より大である必要十分条件は $W_{a'}(\underline{\theta},\overline{\theta})-W_{a''}(\underline{\theta},\overline{\theta})>0$，つまり $\theta_1=\underline{\theta}$，$\theta_2=\overline{\theta}$ の場合に組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当てが a' であることである。(証明終)

補題1で示された対応関係は，我々が問題にしている事前の仕事割り当てのうちその効率性を最大にする仕事割り当ての問題と組織における資源の希少性の関係が，組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当ての問題と組織における資源の希少性の関係に同じである，ということを示唆している。したがって，前者の関係が生じる理由は，後者の関係が生じる理由を説明することで説明できる。

組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当ては，どのような意味で資源の希少性を反映しているだろうか。それは，次の事実によって明らかになる。

補題2　$\alpha_1>\alpha_2$ とせよ。ならば，$\theta_1=\underline{\theta}$，$\theta_2=\overline{\theta}$ の場合に組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当ては a' である。

(証明)　直接計算によって，

$$W_{a'}(\underline{\theta},\overline{\theta})-W_{a''}(\underline{\theta},\overline{\theta})$$
$$=\left\{\left((\alpha_1\sqrt{\hat{e}_{11}(\underline{\theta})}-\underline{\theta}\hat{e}_{11}(\underline{\theta}))+(\alpha_2\sqrt{\hat{e}_{22}(\overline{\theta})}-\overline{\theta}\hat{e}_{22}(\overline{\theta}))\right)\right.$$
$$\left.-\left((\alpha_1\sqrt{\hat{e}_{21}(\overline{\theta})}-\overline{\theta}\hat{e}_{21}(\overline{\theta}))+(\alpha_2\sqrt{\hat{e}_{12}(\underline{\theta})}-\theta\hat{e}_{12}(\underline{\theta}))\right)\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{\underline{\theta}}-\frac{1}{\overline{\theta}}\right)\left(\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2\right)$$

$\underline{\theta}<\overline{\theta}$ より，$\alpha_1>\alpha_2$ ならば，この値は正である。(証明終)

補題2が意味するところは，直観的理解がたやすい。$\alpha_1>\alpha_2$ の場合，2人のエージェントの努力コストの合計が同じであるなら，高い方の努力水準を仕事1に向け低い方の努力水準を仕事2に向けることによって組織の収益合計は高まる。これは仕事1が希少な資源であることの結果である。他方，$\theta_1=\underline{\theta}$，$\theta_2=\overline{\theta}$ ということが確定しているとき，同じ努力水準を要求するのであれば，エージェント1に要求する方がエージェント2に要求するよりもコストが低くてすむということが確定している。したがって，一方のエージェントが他方のエージェントより多くの努力をしなければならないのであれば，エージェント1に高い方の努力水準を要求しエージェント2に低い方の努力水準を要求する方が，その逆の要求をするよりも2人の努力コストの合計が少なくてすむ。これは，現に2人のエージェントのコスト係数に違

いがあるとき，コスト係数の低い方のエージェントは希少な資源であることの結果である。こうして，仕事の希少性と事後的な仕事の遂行能力の希少性の合計が，エージェント1を仕事1に割り当てることによって組織の事後的効率性を最大にできるということを導いている。

補題1によって，補題2で明らかとなった資源の技術的な希少性と組織の事後的効率性の関係が，資源の技術的な希少性と事前の仕事割り当ての効率性の関係に移されることが分かっている。したがって，今や，命題2で示された事前の仕事割り当てのうちその効率性を最大にする仕事割り当ては，その割り当てが組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当てになる可能性を最大にする事前の仕事割り当てであり，組織の事後的効率性を最大にする仕事割り当ては仕事の希少性と事後的な仕事の遂行能力の希少性の合計で決まっていることが分かった。

