フィッシャー方程式に関するノート

羽森, 茂之

(Citation)
神戸大學經濟學研究年報,43:97-106

(Issue Date)
1997-03-10

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00170084

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00170084

フィッシャー方程式に関するノート

羽 森 茂 之

I. はじめに

本稿の目的は，フィッシャー方程式を検定する代替的方法を提示し，日本経済のデータに応用することにある。フィッシャー方程式は，名目利子率を実質利子率と期待インフレ率とに分解する関係式であり，名目利子率が期待インフレ率の上昇と共に上昇することを表している。フィッシャー方程式は，通常，次のように定式化される。

(1) $R_t = r_t + \pi_t^e$

ただし，

R_t ： t 期における名目利子率

r_t ： t 期における実質利子率

π_t^e ： t 期における期待インフレ率

この関係が成立しているかどうかについては，多くの研究者によって実証的に分析が行われてきた（例えば，Mishkin (1992)，Mishkin and Simon (1995) を参照)。

本稿では，この関係を実証的に分析するための代替的な手法を提示する。これは，Hansen (1982) によって開発された一般化積率法（GMM）を(1)式から導かれる条件付き制約式に応用するものである。このようなアプローチにはいくつかのメリットがある。第1は，誤差項に正規性の仮定が不要な点である。第2は，期待インフレ率を明示的に定式化する必要がないことである。第3は，複数の資産を同時に用いた場合においても，分析を行うことが可能な点である。

II．モデルと実証手続き

以下の分析を行うために，フィッシャー方程式を次のように定式化しよう。

(2) $R_{it}=r_{it}+\pi_t^e,\ i=1, 2, \ldots, N,$

(3) $\pi_t^e=E_{t-1}(\pi_t),$

(4) $r_{it}=\alpha_i+\varepsilon_{it}\quad i=1, 2, \ldots, N,$

ただし，

R_{it} ：t 期における第 i 資産の名目収益率，

r_{it} ：t 期における第 i 資産の実質収益率，

$E_{t-1}(\cdot)$ ：$(t-1)$ 時点において利用可能な情報に基づく条件付き期待値，

ε_{it} ：攪乱項であり，$E_{t-1}[\varepsilon_{it}]=0$ を満足する。

(2)式は，第 i 資産に関するフィッシャー方程式を示している。(3)式は，インフレ期待が合理的に形成されることを示している。(4)式は，第 i 資産に関する実質収益率が一定の平均値の回りで確率的に変動していることを示している。ここで，定数項 (α_i) は各資産ごとにリスクプレミアムの大きさの違いを反映して異なっていることに注意しよう。

(2)式，(3)式及び(4)式から，次式が得られる。

(5) $R_{it}=\alpha_i+\varepsilon_{it}+E_{t-1}(\pi_t).$

(5)式の条件付き期待値をとると次のようになる。

(6) $E_{t-1}[R_{it}-\pi_t-\alpha_i]=0.$

以下での分析は，この(6)式に基づいて行われる。(6)式を基本的な制約式として用いることにより，期待インフレ率を定式化する必要性が無くなり，実質利子率のデータを直接に用いることが可能となる。

(6)式にGMMを応用するために，誤差項を次のように定義する。

(7) $u_{it}=R_{it}-\pi_t-\alpha_i$

ここで，(7)式は，(4)式における実質利子率に対する攪乱項とフィッシャー方程式の定式化の誤りの両方を反映している点に注意する必要がある。(6)式と(7)式とから，$E_{t-1}[u_t(\theta)]=0$ が成立する。ただし，$u_t(\theta)=[u_{Mt}, u_{1t}, \ldots, u_{Nt}]'$ 及び $\theta=[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N]'$ である。

いま，Z_{t-1} を情報集合に入っている変数から構成される操作変数による R 次元のベクトルであるとし，$g_t(\theta)$ 関数を次のように定義する。

(8) $g_t(\theta)=u_t(\theta)\otimes Z_{t-1}$

ただし，$\otimes$ はクロネッカー積であり，$g_t(\theta)$ は $N\times R$ 次元のベクトルである。(8)式から，次式が成立する。

(9) $E[g_t(\theta)]=0,$

ただし，$E[\cdot]$ は無条件期待値演算子である。(9)式は，N 個のパラメーターを推定するための $N\times R$ の直交条件を表している。もし，(9)式のもととなるモデルが正しく定式化されているならば，関数

