



シミュレーションによる疑似最尤法および経験尤度に基づく方法の比較

難波, 明生

(Citation)

国民経済雑誌, 190(3):89-100

(Issue Date)

2004-09

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/00055954>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00055954>



シミュレーションによる疑似最尤法および 経験尤度に基づく方法の比較

難 波 明 生

計量経済学および統計学において最尤法は非常に有益な方法である。しかし、最尤法には分布を仮定しなければならないという非常に大きな制約がある。疑似最尤法は、真の分布が分からない場合に、特定の分布を仮定して検定および推定を行う方法である。これに対し、経験尤度を用いれば、分布を全く仮定することなく、ノンパラメトリックに推定・検定を行うことができる。本稿では、単純なケースを例に取り、これら二つの方法をシミュレーションによって比較する。シミュレーション結果より、ブートストラップ法を用いることにより、経験尤度に基づく方法は大きく改善されるが、疑似最尤法に基づく方法はほとんど改善されないことが示される。さらに、標本が小さい場合には経験尤度に基づく方法の方が良好な結果が得られることが示される。

キーワード 疑似最尤法, 経験尤度, ブートストラップ法, シミュレーション

1 は じ め に

計量経済学および統計学においては、推定・検定を行う場合、最尤法に基づく方法が多く用いられている。これは、最尤推定量が、一致性、漸近正規性、有効性等の非常に有益な性質を持つためである。さらに、最尤法により仮説検定を行う場合には、尤度比検定を容易に用いることができるという利点がある。しかしながら、最尤法に基づく推定および検定を行う場合には、分布を仮定しなければならないという非常に大きな問題点がある。

真の分布が分からない場合に、適当な分布を仮定して推定を行う方法が疑似最尤法である。White (1982), Weiss (1986), Bollerslev and Wooldridge (1992), Lee and Hansen (1994) 等は、多くの場合に疑似最尤法が有効であることを示している。今日、ファイナンスデータを用いる研究をはじめとして、疑似最尤法は多くの実証研究で用いられている。

これに対し、Owen (1988, 1990) によって提案された経験尤度を用いる方法は、モデルの背後にある分布を全く仮定せず、ノンパラメトリックに推定・検定を行う方法である。Owen (1988, 1990) 以降、経験尤度の性質について多くの研究が行われている。例えば、Owen

(1991) は経験尤度を回帰モデルに応用する方法について述べている。Qin and Lawless (1994) および El Barmi (1996) は、さらに一般的な推定・検定の問題に経験尤度が応用可能であることを示している。さらに、Kitamura (1997) は経験尤度を独立でない (weakly dependent な) プロセスに応用する方法を提示し、その有効性を示している。

疑似最尤法も経験尤度に基づく方法も、真の分布が未知である場合でも漸近的に有効である。しかしながら、小標本の場合にどのような性質を持つかはほとんど知られていない。

このように、ある統計量の分布が未知である時に、Efron (1979) によって提案されたブートストラップ法がしばしば有効であることが知られている¹⁾。ブートストラップ法とは、端的に言えば、手元にあるデータを利用した単純な繰り返し計算により、統計量の分布を近似する方法である。ブートストラップ法を疑似最尤法および経験尤度に応用する方法に関して、いくつかの研究が行われている。White (2004) は非線形動学モデルにおける疑似最尤法に対して、ブートストラップ法が有効であることを示している。これに対し、Owen (1988, 2001) は経験尤度比に対してブートストラップ法を応用し、検定統計量の臨界値を求める方法を提案している。また、Hall and Presnell (1999), Brown and Newey (2001) は、経験尤度の最大化によって得られた確率をブートストラップ法において利用することを提案している。さらに、Namba (2004) は、Owen (1988, 2001) によって提案された方法と、Hall and Presnell (1999), Brown and Newey (2001) によって提案された方法の両方に関してのシミュレーション分析を行い、どちらの方法を用いても、検定のサイズが大きく改善されることを示している。

しかし、疑似最尤法によって得られる結果と経験尤度によって得られる結果の比較はこれまで行われていない。

本稿の構成は以下の通りである。第2節および第3節では、それぞれ疑似最尤法と経験尤度の基本的性質を紹介する。第4節では、ブートストラップ法についての簡単な説明を行う。第5節では、そこまでで紹介した方法の特性を調べるために、モンテ・カルロ・シミュレーションを行う。最後に、第5節で結論および今後の研究課題について述べる。