5　分析1：事後的に最適な仕事割り当てとなる可能性に従った割り当て

命題1で示された最適な事前の仕事割り当てがなぜ起きるのかを，事前の仕事割り当ての効率性に関する命題2と同じやり方で説明できるかどうか考えよう。

説明は2つのステップに分けられる。第1は，事前の仕事割り当ての効率性に関する補題1に対応して，事前の仕事割り当ての最適性と事後の仕事割り当ての最適性を関係づけることである。その関係づけは，仕事割り当ての効率性のように完全にはできない。なぜなら，仕事割り当ての効率性を定義する上で，コスト係数の実現値 θ_1，θ_2 ごとに割り当てられた仕事での問題［P_3］の解という意味での最適な努力水準が選ばれると想定したことを思いだそう。その努力水準は，仕事によって決まっており，その仕事にどのエージェントが配置されているかによらない。つまり(2)が成り立つ。これに対して，プリンシパルが選ぶ最適契約の下で選択される努力水準は，エージェントに支払われる情報コストを考慮して設計されているから，仕事とエージェントの双方に依存する。つまり，情報コストを考えずに決定できる努力水準は

$$e^*_{11}(\underline{\theta})=e^*_{21}(\underline{\theta}),\ e^*_{12}(\underline{\theta})=e^*_{22}(\underline{\theta})$$

だが，それを考慮して決定される努力水準は，$p_1\neq p_2$ である限り

$$e^*_{11}(\bar{\theta})\neq e^*_{21}(\bar{\theta}),\ e^*_{12}(\bar{\theta})\neq e^*_{22}(\bar{\theta})$$

である。これを反映して，プリンシパルが選ぶ最適契約の下で支払われる報酬は，すべて仕事とエージェントの双方に依存して

$$w^*_{11}(\underline{\theta})\neq w^*_{21}(\underline{\theta}),\ w^*_{11}(\bar{\theta})\neq w^*_{21}(\bar{\theta}),\ w^*_{12}(\underline{\theta})\neq w^*_{22}(\underline{\theta}),\ w^*_{12}(\bar{\theta})\neq w^*_{22}(\bar{\theta})$$

である。その結果，プリンシパルが仕事割り当て a' から期待できる利得と，仕事割り当て a'' から期待できる利得の差を調べる上で，それを

$$[V_{11}(e_{11}^*, w_{11}^*) + V_{22}(e_{22}^*, w_{22}^*)] - [V_{12}(e_{12}^*, w_{12}^*) + V_{21}(e_{21}^*, w_{21}^*)]$$
$$= \{[V_{11}(e_{11}^*, w_{11}^*) + V_{22}(e_{22}^*, w_{22}^*)] - [V_{11}(e_{21}^*, w_{21}^*) + V_{22}(e_{12}^*, w_{12}^*)]\}$$
$$+ \{[V_{11}(e_{21}^*, w_{21}^*) + V_{22}(e_{12}^*, w_{12}^*)] - [V_{12}(e_{12}^*, w_{12}^*) + V_{21}(e_{21}^*, w_{21}^*)]\}$$

に分解して調べざるを得ない。この第1項は，同じ仕事割り当て a' の下で各エージェントに契約 (e_{11}^*, w_{11}^*)，(e_{22}^*, w_{22}^*) を適用した場合と，異なる契約 (e_{12}^*, w_{12}^*)，(e_{21}^*, w_{21}^*) を適用した場合との，期待利得の差を求めている。第2項は，同じ契約 (e_{12}^*, w_{12}^*)，(e_{21}^*, w_{21}^*) を，仕事割り当て a' と仕事割り当て a'' という異なる仕事割り当てで用いた場合の，期待利得の差を求めている。この分解の結果，プリンシパルが2つの仕事割り当てから期待できる利得の特徴付けは，次のような不完全なものとならざるを得ない。

補題3　契約 (e_{12}^*, w_{12}^*)，(e_{21}^*, w_{21}^*) に対して

$$V_{11}(e_{21}^*, w_{21}^*) + V_{22}(e_{12}^*, w_{12}^*) > V_{12}(e_{12}^*, w_{12}^*) + V_{21}(e_{21}^*, w_{21}^*) \tag{3}$$