(10) $$g_T(\theta)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}g_t(\theta)$$

は十分大きな標本数 T に対して0に近い値をとるはずである。したがって，θ のGMM推定量である $\hat{\theta}$ は次式で与えられる関数 $Q_T(\theta)$ を最小にするように与えられる。

(11) $Q_T(\theta)=g_T(\theta)'W_Tg_T(\theta)$

ただし，W_T は $N\times R$ 次の対称な正値定符号行列である。

Hansen (1982) は，代替的なウエイト行列を用いた推定量の中で最も小さな漸近的分散共分散行列 W_0 を持つ推定量を構成するという意味においてウエイト行列 W_T が最適に選択されることを示した。

(12) $W_0=[E\{g_t(\theta)g_t(\theta)'\}]^{-1}.$

その結果得られる漸近的共分散行列 Σ は，$(D_0'W_0D_0)^{-1}$ で与えられる。ただし，$D_0=E\left[\frac{\partial u_t(\theta)}{\partial\theta}\otimes Z_{t-1}\right]$ は，フルランクを持っている。行列 D_0 及び W_0

は,

(13)　$$D_T=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial u_t(\theta)}{\partial\theta}\otimes Z_{t-1}$$

及び

(14)　$$W_T=\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}g_t(\hat{\theta})g_t(\hat{\theta})'\right]^{-1}.$$

を利用することにより一致性を持って推定される。

実際の応用においては，W_T を計算するために，一致推定量 θ_T が必要であるので，$\hat{\theta}$ を得るために，(6)式を最小にする際に θ を計算するためには，何らかの W_T の値を最初に必要とする。Hansen（1982）によって示された一定の正則条件の下では，もし行列 $\{W_T\}$ の確率的系列が一定の $N\times(R-1)$ 次元の正則な対称行列 W_0 に収束するならば，$\hat{\theta}$ に関するＧＭＭ推定量は一致性を持ち，$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ は，平均が０で，分散共分散行列が Σ の正規分布に分布収束する。

ＧＭＭによる推定プロセスは(11)を最小にするために $N\times R$ 個の直交条件の内 N 個の線形結合を利用するので，推定に用いられていない $N\times(R-1)$ 個の一次独立な直交条件が存在する。もしモデルが正しく定式化されているならば，これら $N\times(R-1)$ 個の条件も０に近い値をとるはずである。最適な W_T に対して，(11)式の最小値に標本数（T）をかけた値は，漸近的に自由度が $N\times(R-1)$ のカイ自乗分布に従うことが示される。

(15)　$$J_T(\hat{\theta})=TQ_T(\hat{\theta})=Tg_T(\hat{\theta})'W_T{}^*g_T(\hat{\theta})\xrightarrow{D}\chi^2(N\times(R-1)),$$

ただし，$\hat{\theta}$ はＧＭＭ推定量で，$W_T{}^*$ は W_0 の一致推定量である。我々は，モデルの過剰識別制約を検定するために(15)式のカイ自乗検定統計量を用いることができる[1)2)]。

Ⅲ．日本のデータへの応用

実証分析において用いられた標本期間は，1971年1月から1994年12月である。この間の月次データを用いて分析を行った。従って，標本数は各データに対して，288となる。資産としては，長期国債，長期社債，及び短期資産を用いた。これらの資産の収益率は消費者物価指数によって実質化した。

表1は，各資産の実質収益率に対する基本統計量を，まとめたものである。これより，長期国債，長期社債，短期資産の順に，ハイリスク・ハイリターであることが分かる。さらに，各実質収益率が正規分布に従わないことが，Jarque-Bera 検定統計量とその確率値より明らかである。

まず，単位根の検定を行った。これは，GMMによって分析を行う場合に，各条件付き制約の独立変数が定常変数によって構成されている必要があるからである。これは，Dickey and Fuller (1979, 1981) 及びSaid and Dickey (1985) によって開発されたADF検定によって分析を行った。表2から明らかなように，各変数が単位根を持つという帰無仮説は通常の有意水準のもとで棄却されることがわかる。したがって，各変数は $I(0)$ 過程に従うこと

---

1) 各データに対して，パラメーターの値と過剰識別制約の検定統計量の値を求めるために，次のK-stepに基づくiterated GMMを用いた。

いま，n を繰り返しの数として，$W_T^{(0)}$ を単位行列とする。

(Ⅰ) $\theta^{(n)}=\arg\min\ Q_T^{(n-1)}(\theta)=\overline{g_T(\theta)'}\ W_T^{(n-1)}\ \overline{g_T(\theta)}$.