2 疑似最尤法

本節では、疑似最尤法について簡単に説明する。

$X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^d$ を、共通の分布 F_0 から独立に得られた標本であるとする。ここで、 F_0 は未知であり、確率密度関数 $f_0(X; \theta_0)$ を持つとする。ただし θ_0 は未知パラメータのベクトルである。仮に X_i が従う分布が既知であれば、 $f_0(X; \theta)$ が既知となるので、対数尤度関数

$$L_0(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f_0(X_i; \theta) \quad (1)$$

を θ について最大化することにより、最尤推定量 (maximum likelihood estimator) $\hat{\theta}_{ML}$ を得ることができる。 θ_{ML} を用いて θ に関する区間推定や検定を行う場合には、漸近的に

$$\hat{\theta}_{ML} - \theta_0 \rightarrow N(0, I(\theta_0)^{-1}) \quad (2)$$

となることを用いればよい。ただし $I(\theta)$ は情報行列 (information matrix)

$$I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 L_0(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right) = E\left(\left[\frac{\partial L_0(\theta)}{\partial\theta}\right]\left[\frac{\partial L_0(\theta)}{\partial\theta}\right]'\right) \quad (3)$$

である。実際に情報行列を用いる場合には、その推定値として

$$\hat{I} = -\frac{\partial^2 L_0(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{ML}} \quad (4)$$

または

$$\hat{I} = \left[\frac{\partial L_0(\theta)}{\partial\theta}\right]\left[\frac{\partial L_0(\theta)}{\partial\theta}\right]' \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{ML}} \quad (5)$$

を用いることができる。

しかし、疑似最尤法においては $f_0(X; \theta)$ は未知であるので、適当な確率密度関数 $f(X; \theta)$ を用いて対数疑似尤度関数 $L(\theta; X_1, X_2, \dots, X_n) = L(\theta, \mathbf{X})$ を

$$L(\theta; \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i; \theta) \quad (6)$$

と定義する。この対数疑似尤度を θ に関して最大化することによって、疑似最尤推定量 (quasi maximum likelihood estimator) $\hat{\theta}_{QML}$ が得られる。 $\hat{\theta}_{QML}$ を用いて推論を行う場合には、漸近的に

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{QML} - \theta_0) \rightarrow N(0, A^{-1}(\theta_0)B(\theta_0)A^{-1}(\theta_0)) \quad (7)$$

となることを用いればよい。ただし、 $A(\theta)$ 、 $B(\theta)$ は次のように定義される行列である。

$$A(\theta) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left(\frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right) \quad (8)$$

$$B(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left(\left[\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial\theta}\right]\left[\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial\theta}\right]'\right) \quad (9)$$

この場合も、実際に分散共分散行列を計算する際には、 $A(\theta_0)$ 、 $B(\theta_0)$ の推定値として通常

$$\hat{A} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial\theta\partial\theta'} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{QML}} \quad (10)$$

$$\hat{B} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial\theta}\right]\left[\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial\theta}\right]' \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{QML}} \quad (11)$$

が用いられる。

しかし、疑似最尤法に基づく推論は漸近的にのみ有効で、小標本での性質はあまり知られ

ていない。

3 経験尤度

本節では、経験尤度の基本的な性質についての説明を行う。

2 節同様、 $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^d$ を共通の分布 F_0 からの標本であるとする。また、以下のような estimating function に基づいて推定を行うとする。

$$E[g(X; \theta)] = 0 \quad (12)$$

ただし、 θ は $n \times 1$ の未知パラメータのベクトル、 $g(X; \theta)$ は $s \times 1$ のベクトル値関数である。

このとき、 θ に関する経験尤度比 (empirical likelihood ratio) は

$$R(\theta) = \max \left\{ \prod_{i=1}^n np_i \mid \sum_{i=1}^n p_i g(X_i, \theta) = 0, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\} \quad (13)$$

と定義される。ここで、 $E[g(X, \theta_0)] = 0$ で $\text{Var}[g(X, \theta_0)]$ が有限かつそのランクが $q > 0$ ならば、 $n \rightarrow \infty$ の時に $-2 \log R(\theta_0) \rightarrow \chi_2^q$ となることを Qin and Lawless (1994) and Owen (2001) 等が証明している。ただし、 χ_2^q は自由度 q のカイ 2 乗分布である。これは経験尤度定理 (empirical likelihood theorem) と呼ばれる。経験尤度定理を用いれば、ノンパラメトリックに検定・推定を行うことができる。

