Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2026-04-03

単調な反応関数のグラフとフォン・ノイマン=モルゲンシュテルン安定集合

中西，訓嗣

(Citation)
国民経済雑誌,196(3):37-42

(Issue Date)
2007-09

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00056178

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00056178

単調な反応関数のグラフとフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合*

中　西　訓　嗣

本稿では，Greenberg（1990）のソーシャル・シチュエーション理論によって“個別条件付き威嚇状況（Individual Contingent Threats Situation: ICT シチュエーション）”として再構築された戦略型ゲームにおける，あるプレイヤーの反応関数が単調であるとき，その反応関数のグラフが先の ICT シチュエーションに対応する抽象システムのフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合となることを示す。

キーワード　単調な反応関数，
フォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合，
プレイ前交渉，ソーシャル・シチュエーション理論

1　Introduction

ソーシャル・シチュエーション理論（TOSS: Theory Of Social Situations）は Greenberg（1990）によって開発された新しい型のゲーム理論である。TOSS の枠組みを用いることによって，従来型のゲームで分析されてきた様々な状況に対して新たな光をあてることができるようになった。特にプレイヤー間のコミュニケーションの可能性をモデル化する場合に，TOSS の枠組みは大きな力を発揮する。TOSS において導入された“個別条件付き威嚇状況”（Individual Contingent Threats Situation: ICT シチュエーション）は，基本的に戦略型ゲームと同等の“非協力”的構造を持ちながら，プレイヤー間のコミュニケーションが可能であるような状況をモデル化したものである。ICT シチュエーションでは，プレイヤーらは公然と交渉を行うことができ，その交渉の中で各プレイヤーは現時点で提案されている行動の組から単独で逸脱できるけれども，他のプレイヤーらと共同して逸脱することはできないと想定される。

TOSS における解概念は「O-安定な行動基準」（OSSB: Optimistic Stable Standard of Behavior）と呼ばれる写像である。[1] もし，ある ICT シチュエーションに OSSB が存在しているならば，この ICT シチュエーションに対応する抽象システムにフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合が存在し，逆に，ある ICT シチュエーションに対応する抽象システム

にフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合が存在するならば，元のICTシチュエーションにOSSBが存在することが知られている。[2] したがって，ICTシチュエーションに対する解OSSBの存在を示すことは，そのICTシチュエーションに対応する抽象システムに対するフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合の存在を示すことに等しいのである。[3] 一般に，適切な性質を満たす写像の存在を示すことよりも，適切な性質を満たす部分集合の存在を示すことの方が容易であるから，本稿では後者のアプローチを採用する。

いくつかの個別的・具体的なICTシチュエーションの例は知られているが，OSSBあるいは対応する抽象システムにおけるフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合が存在するための一層一般的な条件について，あまり多くのことは知られていない。[4] Greenberg（1990）では次の二つの定理が示されている。第一は「ICTシチュエーションにおいて，プレイヤーの数が2で，各プレイヤーの戦略集合が有限であるならば，OSSBが存在する」というものであり，第二は「n人ICTシチュエーションにおいて，各プレイヤーの戦略集合の要素が2以下であるならば，OSSBが存在する」というものである。[5] 比較的最近になって，Greenberg（1990）の定理にあるようなプレイヤーの数あるいは戦略の数が2（以下）であるという要求を緩和した定理がNakanishi（2001）によって示された。Nakanishi（2001）は，各プレイヤーの戦略集合が実数の閉区間で表され，各プレイヤーの利得関数が自らの戦略に関して単調減少であるようなn人・囚人のジレンマゲームをICTシチュエーションとして再構成し，これに対応する抽象システムにフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合が存在することを証明した。

しかしながら多くの経済学的な応用において，“利得”関数が自らの戦略に関して単調であるという想定が常に満たされるとはかぎらない（むしろ満たされない場合の方が多いであろう）。本稿の目的は，あるプレイヤーの“反応”関数が単調であるならば，その反応関数のグラフがフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合となることを示し，そのことによって，n人・ICTシチュエーションとそれに対応する抽象システムにおけるフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合の存在を保証する新たな十分条件を示すことである。

