



アジャスティッド・ウィナー公平分割法の図解

中西, 訓嗣

(Citation)

国民経済雑誌, 192(5):27-36

(Issue Date)

2005-11

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/00056035>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00056035>



アジャスティッド・ウィナー公平分割法の図解

中 西 訓 嗣*

2人・多数財公平分割問題に適用されるアジャスティッド・ウィナー公平分割法 (AW 法) を表現する図解を導入する。この図解の技法によって、AW 法の持つ効率性、衡平性、無羨望という性質が極めて明快に示され、AW 法の戦略的操作可能性に関する視覚的な理解も可能となる。さらに、AW 法が2人・多数財公平分割問題における「平等主義的社会最適」を実現するものであることも示される。

キーワード 公平分割問題, adjusted winner, envy-free, equity

1 は じ め に

ブラムスとテイラー (Brams and Taylor 1996) によって提唱されたアジャスティッド・ウィナー法 (Adjusted Winner procedure: 以下, AW 法と略記する) は, 2人のプレイヤー間で多数の財 (goods) あるいは物事 (issues) を分かち合う問題に適用される公平分割手続きである。この方法は, 表明された各プレイヤーの選好を基礎として判断するならば, 衡平 (equitable) で, 無羨望 (envy-free)¹⁾, しかも効率的 (efficient) な配分を生み出すという大変優れた性質を有している。本稿では, AW 法の基本的な性質を明快に描き出す非常に簡単な図解を提示する。本稿で提示する図解を用いれば, AW 法の基本的性質に関する理解が容易になるばかりではなく, AW 法における「戦略的操作可能性」の問題——すなわち, 各プレイヤーが各財に対して有する選好について虚偽の申告をすることによって自らの厚生を改善できる可能性——をも明快に示すことができる。さらに, 本稿での図解を精査することによって, AW 法が, 2人・多数財公平分割問題における「平等主義的社会最適」を実現する手²⁾続きであることも示される。

図解を示す前にブラムスとテイラーによる AW 法のオリジナルの記述について振り返っておこう。G を 2人のプレイヤー A と B との間で分割されるべき n 個の財の集合とする。各財は分割可能 (divisible) であると仮定する。AW 法は次のような手続きに従う。まず, 第1段階において, 各プレイヤーは各財に非負の得点を割り当てる。ただし, 各プレイヤーが各財に割り当てた得点の合計は $T > 0$ であり, この合計 (持ち点) は両プレイヤーに共通とする。ここで, $x = (x_i)_{i \in G}$ と $y = (y_i)_{i \in G}$ をそれぞれプレイヤー A とプレイヤー B とが各財に割

り当てた得点とする。もちろん、すべての $i \in G$ について $x_i, y_i \geq 0$ かつ $\sum_{i \in G} x_i = \sum_{i \in G} y_i = T > 0$ が成立している。これらの x, y は各プレイヤーの“表明された選好”を表しており、それぞれのプレイヤーが財に対して持っている“真の選好”に一致しているとはかぎらない。各プレイヤーは財の評価に関して真実を述べるよう強制されることはない。

第 2 段階では、各プレイヤーは相手のプレイヤーよりも高い得点を割り当てた財のすべてを受け取る。すなわち、 $x_i > y_i$ ならば第 i 財のすべてをプレイヤー A が受け取り、 $x_i < y_i$ ならば第 i 財のすべてをプレイヤー B が受け取る。もし $x_i = y_i$ ならば、どちらのプレイヤーが第 i 財を受け取るのかはランダムに決定される。このような“勝者総取り” (winner-take-all) の段階で財の初期配分が決定される。このとき、 G_A をプレイヤー A の受け取る財の集合、 G_B をプレイヤー B の受け取る財の集合とする。もちろん、 $G_A \cup G_B = G$, $G_A \cap G_B = \emptyset$ である。さらに、この勝者総取り段階では、どの財も実際には分割されていないことに注意しておこう。勝者総取り段階において、プレイヤー A の受け取る財に割り当てられている A 自身による得点の合計は $U(x, y) = \sum_{i \in G_A} x_i$ のように表明された選好 x, y の関数として表される。同様に、プレイヤー B の受け取る財に割り当てられている B 自身による得点の合計は $V(x, y) = \sum_{i \in G_B} y_i$ のように表される。 U や V は勝者総取り段階における各プレイヤーの獲得した得点を表している。この獲得した得点を各プレイヤーの“効用水準”と見なすことにしよう。