経験尤度に基づく方法も、疑似最尤法同様、漸近的にのみ有効で、小標本での性質はあまり知られていない。このような場合、ブートストラップ法を用いれば、小標本での推論の精度が改善される可能性があることが知られている。従って、次節では、ブートストラップ法を簡単に説明する。

4 ブートストラップ法

ブートストラップ法は、手もとにある標本を用いた繰り返し計算により、任意の統計量の分布・期待値等を近似する方法である。ここで、ある母集団から得られた大きさ n の標本を $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^d$ とし、分析対象となる任意の統計量を $S(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) = S(\mathbf{X}; \theta)$ とする。このとき、ブートストラップ法は以下のように要約される。

1. 手もとにある標本 $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^d$ から大きさ n の標本 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^* \in \mathbb{R}^d$ を抽出する。この標本はブートストラップ標本と呼ばれる。本稿で考えるブートストラップ標本の抽出方法は、以下の二種類である。
 - i. 通常のブートストラップ法の場合、ブートストラップ標本は $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^d$ から重複を許して無作為抽出することによって得られる。これは、 $P(X = X_i) = 1/n$ となる分布からブートストラップ標本を抽出したことになる。

- ii. まず、与えられた標本 $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^d$ を用い、帰無仮説 $H_0: \theta = \bar{\theta}$ のもとで経験尤度比(13)を最大化する。この結果得られた p_i を $\hat{p}_i$ とする。この $\hat{p}_i$ を用い、 $P(X=X_i)=\hat{p}_i$ となる分布から大きさ n のブートストラップ標本を抽出する。本稿では、この方法を EL-ブートストラップ法と呼ぶ。
2. ブートストラップ標本 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^* \in \mathbb{R}^d$ を用い、分析対象となっている統計量の値を計算する。ただし、
- i. 通常のブートストラップ法の場合、 $S(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*; \hat{\theta}) = S(X^*; \hat{\theta})$ を計算する。ただし、 $\hat{\theta}$ は $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{R}^d$ を用いて計算された θ の任意の推定量である。³⁾
 - ii. EL-ブートストラップ法の場合には、 $S(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*; \bar{\theta}) = S(X^*; \bar{\theta})$ を計算する。EL-ブートストラップ法の場合には推定量 $\hat{\theta}$ ではなく帰無仮説のもとでの θ の値 $\bar{\theta}$ が用いられることに注意が必要である。
3. ステップ 1-2 を B 回繰り返すことにより、 B 個の $S^* = S(X^*; \hat{\theta})$ (EL-ブートストラップ法の場合には $S(X^*; \bar{\theta})$) の値を得ることができる。この S^* の値を用いて $S(X; \theta_0)$ の真の分布を近似する。つまり、得られた S^* を昇順に並べ、 $B \times \alpha$ 番目の値を $100 \times (1 - \alpha)$ パーセント点の推定値とする。また、得られた B 個の S^* の平均値を $E[S(X; \theta_0)]$ の推定値とする。

次節では、簡単な設定のもとで疑似最尤法および経験尤度にブートストラップ法を応用し、その有効性をシミュレーションにより分析する。

5 シミュレーション

本節では、これまで説明してきた方法の有効性を分析するため、検定力に関するシミュレーション分析を行う。簡単化のために、本節では分布の平均 μ に関して、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を対立仮説 $\mu \neq \mu_0$ に対して検定することを考える。シミュレーションで用いられるモデルは以下の通りである。

5.1 疑似最尤法

疑似最尤法の場合、真の確率密度関数は未知であるので、何らかの分布を仮定しなければならない。ここでは単純に平均 0、分散 σ^2 の正規分布を用い、

$$f(X_i; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (14)$$

とする。ただし、 $\theta = (\mu, \sigma^2)'$ である。したがって、疑似対数尤度関数は

$$L(\mu, \sigma^2; \mathbf{X}) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \quad (15)$$

となる。疑似対数尤度関数を θ で微分すると

$$\frac{\partial L(\mu, \sigma^2; \mathbf{X})}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^4} \end{bmatrix} \quad (16)$$

