



有限回繰り返しゲームの均衡利得の一意性について

関口, 格

(Citation)

国民経済雑誌, 184(5):61-70

(Issue Date)

2001-11

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/00098359>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00098359>



有限回繰り返しゲームの 均衡利得の一意性について

関 口 格

不完全観測の有限回繰り返しゲームにおいて、均衡または均衡利得の一意性とステージゲームの均衡または均衡利得の一意性との関係についての最近の議論を紹介する。完全観測のケースでは、ステージゲームの均衡（利得）の一意性と有限回繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡（利得）の一意性とは同値であるが、不完全観測のときはこの同値性が失われる。もしいわゆる公的戦略に限定すると上述の同値命題が不完全観測下でも得られるため、非公的戦略（私的戦略）を明示的に考慮して分析することの重要性がわかる。

キーワード 繰り返しゲーム、均衡の一意性、私的戦略、直積構造

1 序

長期的関係のモデルとしての繰り返しゲームの理論は、長期的視野に立つプレーヤーが均衡として達成できる行動パターンが、そのゲームが1回しかプレーされないとしたときに比べ、非常に多様なものになることを指摘してきた。フォーク定理の名で呼ばれるこの結論は、Aumann and Shapley (1994) や Rubinstein (1979) による古典的研究に始まり、Fudenberg and Maskin (1986) のよりもっともらしい定式化へと、深化を進めていった。フォーク定理は、長期的関係で実現しうる妥当な結果は悉く均衡と整合的であると主張するので、経済主体の行動の正確な予測を得たいという立場からはありがたくない。しかし、これら達成可能な行動パターンの中に（1回限りのプレーでは一般に達成できない）効率的・協調的な行動パターンが含まれることから、フォーク定理を社会における協調の理論として好意的に捉える見方が一般的であると考えられる。²

フォーク定理を究極の複数均衡の問題として見るのであれ協力の理論として見るのであれ、それが極めて広汎に成り立つことを思えば、背景にあるロジックの正しい理解は大切である。一つの重大な前提は、同じゲームが際限なくプレーされることである。この仮定こそが、囚人のジレンマのような一意均衡（もっといえば、支配戦略均衡）を持つゲームを繰り返すと協調的な均衡が発生する、という結論を可能にしている。もし繰り返しの回数が有限ならば、その回数が如何に大きくとも、非協調的行動の繰り返しのみが均衡であることがすぐにわか

るだろう。より一般的には、ステージゲーム（繰り返されるゲーム）の均衡が一意であるとき、そしてそのときのみ、任意の有限回繰り返しゲームの（部分ゲーム完全）均衡も一意である。さらに細かく言うと、もしステージゲームの均衡利得が一意のとき、そしてそのときのみ、対応する有限回繰り返しゲームの均衡利得も一意である。

今の議論は、有限回繰り返しゲームの均衡（利得）がいつ一意になるか、すなわちいつ協調不可能性命題が成立するかについて、完全な答えを与えている。しかし近年の研究が明らかにしたところでは、その結論は完全観測（perfect monitoring）の仮定、つまりプレイヤーが他のプレイヤーが過去に取った行動を誤差なく観測できるという仮定に依存しているのである。つまり、プレイヤーが相手の過去の行動に関する不完全なシグナルを受け取るという状況下（不完全観測）では、ステージゲームの均衡の一意性は有限回繰り返しゲームの均衡または均衡利得の一意性を保証しないのである。この事実をできるだけ明確に解説するのが、本論文の目的である。また本論文では、議論の焦点を絞るために、全てのプレイヤーが過去の行動に関する共通のシグナルを観測するという、不完全公的観測（imperfect public monitoring）³のケースに集中する。

