



ブートストラップ法によるリッジ回帰数定量の精度評価

大谷, 一博

(Citation)

国民経済雑誌, 195(4):17-28

(Issue Date)

2007-04

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/00056147>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00056147>



ブートストラップ法による リッジ回帰推定量の精度評価

大 谷 一 博*

本稿では、Huang (1999) によって考察された個別回帰係数のリッジ回帰推定量を取り扱う。このリッジ回帰推定量のモーメントの厳密な公式が導出されるが、この厳密な公式は、非常に複雑で、また未知母数に依存するため、極めて取り扱い難いものである。このことから、推定値の精度を表す標準誤差を評価するのが極めて困難であるので、ブートストラップ法を利用して個別回帰係数のリッジ回帰推定量の精度を推定する手順を示す。モンテカルロ実験の結果は、ブートストラップ法によって推定される個別回帰係数のリッジ回帰推定量の精度は、かなり正確であることを示している。応用例として、ブートストラップ法によって日本の輸入需要関数を推定する。

キーワード 推定精度, ブートストラップ法, リッジ回帰推定量

1 序

多重共線性が問題となる場合、Hoerl and Kennard (1970) によって提唱されたリッジ回帰推定量 (ridge regression estimator) を使用することは、問題解決の一つの手段である。しかし、リッジ回帰推定量の平均自乗誤差は、多重共線性の問題に関係なく、パラメータ空間のある範囲で、最小自乗推定量の平均自乗誤差よりも小さい。(例えば、Dwivedi et al. (1980), Kozumi and Ohtani (1994) 参照。) このことから、例え多重共線性の問題が無くても、リッジ回帰推定量の方が、理論的には優れている場合がある。

リッジ回帰推定量は、最小自乗推定量よりも小さな MSE をもち得るが、リッジ回帰推定量が応用研究で実際に使用されることはほとんどない。この理由は、リッジ回帰推定量の分布関数とモーメントが非常に複雑で、また未知母数に依存するため、極めて取り扱い難いものであり、推定値の精度を表す標準誤差を評価するのが極めて困難であるからである。このように、推定値の精度を表す標準誤差を評価するのが極めて困難な場合、Efron (1979) によって提唱されたブートストラップ法が有効であることが多い。Chi and Judge (1985), Brownstone (1990), Yi (1991) and Adkins (1992) および Adkins (1992) は、Stein 型推定量

のモーメントおよび精度をブートストラップ法によって評価することが有効であることをモンテカルロ実験によって示している。また、大谷(1997)は、最小平均自乗誤差推定量のモーメントおよび精度をブートストラップ法によって評価することが有効であることをモンテカルロ実験によって示している。

応用回帰分析では、回帰係数全体よりも個別回帰係数の推定に興味の有る場合がある。Huang(1999)は、このような状況のいくつかの例を示して、個別回帰係数のリッジ回帰推定量の大標本特性および小標本特性について論じている。また、Ohtani(1997)は、個別回帰係数のStein型推定量および最小平均自乗誤差推定量の小標本特性について論じている。

本稿では、Huang(1999)によって考察された個別回帰係数のリッジ回帰推定量を取り扱う。第2節ではモデルと推定量が提示され、リッジ回帰推定量のモーメントの厳密な公式が導出される。この厳密な公式は、非常に複雑で、また未知母数に依存するため、極めて取り扱い難いものであり、推定値の精度を表す標準誤差を評価するのが極めて困難である。このことから、第3節では個別回帰係数のリッジ回帰推定量の精度を推定するためのブートストラップ法の手順を示す。第4節で示されるモンテカルロ実験の結果は、ブートストラップ法によって推定される個別回帰係数のリッジ回帰推定量の精度は、かなり正確であることを示している。最後に、第5節では、応用例として、ブートストラップ法によって日本の輸入需要関数を推定する。

2 モデルと推定量

次の線形回帰モデルを考える。

$$y = x_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \epsilon \quad (1)$$