が得られる。この式の右辺を 0 とおいて解くことにより, μ, σ^2 の疑似最尤推定量 $\hat{\mu}_{\text{QML}} = \sum_{i=1}^n X_i / n = \bar{X}, \hat{\sigma}_{\text{QML}}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n$ を得ることができる。また,

$$\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{X_i - \mu}{\sigma^2} \\ -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^4} \end{bmatrix} \quad (17)$$

および

$$\frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & -\frac{X_i - \mu}{\sigma^4} \\ -\frac{X_i - \mu}{\sigma^4} & \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^6} \end{bmatrix} \quad (18)$$

であることを用いれば, 第 2 節で説明したように, $A(\theta_0), B(\theta_0)$ の推定値 $\hat{A}, \hat{B}$ を求めることができる。したがって, シミュレーションにおいては, まず第 1 の方法 (QML) として, $n(\hat{\mu}_{\text{QML}} - \mu_0)^2 / s_{11}$ が帰無仮説のもとで漸近的に自由度 1 のカイ 2 乗分布に従うことを利用して検定を行う。ここで s_{11} は $\hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A}^{-1}$ の第 (1, 1) 要素である。

つぎに, ブートストラップ法の有効性を確認するために, 2 つの方法でブートストラップ法を疑似最尤法に応用する。ブートストラップ法に関しては通常のブートストラップ法を用いる。

一つ目の方法 (Bootstrap-I) としては, $A(\theta_0), B(\theta_0)$ の推定値をブートストラップ法により計算する。つまり, 単純に $\hat{A}, \hat{B}$ を $A(\theta_0), B(\theta_0)$ の推定値として用いるのではなく, ブートストラップ標本 $\mathbf{X}^*$ を用いて

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log f(X_i^*; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta = \hat{\theta}_{\text{QML}}} \quad (19)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \log f(X_i^*; \theta)}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \log f(X_i^*; \theta)}{\partial \theta} \right]' \Big|_{\theta = \hat{\theta}_{\text{QML}}} \quad (20)$$

を計算し, B 回の繰り返しの結果得られた値の算術平均をそれぞれ $A(\theta_0), B(\theta_0)$ の推定値 $\hat{A}^*, \hat{B}^*$ とする。検定統計量は

$$n(\hat{\mu}_{\text{QML}} - \mu_0)^2 / s_{11}^*$$

とし、自由度1のカイ2乗分布分布を用いて検定を行う。ただし、 s_{11}^* は $\hat{A}^{*-1}\hat{B}^*\hat{A}^{*-1}$ の第(1, 1) 要素である。

さらに、二つ目の方法として (Bootstrap-II)、ブートストラップ法によって検定統計量の臨界値を求める方法についてのシミュレーションを行う。具体的には、まず前述の方法により、 $\hat{A}^*$, $\hat{B}^*$ を求める。さらに、 $n(\hat{\mu}_{QML}^* - \mu_0)^2/s_{11}^*$ の値を計算し、これを昇順に並べ、前節で説明した方法により、 $100 \times (1 - \alpha)$ パーセント点を求める。ここで、 $\hat{\mu}_{QML}^* = \sum_{i=1}^n X_i^*/n$ はブートストラップ標本 X^* を用いた μ の疑似最尤推定量である。得られた $100 \times (1 - \alpha)$ パーセント点よりも $n(\hat{\mu}_{QML}^* - \mu_0)^2/s_{11}^*$ の方が大きければ、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ は棄却される。

5.2 経験尤度に基づく方法

経験尤度を用いて帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を検定するためには、(13)式において $g(X; \theta) = X - \mu$ とすればよい。経験尤度に関しても、まず第1の方法として、ブートストラップ法を用いず、検定統計量を $-2 \log R(\mu_0)$ とし、自由度1のカイ2乗分布分布を用いることによって検定を行う (ELR)。

さらに、ブートストラップ法の有効性を確認するために、経験尤度比に対してブートストラップ法を行う。経験尤度の場合には、 $\hat{p}_i$ が求まっているので、通常のブートストラップ法 (Usual Bootstrap) と EL-ブートストラップ法 (EL-Bootstrap) を用いる。⁴⁾ 経験尤度比にブートストラップ法を応用する際には、第4節で説明したように、ブートストラップ標本を用いて経験尤度比を計算する。得られた値を昇順に並べ $100 \times (1 - \alpha)$ パーセント点を得ることができる。 $-2 \log R(\mu_0)$ がこのパーセント点よりも大きければ、帰無仮説は棄却される。ブートストラップ法としては通常のブートストラップ法と EL-ブートストラップ法を用いることができる。