(Ⅱ) Set $Q_T^{(n)}=Q_T(\theta^{(n)})=\overline{g_T(\theta^{(n)})'}\ W_T^{(n-1)}\ \overline{g_T(\theta^{(n)})}$.

If $\max\ |Q_T(\theta^{(n)})-Q_T(\theta^{(n-1)})|<10^{-4}$ or $n=K$, then go to (Ⅲ).

Otherwise, go to (Ⅰ).

(Ⅲ) Take $\theta^{(n)}$ as $\hat{\theta}$, and

$$J_T=TQ_T(\hat{\theta})$$

$$=T\overline{g_T(\hat{\theta})'}\ W_T^{(n-1)}\overline{g_T(\hat{\theta})}.$$

実際には，K は2と設定されることが多い。しかし，Kocherlakota (1990) が指摘したように，2 step推定の場合の小標本特性はiterated GMM (K>2) の場合よりも悪いことが知られている。そこで，本稿では，K は10と設定した。

2) GMMの小標本特性については，Tauchen (1986)，Kocherlakota (1990)，及びHamori *et.al.* (1996) を参照。

が分かる。

(6)式の過剰識別制約の検定を，まず各資産に対して行った。たとえ，1資産であったとしても(6)式はモデルの制約に対する検定を提示するからである。この結果から，もし全体のシステムが棄却された場合にでも，どの部分が原因であったかが理解できる。表3は，推定結果と，過剰識別制約の検定結果を示している。ここで，操作変数としては，定数項と対応する各資産収益率の過去の値を用いた。定数項は，長期国債に対しては，0.00308から0.00316の範囲内で，長期社債に対しては，0.00285から0.00297の範囲内で，また短期資産に対しては0.00140から0.00153の範囲内で求められている。定数項は，長期国債から，長期社債，短期資産の順に小さくなっていることが分かる。表には，当てはまりの良さを示す検定統計量も，提示されている。表3において報告されている過剰識別制約に関するカイ自乗検定統計量から長期国債と短期資産に対しては，モデルの定式化が満たされないことが分かる。

表4は，全資産を同時に考慮した場合の結果を示したものである。この場合には，全部で3資産がある。ここで操作変数としては，定数項と全資産収益率の過去の値を用いた。定数項の推定値は，個別資産の場合の結果と整合的である。カイ自乗検定統計量は，通常の有意水準のもとではモデルの定式化が棄却されることを示している。このような結果は，操作変数の組み合わせによっても影響を受けない。

表1　基本統計量
(1971年1月－1994年12月；標本数：288)

変数	平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	J-B	確率値
LTGB	0.0030	0.0195	0.0770	-0.0648	-0.1403	4.7474	37.5951	0.0000
LTCB	0.0027	0.0161	0.0464	-0.0643	-0.5964	4.4765	43.2313	0.0000
STIR	0.0013	0.0071	0.0152	-0.03099	-1.0764	5.2906	118.5741	0.0000

(注)：
LTGB，長期国債の実質収益率；LTCB，長期社債の実質収益率；STIR，短期実質利子率；J-B，Jarque-Bera 統計量；確率値，Jarque-Bera 統計量に基づく確率値。

表２　単位根検定の結果
（1971年１月－1994年12月；標本数：288）

変数	ラグ次数	検定統計量
LTGB	0	-13.9709(＊)
LTCB	0	-12.3306(＊)
STIR	0	-13.8800(＊)

（注）
単位根検定は，次の回帰の γ 係数の t 値にも続いて行われた。

$$\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=0}^{P} \delta_i \Delta Y_{t-i} + u_t$$

for $p = 0, 1, 2, \ldots$ ($\delta_0 = 0$); ラグ次数は，上記の回帰式における p の値をＢＩＣにより選んだものである。（＊）は，単位根があるという帰無仮説が有意水準１％で棄却されることを表している。