ただし、 y は従属変数の観測値の $n \times 1$ ベクトル、 x_1 は1番目の独立変数の観測値の $n \times 1$ ベクトル、 X_2 はそれ以外の独立変数の観測値の $n \times (k-1)$ 行列、 β_1 は x_1 に対するスカラーの回帰係数、 β_2 は X_2 に対する回帰係数の $k-1$ ベクトル、 ϵ は誤差項の $n \times 1$ ベクトルである。ここでは、個別回帰係数の代表として1番目の独立変数に対する回帰係数 β_1 を想定している。また、 x_1 と X_2 は非確率変数、 $[x_1, X_2]$ はフルランクの $n \times k$ 行列、 ϵ は n 変量正規分布 $N(0, \sigma^2 I_n)$ に従うと仮定する。ただし、 I_n は n 次の単位行列である。

$X = [x_1, X_2]$ とおくと、 β の最小自乗推定量は

$$b = (X'X)^{-1}X'y \quad (2)$$

であり、 β_1 に対する最小自乗推定量は、

$$b_1 = (x_1'M_2x_1)^{-1}x_1'M_2y, \quad (3)$$

である。ただし、

$$M_2 = I_n - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2' \quad (4)$$

b_1 の分布は、平均 β_1 、分散 $\sigma^2(x_1'M_2x_1)^{-1}$ の正規分布である。

Huang (1999) に従うと、 β_1 のリッジ回帰推定量は、

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \left(x_1'M_2x_1 + \frac{s^2}{b_1^2} \right)^{-1} x_1'M_2y \\ &= \left(\frac{(x_1'M_2x_1)b_1^2}{(x_1'M_2x_1)b_1^2 + s^2} \right) b_1 \end{aligned} \quad (5)$$

である。ただし、 $s^2 = (y - Xb)'(y - Xb)/(n - k)$ 。

$\hat{\beta}_1$ の $2m$ 次のモーメントは

$$E[(\hat{\beta}_1)^{2m}] = E \left[\left(\frac{(x_1'M_2x_1)b_1^2}{(x_1'M_2x_1)b_1^2 + s^2} \right)^{2m} b_1^{2m} \right] \quad (6)$$

であり、 $(2m+1)$ 次のモーメントは

$$E[(\hat{\beta}_1)^{2m+1}] = E \left[\left(\frac{(x_1'M_2x_1)b_1^2}{(x_1'M_2x_1)b_1^2 + s^2} \right)^{2m+1} b_1^{2m+1} \right] \quad (7)$$

である。関数 $H(p, q)$ と $J(p, q)$ を次のように定義する。

$$H(p, q) = E \left[\left(\frac{(x_1'M_2x_1)b_1^2}{(x_1'M_2x_1)b_1^2 + s^2} \right)^p (b_1^2)^q \right] \quad (8)$$

$$J(p, q) = E \left[\left(\frac{(x_1'M_2x_1)b_1^2}{(x_1'M_2x_1)b_1^2 + s^2} \right)^p (b_1^2)^q b_1 \right] \quad (9)$$

このとき、 $2m$ 次と $(2m+1)$ 次のモーメントは、それぞれ次のように書ける。

$$E[(\hat{\beta}_1)^{2m}] = H(2m, m) \quad (10)$$

$$E[(\hat{\beta}_1)^{2m+1}] = J(2m+1, m) \quad (11)$$

付録において示されるように、 $H(p, q)$ と $J(p, q)$ は、最終的には

$$H(p, q) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\lambda) G_i(p, q), \quad (12)$$

$$J(p, q) = \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\lambda) G_{i+1}(p, q), \quad (13)$$

として表される。ただし、 $w_i(\lambda) = \exp(-\lambda/2) (\lambda/2)^i / i!$, $\lambda = (x_1'M_2x_1)\beta_1^2/\sigma^2$ であり、

$$\begin{aligned} G_i(p, q) &= 2^q \nu^p \left(\frac{\sigma^2}{x_1'M_2x_1} \right)^q \frac{\Gamma((\nu+1)/2 + q + i)}{\Gamma(1/2 + i) \Gamma(\nu/2)} \\ &\quad \times \int_0^1 t^{1/2 + p + q + i - 1} (1-t)^{\nu/2 - 1} [1 + (\nu-1)t]^{-p} dt \end{aligned} \quad (14)$$

である。

(12)と(13)を(10)と(11)に代入すると、 $\hat{\beta}_1$ のモーメントの厳密な公式が求められる。これらの式を使うと、 $\hat{\beta}_1$ の平均と分散を次のように表すことができる。

$$E[\hat{\beta}_1] = J(1, 0) = \beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\lambda) G_{i+1}(1, 0), \quad (15)$$

$$V(\hat{\beta}_1) = H(2, 1) - [J(1, 0)]^2 \\ = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\lambda) G_i(2, 1) - \left[\beta_1 \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\lambda) G_{i+1}(1, 0) \right]^2 \quad (16)$$

