



一般的なBox-Cox変換を使った線形回帰モデルにおけるAICの利用

大谷, 一博

(Citation)

国民経済雑誌, 191(1):41-48

(Issue Date)

2005-01

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD01)

<https://doi.org/10.24546/00055976>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00055976>



一般的な Box-Cox 変換を使った 線形回帰モデルにおける AIC の利用

大 谷 一 博

本稿では、変数ごとに変換パラメータが異なる一般的な Box-Cox 変換を使った線形回帰モデル (Box-Cox 変換モデル) を考える。この一般的な Box-Cox 変換モデルを用いて、日本、アメリカ、イギリスおよびカナダの輸入需要関数を推定し、適切な変換パラメータの個数を AIC およびバイアス修正 AIC も考慮にいて決定する手順を示す。

キーワード AIC, Box-Cox 変換, 輸入需要関数

1 序

計量経済学的な実証分析において、通常使用される回帰式の関数形は、線形および対数線形である。しかし、経済理論は、消費と所得などの経済変数間の関連を示唆するが、適切な関数形を示唆するものではなく、関数形の選択は、分析目的に応じて、適当になされることが多い。例えば、需要関数の推定においては、価格や所得の弾力性の推定に興味があるので、回帰係数がそのまま弾力性を表す対数線形モデルが使用されることが多い。しかし、Box and Cox (1964) が、変数のべき変換を利用して適切な関数形を統計的に選択する方法を提示して以来、この Box-Cox 変換がしばしば使用されてきた。例えば、貨幣需要関数の推定に Box-Cox 変換を使用した例として、Zarembka (1968), Spitzer (1976), Mills (1978) および Boylan and O'Muircheartaigh (1981) 等がある。

Box-Cox 変換を使用して回帰モデルの関数型を選択する場合、すべての変数の変換パラメータは同じであると仮定されることが多い。例えば、Khan and Ross (1977) は、すべての変数の変換パラメータが同じであると仮定して、アメリカ合衆国、カナダ、および日本の輸入需要関数の推定を行っている。しかし、変数ごとに変換パラメータが異なる可能性も考慮して、Boylan, Cuddy and O'Muircheartaigh (1982) はアイルランドの輸入需要関数の推定を行った。この様に、変数ごとに変換パラメータが異なる場合、推定されるべき非線形の未知パラメータの数が変数の数に比例して増加するので、変数の数が大きい場合その計算量は膨大なものになる。

モデル選択を行う場合、パラメータの数が余りに多くなることを避けるため、できるだけパラメータの数が少ないモデルが選択されることが多い。(これはケチの原理と呼ばれる。) Akaike (1973) は、適切なパラメータ数を決めるための情報量基準として AIC (Akaike's Information Criterion) を提唱した。この AIC は、推定精度とケチの原理を同時に考慮した基準である。しかし、Hurvich and Tsai (1989) で指摘されたように、AIC にはモデルを過大推定する傾向がある。Sugiura (1978) および Hurvich and Tsai (1989) は、この過大推定というバイアスを修正したバイアス修正 AIC (AIC_c) を提唱した。Hurvich and Tsai (1989) によるモンテ・カルロ実験の結果は、この AIC_c は優れた小標本特性をもっていることを示している。

Box-Cox 変換を用いた推定で、情報量基準によってモデルを選択するという研究は極めて少ない。Park (1998) は、Box-Cox 変換を用いた ARMA モデルを推定するのに AIC を使用しているが、AIC は自己回帰ラグと移動平均ラグの次数の決定のために使用されている。また、Ip, Wong, Wang and Jia (2004) では、新しい情報量基準 GIC を提唱しているが、GIC は独立変数の数を決定するために使用されている。変数ごとに変換パラメータが異なる Box-Cox 変換モデルを推定する場合、情報量基準も考慮して変換パラメータの数を決定するということは、まだ考えられていない。本稿では、日本、アメリカ、イギリスおよびカナダの輸入需要関数を、変数ごとに変換パラメータが異なる一般的な Box-Cox 変換モデルを用いて推定し、適切な変換パラメータの個数を AIC および AIC_c も考慮に入れて決定する手順を示す。