が成り立つならば，最適な事前の仕事割り当ては a' であるが，その逆は必ずしも真ではない。

（証明）(e_{11}^*, w_{11}^*) はエージェント1に仕事1を割り当てるときの最適メカニズムであり，(e_{21}^*, w_{21}^*) は実行可能な直接メカニズムだから，$V_{11}(e_{11}^*, w_{11}^*) > V_{11}(e_{21}^*, w_{21}^*)$ である。同様の理由で，$V_{22}(e_{22}^*, w_{22}^*) > V_{22}(e_{12}^*, w_{12}^*)$ である。ゆえに，上で述べた期待利得の差の分解の第1項は

$$[V_{11}(e_{11}^*, w_{11}^*) + V_{22}(e_{22}^*, w_{22}^*)] - [V_{11}(e_{21}^*, w_{21}^*) + V_{22}(e_{12}^*, w_{12}^*)] > 0 \tag{4}$$

である。したがって，第2項がやはり正であれば，期待利得の差は正となるが，その逆は必ずしも真ではない。（証明終）

同じ契約 (e_{12}^*, w_{12}^*)，(e_{21}^*, w_{21}^*) を用いる場合に事前の仕事割り当ての最適性と事後の仕事割り当ての最適性を関係づけることは，補題1と全く同じようにしてできる。したがって，次が成り立つ。

補題4　$p_1 > p_2$ とせよ。このとき，契約 (e_{12}^*, w_{12}^*)，(e_{21}^*, w_{21}^*) に対して補題3の条件(3)が成り立つ為の必要十分条件は，次である。

$$\left(\alpha_1\sqrt{e_{21}^*(\underline{\theta})} - w_{21}^*(\underline{\theta})\right) + \left(\alpha_2\sqrt{e_{12}^*(\overline{\theta})} - w_{12}^*(\overline{\theta})\right)$$
$$> \left(\alpha_1\sqrt{e_{21}^*(\overline{\theta})} - w_{21}^*(\overline{\theta})\right) + \left(\alpha_2\sqrt{e_{12}^*(\underline{\theta})} - w_{12}^*(\underline{\theta})\right) \tag{5}$$

補題3と補題4を合わせると，事前の仕事割り当ての最適性と事後の仕事割り当ての最適性が，次のような十分条件の形で関係づけられることが分かった。すなわち，エージェント1のコスト係数が $\theta_1 = \underline{\theta}$ でエージェント2のコスト係数が $\theta_2 = \overline{\theta}$ だったなら，仕事1に適用される契約が (e_{21}^*, w_{21}^*) で仕事2に適用される契約が (e_{12}^*, w_{12}^*) であるとき，エージェン

ト1に仕事1を，エージェント2に仕事2を割り当てることが最適である，という主張が成り立つとせよ。ならば，$p_1>p_2$ の下では，その最適な状態が起こる可能性が大きくなる事前の仕事割り当てであるエージェント1に仕事1を，エージェント2に仕事2を割り当てることが最適となる。

説明の第2ステップは，今述べた主張，つまり $\alpha_1>\alpha_2$ の下で補題4の条件(5)が満たされるという補題2に対応する主張を確立することである。しかし，この主張は真ではない。正しくは，次が成り立つ。

補題5　補題4の条件(5)が成り立つための必要十分条件は，次である。

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}>\frac{\dfrac{\overline{\theta}}{\underline{\theta}}-p_2}{\dfrac{\overline{\theta}}{\underline{\theta}}-p_1}(>1) \tag{6}$$

(証明)　直接の計算によって，

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\alpha_1\sqrt{e^*_{21}(\underline{\theta})}-w^*_{21}(\underline{\theta})\right)+\left(\alpha_2\sqrt{e^*_{12}(\overline{\theta})}-w^*_{12}(\overline{\theta})\right)\right\}\\&\quad-\left\{\left(\alpha_1\sqrt{e^*_{21}(\overline{\theta})}-w^*_{21}(\overline{\theta})\right)+\left(\alpha_2\sqrt{e^*_{12}(\underline{\theta})}-w^*_{12}(\underline{\theta})\right)\right\}\\&=\frac{(\Delta\theta)^2}{4\underline{\theta}}\left[\left(\frac{\dfrac{\alpha_1}{1-p_2}}{\overline{\theta}+\dfrac{p_2}{1-p_2}\Delta\theta}\right)^2-\left(\frac{\dfrac{\alpha_2}{1-p_1}}{\overline{\theta}+\dfrac{p_1}{1-p_1}\Delta\theta}\right)^2\right]\end{aligned}$$