$V(\hat{\beta}_1)$ の正の平方根が $\hat{\beta}_1$ の標準誤差であり、推定の精度を表す尺度となる。

これらの公式は、Huang (1999) によって示された $\hat{\beta}_1$ の 1 次と 2 次のモーメントを表す厳密な公式の代替的な表現となっている。

3 ブートストラップ

前節の(15)と(16)で示されている $\hat{\beta}_1$ の平均と分散は非常に複雑な式であり、また未知母数に依存するので、推定の精度を表す標準誤差を評価するのが極めて困難である。このような場合、Efron (1979) によって提唱されたブートストラップ法が有効であることが多い。ここでは、 $\hat{\beta}_1$ の平均と分散をブートストラップ法を用いて推定する手順を示す。

(1) y と X のデータを所与としたとき、まず β の最小自乗推定値 $b = (X'X)^{-1}X'y$ を計算し、これを用いて残差ベクトル $e = y - Xb$ を計算する。

(2. a) パラメトリックブート・ストラップの場合： e を用いて σ^2 の推定値 $s^2 = e'e/(n-k)$ を計算する。Press et al. (1986) で示された正規乱数生成器を用いて $N(0, s^2 I_n)$ から大きさ n の正規乱数 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$ を生成し、 y のブートストラップ標本 $y^* = Xb + \hat{e}$ を生成する。ただし $\hat{e} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n)'$ 。このとき、 β の推定値は $b^* = (X'X)^{-1}X'y^*$ であり、残差は $e^* = y^* - Xb^*$ である。

(2. b) ノンパラメトリック・ブートストラップの場合：Wu (1986) に従って、まず e のスケールを $[n/(n-k)]^{1/2}e$ のように変換し、変換された残差ベクトルから、大きさ n の無作為標本 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$ を復元抽出によって無作為に抽出する。 $\hat{e} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n)'$ を用いて y のブートストラップ標本 y^* を生成する。このとき、 β の推定値 b^* と残差 e^* が、パラメトリック・ブートストラップの場合と同様にして得られる。

(3) β_1 のリッジ回帰推定値は

$$\hat{\beta}_1^* = \left(\frac{(x_1' M_2 x_1) b_1^{*2}}{(x_1' M_2 x_1) b_1^{*2} + s^{*2}} \right) b_1^*, \quad (17)$$

として得られる。ただし、 b_1^* は b^* の第 1 要素であり、 $s^{*2} = e^{*'}e^*/(n-k)$ である。

(4) ステップ(2)と(3)を B 回繰り返すと、 $\hat{\beta}_1^*$ の B 個の推定値が得られる。第 i 回目の繰

り返しで得られた $\hat{\beta}_i^*$ の値を $\hat{\beta}_i^*(i)$ とすると,

$$\bar{\beta}_i^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\beta}_i^*(i) \quad (18)$$

が β_i に対するリッジ回帰推定量の期待値 (平均) のブートストラップ推定値であり,

$$S^{*2} = \frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{\beta}_i^*(i) - \bar{\beta}_i^*)^2 \quad (19)$$

が分散のブートストラップ推定値である。この分散の正の平方根 S^* が、 $\hat{\beta}_i$ の推定の精度を表す標準誤差である。

4 モンテカルロ実験

個別回帰係数に対するリッジ回帰推定量の平均と標準誤差のブートストラップ推定値は前節で示された手順で得られるが、それらの小標本特性の理論的な分析は極めて難しい。従って、ここでは、個別回帰係数に対するリッジ回帰推定量の平均と標準誤差のブートストラップ推定値の小標本特性をモンテカルロ実験によって調べる。モンテカルロ実験は、Adkins (1992) と同様の方法で行われた。このモンテカルロ実験によって得られた平均と標準誤差の経験値を、厳密な公式(15)と(16)に基づいて得られる平均と標準誤差と比較することによって、ブートストラップ推定値の近似の良否について調べることができる。