2 モデルと情報量基準

変数 z に対する Box-Cox 変換 $z^{(\theta)}$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} z_t^{(\theta)} &= (z_t^\theta - 1)/\theta \quad \text{for } \theta \neq 0 \\ &= \log z \quad \text{for } \theta = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

この Box-Cox 変換を利用した一般的な関数型をもつ次の線形回帰モデルを考える。

$$y_t^{(\lambda_1)} = \beta_1 + \beta_2 x_{2t}^{(\lambda_2)} + \dots + \beta_k x_{kt}^{(\lambda_k)} + u_t, \quad t=1, 2, \dots, T \quad (2)$$

ただし、 y_t は従属変数の t 番目の観測値、 x_{it} は第 i 説明変数の t 番目の観測値、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ は回帰係数、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ は変換パラメータ、 u_t は互いに独立に平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従う t 番目の誤差項である。Schlesselman (1971) で指摘されているように、定数項がないとき、Box-Cox 変換を利用した線形回帰モデルはスケールの変換に関して不変ではない。よって、たとえ定数項が有意にゼロとは異なる場合でも、定数項を含めて推定が行われる。

$T \times 1$ ベクトル y^* と $T \times k$ 行列 X^* を次のように定義する。

$$y^* = \begin{pmatrix} y_1^{(\lambda_1)} \\ y_2^{(\lambda_1)} \\ \vdots \\ y_T^{(\lambda_1)} \end{pmatrix}, \quad X^* = \begin{pmatrix} 1 & x_{21}^{(\lambda_2)} & \dots & x_{k1}^{(\lambda_k)} \\ 1 & x_{22}^{(\lambda_2)} & \dots & x_{k2}^{(\lambda_k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2T}^{(\lambda_2)} & \dots & x_{kT}^{(\lambda_k)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

このとき、対数尤度関数は次のようになる。

$$L(p, \lambda, \beta, \sigma^2) = -(T/2) \log(2\pi) - (T/2) \log \sigma^2 - (y^* - X^* \beta)' (y^* - X^* \beta) / (2\sigma^2) + \log J \quad (4)$$

ただし、 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)'$ 、 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)'$ 、 p は異なる変換パラメータの個数 ($p \leq k$) であり、 J は従属変数の変換のヤコビアンで、次式で与えられる。

$$J = \left| \frac{\partial y^*}{\partial y} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1^*}{\partial y_1} & \frac{\partial y_1^*}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_1^*}{\partial y_T} \\ \frac{\partial y_2^*}{\partial y_1} & \frac{\partial y_2^*}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_2^*}{\partial y_T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_T^*}{\partial y_1} & \frac{\partial y_T^*}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_T^*}{\partial y_T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1^{\lambda_1-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2^{\lambda_1-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y_T^{\lambda_1-1} \end{vmatrix} = \prod_{t=1}^T y_t^{\lambda_1-1} \quad (5)$$

(4) を β と σ^2 で微分してゼロと置くと、 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)'$ を所与とした β と σ^2 の条件付き最尤推定値が得られる。

$$\hat{\beta}^* = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} y^* \quad (6)$$

$$\hat{\sigma}^{*2} = (y^* - X^* \hat{\beta}^*)' (y^* - X^* \hat{\beta}^*) / T \quad (7)$$

(6) と (7) を (4) に代入すると、次の λ を所与とした集中対数尤度関数が得られる。

$$L_{\max}(\lambda) = -(T/2)[1 + \log(2\pi)] - (T/2) \log \hat{\sigma}^2 + (\lambda_1 - 1) \sum_{t=1}^n \log y_t \quad (8)$$

この集中対数尤度関数を最大にする $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)'$ の値 $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p)'$ が λ の最尤推定値である。しかし、 λ の最尤推定値を解析的に求めることはできないので、グリッド・サーチなどの数値計算によって求めることになる。なお、

$$S(\lambda) = 2[L_{\max}(\hat{\lambda}) - L_{\max}(\lambda)] \quad (9)$$

の漸近分布は自由度 k のカイ自乗分布であるので、仮説 $H_0: \lambda = \lambda_0$ の検定において、 $S(\lambda_0) > \chi_p^2(\alpha)$ であれば仮説は棄却される。ただし、 $\chi_p^2(\alpha)$ は自由度 k のカイ自乗分布の上側 $100\alpha\%$ 点である。