第 3 段階は衡平性調整 (equitability adjustment) である。衡平性調整においては、最終的に両者の獲得する得点の合計が一致するように、勝者総取り段階においてより高い得点を獲得したプレイヤーから、より低い得点を獲得したプレイヤーに対して財が移転される。具体的に考えるために、勝者総取り段階において $U(x, y) > V(x, y)$ が成立しており、プレイヤー A は r 種類の財を受け取っているものとしよう。さらに、これら r 種類の財は $x_1/y_1 \leq x_2/y_2 \leq \dots \leq x_r/y_r$ が成立するように番号付けされているものとする。衡平性調整においては、まず第 1 財 (の一部) がプレイヤー A から B へと移転される。第 1 財の $\delta \times 100\%$ をプレイヤー A の手元に残して、 $1 - \delta$ 分をプレイヤー B に移転すれば、プレイヤー A の獲得する得点は $(1 - \delta)x_1$ 減少し、プレイヤー B の獲得する得点は $(1 - \delta)y_1$ だけ増加する。結局、プレイヤー A は $U(x, y) - (1 - \delta)x_1$ 、プレイヤー B は $V(x, y) + (1 - \delta)y_1$ の得点を獲得することになる。もし第 1 財のすべてを移転しても、両者の獲得している得点合計が一致しなければ、次に第 2 財 (の一部) がプレイヤー A から B へと移転される。以下同様に、両者の獲得している得点合計の一致が実現するまで、財がプレイヤー A から B へと移転される。このように、衡平性調整の過程においては、第 1 財から第 $s-1$ 財までのすべてと第 s 財の一部がプレイヤー A から B へと移転されることになる。 x, y が表明されているときの番号 s と第 s 財に対するプレイヤー A のシェア $\delta^*(x, y)$ は、プレイヤー A が最終的に獲得する得点合計 $U^*(x, y) = \delta^*(x, y)x_s + \sum_{i \in G_A \setminus \{1, 2, \dots, s-1\}} x_i$ とプレイヤー B が最終的に獲得する得点合計 $V^*(x, y)$

$\equiv (1 - \delta^*(x, y))y_s + \sum_{i \in G_B \cup \{1, 2, \dots, s-1\}} y_i$ とが一致するよう内生的に決定される。

ブラムスとテイラー (Brams and Taylor 1996) によって証明されたように, AW 法による最終的な結果は, 表明された選好を基礎として衡平 (equitable), 無羨望 (envy-free), そして効率的 (efficient) である。ここで, 衡平であるとは, 両プレイヤーが最終的に獲得できる得点合計が等しいこと, すなわち $U^*(x, y) = V^*(x, y)$ を意味している。また, 無羨望であるとは, どのプレイヤーも自分が獲得している財の組と他のプレイヤーが獲得している財の組を取り替えようとは思わない状態, すなわち $U^*(x, y) \geq (1 - \delta^*(x, y))x_s + \sum_{i \in G_B \cup \{1, 2, \dots, s-1\}} x_i$ かつ $V^*(x, y) \geq \delta^*(x, y)y_s + \sum_{i \in G_A \cup \{1, 2, \dots, s-1\}} y_i$ となる状態を意味している。⁴⁾ さらに, 効率的であるとは, $U^*(x, y)$ と $V^*(x, y)$ とを同時に改善できる財の配分は存在しないこと (パレート効率性) を意味している。これらの性質の形式的な証明は幾分複雑であるが, 本稿で提示する図解による技法を用いれば, これらの性質を容易に理解することができる。

2 図解の技法

前節と同様に, x, y はプレイヤー A と B の表明された選好をそれぞれ表し, $T > 0$ は共通の持ち点を表すものとする。ここで各 $i \in G$ ごとに, x_i あるいは y_i のいずれか一方は厳密に正と仮定する。⁵⁾ プレイヤー A の獲得する得点合計を u , プレイヤー B の獲得する得点合計を v とする。ここで, u, v をそれぞれのプレイヤーの効用水準と同一視することができる。