モンテカルロ実験で使用された k と n の値は、 $k=1, 3, 4, 8$ および $n=20, 30, 40$ であった。Press et al. (1986) で示された標準正規乱数生成器を用いて生成された乱数を使って $n \times k$ 行列を作成し、この行列を積和行列が直交行列になるように変換したものを独立変数の行列とした。生成された独立変数の行列を $X = [x_1, X_2]$ とすると、 $X'X = I_n$ であるので、 λ は次のようになる。

$$\lambda = \frac{(x_1' M_2 x_1) \beta_1^2}{\sigma^2} = \frac{\beta_1^2}{\sigma^2} \quad (20)$$

よって、 λ の値が与えられると、 β_1 の値は $\beta_1 = \pm \sqrt{\lambda} \sigma$ となる。 $\sigma=1$ とおき、 λ の値として正の平方根を用いたので、 β_1 の値は、 $\beta_1 = \sqrt{\lambda}$ となる。実験では、他のすべての係数も $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = \sqrt{\lambda}$ とおいたので、従属変数の値は

$$Y_i = \sqrt{\lambda} x_{i1} + \sqrt{\lambda} x_{i2} + \dots + \sqrt{\lambda} x_{ik} + \epsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (21)$$

から生成された。ただし、 x_{it} は第 t 期の第 i 番目の独立変数の値であり、 ϵ_i は、Press et al. (1986) で示された標準正規乱数生成器を用いて生成された標準正規乱数である。

モンテカルロ実験での繰り返しの回数は 1,000 回であり、ブートストラップ法での繰り返しの回数も 1,000 回とした ($B=1,000$)。独立変数は非確率変数であると仮定されているので、モンテカルロ実験での繰り返しでは、独立変数の値は固定された。モンテカルロ実験で

の第 j 回目の繰り返しで得られた $\hat{\beta}_i$ のブートストラップ推定値を $\hat{\beta}_i^*(j)$ とすると、 $(1/1000) \sum_{j=1}^{1000} \hat{\beta}_i^*(j)$ が、モンテカルロ実験で得られるリッジ回帰推定量の期待値（平均）の経験値である。リッジ回帰推定量の標準誤差の経験値も、同様の方法によって得られる。

同じ λ の値に対して、公式(15)と(16)に基づいて、厳密な平均と標準誤差を数値計算によって求めた。上記のモンテカルロ実験と厳密な平均と標準誤差の数値計算は、FORTRAN 言語を用いて、パーソナル・コンピュータによって行われた。公式(15)と(16)に含まれる $G_i(p, q)$ は積分によって表されているので、積分範囲を200等分した Simpson 3/8 則を用いて数値積分を行った。また、公式(15)と(16)は、無限級数によって表されているので、 10^{-12} で収束判定を行った。

表 1 に、 $n=30$, $k=2, 4, 8$ に対する結果が示されている。表 1 において、 $\beta_1=\sqrt{\lambda}$ である。表 1 の“Exact”の“Mean”の欄は(15)に基づいて計算された平均の理論値であり、“Std.”の欄は(16)に基づいて計算された標準誤差の理論値である。また、“Parametric”の欄はパラメトリック・ブートストラップに基づく平均と標準誤差を、“Non-para”の欄はノンパラメトリック・ブートストラップに基づく平均と標準誤差を示している。表 1 で示された結果は、実験全体の代表的な結果であるので、ここでは表 1 に基づいて議論を行う。表 1 から、厳密な平均と標準誤差は、 k の値が変化しても、大きく変化せず、ブートストラップによる平均と標準誤差も大きく変化しないことが分かる。ここでは示されていないが、 n の値が変化しても、厳密な平均と標準誤差は大きく変化せず、ブートストラップによる平均と標準誤差も大きく変化しない。