表３　ＧＭＭによる実証結果（個別資産）
（1971年１月－1994年12月；標本数：288）

資産	NLAG	α_i	SE(α_i)	χ^2	P-Value	DF
LTGB	1	0.00316	0.00112	5.586	0.018	1.0
	2	0.00315	0.00112	5.651	0.059	2.0
	3	0.00308	0.00112	6.183	0.103	3.0
	1	0.00297	0.00096	18.072	0.000	1.0
LTCB	2	0.00288	0.00096	19.059	0.000	2.0
	3	0.00285	0.00097	19.834	0.000	3.0
	1	0.00153	0.00040	4.206	0.040	1.0
	2	0.00140	0.00040	9.927	0.007	2.0
STIR	3	0.00152	0.00039	11.945	0.008	3.0

（注）：
Nlag，操作変数に用いられたラグ次数；SE，標準誤差；DF，自由度。

表４　ＧＭＭによる実証結果（全資産）
（1971年１月－1994年12月；標本数：288）

Nlag	α_{LTGB}	SE(α_{LTGB})	α_{LTCB}	SE(α_{LTCB})	α_{STIR}	SE(α_{STIR})	χ^2	P-Value	DF
1	0.00344	0.00109	0.00328	0.00089	0.00166	0.00038	23.451	0.005	9.0
2	0.00363	0.00104	0.00296	0.00086	0.00153	0.00037	40.463	0.002	18.0
3	0.00373	0.00100	0.00315	0.00083	0.00159	0.00037	49.301	0.005	27.0

（注）：
Nlag，操作変数に用いられたラグ次数；SE，標準誤差；DF，自由度。

Ⅳ. 結　論

本稿においては，フィッシャー方程式の検定を行うための代替的方法を提示し，日本のデータへの応用を行った。この方法は，次の3点でメリットを持っている。

①誤差項の分布の特定化が不要である。

②期待形式の仕方を明示的に特定化する必要性がない。

③複数の資産を同時に分析の対象とできる

日本経済へ応用した結果は，データからはモデルの特定化は支持されないことが明らかとなった。特に，複数の資産を同時に用いた場合には，このような傾向は顕著である。

データ付録

各資産の名目収益は，Hamao and Ibbotson, *Stocks, Bonds and Inflation Japan* (Ibbotson Associates, 1989, and its supplements) 記載のものを用いた。また，消費者物価指数は，総務庁統計局編『消費者物価指数年報』記載のものを用いた。

参考文献

[1] Dickey D. A. and W. A. Fuller (1979), "Distribution of Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Journal of the American Statistical Association*, 74, pp. 427-431.

[2] Dickey D. A. and W. A. Fuller (1981), "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Econometrica*, 49, pp. 1057-1972.

[3] Hamori S., S. Kitasaka and H. Tanizaki, (1996), "On a Test for Structural Stability of Euler Conditions Parameters Estimated via the

Generalized Method of Moments Estimator: Small Sample Properties," *Econometric Reviews*, Vol. 15, pp. 97-114.

[4] Hansen L. P. (1982), "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators," *Econometrica*, 50, pp. 1029-1054.

[5] Kocherlakota N. R., (1990), "On Tests of Representative Consumer Asset Pricing Models," *Journal of Monetary Economics*, 26, pp. 285-304.

[6] Mishkin F. S. (1992), "Is the Fisher Effect for Real," *Journal of Monetary Economics*, 30, pp. 195-215.

[7] Mishkin F. S. and J. Simon (1995), "An Empirical Examination of the Fisher Effect in Australia," *NBER Working Paper*, No. 5080.

[8] Said E. S. and D. A. Dickey (1985), "Hypothesis Testing in ARIMA (p,1,q) Models," *Journal of the American Statistical Association*, 80, pp. 369-374.

[9] Tauchen G., (1986), "Statistical Properties of Generalized Method-of-Moments Estimators of Structural Parameters Obtained from Financial Market Data," *Journal of Business & Economic Statistics*, 4, pp. 397-416.

Summary

A NOTE ON THE FISHER EFFECT

SHIGEYUKI HAMORI

This study applies the generalized method of moments developed by Hansen to the conditional restrictions implied by the Fisher effect. This approach has some advantages, i.e., it is robust to the nonnormality of the error term, it is unnecessary to formulate the expected inflation rate explicitly, and the returns on multiple assets can be analyzed simultaneously.