Hurvich and Tsai (1989) に従うと、AIC および AIC_C は次の式で与えられる。

$$AIC(p) = T \log(2\pi) + T[1 + \log \hat{\sigma}^{*2} + 2(k+p+1)] - 2(\hat{\lambda}_1 - 1) \sum_{i=1}^T \log y_i \quad (10)$$

$$AIC_C(p) = AIC(p) + \frac{2(k+p+1)(k+p+2)}{T-k-p-2} \quad (11)$$

ただし、 $\hat{\sigma}^{*2}$ に含まれる $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ は、 $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p$ によって置き換えられている。

3 実 証 例

情報量基準 AIC および AIC_C によって関数型を選択する実証例として、ここでは日本、アメリカ合衆国、カナダおよびイギリス（連合王国）の輸入需要関数の推定を行う。一般的な関数型をもつ輸入需要関数を次のように定式化する。

$$Q_t^{(\lambda)} = \beta_1 + \beta_2 (PM_t/PD_t)^{(\lambda_2)} + \beta_3 Y_t^{(\lambda_3)} + u_t \quad (12)$$

ただし、 Q_t は第 t 期の総輸入量、 PM_t は第 t 期の輸入価格、 PD_t は第 t 期の国内価格（GDP デフレータ）、 Y_t は第 t 期の所得（GDP）である。使用されたデータは、1965年から2002年までの年次データであり、すべて1995年を100とした指数形式で表されている。なお、データの出所は、IMF International Financial Statistics CD-ROM 版（March, 2004）である。

ここでは、対数線形に定式化されたモデル（ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ）、線形に定式化されたモデル（ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ）、すべての変換パラメータが等しいモデル（ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, p=1$ ）、およびすべての変換パラメータが等しいとは限らない一般的なモデル（ $p=3$ ）の4つのモデルの推定

表 1 日本の輸入需要関数の推定結果
(回帰係数の推定値の下にある括弧内の数値は t 値)

λ_1	λ_2	λ_3	$L_{\max}(p, \lambda)$	AIC	AIC _C	β_1	β_2	β_3
0	0	0	-114.673	241.346	244.055	-1.425 (-5.529)	-0.277 (-3.939)	1.301 (23.484)
1	1	1	-138.991	289.982	292.692	-9.829 (-1.182)	-9.569 (-2.512)	10.547 (12.540)
-0.32	-0.32	-0.32	-111.796	235.592	238.302	-1.196 (-9.387)	-0.073 (-3.364)	1.493 (28.439)
-0.92	-1.51	-1.65	-107.513	229.026	232.759	-17.815 (-42.455)	-0.019 (-6.719)	31.180 (45.023)

表 2 アメリカの輸入需要関数の推定結果
(回帰係数の推定値の下にある括弧内の数値は t 値)

λ_1	λ_2	λ_3	$L_{\max}(p, \lambda)$	AIC	AIC _C	β_1	β_2	β_3
0	0	0	-101.509	215.017	217.727	-4.164 (-28.121)	-0.201 (-3.278)	1.904 (55.379)
1	1	1	-131.683	275.365	278.075	-61.244 (-14.819)	-33.681 (-4.604)	1.670 (32.039)
1.05	-4.63	2.96	-95.156	204.313	208.046	20.649 (20.512)	4.851 (2.660)	0.000343 (83.808)

を行った。日本の輸入需要関数の推定結果は表 1 に、アメリカの輸入需要関数の推定結果は表 2 に、カナダの輸入需要関数の推定結果は表 3 に、イギリスの輸入需要関数の推定結果は表 4 に示されている。

表 1 から次のことが分かる。まず、線形に定式化されたモデルと対数線形に定式化されたモデルを比べると、最大尤度、AIC および AIC_C ともに対数線形モデルを示唆している。また、最大尤度、AIC および AIC_C は、対数線形の定式化よりもすべての変換パラメータが等しい Box-Cox 変換モデルを示唆している。さらに、これら 3 つの基準は、すべての変換パラメータが等しいモデルよりもすべての変換パラメータが等しいとは限らない一般的なモデルを示唆している。また、仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ の検定統計値は

$$2[L_{\max}(\lambda_1 = -0.92, \lambda_2 = -1.51, \lambda_3 = -1.65) - L_{\max}(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0)] = 14.32 \quad (13)$$