λ の値が大きいとき（例えば、 $\lambda \leq 1$ ）、ブートストラップ推定値の平均は、厳密な平均よりもかなり大きい。特に、 λ の値が 0 に近いとき（ $\lambda=0.01$ ）、ブートストラップ推定値の平均は、厳密な平均よりも相当大きくなる。しかし、 $\lambda \geq 1$ のとき、ブートストラップ推定値の平均は、厳密な平均とそれほど離れていない。標準誤差に関しても、 λ の値が大きいとき（ $\lambda \leq 1$ ）、ブートストラップ推定値は、厳密な値よりも大きい。特に、 λ の値が 0 に近いとき（ $\lambda=0.01$ ）、ブートストラップ推定値の標準誤差は、厳密な標準誤差よりも相当大きくなる。この λ の値が大きいときブートストラップ推定値の標準誤差が厳密な標準誤差よりも大きくなるという現象は、Stein 型推定量を扱った Adkins (1992) および最小平均自乗誤差推定量を扱った大谷 (1997) でも現れている。しかし、 $\lambda \geq 1$ のとき、ブートストラップ推定値の標準誤差は、厳密な標準誤差に極めて近い値となっている。また、パラメトリック・ブートストラップに基づく標準誤差とノンパラメトリック・ブートストラップに基づく標準誤差の間には大きな差はないように思われる。

全体としては、パラメトリック・ブートストラップ推定値およびノンパラメトリック・ブ

表1 期待値と標準誤差の理論値およびブートストラップ法による期待値と標準誤差の推定値 ($n=30, k=2, 4, 8$)

k	λ	β_1	Exact		Parametric		Non-para	
			Mean	Std.	Mean	Std.	Mean	Std.
2	.01	.100	.066	.691	.134	.775	.098	.739
	.10	.316	.211	.709	.252	.768	.241	.752
	.50	.707	.488	.775	.573	.809	.554	.785
	1.00	1.000	.715	.841	.804	.838	.799	.817
	2.00	1.4141	1.072	.932	1.155	.889	1.195	.856
	3.00	1.732	1.372	.989	1.468	.933	1.440	.881
	5.00	2.236	1.882	1.047	1.938	.988	1.919	.953
	10.00	3.162	2.865	1.071	2.818	1.046	2.880	1.002
	25.00	5.000	4.802	1.040	4.781	1.046	4.759	1.002
	50.00	7.071	6.930	1.020	6.932	1.011	6.927	1.006
	100.00	10.000	9.900	1.010	9.922	1.016	9.900	.984
4	.01	.100	.066	.692	.094	.770	.134	.747
	.10	.316	.211	.709	.214	.782	.243	.743
	.50	.707	.488	.776	.544	.803	.572	.775
	1.00	1.000	.716	.841	.789	.842	.835	.814
	2.00	1.414	1.073	.932	1.148	.883	1.196	.865
	3.00	1.732	1.372	.989	1.411	.912	1.494	.890
	5.00	2.236	1.882	1.047	1.925	1.000	1.960	.936
	10.00	3.162	2.865	1.071	2.907	1.036	2.869	1.017
	25.00	5.000	4.802	1.040	4.836	1.045	4.816	1.001
	50.00	7.071	6.930	1.021	6.903	1.026	6.991	.987
	100.00	10.000	9.900	1.010	9.945	1.008	9.885	.971
8	.01	.100	.066	.693	.079	.775	.083	.748
	.10	.316	.211	.710	.283	.794	.245	.773
	.50	.707	.488	.776	.540	.804	.571	.773
	1.00	1.000	.716	.842	.780	.828	.819	.820
	2.00	1.414	1.073	.933	1.162	.888	1.159	.856
	3.00	1.732	1.373	.990	1.428	.914	1.450	.905
	5.00	2.236	1.883	1.047	1.920	.972	1.942	.941
	10.00	3.162	2.865	1.072	2.928	1.035	2.842	1.006
	25.00	5.000	4.802	1.040	4.768	1.044	4.798	1.008
	50.00	7.071	6.930	1.021	6.942	1.027	6.945	.991
	100.00	10.000	9.900	1.010	9.881	1.001	9.896	.969

ートストラップ推定値は、ともにかなり正確に厳密な平均と標準誤差を推定している。母数の真値が既知でないと厳密な平均と標準誤差を計算することはできないが、通常はそれらの値は未知であるので、応用研究で厳密な平均と標準誤差を計算することは困難である。しかし、ブートストラップ法では、母数の値が未知であっても、平均と標準誤差を推定することができるので、リッジ回帰推定量を応用研究で使用する場合、ブートストラップ法は有効な