与えられた x, y に対して, 次式が成立するように財の (再) 番号付けを行う。⁶⁾

$$\frac{y_1}{x_1} \leq \frac{y_2}{x_2} \leq \dots \leq \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} \leq \frac{y_n}{x_n}. \quad (1)$$

われわれの財の番号付けの方法がブラムスとテイラーによる財の番号付けの方法と異なっていることに注意しておこう。ブラムスとテイラーによる方法では, 勝者総取り段階において勝者が獲得した財についてのみ番号付けがなされているが, われわれはすべての財を (1) 式のように並べ替えている。

(1) 式の意味について検討しておこう。表明された選好の組 (x, y) の下で, 第 i 財を分割することによってプレイヤー A の獲得する効用水準 u を限界的に 1 単位増加させることを考える。このためには, $1/x_i$ 単位の第 i 財が必要である。さらに, $1/x_i$ 単位の第 i 財をプレイヤー B から取り去れば, プレイヤー B の効用水準 v は y_i/x_i 単位だけ減少することになる。すなわち, 得点の比率 y_i/x_i はプレイヤー A の効用水準を限界的に 1 単位増加させるための機会費用をプレイヤー B の効用水準で測ったものである。(1) 式は, プレイヤー A の効用水準を増加させることに関して “比較優位” をもつ順番に財を並べたものであることが分かる。さて, $\alpha(0) \equiv (0, T) \in \mathbb{R}_+^2$ とし, さらに $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, ベクトル $\alpha(i) \in \mathbb{R}_+^2$ を次のように定義する。

$$\alpha(i) = \left(\sum_{k=1}^i x_k, T - \sum_{k=1}^i y_k \right), i=1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

定義により、 $\alpha(n) = (T, 0)$ である。これら $n+1$ 個のベクトルを、横軸に u 、縦軸に v を測った u - v 平面上にプロットして番号の順番に結ぶと、 n 個の連続した線分 $\alpha(0)\alpha(1), \dots, \alpha(n-1)\alpha(n)$ で構成される折れ線グラフとなる。線分 $\alpha(i-1)\alpha(i)$ を単に“第 i 線分”と呼ぶことにする。第 i 線分の傾きは $-y_i/x_i$ に等しいので折れ線グラフは右下がりであり、(1)式より原点に向かって“凹”の形となることが分かる。⁷⁾

表明された選好の組 (x, y) に対して、上のように求めた折れ線は、表明された選好の下でのパレート効率的な得点の組 (u, v) を表している。⁸⁾ この折れ線を“効用可能性フロンティア”(Utility Possibility Frontier) と呼び、UPF と略記する。また、UPF の陰関数表示を $g(u, v; x, y) = 0$ とする。UPF は、両端点 $(0, T), (T, 0)$ を除いて、直線分 $T = u + v$ の右上方に位置していることに注意しておく。⁹⁾

UPF を用いると、AW 法の勝者総取り段階において両プレイヤーが獲得する効用水準 $U(x, y), V(x, y)$ を次の最大化問題の解として特徴づけることができる。

$$\max_{u, v} W(u, v) = u + v \quad \text{s.t.} \quad g(u, v; x, y) = 0. \quad (3)$$