5.3 シミュレーション結果

以上の方法の有効性を確認するためにシミュレーションを行った。シミュレーションでは $\mu_0 = 0$ とし、 $n = 50, 100, 150, 200, 400$ とした。また X_i としては、以下のような4種類の乱数を用いた。

- I 正規分布
- II 一様分布
- III 自由度2のカイ自乗分布
- IV 自由度3の t 分布

全ての乱数は、平均 μ , 分散1となるように変換した。また、平均 μ に関しては、0.0, 0.1, 0.2, 0.4を用い、ブートストラップ法の繰り返し回数は $B = 1000$ とした。

以上のような設定のもと、10000回の実験を行い、有意水準 $\alpha=0.10, 0.05, 0.01$ で帰無仮説 $H_0: \mu=0$ が棄却された割合（つまり検定力 $\hat{\alpha}$ ）を求めた。真の分布の平均 $\mu=0$ の場合には、 $100 \times (\hat{\alpha} - \alpha) / \sqrt{\alpha(1-\alpha)}$ が近似的に正規分布に従うことを利用し、帰無仮説 $\alpha=0.10$,

表 1 シミュレーションによる検定力

n	Dist	θ_i	QML			Bootstrap-I			Bootstrap-II		
			10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
50	I	0.00	0.1061 [†]	0.0555 [†]	0.0121 [†]	0.1054 [*]	0.0557 [‡]	0.0121 [†]	0.1076 [†]	0.0569 [‡]	0.0126 [‡]
		0.10	0.1896	0.1154	0.0380	0.1895	0.1155	0.0381	0.1901	0.1169	0.0394
		0.20	0.4194	0.3052	0.1336	0.4192	0.3047	0.1339	0.4198	0.3059	0.1394
		0.40	0.8830	0.8064	0.6086	0.8829	0.8064	0.6083	0.8825	0.8069	0.6139
	II	0.00	0.1137 [‡]	0.0624 [‡]	0.0156 [‡]	0.1137 [‡]	0.0623 [‡]	0.0156 [‡]	0.1151 [‡]	0.0631 [‡]	0.0172 [‡]
		0.10	0.1940	0.1201	0.0421	0.1941	0.1201	0.0421	0.1935	0.1206	0.0443
		0.20	0.4213	0.3001	0.1356	0.4208	0.2996	0.1354	0.4223	0.3025	0.1428
		0.40	0.8779	0.8045	0.6039	0.8780	0.8043	0.6041	0.8795	0.8063	0.6127
	III	0.00	0.1334 [‡]	0.0851 [‡]	0.0414 [‡]	0.1332 [‡]	0.0852 [‡]	0.0415 [‡]	0.1368 [‡]	0.0886 [‡]	0.0420 [‡]
		0.10	0.1522	0.0727	0.0158	0.1517	0.0727	0.0159	0.1572	0.0801	0.0163
		0.20	0.3866	0.2372	0.0571	0.3861	0.2370	0.0571	0.3956	0.2473	0.0620
		0.40	0.9741	0.9346	0.7081	0.9740	0.9338	0.7070	0.9763	0.9390	0.6942
	IV	0.00	0.1066 [†]	0.0528	0.0096	0.1063 [†]	0.0523	0.0098	0.1087 [†]	0.0542 [*]	0.0109
		0.10	0.2209	0.1391	0.0444	0.2209	0.1397	0.0440	0.2234	0.1415	0.0457
		0.20	0.4916	0.3735	0.1868	0.4912	0.3739	0.1868	0.4933	0.3770	0.1864
		0.40	0.8984	0.8450	0.6960	0.8985	0.8456	0.6957	0.9014	0.8478	0.6948
200	I	0.00	0.1010	0.0524	0.0107	0.1011	0.0524	0.0106	0.1036	0.0535	0.0132 [‡]
		0.10	0.4152	0.2989	0.1280	0.4153	0.2990	0.1282	0.4155	0.3013	0.1347
		0.20	0.8834	0.8107	0.6071	0.8834	0.8107	0.6070	0.8853	0.8130	0.6127
		0.40	1.0000	1.0000	0.9991	1.0000	1.0000	0.9991	1.0000	1.0000	0.9990
	II	0.00	0.1002	0.0495	0.0125 [†]	0.1001	0.0497	0.0125 [†]	0.1007	0.0510	0.0142 [‡]
		0.10	0.4088	0.2878	0.1212	0.4087	0.2879	0.1217	0.4088	0.2912	0.1254
		0.20	0.8835	0.8076	0.6020	0.8832	0.8076	0.6019	0.8837	0.8086	0.6084
		0.40	1.0000	1.0000	0.9991	1.0000	1.0000	0.9991	1.0000	1.0000	0.9992
	III	0.00	0.1138 [‡]	0.0597 [‡]	0.0175 [‡]	0.1135 [‡]	0.0599 [‡]	0.0176 [‡]	0.1156 [‡]	0.0627 [‡]	0.0179 [‡]
		0.10	0.3951	0.2603	0.0797	0.3956	0.2606	0.0791	0.3990	0.2656	0.0842
		0.20	0.9242	0.8626	0.6329	0.9241	0.8619	0.6335	0.9252	0.8640	0.6379
		0.40	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	IV	0.00	0.1032	0.0525	0.0087	0.1031	0.0526	0.0087	0.1066 [†]	0.0531	0.0094
		0.10	0.4470	0.3327	0.1500	0.4465	0.3328	0.1502	0.4488	0.3329	0.1545
		0.20	0.8889	0.8324	0.6552	0.8888	0.8321	0.6547	0.8903	0.8339	0.6560
		0.40	0.9972	0.9956	0.9908	0.9972	0.9956	0.9909	0.9978	0.9959	0.9891