本論文では、不完全観測の下でのステージゲームの均衡（利得）の一意性と有限回繰り返しゲームの均衡（利得）の一意性のありうべき関係を示唆する二つの例を提示する。最初の例（この例は Sekiguchi (2001) による）においては、ステージゲームの均衡が一意であるにもかかわらず、それを2回繰り返したゲームが無数に均衡を持つ。ただしこれらの均衡はすべて同じ利得を持ち、それはステージゲームの均衡を2回繰り返したときの利得に一致するので、これらの均衡が他の均衡より協調的・効率的というわけではない。事実、この繰り返しゲームの均衡利得は一意である。それは、この例における不完全観測の構造がある特殊な性質をもつためであり、本論文はその点についても議論する。

第2の例は、Mailath, Matthews and Sekiguchi (2001) によるものだが、そこではステージゲームの均衡が一意であるにもかかわらず、それを2回繰り返したゲームがステージゲームの均衡の2回繰り返しをパレート支配する均衡を持つ。つまり、ステージゲームの均衡の一意性は、一般には有限回繰り返しゲームの均衡利得の一意性すらも意味せず、結果としてある程度の効率性の改善の余地を与えるのである。この例では、ステージゲームの相関均衡が一意でないので、その分だけこの結論は驚きに値しないかもしれない。しかし Mailath, Matthews and Sekiguchi (2001) は、ステージゲームの相関均衡の一意性さえも有限回繰り返しゲームの均衡利得の一意性を言うに十分でない例をも与えている。

この二つの例で出てくる均衡戦略に共通することは、それが公的情報である過去のシグナルのみに依存した戦略（公的戦略）ではなく、私的情報であるプレイヤーの過去の行動にも明示的に依存する戦略（私的戦略）になっていることである。もし分析を公的戦略による均

衡に限定すれば、完全観測のケースと同様に、ステージゲームの均衡の一意性と有限回繰り返しゲームの均衡の一意性が同値になる。公的戦略均衡においては、プレーヤーのある時点以後の行動はそれ以前のシグナルの内容のみに依存するため、プレーヤー間で衆知の事実になる。ゆえに最終期の行動は、それが衆知の事実であるがゆえに、ステージゲームの均衡にならざるを得ない。このように、通常の後方帰納法の議論が当てはまり、上述の同値命題が公的戦略均衡については復活するのである。

これら二つの例は幾分人工的だが、それでも不完全観測の繰り返しゲームの理論の今後の発展に資するメッセージを持つように思われる。一つは、上でも述べた私的戦略の役割の重要性である。思えば公的戦略への限定は、不完全公的観測のケースの伝統的な分析態度であった。これにより分析は簡単になり、結果として Abreu, Pearce and Stacchetti (1990) による一般的な分析手法が確立した。また、無限回繰り返しのケースにおいては公的戦略への限定がそれほど深刻な問題ではないということは、Fudenberg, Levine and Maskin (1994) の公的戦略によるフォーク定理が物語っている。しかし本論文の議論は、公的戦略に分析対象を絞って構わないという伝統的な態度が、有限回繰り返しのケースには留保を伴うべきことを示している。⁴

第二のメッセージは、有限回繰り返しゲームにおける否定的命題 (negative result) あるいは協調不可能性命題の理解の仕方に関係する。Gibbons (1992) のようなゲーム理論の標準的な教科書を見ると、完全観測のケースにおいてステージゲームの均衡の一意性が有限回繰り返しゲームの均衡の一意性を意味するという事実が明記されている。しかるに、ステージゲームの均衡利得の一意性が有限回繰り返しゲームの均衡利得の一意性を意味するという事実は、教科書レベルでは余り強調されていない。協調の不可能性という観点からは、この二つの事実には先験的な価値の違いはないはずなのに、である。しかも我々は最初の例において、後者の事実、すなわち均衡戦略でなく均衡利得に関する否定的命題の方が、(ある種の) 不完全観測のケースにまで拡張可能なことを示している。このことは、繰り返しゲームの理論において真に問われるべき協調不可能性命題が、むしろ均衡利得に関するものであることを示唆している。