である。よって，条件(5)が成り立つための必要十分条件は

$$\left(\frac{\dfrac{\alpha_1}{1-p_2}}{\overline{\theta}+\dfrac{p_2}{1-p_2}\Delta\theta}\right)^2>\left(\frac{\dfrac{\alpha_2}{1-p_1}}{\overline{\theta}+\dfrac{p_1}{1-p_1}\Delta\theta}\right)^2$$

これを整理すると条件(6)になる。(証明終)

したがって，補題4の条件(5)が満たされるためには，単に仕事1が仕事2よりも収益性が高いということ，つまり $\alpha_1>\alpha_2$ ということでは不十分であり，仕事1が仕事2よりも収益性が補題5に言う条件(6)を満たすほど十分高いということがなければならない。その場合にだけ，エージェントのコスト係数が現に $\theta_1=\underline{\theta}$, $\theta_2=\overline{\theta}$ であるとき，仕事遂行能力がより高いエージェント1に仕事1を割り当てることが事後的に最適となり，その結果として，事前の仕事割り当てにおいても，この事後的に最適な仕事割り当てが起こる可能性がより高くなるエージェント1に仕事1を割り当てるということが最適となる，というやり方で命題1を説

明できることが分かる。

エージェントのコスト係数が現に $\theta_1=\underline{\theta}$, $\theta_2=\overline{\theta}$ であるとき，たとえ仕事１が仕事２よりも収益性が高かったとしても，仕事遂行能力がより高いエージェント１に仕事１を割り当てることが事後的に最適となる訳ではないのはなぜか。それは，仕事割り当ての事後的最適性が，仕事１に適用される契約が（e^*_{21}, w^*_{21}）で仕事２に適用される契約が（e^*_{12}, w^*_{12}）であるという条件の下で検討されねばならないからである。これらの契約は，エージェント２を仕事１に，エージェント１を仕事２に配置するときの最適契約である。それは，エージェント１を仕事１に，エージェント２を仕事２に配置するときには最適ではない。そのことに起因するロスが大きければ，エージェント１を仕事１に，エージェント２を仕事２に配置することは事後的に最適な配置ではなくなるのである。

このロスの大きさは，先の利得の差の分解式の第１項である(４)で測られる。それは，情報コストの誤った考慮によるロスに他ならない。エージェント１に関するロス $V_{11}(e^*_{11}, w^*_{11})-V_{11}(e^*_{21}, w^*_{21})>0$ は，契約（e^*_{21}, w^*_{21}）が情報コストを過小に想定した契約であることに由来するロスである。具体的に言うと，それは３つの要因からなっている。第１に，エージェント１に仕事１を割り当てているとき，コスト係数が $\theta_1=\overline{\theta}$ の時に要求する努力水準は，本来 $\theta_1=\underline{\theta}$ の可能性を p_1 とした時の情報レントを考慮した値 $e^*_{11}(\overline{\theta})=\left(\dfrac{\alpha_1}{2\left(\overline{\theta}+\dfrac{p_1}{1-p_1}\Delta\theta\right)}\right)^2$ であるべきところ，個人２が仕事１に割り当てられた時の契約を用いているためにパラメーター p_2 に対応した水準 $e^*_{21}(\overline{\theta})=\left(\dfrac{\alpha_1}{2\left(\overline{\theta}+\dfrac{p_2}{1-p_2}\Delta\theta\right)}\right)^2$ となっている。その結果，$e^*_{11}(\overline{\theta})<e^*_{21}(\overline{\theta})$ つまりエージェント１に対して仕事量を過剰に設定してしまっている。第２に，その結果，仕事１を割り当てている下でコスト係数が $\theta_1=\overline{\theta}$ の時にエージェント１に支払われる報酬は，

$$w^*_{21}(\overline{\theta})-w^*_{11}(\overline{\theta})=\overline{\theta}e^*_{21}(\overline{\theta})-\overline{\theta}e^*_{11}(\overline{\theta})=\overline{\theta}(e^*_{21}(\overline{\theta})-e^*_{11}(\overline{\theta}))>0$$