表 1 の続き

n	Dist	θ_1	ELR			Usual Bootstrap			EL-Bootstrap		
			10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
50	I	0.00	0.1025	0.0524	0.0107	0.0978	0.0494	0.0104	0.0989	0.0491	0.0103
		0.10	0.1845	0.1092	0.0336	0.1779	0.1033	0.0315	0.1784	0.1049	0.0314
		0.20	0.4126	0.2945	0.1223	0.4027	0.2831	0.1146	0.4018	0.2854	0.1169
		0.40	0.8785	0.7982	0.5836	0.8746	0.7881	0.5606	0.8735	0.7872	0.5677
	II	0.00	0.1078 [*]	0.0543 [†]	0.0110	0.1063 [†]	0.0523	0.0122 [†]	0.1065 [†]	0.0536 [*]	0.0117 [*]
		0.10	0.1883	0.1129	0.0363	0.1840	0.1107	0.0351	0.1849	0.1103	0.0371
		0.20	0.4206	0.2981	0.1269	0.4146	0.2917	0.1268	0.4146	0.2922	0.1266
		0.40	0.8836	0.8143	0.6148	0.8806	0.8094	0.6136	0.8814	0.8079	0.6084
	III	0.00	0.1265 [†]	0.0744 [†]	0.0248 [*]	0.1102 [*]	0.0628 [*]	0.0175 [†]	0.1129 [†]	0.0645 [†]	0.0215 [†]
		0.10	0.2142	0.1329	0.0402	0.1875	0.1061	0.0255	0.1823	0.0966	0.0202
		0.20	0.5100	0.3947	0.2007	0.4707	0.3389	0.1395	0.4554	0.3165	0.1094
		0.40	0.9892	0.9809	0.9359	0.9855	0.9666	0.8659	0.9843	0.9617	0.8168
	IV	0.00	0.1276 [†]	0.0693 [†]	0.0174 [*]	0.0995	0.0499	0.0098	0.1074 [†]	0.0556 [†]	0.0135 [†]
		0.10	0.2321	0.1552	0.0565	0.1989	0.1256	0.0386	0.2132	0.1361	0.0443
		0.20	0.4802	0.3684	0.1934	0.4416	0.3243	0.1464	0.4584	0.3439	0.1715
		0.40	0.8691	0.8031	0.6350	0.8395	0.7578	0.5591	0.8595	0.7868	0.6080
200	I	0.00	0.0998	0.0515	0.0102	0.0990	0.0523	0.0101	0.1003	0.0518	0.0112
		0.10	0.4127	0.2960	0.1238	0.4103	0.2938	0.1272	0.4121	0.2955	0.1278
		0.20	0.8821	0.8083	0.5982	0.8813	0.8062	0.6005	0.8820	0.8066	0.6010
		0.40	1.0000	1.0000	0.9990	1.0000	1.0000	0.9990	1.0000	1.0000	0.9990
	II	0.00	0.0990	0.0482	0.0115	0.0985	0.0484	0.0117 [*]	0.1008	0.0497	0.0122 [†]
		0.10	0.4088	0.2870	0.1194	0.4077	0.2891	0.1224	0.4066	0.2868	0.1226
		0.20	0.8845	0.8095	0.6041	0.8837	0.8100	0.6078	0.8848	0.8095	0.6056
		0.40	1.0000	1.0000	0.9992	1.0000	1.0000	0.9992	1.0000	1.0000	0.9992
	III	0.00	0.1123 [†]	0.0552 [†]	0.0120 [†]	0.1077 [†]	0.0531	0.0112	0.1076 [†]	0.0524	0.0117 [*]
		0.10	0.4661	0.3459	0.1608	0.4572	0.3359	0.1529	0.4550	0.3327	0.1515
		0.20	0.9467	0.9089	0.7801	0.9453	0.9026	0.7645	0.9434	0.9037	0.7609
		0.40	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	IV	0.00	0.1153 [†]	0.0617 [*]	0.0132	0.1032	0.0533	0.0105	0.1085 [†]	0.0565 [†]	0.0117 [*]
		0.10	0.4435	0.3285	0.1502	0.4307	0.3086	0.1380	0.4341	0.3174	0.1455
		0.20	0.8700	0.7997	0.6044	0.8579	0.7794	0.5787	0.8646	0.7891	0.5934
		0.40	0.9942	0.9898	0.9682	0.9888	0.9795	0.9526	0.9932	0.9886	0.9665