本論文の構成は以下の通りである。2 節ではモデルを導入する。3 節では、不完全観測の有限回繰り返しゲームの均衡の一意性とステージゲームの均衡の一意性が同値でない例について議論する。同時に、ステージゲームの均衡利得の一意性と有限回繰り返しゲームの均衡利得の一意性の同値命題が成立する要件について議論する。4 節では、3 節後半で考えた同値命題が、一般には成立しない例を挙げる。

2 モ デ ル

本論文は専ら具体例について議論するが、この節では敢えて分析対象となるゲームのクラスをできるだけ一般的に定式化する。その主な理由は、一般的な定式化が後の議論の展開を容易にするからである。また、今後の更なる研究に役立つ記法・定義を与えておくのは、それ自体重要なことであろう。

ステージゲーム G は、 n 人プレーヤーゲームであり、各プレーヤー i は所与の有限集合 A_i から行動 $a_i \in A_i$ を同時に選ぶ。ここではプレーヤーが確率的に行動を選ぶことを許し、プレーヤー i の混合行動の集合を S_i で表す。各プレーヤーは他のプレーヤーの行動を観察できないが、行動を決めた後に共通のシグナル $y \in Y$ を受け取る。 Y も有限集合であるとする。行動プロファイル $a \in A = \times_{i=1}^n A_i$ の下でのシグナルの確率分布を $\pi(y|a)$ と書く。プレーヤー i の利得は自分の行動とシグナルのみに依存し、 $u_i(a_i, y)$ で表される。利得は a_i と y のみに依存するから、利得の水準は他のプレーヤーの行動について何も追加的な情報を与えないことに注意しよう。

G が与えられたとき、その T 回繰り返してから成るゲームを $G(T)$ と書く。プレーヤー i の t 期における歴史を、 $h_i^t = \{(a_i(\tau), y(\tau))\}_{\tau=1}^{t-1}$ と定義する。 H_i^t を、プレーヤー i の t 期における歴史の集合としよう。このとき $G(T)$ におけるプレーヤー i の (行動) 戦略は、 $\bigcup_{t=1}^T H_i^t$ から S_i への関数として定義される。ここで H_i^t は、任意の一点集合である。プレーヤー i の戦略の集合を Σ_i^T とおく。戦略 $\sigma_i \in \Sigma_i^T$ について、歴史 h_i^t の下で行動 $a_i \in A_i$ が選ばれる確率を $\sigma_i(h_i^t)(a_i)$ と書く。 $G(T)$ の戦略プロファイル $\sigma \in \Sigma = \times_{i=1}^n \Sigma_i^T$ がプレーヤーに与える利得は、毎期の期待利得の和、つまり $E\left[\sum_{t=1}^T u_i(a_i(t), y(t)) | \sigma, \pi\right]$ である。つまりここでは将来利得の割引が一切ないとしているが、以後の例・結論はその点に依存しない。

最後に均衡概念であるが、ナッシュ均衡または逐次均衡のいずれかを、目的に応じてその都度使い分けていくことにする。

3 複数均衡の発生

この節では、完全観測のケースと異なり、 G の均衡の一意性が $G(T)$ の均衡の一意性を必ずしも意味しないことを例を使って示す。完全観測の場合、もし部分ゲーム完全均衡を解概念として用いるならば、 G の均衡の一意性が $G(T)$ の均衡の一意性と同値になることは容易にわかるであろう。⁶

まず定義から始めよう。以下の概念は、Fudenberg, Levine and Maskin (1994) によって導入された。

定義 G が直積構造 (product structure) を持つとは、シグナルの空間 Y が $Y = \times_{i=1}^n Y_i$ の形に書け、しかも任意の $a \in A$ と $y = \{y_i\}_{i=1}^n \in Y$ について

$$\pi(y|a) = \prod_{i=1}^n \pi_i(y_i|a_i) \quad (1)$$

が成り立つことである。

つまり直積構造の下では、シグナルは各プレーヤーに対応する要素を持つ。(1)において、 $\pi_i(y_i|a_i)$ はプレーヤー i に対応するシグナルの要素の周辺分布と解釈できることに注意しよう。従って、もし G が直積構造を持つならば、プレーヤー i に対応する要素の確率分布はプレーヤー i が取った行動のみに依存して定まる。つまり自分の取った行動(これは私的情報である)は、他のプレーヤーの行動に関して何らの情報も与えないのである。