手段である、といえる。

5 応 用 例

ブートストラップ法を使ってリッジ回帰推定を行う例として、日本の輸入需要関数を取り扱う。ここでは、Murray and Ginman (1976) によって提唱された輸入価格と国内価格を別々の独立変数とする輸入需要関数の推定を行う。Murray and Ginman (1976) に従うと、輸入需要関数は次のように定式化される。

$$\log Q_t = \beta_1 + \beta_2 \log P_{Mt} + \beta_3 \log P_{Dt} + \beta_4 \log Y_t + \epsilon_t \quad (22)$$

ただし、 Q_t は第 t 期の日本の総輸入量、 P_{Mt} は第 t 期の輸入価格、 P_{Dt} は第 t 期の国内価格、 Y_t は第 t 期の所得である。使用されたデータは、2000年第1四半期から2005年第4四半期までの季節調整済四半期データである。すべてのデータは、神戸大学経済経営研究所の IMF データ・ベース CD-ROM 版 (2006, June) から抽出された。輸入量として Volume of Imports, 輸入価格として Import Prices, 国内価格として GDP Deflator, 所得として GDP Volume が使用され、すべてのデータは2000年を100とした指数で表示されている。

表 2 最小自乗法による輸入関数の推定結果

	β_1	β_2	β_3	β_4	R^2	$D-W$
推定値	-3.865	-0.333	-0.356	2.526	0.904	2.063
標準誤差	4.729	0.142	0.534	0.594		
t 値	-0.817	-2.344	-0.666	4.250		

まず、最小自乗法によって推定した結果を表 2 に示す。表 2 において、 R^2 は決定係数であり、 $D-W$ はダービン・ワトソン比である。表 2 から、輸入価格の弾力性 (β_2) は負で 5 % で有意であるが、国内価格の弾力性 (β_3) も負であり、理論的に期待される符号と逆であることが分かる。しかし、国内価格の弾力性は、10%でも有意ではないので、日本の輸入は、国内価格に影響されないのかも知れない。また、所得弾力性 (β_4) の推定値はかなり大きな値となっているが、符号も理論と一致しており、また 1 % で有意である。

次に、最小自乗推定量とリッジ回帰推定量のノンパラメトリック・ブートストラップ法による推定値、標準誤差および 95% 信頼区間の上限と下限を表 3 に示す。ここでのブートストラップにおける繰返し数は 10,000 回である ($B=10,000$)。表 3 の推定法の OLS は最小自乗推定量に基づいた推定結果を示し、Ridge はリッジ回帰推定量に基づいた推定結果を示している。表 2 の推定値と表 3 の OLS の結果を比較すると、ブートストラップ法で得られる標準誤差は、最小自乗法によって得られる標準誤差の良好な近似となっていることが分かる。

最小自乗推定量とリッジ回帰推定量を比較すると、リッジ回帰推定量の方が絶対値におい

表3 ノンパラメトリック・ブートストラップ法による
推定値, 標準誤差および95%信頼区間

推定法		β_1	β_2	β_3	β_4
OLS	推定値	-3.932	-0.333	-0.349	2.533
	標準誤差	4.727	0.142	0.533	0.596
	信頼下限	-13.118	-0.620	-1.376	1.346
	信頼上限	5.320	-0.058	0.716	3.693
Ridge	推定値	-2.776	-0.283	-0.240	2.396
	標準誤差	3.796	0.150	0.406	0.629
	信頼下限	-11.661	-0.588	-1.191	1.121
	信頼上限	2.900	-0.007	0.462	3.597

て小さな係数推定値を生み出している。リッジ回帰推定量は、最小自乗推定量を原点に向かって縮小する推定量であるので、これは予想される結果である。また、標準誤差を比較すると、 β_1 と β_3 の標準誤差はリッジ回帰推定値の方が小さいが、 β_2 と β_4 では逆の結果になっている。国内価格の弾力性 (β_3) の95%信頼区間は、いずれの推定量を使っても0を含んでいるので、ブートストラップ法で推定した場合でも有意な変数ではない。しかし、輸入価格の弾力性 (β_2) と所得弾力性 (β_4) の95%信頼区間は、いずれの推定量を使っても0を含んでいないので、ブートストラップ法で推定した場合でも有意な変数となる。

リッジ回帰推定値の平均と標準誤差を(15)と(16)から計算するには、非心パラメータ λ の推定値が必要であり、例えこれらの値を β と σ^2 の最小自乗推定値を使って推定するにしても、これらの式は無限級数で表されているので、計算は容易ではない。しかし、ブートストラップ法では、リッジ回帰推定値の平均と標準誤差を求めるのは容易であり、このことがブートストラップ法が有用な理由である。