2　モデルおよび定理

プレイヤーの有限集合を$N\equiv\{1, 2,\ldots, n\}$とする。$X_i$はプレイヤー$i$の行動の集合であり，これは実数上の（退化していない）閉区間と仮定する（すなわち，X_iはコンパクトである）。プレイヤーの行動$x_i\in X_i$で構成されるn-ベクトル$x=(x_1,\ldots, x_n)$を“結果”（outcome）と呼ぶ。$X\equiv\Pi_{i\in N}X_i$は可能な結果の集合である。便宜上，$N_{-i}\equiv N\backslash\{i\}$および$X_{-i}\equiv\Pi_{j\in N_{-i}}X_j$のような表記を用いる。$x_{-i}$のような表記は$(x_j)_{j\in N_{-i}}\in X_{-i}$を意味している。

ICTシチュエーションにおける交渉は次のように行われる。まず，ある結果$x=(x_1,\ldots,$

$x_i, \ldots, x_n$）がプレイヤーらに提示されているとしよう（x_i はプレイヤー i の行動である）。すべてのプレイヤーがこの x にしたがうと公に表明するならば，x が採用され，実際にプレイされる。もしプレイヤー i が x に反対するならば，プレイヤー i は「もし他のプレイヤーらが x に固執するならば，私は x_i に代わって x_i' をとる」というように，どのような別行動をとるのかについて述べなければならない。すると，プレイヤー i の反対と別行動の表明によって，現行の結果 x は別の結果 $y=(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)$ に変わることになる（この場合，プレイヤー i が x から y を誘導したという）。さらに，他のプレイヤー j が新たな y に反対して，x_j に代わって x_j' をとるというかもしれない。すると，結果 y はさらに別の $z=(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_j', \ldots, x_n)$ に変わる。この交渉過程は，次の**誘導写像**（inducement correspondence）$\gamma_i : X \to 2^X$ によって表現される：

$$\gamma_i(x) \equiv \{y \in X \mid y_i \in X_i \text{ かつ } y_j = x_j, \ \forall j \in N_{-i}\}, \ i \in N, \ x \in X. \tag{1}$$

結果 x が現状として与えられているとき，$\gamma_i(x)$ はプレイヤー i が単独で x から誘導できる結果の集合を表している。以上より，ICT シチュエーションは次のように定義される。

$$G_\gamma \equiv (N, \ X, \ \{u_i\}_{i \in N}, \ \{\gamma_i\}_{i \in N}), \tag{2}$$

ただし，$u_i : X \to \mathbb{R}$ はプレイヤー i の利得関数である。

結果の集合 X に対して，X 上の二項関係 $>$ を次のように定義する。すなわち，$x, y \in X$ に対して，$y > x$ となるのは「ある $i \in N$ に対して，$y \in \gamma_i(x)$ かつ $u_i(y) > u_i(x)$」となるとき，そしてそのときのみである。$y > x$ が成立しているとき，「y は（プレイヤー i を通じて）x を支配する」という。結果の集合 X と二項関係 $>$ の組（X, $>$）を **G_γ に関連する抽象システム**（the abstract system associated with G_γ）という。

結果の集合 X の部分集合 $K \subset X$ が次の 2 条件を満たしているとき，K を抽象システム（X, $>$）に対する**フォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合**（von Neumann-Morgenstern stable set）という：

内部安定性：$x \in K$ ならば，$y > x$ となる $y \in K$ は存在しない。

外部安定性：$x \in X \backslash K$ ならば，$y > x$ となる $y \in K$ が必ず存在する。

任意の $x_{-i} \in X_{-i}$ に対して，プレイヤー i の利得関数 $u_i(x_i, x_{-i})$ が X_i 上で x_i に関して上半連続（upper semi-continuous）かつ厳密に準凹（strictly quasi-concave）であるならば，次に示すプレイヤー i の反応関数 $\phi_i : X_{-i} \to X_i$ を適切に定義することができる：

$$\phi_i(x_{-i}) \equiv \arg\max_{y_i \in X_i} u_i(y_i, \ x_{-i}), \ x_{-i} \in X_{-i}. \tag{3}$$