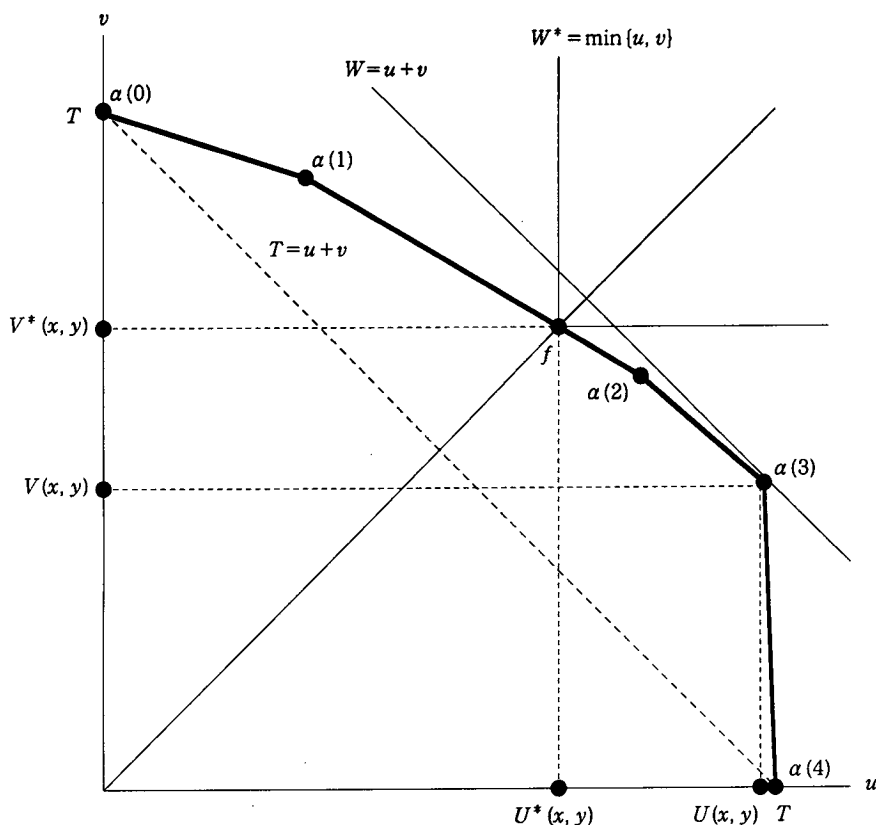
上の最大化問題における $W(u, v)$ の最大点を“初期配分点”と呼ぶ。この点は UPF と傾き -1 の直線との接点となっている。(3)式における関数 W を社会的厚生関数と見なせば、AW 法における勝者総取り段階は、2人・多数財分割問題における「功利主義的社会最適」を実現するものと見ることができる。

初期配分点は $\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(n)$ の少なくとも一つの点で達成される。¹⁰⁾ (3)式の解となる端点のうち最大の番号のものを $\alpha(t)$ として、これを初期配分点としよう。 $\alpha(t)$ を UPF の図解から探し出すには、 $W = u + v$ の直線を上下にスライドさせて、UPF との接点を求めればよい。UPF の構成の仕方から、すべての $i \leq t$ に対して $y_i/x_i \leq 1$ が成立し、すべての $i > t$ に対して $y_i/x_i > 1$ が成立する。したがって、プレイヤー A は $i \leq t$ となる第 i 財のすべてを、そしてプレイヤー B は $i > t$ となる第 i 財のすべてを勝者総取り段階において受け取ることになる。すなわち、 $G_A = \{1, 2, \dots, t-1, t\}$ 、 $G_B = \{t+1, t+2, \dots, n-1, n\}$ である。

次に衡平性調整について検討してみよう。衡平性の実現のためには $u = v$ となることが必要であり、しかも AW 法は効率的な結果をもたらすことが分かっているため、プレイヤー A と B とが衡平性調整が完了した後に獲得できる効用水準 $U^*(x, y), V^*(x, y)$ は、UPF の図解において原点を通る45度線と UPF との交点から読みとることができる。この交点を $f = (U^*(x, y), V^*(x, y))$ のように表し、“最終配分点”と呼ぶ。

最終配分点が位置する線分の番号 s は、衡平性調整の過程において実際に分割されなければならない財の番号を表す。第 s 財に対するプレイヤー A のシェア $\delta^*(x, y)$ は、2点

図1 AW図



$\alpha(s-1)$ と f との長さの第 s 線分の長さに対する比率によって表される。すなわち、 $\delta^*(x, y) = |\alpha(s-1)f| / |\alpha(s-1)\alpha(s)|$ ¹¹⁾ である。これに対応して、第 s 財に対するプレイヤー B のシェアは $1 - \delta^*(x, y) = |f\alpha(s)| / |\alpha(s-1)\alpha(s)|$ のように表される。