付 録

ここでは、 $H(p, q)$ と $J(p, q)$ の明示的な式を導出する。まず、 $H(p, q)$ を導出するため、 $u_1 = (x_1' M_2 x_1 / \sigma^2) b_1^2$, $u_2 = \nu s^2 / \sigma^2$ ($\nu = n - k$) とおく。このとき、 u_1 は自由度1、非心パラメータ $\lambda = (x_1' M_2 x_1) \beta_1^2 / \sigma^2$ の非心カイ自乗分布に従い、 u_2 は自由度 ν のカイ自乗分布に従う。 u_1 と u_2 を使うと $H(p, q)$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 H(p, q) &= \left(\frac{\sigma^2}{x_1' M_2 x_1} \right)^p E \left[\left(\frac{u_1}{u_1 + u_2 / \nu} \right)^p u_1^q \right] \\
 &= \left(\frac{\sigma^2}{x_1' M_2 x_1} \right)^p \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{u_1}{u_1 + u_2 / \nu} \right)^p u_1^q f_1(u_1) f_2(u_2) du_1 du_2
 \end{aligned} \tag{23}$$

ただし

$$f_1(u_1) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\lambda) \frac{1}{2^{1/2+i} \Gamma(1/2+i)} u_1^{1/2+i-1} \exp(-u_1/2) \quad (24)$$

$$f_2(u_2) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} u_2^{\nu/2-1} \exp(-u_2/2) \quad (25)$$

であり,

$$w_i(\lambda) = \exp(-\lambda/2) \frac{(\lambda/2)^i}{i!} \quad (26)$$

である。

(24)と(25)を(23)に代入すると, (23)は

$$\left(\frac{\sigma^2}{x'_1 M_2 x_1} \right) \sum_{i=0}^q K_i \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{u_1}{u_1 + u_2/\nu} \right)^p u_1^{1/2+q+i-1} u_2^{\nu/2-1} \times \exp[-(u_1 + u_2)/2] du_1 du_2 \quad (27)$$

となる。ただし

$$K_i = \frac{w_i(\lambda)}{2^{(\nu+1)/2+i} \Gamma(1/2+i) \Gamma(\nu/2)} \quad (28)$$

変数変換 $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = u_1/u_2$ を行うと, (27)は

$$\left(\frac{\sigma^2}{x'_1 M_2 x_1} \right) \sum_{i=0}^q K_i \nu^p \int_0^{\infty} \frac{v_2^{1/2+p+q+i-1}}{(1+\nu v_2)^p (1+v_2)^{(\nu+1)/2+q+i}} dv_2 \times \int_0^{\infty} v_1^{(\nu+1)/2+q+i-1} \exp(-v_1/2) dv_1 \quad (29)$$

となる。さらに, (29)の最初の積分において変数変換 $t = v_2/(1+v_2)$ を行い, 2つ目の積分において変数変換 $z = v_1/2$ を行うと, (29)は

$$\left(\frac{\sigma^2}{x'_1 M_2 x_1} \right) \nu^p \sum_{i=0}^q K_i 2^{(\nu+1)/2+q+i} \Gamma((\nu+1)/2+q+i) \times \int_0^1 t^{1/2+p+q+i-1} (1-t)^{\nu/2-1} [1+(\nu-1)t]^{-p} dt \quad (30)$$

となる。(28)を(30)に代入すると, 本文の(12)が得られる。

次に $J(p, q)$ を導出する。 $\lambda = (x'_1 M_2 x_1 / \sigma^2) \beta_1^2$ に注意して $H(p, q)$ を β_1 で偏微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(p, q)}{\partial \beta_1} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial w_i(\lambda)}{\partial \beta_1} G_i(p, q) \\ &= - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x'_1 M_2 x_1}{\sigma^2} \right) \beta_1 w_i(\lambda) G_i(p, q) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x'_1 M_2 x_1}{\sigma^2} \right) \beta_1 w_{i-1}(\lambda) G_i(p, q) \end{aligned} \quad (31)$$