反応関数 ϕ_i が，各 $x_j (j \in N_{-i})$ に関して厳密に増加あるいは厳密に減少であるとき，ϕ_i は X_{-i} 上で“厳密に単調”（strictly monotonic）であるという[6)]。プレイヤー i の反応関数のグラフを次のように表すことにする：

$$\Psi_i \equiv \{x=(x_i,\ x_{-i}) \in X \mid x_i=\phi_i(x_{-i})\}. \tag{4}$$

以上で，われわれの定理を述べる準備が完了した。

定理１．ICT シチュエーション G_γ を考える。プレイヤー k の利得関数 u_k が X_k 上で上半連続かつ厳密に準凹であり，u_k から導かれる反応関数 ϕ_k が X_{-k} 上で厳密に単調であるものとする。このとき，ϕ_k のグラフ Ψ_k は G_γ に関連する抽象システム $(X,\ >)$ のフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合となる。

証明：まず，X_k がコンパクトであることと，任意の $x_{-k} \in X_{-k}$ に対して u_k が x_k に関して上半連続かつ厳密に準凹であることから，反応関数 ϕ_k とそのグラフ Ψ_k とは共に適切に定義されることに注意しておく。

内部安定性：グラフ Ψ_k に含まれる任意の結果 $x=(x_k,\ x_{-k}) \in \Psi_k$ をとる。プレイヤー k を考え，さらに $\gamma_k(x)$ から $y \neq x$ であるような任意の $y=(y_k,\ y_{-k}) \in \gamma_k(x)$ を選ぶ。すなわち，$y_k \neq x_k$ かつ $y_{-k}=x_{-k}$ である。すると，$y_k \neq x_k=\phi_k(x_{-k})=\phi_k(y_{-k})$ であるから，$y \notin \Psi_k$ となる。次に任意のプレイヤー $j \in N_{-k}$ を考えて，$\gamma_j(x)$ から $z \neq x$ となるような任意の $z=(z_k,\ z_{-k}) \in \gamma_j(x)$ を選ぶ。すなわち，$z_j \neq x_j$ かつ，すべての $i \in N_{-j}$ に対して $z_i=x_i$ である（N_{-j} がプレイヤー k を含んでいることに注意しておこう）。反応関数 ϕ_k が厳密に単調であるから，$\phi_k(z_{-k}) \neq \phi_k(x_{-k})=x_k=z_k$ の関係が示され，結局，$z \notin \Psi_k$ となる。すなわち，Ψ_k に含まれるいかなる結果も x を支配できない。したがって，Ψ_k は内部安定性を満たす。

外部安定性：任意の結果 $x=(x_k,\ x_{-k}) \in X \backslash \Psi_k$ をとる。ここで，$w_k=\phi_k(x_{-k})$ かつ $w_{-k}=x_{-k}$ となるように結果 $w=(w_k,\ w_{-k}) \in X$ を定義する。明らかに，$w_k \neq x_k$，$w \in \gamma_k(x)$，および $w \in \Psi_k$ が満たされている。反応関数 ϕ_k の定義より，$u_k(w)>u_k(x)$ となる。すなわち，w はプレイヤー k を通じて x を支配している。したがって，Ψ_k は外部安定性を満たす。□

3　ノ　ー　ト

利得関数 u_k が X 上でスーパーモデュラ（supermodular）であるとき，反応関数 ϕ_k は単調増加となることが知られている。[7] したがって，われわれの定理１は（導かれる反応関数が“厳密に”増加であるならば）いわゆるスーパーモデュラ・ゲームに対応する ICT シチュエーションにうまく適用することができる。[8]