我々の議論に戻り、以下のような直積構造を持つゲーム G を考えよう。 $n=2$, $A_1=A_2=\{H, T\}$, $Y_1=Y_2=\{H, T\}$,

$$\pi_i(y_i|a_i) = \begin{cases} 3/4 & \text{if } y_i = a_i \\ 1/4 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2)$$

$$u_1(a_1, y_1, y_2) = \begin{cases} 2 & \text{if } y_2 = a_1 \\ -2 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3)$$

$$u_2(a_2, y_1, y_2) = \begin{cases} -2 & \text{if } y_1 = a_2 \\ 2 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4)$$

(1)を用いると、(2)が π を間接的に定義していることに注意されたい。 G は一種のマッチングペニーで、(2)から(4)により、各プレーヤーが H と T を等しい確率でプレーするのが G の一意なナッシュ均衡であることがわかる。また、この均衡における各プレーヤーの利得は 0 である。

G の 2 回繰返しゲーム $G(2)$ について、次のような戦略を考えよう。

$$\sigma_i(h_i^t)(H) = \begin{cases} 1/2 & \text{if } t=1 \\ \frac{2-\lambda}{3} & \text{if } t=2 \text{ and } y_i(1)=a_i(1) \\ \lambda & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

このとき、任意の $\lambda \in [0, 1]$ について、(5)で定まる戦略プロファイル $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ は $G(2)$ の逐次均衡である(それゆえナッシュ均衡でもある)。このことを順次チェックしていこう。まず(5)より、各プレーヤーは相手が1期目に H と T を等しい確率でプレーすると予測する。次に、任意の2期目の歴史について、プレーヤー j は確率 $3/4$ で $y_i = a_i$ であると予測する((2)より)。従ってベイズルールと(5)を使うと、プレーヤー i は2期目に H と T を等しい確率でプレーするだろうとプレーヤー j は予測することがいえる。任意の2期目の歴

史でこれが成立することに注意しよう。つまり、プレーヤー i はどんな戦略を選んでも利得が 0 になるので、 σ_i を選ぶにやぶさかでない。ゆえに σ はナッシュ均衡である。 σ の経路は、 $G(2)$ の全ての情報集合に正の確率で到達するので、 σ は逐次均衡でもある。

つまり、ステージゲームの均衡が一意であるにもかかわらず、 $G(2)$ は無数に均衡を持つのである。しかしながら、これらの均衡は全て同じ利得に対応することに注意しよう。実のところ、ここで考えている均衡の 2 期目のプレーはステージゲームの均衡に完全に対応していて、ただプレーヤーの混ぜ合わせの仕方が 1 期目の行動という私的情報に依存した複雑なものになっているに過ぎないのである。⁷ 1 期目のプレーもまたステージゲームの均衡に対応するので、均衡利得は一様に 0 になる。Sekiguchi (2001) は、これが直積構造を持つゲームの典型的な現象であることを、以下の定理に要約している。⁸

定理 G が直積構造を持ち、そのナッシュ均衡利得が一意であるとしよう。このとき、任意の T について、 $G(T)$ の均衡利得は一意である。

証明 Sekiguchi (2001) を見よ。

直積構造下では、有限回繰返しゲームの均衡利得の一意性とステージゲームの均衡利得の一意性との同値命題が成立する。しかし上の例が示すように、直積構造を持つゲームにおいても、ステージゲームの均衡の一意性は有限回繰返しゲームの均衡の一意性を意味しない。それでも直積構造は、有限回繰返しゲームにおいて協調不可能性定理を導出しやすいクラスとみなされるべきである。というのも、次節の例が示すように、直積構造が失われると、有限回繰返しゲームの均衡利得の一意性すらも簡単には保証できないからである。