ただし, $w_{-1}(\lambda) = 0$ と定義する。(31)の第2項において $j = i-1$ とおくと,

$$\frac{\partial H(p, q)}{\partial \beta_1} = -\beta_1 \left(\frac{x'_1 M_2 x_1}{\sigma^2} \right) H(p, q) + \beta_1 \left(\frac{x'_1 M_2 x_1}{\sigma^2} \right) \sum_{j=0}^{\infty} w_j(\lambda) G_{j+1}(p, q) \quad (32)$$

となる。

$H(p, q)$ の代替的な表現として, $H(p, q)$ を b_1 と s^2 で表すと,

$$H(p, q) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty h(b_1, s^2, p, q) f_1(b_1) f_2(s^2) db_1 ds^2 \quad (33)$$

となる。ただし,

$$h(p, q) = \left(\frac{(x_1' M_2 x_1) b_1^2}{(x_1' M_2 x_1) b_1^2 + s^2} \right)^p (b_1^2)^q \quad (34)$$

であり, $f_2(s^2)$ は s^2 の密度関数,

$$f_1(b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (\sigma / \sqrt{x_1' M_2 x_1})} \exp \left[-\frac{(b_1 - \beta_1)^2}{2\sigma^2 / (x_1' M_2 x_1)} \right]. \quad (35)$$

である。

(33) を β_1 で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(p, q)}{\partial \beta_1} &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty h(b_1, s^2, p, q) \left[\frac{b_1 - \beta_1}{\sigma^2 / (x_1' M_2 x_1)} \right] f_1(b_1) f_2(s^2) db_1 ds^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2 / (x_1' M_2 x_1)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty b_1 h(b_1, s^2, p, q) f_1(b_1) f_2(s^2) db_1 ds^2 \\ &\quad - \frac{\beta_1}{\sigma^2 / (x_1' M_2 x_1)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty h(b_1, s^2, p, q) f_1(b_1) f_2(s^2) db_1 ds^2 \\ &= \left(\frac{x_1' M_2 x_1}{\sigma^2} \right) J(p, q) - \frac{(x_1' M_2 x_1) \beta_1}{\sigma^2} H(p, q) \end{aligned} \quad (36)$$

となる。(32) と (36) は, ともに $H(p, q)$ を β_1 で偏微分したものであるので等しい。よって, 本文の(13)が得られる。

注

* 本稿は, 日本学術振興会科学研究費補助金による研究成果の一部である。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- Adkins, L. C. (1992), "Finite sample moments of a bootstrap estimator of the James-Stein rule," *Econometric Reviews*, 11, 173-193.
- Brownstone, D. (1990), "Bootstrapping improved estimators for linear regression models," *Journal of Econometrics*, 44, 171-187.
- Chi, X.E. and Judge, G.G. (1985), "On assessing the precision of Stein's estimator," *Economics Letters*, 18, 143-148.
- Dwivedi, T.D., Srivastava, V.K. and Hall, R.L. (1980), "Finite sample properties of ridge estimators," *Technometrics*, 22, 205-212.
- Efron, B. (1979), "Bootstrap methods: Another look at the jackknife," *Annals of Statistics* 7, 1-26.
- Hoerl, A.E. and Kennard, R.W. (1970), "Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems," *Technometrics*, 12, 55-82.

- Huang, J.-C. (1999), "Improving the estimation precision for a selected parameter in multiple regression analysis: an algebraic approach," *Economics Letters*, 62, 261-264.
- Kozumi, H. and Ohtani, K. (1994), "The general expressions for the moments of Lawless and Wang's ordinary ridge regression estimator," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 23, 2755-2774.
- Murray, T. and Ginman, P.J. (1976), "An empirical examination of the traditional aggregate import demand model," *Review of Economics and Statistics*, 58, 75-80.
- Ohtani, K. (1997), "Minimum mean squared error estimation of each individual regression coefficient in a linear regression model," *Journal of Statistical Planning and Inference*, 62, 301-316.
- Press, W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery (1986), *Numerical Recipes*, New York: Cambridge University Press.
- Wu, C.F.J. (1986), "Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis," *Annals of Statistics*, 14, 1261-1295.
- Yi, G. (1991), "Estimating the variability of the Stein estimator by bootstrap," *Economics Letters*, 37, 293-298.
- 大谷一博 (1997) 「ブートストラップ法による最小平均自乗誤差推定量の精度評価について」『国民経済雑誌』第176巻第4号, 15-26.