0.05, 0.01 を対立仮説 $\alpha \neq 0.10, 0.05, 0.01$ に対して検定した。表の*,†,‡ は、それぞれ、10%, 5%, 1%の有意水準でこの帰無仮説が棄却されたことを意味する。つまり、 $\mu=0$ の場合の $\hat{\alpha}$ の値にこれらの記号が付いていない検定方法が、より正確なサイズの検定を行うこと

ができると言うことになる。

シミュレーションの結果が表1に表されている。表1には、特徴的な結果をあげるため、 $n=50, 200$ の場合の結果だけを示している。まず、ブートストラップ法を用いない場合、分布I, II, IIIに関しては、疑似最尤法よりも経験尤度に基づく方法の方が、 $n=50$ であっても正確なサイズの検定を行えていることが分かる。しかし、分布IVの場合には、疑似最尤法に基づく検定の方が正確なサイズを得ている。どちらの場合にも、 n が大きくなれば検定の精度が上がっていることが分かる。

次にブートストラップ法を行った場合の結果を考察する。疑似最尤法に基づく結果を見ると、Bootstrap-I, Bootstrap-II のどちらを行っても結果はほとんど変わっていない。 n が大きくなるに従って、ブートストラップ法の繰り返し計算には多くの時間がかかるようになる。このことを考慮すれば、疑似最尤法に対してブートストラップ法を応用するのは、賢明な選択ではないと言えるかもしれない。これに対し、経験尤度に基づく方法に関しては、通常のブートストラップ法もEL-ブートストラップ法も検定のサイズを改善しているよう見える。特に、通常のブートストラップ法を行った場合、分布IVの場合でも疑似最尤法よりも正確な結果が得られている。このシミュレーションで取り上げた6つの方法の中では、経験尤度に通常のブートストラップ法を応用すれば、最も望ましい結果が得られるように見える。また、検定力に関しては、全ての方法で大きな差が無い。

6 結 び

本稿では、疑似最尤法および経験尤度にブートストラップ法を応用し、その検定力をシミュレーションにより分析した。その結果、経験尤度にブートストラップ法を応用すると、かなり正確な検定を行えることが示された。このことは、真の分布が分からない場合には、何らかの分布を仮定して疑似最尤法を応用するよりも、ノンパラメトリックに経験尤度を用い、ブートストラップ法により検定統計量の臨界値を計算する方が望ましいと言うことを意味している。