4 協調的均衡の発生

この節では前節より一歩進めて、ステージゲームのナッシュ均衡の一意性が、有限回繰返しゲームの均衡利得の一意性すらも意味しないことを示す。ここでは、Mailath, Matthews and Sekiguchi (2001) が提示した例に依拠する。

G を次のように与えよう。 $n=2$, $A_1=A_2=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$ 。シグナルの分布を定義するために、以下のような行動プロファイルの集合 A の分割を考える。

$$A^1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \quad (6)$$

$$A^2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \quad (7)$$

$$A^3 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\} \quad (8)$$

(6) から (8) を用いて、 π を以下のように定義する。

$$\pi(y|a) = \begin{cases} 1/2 & \text{if } a \notin A^y \\ 0 & \text{if } a \in A^y \end{cases} \quad (9)$$

G が直積構造を持たないことは、容易に確認できる。

利得関数は、以下の通りである。任意の i 及び $a_i \in A_i$ について、 $u_i(a_i, 1) = 3$ 、任意の $a_i \in A_1$ 及び $a_i \in A_1$ について、 $u_1(a_1, 2) = u_2(a_2, 3) = 1$ かつ $u_1(a_1, 3) = u_2(a_2, 2) = -1$ 。これらの情報を用いると、任意の行動プロファイル $a \in A$ を所与としての各プレーヤーの期待利得を計算できる。それを利得ベクトルの形で書くと、任意の $a \in A^1$ について $(0, 0)$ 、任意の $a \in A^2$ に対して $(1, 2)$ 、任意の $a \in A^3$ について $(2, 1)$ となることがわかる。結果として、各プレーヤーが全ての行動を等確率で混ぜる（つまり各行動の確率を $1/3$ にする）のが、 G の一意的なナッシュ均衡である。ちなみに、各プレーヤーの均衡利得は 1 である。しかし、 G の相関均衡は一意ではない。例えば、 $A^2 \cup A^3$ 上の 6 つのプロファイルに等確率を振るような確率分布は G の一つの相関均衡で、しかも上で求めたナッシュ均衡より各プレーヤーの利得は高い (1.5 になる)。

さて、次のような $G(2)$ の戦略プロファイル $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ を考えよう。1期目は、 G の一意的なナッシュ均衡がプレーされる。2期目の行動は、その期の歴史 $(a_i(1), y(1))$ に以下のように依存する。もし $y(1) = 1$ ならば、各プレーヤーは1期目に取った行動 $(a_i(1))$ を確率 1 で選ぶ。もし $y(1) = 2$ ならば、プレーヤー 1 は1期目に取った行動から 1 を引いて得られる行動を確率 1 で取り、プレーヤー 2 は1期目に取った行動に 1 を足して得られる行動を確率 1 で取る。ここで、 $3+1=1$ 、 $1-1=3$ という風に考えることにする。もし $y(1) = 3$ ならば、プレーヤー 1 は1期目に取った行動に 1 を足して得られる行動を確率 1 で取り、プレーヤー 2 は1期目に取った行動から 1 を引いて得られる行動を確率 1 で取る。

σ が $G(2)$ の逐次均衡になることを示そう。まず、各プレーヤーの2期目の行動の逐次合理性をチェックする。もし $y(1) = 1$ ならば、 (6) 、 (9) 及び σ の定義から、 $a_i(1)$ をプレーしたプレーヤー i は、相手の1期目の行動について $a_i(1) + 1$ と $a_i(1) - 1$ をそれぞれ確率 $1/2$ でプレーしたであろうという風に予測する。この予測を所与とすると、相手の2期目の行動の予測は、やはり $a_i(1) + 1$ と $a_i(1) - 1$ をそれぞれ確率 $1/2$ でプレーするというものになる。従って、プレーヤー i としては $a_i(1)$ をプレーするのが逐次合理的になる。