の分だけ払いすぎている。第３に，同時に，仕事１を割り当てている下でコスト係数が $\theta_1=\underline{\theta}$ の時にエージェント１に支払われる報酬も，情報レントの過剰分

$$w^*_{21}(\underline{\theta})-w^*_{11}(\underline{\theta})=(\underline{\theta}e^*_{21}(\underline{\theta})+\Delta\theta e^*_{21}(\overline{\theta}))-(\underline{\theta}e^*_{11}(\underline{\theta})+\Delta\theta e^*_{11}(\overline{\theta}))=\Delta\theta(e^*_{21}(\overline{\theta})-e^*_{11}(\overline{\theta}))>0$$

だけ払いすぎている。逆に，エージェント２に関するロス $V_{22}(e^*_{22}, w^*_{22})-V_{22}(e^*_{12}, w^*_{12})>0$ は，契約（e^*_{12}, w^*_{12}）が情報コストを過大に想定した契約であることに由来するロスである。

6 分析２：仕事に関する比較優位に従った割り当て

補題５によって，命題１を説明するのに，事前の仕事割り当ての最適性を事後の仕事割り当ての最適性に帰着させて説明することは，仕事１の収益性と仕事２の収益性が大きく異な

るときには可能だが，収益性の差が小さい場合にはできないことが分かった。

そこで，命題1を説明するのに，事前の仕事割り当ての最適性を直接分析する代替的方法を論じよう。その為に，プリンシパルが仕事割り当て a' から期待できる利得と，仕事割り当て a'' から期待できる利得の差を，前節とは異なるやり方で次のように整理する。

$$[V_{11}(\boldsymbol{e}^*_{11}, \boldsymbol{w}^*_{11}) + V_{22}(\boldsymbol{e}^*_{22}, \boldsymbol{w}^*_{22})] - [V_{12}(\boldsymbol{e}^*_{12}, \boldsymbol{w}^*_{12}) + V_{21}(\boldsymbol{e}^*_{21}, \boldsymbol{w}^*_{21})]$$
$$= [V_{11}(\boldsymbol{e}^*_{11}, \boldsymbol{w}^*_{11}) - V_{21}(\boldsymbol{e}^*_{21}, \boldsymbol{w}^*_{21})] - [V_{12}(\boldsymbol{e}^*_{12}, \boldsymbol{w}^*_{12}) - V_{22}(\boldsymbol{e}^*_{22}, \boldsymbol{w}^*_{22})]$$

この第1項は，仕事1に関するエージェント1のエージェント2に対する，各エージェントにとっての最適契約が用いられると想定したときの，事前の優位性を測っている。第2項は，仕事2に関するエージェント1のエージェント2に対する事前の優位性を同様に測っている。この事前の優位性の仕事間の比較をして，

$$V_{11}(\boldsymbol{e}^*_{11}, \boldsymbol{w}^*_{11}) - V_{21}(\boldsymbol{e}^*_{21}, \boldsymbol{w}^*_{21}) > V_{12}(\boldsymbol{e}^*_{12}, \boldsymbol{w}^*_{12}) - V_{22}(\boldsymbol{e}^*_{22}, \boldsymbol{w}^*_{22}) \tag{7}$$

を示せば，命題1が成り立つのは，エージェント1がエージェント2に対して，仕事1に事前の比較優位を持つからである，と説明できる。

まず，各エージェントにとっての最適契約が用いられると想定すれば，同じ仕事に対して，たとえ情報レントの問題があったとしてもエージェント1は必ずエージェント2よりも絶対優位性がある，ということを示すことができる。

補題6　$j=1, 2$ のいずれの仕事についても，

$$V_{1j}(\boldsymbol{e}^*_{1j}, \boldsymbol{w}^*_{1j}) - V_{2j}(\boldsymbol{e}^*_{2j}, \boldsymbol{w}^*_{2j}) = \frac{\alpha_j^2}{4}\frac{(p_1-p_2)(\Delta\theta)^2}{\underline{\theta}(\bar{\theta}-p_1\underline{\theta})(\bar{\theta}-p_2\underline{\theta})}$$

である。したがって，$p_1>p_2$ のとき，この値は必ず正である。

(証明)　直接の計算により，補題の式に達する。(証明終)