であり、自由度 3 のカイ自乗分布の 1 % 棄却点は 11.34 であるので、仮説は有意水準 0.01 で棄却される。同様に、仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ は有意水準 0.01 で棄却され、仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -0.32$ も有意水準 0.05 で棄却される。これらのことを総合すると、日本の輸入需要関数では、すべての変換パラメータが等しいとは限らない一般的な Box-Cox 変換モデルが最も適しているといえる。

アメリカの輸入需要関数では、すべての変換パラメータが等しいモデルの $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ の最尤推定値は $\hat{\lambda}_i = 0$ であったので、対数線形モデルがすべての変換パラメータが等しいモデルである。表 2 から次のことが分かる。まず、線形に定式化されたモデルと対数線形に定式化されたモデルを比べると、最大尤度、AIC および AIC_C ともに対数線形の定式化を示唆している。また、最大尤度、AIC および AIC_C は、対数線形モデルよりもすべての変換パラメータが等しいとは限らない一般的なモデルを示唆している。仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ の検定統計値は

$$2[L_{\max}(\lambda_1 = 1.05, \lambda_2 = -4.63, \lambda_3 = 2.96) - L_{\max}(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0)] = 12.706 \quad (14)$$

であり、自由度 3 のカイ自乗分布の 1 % 棄却点は 11.34 であるので、仮説は有意水準 0.01 で棄却される。同様に、仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ も有意水準 0.01 で棄却される。しかし、すべての変換パラメータが等しいとは限らない一般的なモデルでは、価格変数の係数が正の値となっており、経済理論とは整合的ではない。このことから、対数線形モデルとすべての変換パラメータが等しいとは限らない一般的なモデルの選択は難しいといえるが、AIC および AIC_C に基づくと、変換パラメータが等しいとは限らない一般的なモデルが選択されることになる。

表 3 から次のことが分かる。カナダの輸入需要関数では、線形に定式化されたモデルと対数線形に定式化されたモデルを比べると、最大尤度、AIC および AIC_C ともに対数線形モデルを示唆している。また、最大尤度、AIC および AIC_C は、対数線形の定式化よりもすべての変

表 3 カナダの輸入需要関数の推定結果
(回帰係数の推定値の下にある括弧内の数値は t 値)

λ_1	λ_2	λ_3	$L_{\max}(p, \lambda)$	AIC	AIC _C	β_1	β_2	β_3
0	0	0	-113.894	239.787	242.497	-4.605 (-21.650)	-0.848 (-4.819)	1.982 (40.311)
1	1	1	-145.464	302.927	305.637	-64.928 (-10.533)	-58.292 (-2.909)	16.461 (21.700)
-0.47	-0.47	-0.47	-104.020	220.039	222.749	-2.604 (-32.050)	-0.128 (-5.932)	2.376 (53.965)
-0.45	1.55	-0.46	-103.812	221.623	225.356	-2.748 (-32.671)	-0.138 (-6.020)	2.446 (54.409)

表 4 イギリスの輸入需要関数の推定結果
(回帰係数の推定値の下にある括弧内の数値は t 値)

λ_1	λ_2	λ_3	$L_{\max}(p, \lambda)$	AIC	AIC _C	β_1	β_2	β_3
0	0	0	-98.357	208.714	211.423	-3.393 (-15.907)	-0.383 (-5.748)	1.739 (36.119)
1	1	1	-130.748	273.497	276.206	-57.511 (-7.277)	-28.118 (-2.994)	1.652 (18.774)
-0.49	-0.49	-0.49	-91.661	195.321	198.031	-1.687 (-21.431)	-3.755 (-5.132)	1.923 (44.098)
1.38	-5.64	3.75	-74.569	163.138	166.871	65.432 (17.513)	-54.748 (-3.321)	0.0000433 (58.430)

換パラメータが等しい Box-Cox 変換モデルを示唆している。最大尤度は、すべての変換パラメータが等しいモデルよりもすべての変換パラメータが等しいとは限らない一般的なモデルの方が大きい、AIC および AIC_C は、すべての変換パラメータが等しいとは限らない一般的なモデルよりもすべての変換パラメータが等しいモデルの方が小さい。また、仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -0.47$ の検定統計値は

$$2[L_{\max}(\lambda_1 = -0.45, \lambda_2 = 1.55, \lambda_3 = -0.46) - L_{\max}(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -0.47)] = 0.416 \quad (15)$$