もし $y(1) = 2$ ならば、 (7) 、 (9) 及び σ の定義から、 $a_1(1)$ をプレーしたプレーヤー 1 は、プレーヤー 2 の1期目の行動について確率 $1/2$ で $a_1(1)$ 、確率 $1/2$ で $a_1(1) - 1$ と予測する。よって、 $y(1) = 2$ のときのプレーヤー 2 のプレーの仕方注意到、プレーヤー 2 の2期目の行動に関する予測は確率 $1/2$ で $a_1(1)$ 、確率 $1/2$ で $a_1(1) + 1$ となる。結果として、 $a_1(1) - 1$ を選ぶのが逐次合理的になる。同様にもし $y(1) = 3$ ならば、 (8) 、 (9) 及び σ の定義から、 $a_1(1)$ をプレーしたプレーヤー 1 は、プレーヤー 2 の1期目の行動について確率 $1/2$ で

$a_1(1)$, 確率 $1/2$ で $a_1(1)+1$ と予測する。やはり $y(1)=3$ のときの σ の定義に注意すると、プレーヤー 2 の 2 期目の行動に関する予測は確率 $1/2$ で $a_1(1)$, 確率 $1/2$ で $a_1(1)-1$ となる。よって、プレーヤー 1 としては、 $a_1(1)+1$ を選ぶのが逐次合理的である。同様の議論が、 $y(1)=2$ または $y(1)=3$ のときのプレーヤー 2 の行動についても可能である。

最後に、1 期目の行動の逐次合理性を確認しよう。上の議論より、いかなる 2 期目の歴史を所与としても、各プレーヤーは以後逐次合理的にプレーすれば 1.5 の期待利得を得る。つまり、1 期目の行動は 2 期目の利得に何らの影響も与えないので、逐次合理的であるためには、各プレーヤーの 1 期目の行動が相手の 1 期目の行動に対する短期的な最適反応になっていればよい。 σ の 1 期目の行動はステージゲームのナッシュ均衡に対応するので、ゆえに逐次合理性は満たされている。

σ においては、1 期目のプレーは G のナッシュ均衡に対応するが、2 期目のプレーは G のナッシュ均衡ではない相関均衡に対応する。その相関均衡はナッシュ均衡をパレート支配するので、 σ はステージゲームの均衡の 2 回繰り返しよりも効率的になる。より興味深いのは、プレーヤーの 2 期目の行動を 1 期目の自分の行動に巧妙に依存させることによって、2 期目のプレーを相関均衡に対応させられることである。長期的関係内部で以後のプレーを相関均衡に対応させるような確率構造を構築できるというアイデアは、もともとは Lehrer (1991) にさかのぼる。Lehrer (1991) の枠組みは、情報構造などが我々の定式化と異なるので直接の比較を許さないが、逆にいえば、このような内的相関 (internal correlation) のアイデアがかなり広汎に当てはまる重要なものであることを示唆している。

ここで考えた例は、たとえステージゲームの利得関数またはモニタリングの技術を少し変化させたとしても、上で考えた σ に近い均衡が存在するという意味で、頑健である⁹。詳細は、Mailath, Matthews and Sekiguchi (2001) を見られたい。

注

- 1 出版年だけ見ると誤解を招くが、Aumann and Shapley (1994) の結論は、それより 20 年ほど前から業界では知られていた。
- 2 繰り返しゲームの理論が確立された頃に時を同じくして発表された 2 本のサーベイ (Fudenberg (1992), Pearce (1992)) が、ともに協調 (cooperation) という単語をタイトルに含めているのは、この見方を支持する事実である。
- 3 より一般的な、そして理論家の興味を最近集めているケースは、各プレーヤーが相手の過去の行動のシグナルを私的情報として受け取るものである。このいわゆる私的モニタリング (private monitoring) のケースにおいても、ステージゲームの均衡の一意性は有限回繰り返しゲームの均衡利得の一意性を意味しないことが示されている。詳細は、Kandori (1991) および Sekiguchi (2000) を見よ。