しかしながら、本稿のシミュレーションで扱ったモデルは、かなり限定されたものである。まず、疑似最尤法は多くの場合、独立でないデータに関して用いられる。White (2004) はこのような場合でも、ブートストラップ法が疑似最尤法に应用可能であることを示している。しかし、本稿では独立なデータを用いたシミュレーションしか行われていない。Kitamura (1997) は経験尤度が独立でないデータにも应用可能であることを示しているが、そのような場合のブートストラップ法の応用可能性に関しては、未だ議論されていない。さらに、実際に経験尤度を独立でないデータに应用することは、疑似最尤法を行うよりもかなり困難であると思われる。さらに、本稿では、EL-ブートストラップ法を疑似最尤法に应用することは考

えていない。これは、ブートストラップ法のためだけに経験尤度比の最大化を行うのが現実的ではないとの判断からである。しかし、この方法を用いれば疑似最尤法の精度が改善されるかもしれない。以上のような問題は、いずれも本稿の分析の範疇を超えるものであり、今後分析の待たれる研究課題といえる。

注

- 1) Andrews (2000) はブートストラップ法が有効でないいくつかの例を挙げている。
- 2) $f(X; \theta)$ が真の確率密度関数 $f_0(X; \theta)$ に一致する場合、 $A(\theta_0) = B(\theta_0)$ が成立し、 $A^{-1}(\theta_0) B(\theta_0) A^{-1}(\theta_0) = nI(\theta_0)$ が得られる。つまり、当然のことではあるが、 $f(X; \theta) = f_0(X; \theta)$ の場合には疑似最尤推定量の漸近分布と最尤推定量の漸近分布は一致することになる。
- 3) 実際の推定には疑似最尤法や積率法を用いればよい。
- 4) Brown and Newey (2001) は EL-ブートストラップ法を用いれば通常のブートストラップ法よりも好ましい結果が得られる可能性があると述べている。また、Namba (2004) はこの2つの方法に関するシミュレーション分析を行っている。本稿のシミュレーションは本質的に Namba (2004) と同じ物であるが、比較のために再度シミュレーションを行った。

参 考 文 献

- Andrews, D. (2000) "Inconsistency of the bootstrap when a parameter is on the boundary of the parameter space." *Econometrica* 68, 399-405.
- Bollerslev, T. & J. M. Wooldridge (1992) "Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances." *Econometric Reviews* 11, 143-172.
- Brown, B. & W. Newey (2001) "GMM, efficient bootstrapping, and improved inference." Unpublished Manuscript.
- Efron, B. (1979) "Bootstrap methods: Another look at the jackknife." *The Annals of Statistics* 7, 1-26.
- El Barmi, H. (1996) "Empirical likelihood ratio test for or against a set of inequality constraints." *Journal of Statistical Planning and Inference* 55, 191-204.
- Hall, P. & B. Presnell (1999) "Intentionally biased bootstrap method." *Journal of the Royal Statistical Society, B* 61, 143-158.
- Kitamura, Y. (1997) "Empirical likelihood methods with weakly dependent processes." *Annals of Statistics* 5, 2084-2102.
- Lee, S. W. & B. E. Hansen (1994) "Asymptotic theory for the GARCH (1, 1) quasi-maximum likelihood estimator." *Econometric Theory* 10, 29-52.
- Namba, A. (2004) "Simulation studies on bootstrap empirical likelihood tests." *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 33, 99-108.
- Owen, A. (1990) "Empirical likelihood ratio confidence regions." *Annals of Statistics* 18, 90-120.
- Owen, A. (1991) "Empirical likelihood for linear models." *The Annals of Statistics* 19, 1725-1747.
- Owen, A. (2001) *Empirical Likelihood*, Chapman and Hall.

- Owen, A. B. (1988) "Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional." *Biometrika* 75, 237-249.
- Qin, J. & J. Lawless (1994) "Empirical likelihood and *general estimating equations*." *Annals of Statistics* 22, 300-325.
- Weiss, A. A. (1986) "Asymptotic theory for ARCH models: Estimation and testing." *Econometric Theory* 2, 107-131.
- White, H. (1982) "Maximum likelihood estimation of misspecified models." *Econometrica* 50, 1-26.
- White, H. (2004) "Maximum likelihood and the bootstrap for nonlinear dynamic models." *Journal of Econometrics* 119, 199-219.