われわれの定理１に与えられた条件の下でも，反応関数 ϕ_k が X_{-k} 上で連続になるとはかぎらない。したがって，そのグラフ Ψ_k も X の閉集合となるとはかぎらないし，連結集合になるともかぎらない。一般に，G_γ に関連する抽象システムのフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合が，たとえば，連結性，閉性，コンパクト性，凸性，有限性等々の位相的あるいは代数的な観点から見て好ましい性質を有しているとはかぎらない。

Nakanishi (2001, Theorem 2) とは違って，われわれの定理１はフォン・ノイマン＝モル

ゲンシュテルン安定集合が常に効率的な結果を含むことを保証しない。もし利得関数u_kが"X上"で上半連続かつ厳密に準凹であるならば，u_kのX上での最大点x^*が一意に存在し，定義よりx^*はパレート効率的でもある。明らかに$x^*\in\Psi_k$であるから，ここでの条件が満たされているならば，フォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合Ψ_kが効率的な点を含むといえる。残念ながら，Ψ_kが効率的な結果を含むことを保証するための条件を満たしているようなゲームのクラスで，特に興味深いといえるものは見あたらない。

注

*　本稿は，独立行政法人日本学術振興会・科学研究費補助金・基盤研究（C）（課題番号：18530175）による研究成果の一部である。

1) "Optimistic"は「楽観的」と訳出すべきであるかもしれないが，解概念の名称としていささか不適切に思われたので「O-安定な行動基準」のように訳出しておいた。

2) "抽象システム"とは，ある非空な集合とその集合上で定義された二項関係との組である。ICTシチュエーションに対応する抽象システムは次節で定義する。

3) ICTシチュエーションに限らず，一般のソーシャル・シチュエーションに対するOSSBは，そのソーシャル・シチュエーションに対応する抽象システムにおけるフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン安定集合と密接な関連を持っている。この点に関しては，Greenberg（1990, Chap. 4）を参照のこと。

4) 特定化されたICTシチュエーションの例については，たとえば，Arce（1994），Muto and Okada（1996），Muto and Okada（1998），Nakanishi（1999），Beladi and Oladi（2006）などを参照のこと。

5) Greenberg（1990）のTheorems 7.4.5および7.4.6を参照のこと。

6) ϕ_iが，あるx_jに関しては増加で，別のx_lに関して減少であってもよい（$j, l\in N_{-i}$）。

7) たとえば，Topkis（1998）を見よ。

8) スーパーモデュラであるような利得関数から導かれる反応関数ϕ_kが厳密に増加であることを保証するには，スーパーモデュラ性の他に追加的な条件が必要である。

参考文献

Arce, M., (1994), "Stability criteria for social norms with applications to the prisoner's dilemma," *Journal of Conflict Resolution* 38, 749-765.

Beladi, H. and Oladi, R., (2006), "Strategic advatising: The fat-cat effect and stability," *Mathematical Social Science* 51 (2), 153-161.

Greenberg, J., (1990), *The theory of social situations: An alternative game-theoretic approach,* Cambridge University Press.

Muto, S. and Okada, D., (1996), "Von Neumann-Morgenstern stable sets in a price-setting duopoly," *Keizai-to-Keizaigaku (Economy and Economics, Tokyo Metroplitan University)* 81, 1-14.

Muto, S. and Okada, D., (1998), "Von Neumann-Morgenstern stable sets in Cournot competition," *Keizai-to-Keizaigaku (Economy and Economics, Tokyo Metroplitan University)* 85, 37-57.

Nakanishi, N., (1999), "Reexamination of the international export quota games through the theory of social situations," *Games and Economic Behavior* 27, 132-152.

Nakanishi, N., (2001), "On the existence and efficiency of the von Neumann-Morgenstern stable set in a n-player prisoners' dilemma," *International Journal of Game Theory* 30, 291-307.

Topkis, T., (1998), *Supermodularity and Complementarity,* Princeton University Press.