さらに、あるプレイヤーから他のプレイヤーに対してどの財が移転されなければならないのかについては、初期配分点と最終配分点の間にある線分の番号を読みとることで求められる。すなわち、もし $s < t$ ならば、第 $s+1$ 財から第 t 財までのすべてと第 s 財の $(1 - \delta^*(x, y)) \times 100\%$ がプレイヤー A から B に移転され、逆に $s > t$ ならば、第 $t+1$ 財から第 $s-1$ 財までのすべてと第 s 財の $\delta^*(x, y) \times 100\%$ がプレイヤー B から A に向かって移転されることになる。

図1は、われわれの図解による技法を表したものである。2人・4財を含む公平分割問題を考える。プレイヤーを A, B 、財の集合を $G = \{1, 2, 3, 4\}$ 、持ち点を $T = 100$ とする。各プレイヤーの表明された選好は、 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (30, 50, 18, 2)$ 、 $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (10, 30, 15, 45)$ のようであったとする。明らかに、 $y_1/x_1 < y_2/x_2 < y_3/x_3 < y_4/x_4$ であり、

$\alpha(0) = (0, 100)$, $\alpha(1) = (30, 90)$, $\alpha(2) = (80, 60)$, $\alpha(3) = (98, 45)$, $\alpha(4) = (100, 0)$ となっている。この状況における UPF は図1の折れ線 $\alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\alpha(3)\alpha(4)$ となる。

初期配分点は $\alpha(3)$ である。 $t=3$ なので、AW 法の勝者総取り段階において、プレイヤー A は第1財から第3財までのすべてを受け取り、プレイヤー B は第4財のすべてを受け取る。したがって、 $U(x, y) = x_1 + x_2 + x_3 = 30 + 50 + 18 = 98$, $V(x, y) = y_4 = 45$ となる。 $U(x, y) = 98 > 45 = V(x, y)$ なので、いくらかの財が衡平性調整の段階においてプレイヤー A から B へと移転されなければならない。

これに対して、原点を通る45度線と UPF との交点の位置から、最終配分点は第2線分上にあることが分かる。初期配分点と最終配分点との間にある線分の番号は3と2であり、 $s = 2 < 3 = t$ であることから、第3財のすべてがプレイヤー A から B に移転されなければならない。さらに第2財は両者の間で分割されなければならないことが示される。第2財に対するプレイヤー A のシェアは $\delta^*(x, y) = |\alpha(1)f| / |\alpha(1)\alpha(2)| = 0.75$ となる。したがって、第2財の25%がプレイヤー A から B へと移転されなければならない。結局、 $U^*(x, y) = x_1 + 0.75x_2 = 30 + 0.75 \times 50 = 67.5$, $V^*(x, y) = 0.25y_2 + y_3 + y_4 = 0.25 \times 30 + 15 + 45 = 67.5$ となる。明らかに、 $U^*(x, y) = V^*(x, y)$ である。

このとき、AW 法による結果——最終配分点 f ——の効率性は f が UPF 上に位置することによって表されている。衡平性は最終配分点 f が原点を通る45度線上にあることによって表されている。さらに、最終配分点 f が線分 $T = u + v$ の右上に位置していることおよび原点を通る45度線上にあることから、 $U^*(x, y) > T/2$ および $V^*(x, y) > T/2$ が導かれるので、 f が無羨望であることも示される。¹²⁾