- 4 Radner, Myerson and Maskin (1986) の協調不可能性命題が示すように, Fudenberg, Levine and Maskin (1994) のフォーク定理は, いつでも成り立つわけではない。よって, フォーク定理が成り立たない場合は, たとえ繰返しの回数が無限でも私的戦略が大きな役割を果たす可能性がある。Kandori and Obara (2000) は, このことを明示的に分析している。
- 5 数学的には, S_i は A_i 上の確率分布の集合と同一視できる。
- 6 解概念がナッシュ均衡のときは, 均衡経路外でのカラ脅しが許されるために, $G(T)$ の均衡は一般に無数に存在する。しかし, 均衡経路は必ず一意である。結果として, G の均衡利得の一意性と $G(T)$ の均衡利得の一意性が同値であるという結論は, ナッシュ均衡の下でも従う。
- 7 ただし, $\lambda=1/2$ のときだけ, σ は公的戦略になる。
- 8 Sekiguchi (2001) はいわゆるフルサポートの仮定の下で以下の定理を得ているが, それは説明上の簡単化のためであり, 以下の命題はそのような仮定なしで成立することを, ここで強調しておこう。
- 9 とりわけ, フルサポートの仮定を満たすように π を変化させてもよい。

参 考 文 献

- Abreu, D., D. Pearce and E. Stacchetti (1990), "Toward a Theory of Discounted Repeated Games with Imperfect Monitoring," *Econometrica*, 58, 1041-1063.
- Aumann, R. and L. Shapley (1994), "Long-Term Competition—A Game-Theoretic Analysis," in *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, ed. N. Megiddo, Springer-Verlag, 1-15.
- Fudenberg, D. (1992), "Explaining Cooperation and Commitment in Repeated Games," in *Advances in Economic Theory: Sixth World Congress*, ed. J.-J. Laffont, Cambridge University Press.
- Fudenberg, D., D. Levine and E. Maskin (1994), "The Folk Theorem with Imperfect Public Information," *Econometrica*, 62, 997-1040.
- Fudenberg, D. and E. Maskin (1986), "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting and with Incomplete Information," *Econometrica*, 54, 533-554.
- Gibbons, R. (1992), *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press.
- Kandori, M. (1991), "Cooperation in Finitely Repeated Games with Imperfect Private Information," mimeo.
- Kandori, M. and I. Obara (2000), "Efficiency in Repeated Games Revisited: The Role of Private Strategies," mimeo.
- Lehrer, E. (1991), "Internal Correlation in Repeated Games," *International Journal of Game Theory*, 19, 431-456.
- Mailath, G., S. Matthews and T. Sekiguchi (2001), "Private Strategies in Repeated Games with Imperfect Public Monitoring," CARESS Working Paper, #01-10, University of Pennsylvania.
- Pearce, D. (1992), "Repeated Games: Cooperation and Rationality," in *Advances in Economic Theory: Sixth World Congress*, ed. J.-J. Laffont, Cambridge University Press.

- Radner, R., R. Myerson and E. Maskin (1986), "An Example of a Repeated Partnership Game with Discounting and with Uniformly Inefficient Equilibria," *Review of Economic Studies*, 53, 59-70.
- Rubinstein, A. (1979) "Equilibrium in Supergames with the Overtaking Criterion," *Journal of Economic Theory*, 21, 1-9.
- Sekiguchi, T. (2000), "Existence of Nontrivial Equilibria in Repeated Games with Imperfect Private Monitoring," Discussion Paper 0015, Faculty of Economics, Kobe University, forthcoming in *Games and Economic Behavior*.
- Sekiguchi, T. (2001), "A Negative Result in Finitely Repeated Games with Product Monitoring," forthcoming in *Economics Letters*.