補題6で得られた評価式によると，エージェント1のエージェント2に対する仕事ごとの絶対優位性の程度は，仕事の収益性のパラメーター α_j に乗法分離的に依存している。そのことから，仕事に関する比較優位が次のように導かれる。

命題3　$\alpha_1>\alpha_2$，$p_1>p_2$ とせよ。ならば，(7)が成り立つ。すなわち，エージェント1はエージェント2に対して，仕事1に事前の比較優位を持つ。

(証明)　補題6で得られた評価式により

$$[V_{11}(\boldsymbol{e}^*_{11}, \boldsymbol{w}^*_{11}) - V_{21}(\boldsymbol{e}^*_{21}, \boldsymbol{w}^*_{21})] - [V_{12}(\boldsymbol{e}^*_{12}, \boldsymbol{w}^*_{12}) - V_{22}(\boldsymbol{e}^*_{22}, \boldsymbol{w}^*_{22})]$$
$$= \left[\frac{\alpha_1^2}{4}\frac{(p_1-p_2)(\Delta\theta)^2}{\underline{\theta}(\bar{\theta}-p_1\underline{\theta})(\bar{\theta}-p_2\underline{\theta})}\right] - \left[\frac{\alpha_2^2}{4}\frac{(p_1-p_2)(\Delta\theta)^2}{\underline{\theta}(\bar{\theta}-p_1\underline{\theta})(\bar{\theta}-p_2\underline{\theta})}\right]$$
$$= (\alpha_1^2-\alpha_2^2)(p_1-p_2)\frac{(\Delta\theta)^2}{4\underline{\theta}(\bar{\theta}-p_1\underline{\theta})(\bar{\theta}-p_2\underline{\theta})}$$

$\underline{\theta}<\overline{\theta}$，$0<p_1<1$，$0<p_2<1$ より，これは$\alpha_1>\alpha_2$，$p_1>p_2$ のとき正値をとる。（証明終）

こうして，命題１は，仕事に関する事前の比較優位に従った割り当てとして説明できることが分かった。

7　結　　論

以上で，組織で人材配置が行われるときに広く観察される「大事な仕事には最もできそうな人をつけよ」という経験則が，プリンシパル，エージェント１，エージェント２からなる組織においてプリンシパルの最適な事前の仕事割り当てとして結果することを証明し，それがなぜ起こるかの代替的な２つの説明を与えた。この結果を示した命題１は，配置すべき人材が２人以上の任意の n 人で，プリンシパルが利用できる仕事が２つ以上の任意の m 個ある場合に直ちに拡張できることは明らかである。すなわち，次が成り立つ。

命題４　$p_i=\mathrm{Prob}(\theta_i=\underline{\theta})$ が $1>p_1>p_2>\cdots\cdots>p_n>0$ である n 人のエージェントを，収益性が $\alpha_1>\alpha_2>\cdots\cdots>\alpha_m$ である m 種類の仕事に割り当てる時の最適な事前の仕事割り当ては，$l=\min[n, m]$ とおくとき，エージェント１を仕事１に割り当て，エージェント２を仕事２に割り当て，……，エージェント l を仕事 l に割り当てることである。

命題４が成立することを説明する２つの原理，事後的に最適な仕事割り当てとなる可能性と仕事に関する比較優位とは，組織における他の様々な資源配分問題にも適用可能であろう。それらの問題を解くことは今後に残された課題である。

参　考　文　献

Dasguputa, P., P. Hammond, and E. Maskin (1979), “The Implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility,” *Review of Economic Studies*, Vol. 46, 185-216.

Fudenberg, D. and J. Tirole (1991), *Game Theory*, MIT Press.

Laffont, J-J. and D. Martimort (2002), *The Theory of Incentives; The Principal-Agent Model*, Princeton University Press.

Lazear, E. (1998), *Personel Economics for Managers*, John Wiley and Sons.（樋口美雄，清家篤訳「人事と組織の経済学」日本経済新聞社，1998年。）

Melumad, N., D. Mookherjee, and S. Reichelstein (1995), “Hierarchical Decentralization of Incentive Contracts,” *Rand Journal of Economics*, Vol. 26, 654-672.

R. Myerson (1979), “Incentive Compatobility and the Bargaining Problem,” *Econometrica*, Vol. 47, 61-73.