3 戦略的操作可能性

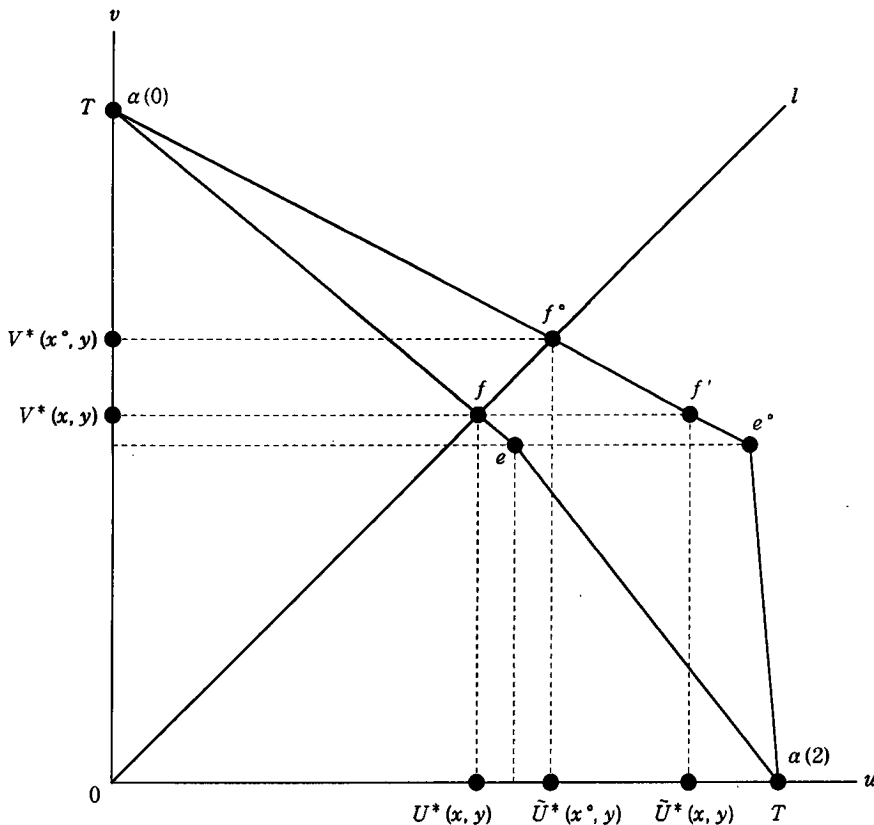
ブラムスとテイラーによって指摘されているように、AW 法はプレイヤーによる戦略的な選好の虚偽申告に対して頑健ではない——すなわち、個々のプレイヤーの観点からすれば、自らの真の選好を表明する代わりに偽りの選好を表明することによって、自らの獲得できる得点を（真の選好の観点から見て）有利に導くよう操作することが可能である。本節では、このような戦略的操作可能性が、われわれの提示した図解においてどのように表現されるのかについて示す。

記号法の便宜のため、表明された選好の組が (x, y) であるときにプレイヤー A と B とが獲得する“見かけ上の効用水準”をこれまで通りそれぞれ $U^*(x, y)$, $V^*(x, y)$ と表し、さらに“真の選好に基づく効用水準”をそれぞれ $\tilde{U}^*(x, y)$, $\tilde{V}^*(x, y)$ と表すことにする。 $U^*(x, y)$ と $V^*(x, y)$ とは観察可能であるが、 $\tilde{U}^*(x, y)$ と $\tilde{V}^*(x, y)$ は観察可能ではないことに注意しておこう。

議論を単純化するために、2人・2財の公平分割問題を考える。ここで、プレイヤーAの真の選好は $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ 、プレイヤーBの表明された選好は $y = (y_1, y_2)$ であり、さらに $x_1^* > y_1$ を仮定しておく（当然、 $x_2^* < y_2$ である）。もしプレイヤーAが真の選好 x^* を表明し、プレイヤーBが y を表明するならば、対応するUPFは図2の折れ線 $\alpha(0)e^{\alpha(2)}$ のようになる。この場合、初期配分点は e^* 、最終配分点は f^* 、さらに第1財に対するプレイヤーAのシェアは $\delta^*(x^*, y) = |\alpha(0)f^*| / |\alpha(0)e^*|$ となる。AW法の下で、結局、プレイヤーAは $\tilde{U}^*(x^*, y)$ を獲得し、プレイヤーBは $V^*(x^*, y)$ を獲得する。

さて、プレイヤー A が自らの選好に関して虚偽の申告をすることによって、獲得する得点を増加させられることを示そう。今、プレイヤー A が $y_1 < x_1 < x_1^*$ を満たすような選好 $x = (x_1, x_2)$ を表明した場合を考える。対応する UPF は図 2 の折れ線 $\alpha(0)e\alpha(2)$ のようになる。初期配分点は e となり、最終配分点は f となる。このような選好に関する虚偽申告によって、プレイヤー A の第 1 財に対するシェアは $\delta^*(x^*, y) = |\alpha(0)f^*| / |\alpha(0)e^*|$ から $\delta^*(x, y) = |\alpha(0)f| / |\alpha(0)e|$ へと上昇し、“真の選好に基づく”最終配分点は折れ線 $\alpha(0)e^*\alpha(2)$