であり、自由度 3 のカイ自乗分布の 10% 棄却点は 6.25 であるので、仮説は有意水準 0.10 で採択される。しかし、仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ は有意水準 0.01 で棄却され、仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ も有意水準 0.01 で棄却される。これらのことを総合すると、カナダの輸入需要関数では、すべての変換パラメータが等しい Box-Cox 変換モデルが最も適しているといえる。

表 4 から次のことが分かる。イギリスの輸入需要関数では、線形に定式化されたモデルと対数線形に定式化されたモデルを比べると、最大尤度、AIC および AIC_C ともに対数線形モデルを示唆している。これは、日本、アメリカおよびカナダの輸入需要関数と同じ結果である。また、最大尤度、AIC および AIC_C は、対数線形の定式化よりもすべての変換パラメータが等しい Box-Cox 変換モデルを示唆している。最大尤度は、すべての変換パラメータが等しいモデルよりもすべての変換パラメータが等しいとは限らない一般的なモデルの方が大きく、AIC および AIC_C も、すべての変換パラメータが等しいモデルよりもすべての変換パラメータ

タが等しいとは限らない一般的なモデルの方が小さい。また、仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -0.49$ の検定統計値は

$$2[L_{\max}(\lambda_1 = 1.38, \lambda_2 = -5.64, \lambda_3 = 3.75) - L_{\max}(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -0.49)] = 34.184 \quad (16)$$

であり、自由度 3 のカイ自乗分布の 1% 棄却点は 11.34 であるので、仮説は有意水準 0.01 で棄却される。また、仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ は有意水準 0.01 で棄却され、仮説 $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ も有意水準 0.01 で棄却される。これらのことを総合すると、カナダの輸入需要関数では、すべての変換パラメータが等しいとは限らない一般的な Box-Cox 変換モデルが最も適しているといえる。

参 考 文 献

- Akaike, H. (1973). "Information theory and an extension of the maximum likelihood principle", in Petrov, B. N. and Csaki, F. eds., *2nd Symposium on Information Theory*, Budapest: Akademia, 267-281.
- Box, G. E. P. and Cox, D. R. (1964). "An analysis of transformations", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B26, 211-243.
- Boylan, T. A., Cuddy, M. P. and O'Muircheartaigh, I. G. (1982). "Import demand equations: an application of a generalized Box-Cox methodology", *International Statistical Review*, 50, 103-112.
- Boylan, T. A. and O'Muircheartaigh, I. G. (1981). "The functional form of the U. K. demand for money: a critique of a paper by Mills", *Applied Statistics*, 30, 296-299.
- Hurvich, C. M. and Tsai, C. (1989). "Regression and time series models of finite but unknown order", *Biometrika*, 76, 297-307.
- Ip, W. C., Wong, H., Wang, S-G. and Jia, Z-Z. (2004). "A GIC rule for assessing data transformation in regression", *Statistics and Probability Letters*, 68, 105-110.
- Khan, M. S. and Ross, K. Z. (1977). "The functional form of aggregate import demand equation", *Journal of International Economics*, 7, 149-160.
- Mills, T. C. (1978). "The functional form of the U. K. demand for Money", *Applied Statistics*, 27, 52-57.
- Park, H-H. (1998). "Analysis and prediction of walleye pollock (*Theragra chalcogramma*) landings in Korea by time series analysis", *Fisheries Research*, 38, 1-7.
- Schlesselman, J. (1971). "Power families: A note on the Box and Cox transformation", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 33, 307-311.
- Spitzer, J. J. (1976). "The demand of money, the liquidity trap and functional forms", *International Economic Review*, 17, 220-227.
- Sugiura, N. (1978). "Further analysis of the data by Akaike's information criterion and finite corrections", *Communications in Statistics-Theory and Methods*, A7, 13-26.
- Zarembka, P. (1968). "Functional form in the demand for money", *Journal of the American Sta-*

tistical Association, 63, 502-511.