圖 2 戰略的操作可能性



上の f' となる。 f' 点は、表明された選好 (x, y) に基づく最終配分点 f を通る水平線と真の選好に基づく UPF との交点によって表される。したがって、この虚偽申告によって、表明された選好に基づく効用は $\bar{U}^*(x^0, y)$ から $U^*(x, y)$ へと減少するものの、真の選好に基づく効用は $\bar{U}^*(x^0, y)$ から $\bar{U}^*(x, y)$ へと増加することになる。プレイヤー B の効用は $V^*(x^0, y)$ から $V^*(x, y)$ へと減少するので、プレイヤー A による戦略的虚偽申告はプレイヤー B を害するものであることが分かる。

4 お わ り に

われわれの AW 法に関する図解を利用することによって、AW 法のオリジナルの手続きを次のように簡略化できることが分かる。すなわち、(i) 第 1 に、表明された選好の組 (x, y) に基づいて UPF を描く。(ii) 第 2 に、原点を通る 45 度線を描き、最終配分点 f が位置する線分 (第 s 線分) を特定化する。(iii) 第 1 財から第 $s-1$ 財までのすべてと第 s 財の $\delta^*(x, y) \equiv |\alpha(s-1)f| / |\alpha(s-1)\alpha(s)|$ 部分をプレイヤー A に引き渡し、第 $s+1$ 財から第 n 財までのすべてと第 s 財の $(1-\delta^*(x, y)) \times 100\%$ をプレイヤー B に引き渡す。このようにすることで、オリジナルの AW 法に含まれていた勝者総取り段階とそこからの衡平性調整段階を省略できるのである。

さらに、AW 図を注意深く観察すれば、最終配分点 $f = (U^*(x, y), V^*(x, y))$ は次の最大化問題の解として特徴づけられていることが分かる。

$$\max_{u, v} W^*(u, v) \equiv \min\{u, v\} \quad \text{s.t.} \quad g(u, v; x, y) = 0. \quad (4)$$

上の問題における目的関数 W^* は平等主義的社会厚生関数と見なすことができる。これより、AW 法が 2 人・多数財公平分割問題における「平等主義的社会最適」を実現するものであることが分かる。AW 法の持つ三つの性質、すなわち効率性・衡平性・無羨望が必ずしも平等主義的社会最適を含意するとはかぎらないから、上の観察は AW 法に関する新たな特徴付けとなっているのである。

補論——UPF の効率性

この補論では、UPF の任意の第 s 線分上の任意の点 (u^s, v^s) が表明された選好の組 (x, y) の下で実際に効率的であることを示す。

所与の表明された選好の組 (x, y) に対して、変数 $p \in [0, 1]$ をパラメータとして含む次のような最大化問題を考える。

$$\max_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W^p \equiv pu + (1-p)v \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} u = \sum_{i \in G} \lambda_i x_i, \\ v = \sum_{i \in G} (1-\lambda_i) y_i, \\ \lambda_i \in [0, 1], i \in G. \end{cases} \quad (5)$$

上の問題の解を $\lambda_i(p)$ ($i \in G$) のように表す。単純化のために、以下ではすべての $i \in G$ について $x_i > 0$ および $p < 1$ を仮定しておく (ある $i \in G$ について $x_i = 0$ あるいは $p = 1$ の場合についても同様の証明は可能である)。制約条件の u, v を目的関数 W^p に代入して整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} W^p &= p \left(\sum_{i \in G} \lambda_i x_i \right) + (1-p) \left(\sum_{i \in G} (1-\lambda_i) y_i \right) \\ &= (1-p)T + \sum_{i \in G} (1-p)x_i \left[\frac{p}{1-p} - \frac{y_i}{x_i} \right] \lambda_i. \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 T はプレイヤーに共通の持ち点である。すべての $i \in G$ について $x_i > 0$ なので、上の最大化問題の解は次のようになる。すなわち、 $p/(1-p) > y_i/x_i$ ならば $\lambda_i(p) = 1$ 、 $p/(1-p) < y_i/x_i$ ならば $\lambda_i(p) = 0$ 、さらに $p/(1-p) = y_i/x_i$ ならば $\lambda_i(p)$ は閉区間 $[0, 1]$ に含まれる任意の値をとる。

さて任意の (u_s, v_s) が効率的であることを示すには、上の最大化問題において $u^s = \sum_{i \in G} \lambda_i(p) x_i$ 、 $v^s = \sum_{i \in G} (1-\lambda_i(p)) y_i$ を満たす適切な p が存在することを示せば十分である。まず、UPF の定義より、ある $\delta \in [0, 1]$ に対して、 $u^s = \delta x_s + \sum_{i=1}^{s-1} x_i$ 、 $v^s = (1-\delta) y_s + \sum_{i=s+1}^n y_i$ となっていることに注意しておく。ここで、 p_s を $p_s/(1-p_s) = y_s/x_s$ となるように定義する。われわれの財の番号付けの仕方から、 $i \leq s-1$ ならば $\lambda_i(p_s) = 1$ 、 $i \geq s+1$ ならば $\lambda_i(p_s) = 0$ 、さらに $i = s$ ならば $\lambda_s(p_s)$ は任意であることが分かる。この任意性によって、 $\lambda_s(p_s)$ を先の δ に等しくすることができる。したがって、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \sum_{i \in G} \lambda_i(p^s) x_i &= \sum_{i \leq s-1} \lambda_i(p^s) x_i + \lambda_s(p^s) x_s + \sum_{i \geq s+1} \lambda_i(p^s) x_i \\ &= \delta x_s + \sum_{i=1}^{s-1} x_i \\ &= u^s. \end{aligned} \quad (7)$$

同様にして、 $\sum_{i \in G} (1-\lambda_i(p^s)) y_i = v^s$ を得る。以上で証明は終わりである。

注

* 神戸大学大学院経済学研究科教授。連絡先：〒657-8501 神戸市灘区六甲台町2-1, 神戸大学大学院経済学研究科気付。電話：+78-803-6837 (研究室直通)。Fax：+78-803-7293 (研究科事務局)。E-mail: nakanishi@econ.kobe-u.ac.jp

- 1) 効率性、衡平性、無羨望の正確な意味については、本節の最後に示す。
- 2) 本稿の目的は、AW 法の性質の理解の促進という、もっぱら教育的配慮に基づくものである。
- 3) もちろん、 $0 \leq \delta \leq 1$ である。
- 4) これらの不等式の右辺は、自分が獲得している財の組と他のプレイヤーが獲得している財の組とを取り替えたときに獲得できる得点合計を表している。
- 5) もし、ある $i \in G$ について $x_i = y_i = 0$ ならば、この財についてはプレイヤー間での分割を考える必要はなく、単にこの財を捨ててしまえばよいだけである。
- 6) もし、いくつかの $i \in G$ について $x_i = 0$ ならば、 y_i/x_i は無限大に等しいと考える。
- 7) 図1を見よ。
- 8) これは、ほとんど明白な事実ではあるが証明が必要である。補論を参照のこと。
- 9) もしすべての $i \in G$ について $x_i = y_i$ ならば、UPF と直線 $T = u + v$ とは $\mathbb{R}_+^2$ 上で一致する。

- 10) 最大化問題(3)は、凸多面体上での線形関数の最大化なので、解は凸多面体の端点となる。
- 11) 2点 a, b に対して $|ab|$ のような表現は、2点を結ぶ線分 ab の長さを表す。
- 12) プレイヤー A が入手した財から獲得できる効用水準は $U^*(x, y)$ である。持ち点は T なので、入手できていない財から獲得できる効用水準、すなわちプレイヤー B が獲得している財からプレイヤー A が獲得できるはずの効用水準は $T - U^*(x, y)$ である。したがって、 $U^*(x, y) > T/2$ ならば、プレイヤー A がプレイヤー B と財を取り替えたとしても、より高い効用水準を実現することはできない。全く同様のことがプレイヤー B にもあてはまる。
- 13) このとき、 $\tilde{U}^*(x^*, y) = U^*(x^*, y)$ が成立している。

参 考 文 献

- Brams, S. J. and A. D. Taylor, 1996. *Fair Division: From cake-cutting to dispute resolution*, Cambridge University Press.