利潤率の意義について

置塩, 信雄

(Citation)
国民経済雑誌,134(5):36-56

(Issue Date)
1976-11

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00172049

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00172049

利潤率の意義について

置　塩　信　雄

I

今期，投資を1だけ行うと，次期にaだけの収益がえられる project

$$(-1, a) \tag{1}$$

を考える。この project の利潤率は，あきらかに $a-1$ で，

$$1=\frac{a}{1+r}$$

なる方程式できまるrである。

この利潤率 $a-1$ は，次のようなものであると考えられる。今期1投資して，次期にaだけの収益があるが，このうちから1だけを再投下すれば，次々期に再びaだけの収益があがる。このうちから，再び1を再投下すれば……というように繰返すと，絶えずはじめに投下した1を保存しつつ，無限に，毎期$a-1$だけの純収益をえることができる。したがって，利潤率というのは，はじめに投下した1を絶えず保存しつつ，毎期えることができる一定量の純収益である。

本稿の問題は，利潤率のこのような規定が一般に妥当するかを吟味することにある。すなわち，

$$(-1, a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{2}$$

なる project を考え，絶えず，資本1を保存しつつ，毎期，永久に一定量の純収益xをえつづけるとすると，このxは

$$1=\frac{a_1}{1+r}+\frac{a_2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(1+r)^n} \tag{3}$$

の最大根と等しいことを証明するのが本稿の課題である。これが証明されれば，(3)の最大根が，利潤率を与えるものであることが明白となる。

II

一般的な議論を行うまえに，

$$(-1, a, a) \quad a>0 \tag{4}$$

なる簡単な project について考えよう。(4)は，今期，投資1を行うと，次期および次々期に a だけの収益をうることを示している。この project を適当に操作して毎期一定の純収益 x を永続的にえる仕方を考えよう。今期1だけの投資を行うと，次期には a だけの収益がある。このうちから，いくばくかを控除して再投入しておかなければ，第3期目（今期を第0期として）には収益はえられない。この再投入量を y_1 とすると，

$$a-y_1=x \tag{5}$$

である。次々期（第2期）についてみると，収益は，今期の投資から a，第1期の投資から ay_1 で，合計 $a+ay_1$ である。第4期にも収益がえられるようにするためには，第2期において，この収益のうちから，いくらかを再投入しなくてはならない。これを y_2 とすると，

$$a+ay_1-y_2=x \tag{6}$$

となる。第3期については，収益は，第1期での投資 y_1 から ay_1，第2期の投資 y_2 から ay_2，合計 ay_1+ay_2 である。第5期に収益がえられるためには，第3期に，この収益のうちから，y_3 だけの再投入が必要であるから，

$$ay_1+ay_2-y_3=x \tag{7}$$

となる。このようにして，以後，各期において，

$$ay_{t-2}+ay_{t-1}-y_t=x \quad t=3, 4, \cdots \tag{8}$$

なる関係が成立す。

毎期，再投下する y_t は，はじめに投下した1を保存するようなものでなくてはならない。これはどのように考えたらいいだろうか。第0期には1だけの新たな投下を行ったが，第1期には，y_1 だけの新投下と，第0期に新投下し，1期古くなった1だけの投下が行われている。新投下分に比して，1期古くな

った投下分1の評価をpとすると，第1期に資本の保存が行われるには，

$$y_1+p=1 \tag{9}$$

でなくてはならない。第2期には，y_2 だけの新投下と，第1期に新投下し1期古くなった y_1 だけの投下が行われているから，資本の保存のためには，

$$y_2+py_1=1$$

同様にして，

$$y_t+py_{t-1}=1 \quad t=2,3,\cdots \tag{10}$$

でなければならない。但し，$p\geqq 0$。

さて，(5)，(6)，(8)，(9)，(10)できまるxが，方程式，

$$1=\frac{a}{1+r}+\frac{a}{(1+r)^2} \tag{11}$$

の最大根rと等しいことを示すのがここでの仕事である。

定差方程式(10)を初期条件(9)のもとで解くと，

$$y_t=\frac{p}{1+p}(-p)^t+\frac{1}{1+p} \tag{12}$$

をえる。

(5)，(9)から，

$$x=a+p-1 \tag{13}$$

であるから，pが求まればxはきまる。(8)に，(12)，(13)を代入すると，

$$\frac{2a-1}{1+p}+\frac{p}{1+p}(a-ap-p^2)(-p)^{t-2}=a+p-1 \tag{14}$$

をえる。(14)がtに関して恒等的に成立するには，$p=0$ か，

$$p^2+ap-a=0 \tag{15}$$

でなければならない。$a>0$ と(14)より$p\neq 0$。$p=-\lambda$ とおけば，(15)は，

$$\lambda^2-a\lambda-a=0 \tag{16}$$

とかける。$a>0$ であるから，方程式(16)は正根 λ_1 と負根 λ_2 をもつ。経済的意味から $p\geqq 0$ でなければならないから，

$$p=-\lambda_2 \tag{17}$$

である。したがって(13)より，

$$x=a-\lambda_2-1$$

となるが，根と係数の関係より，$\lambda_1+\lambda_2=a$ であるから，

$$x=\lambda_1-1 \tag{18}$$

となる。

他方，(11)において，$1+r=\lambda$ とおけば，(16)をえる。したがって，(11)の最大根 r^* は，

$$r^*=\lambda_1-1 \tag{19}$$

である。それ故，

$$x=r^* \tag{20}$$

であることが証明された。

1期古くなった資本1単位の評価 p は(17)で決定されるが，この経済的意味を考えておこう。(16)における根と係数の関係より，$\lambda_1\lambda_2=-a$ であるから，

$$\lambda_1 p=a$$

である。ところが(19)より $\lambda_1=1+r^*$ であるから，結局，

$$p=\frac{a}{1+r^*} \tag{21}$$

となる。

III

今度はより一般的な，

$$(-1, a, a, \cdots a) \quad a>0 \tag{22}$$

なる投下後 n 期にわたって収益 a を生じる project を考えよう[1]。ここで証明すべき命題は次のようである。

$$\left.\begin{array}{l} a-y_1=x \\ a+ay_1-y_2=x \end{array}\right\} \tag{23}$$

1 本項での議論は，より一般に，

$(-1, a_1, a_2, \cdots, a_n)$

としても成立する。読者試みられよ。

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots \\ a(1+y_1+\cdots+y_{n-1})-y_n=x \end{array}\right\}$$

$$a(y_{t-n}+y_{t-n+1}+\cdots+y_{t-1})-y_t=x \quad (t=n+1, n+2, \cdots) \tag{24}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1+p_1=1 \\ y_2+p_1y_1+p_2=1 \\ \cdots\cdots \\ y_{n-1}+p_1y_{n-2}+\cdots p_{n-2}y_1+p_{n-1}=1 \end{array}\right\} \tag{25}$$

$$y_t+p_1y_{t-1}+\cdots+p_{n-1}y_{t-n+1}=1 \quad (t=n, n+1, \cdots) \tag{26}$$

できまる x は

$$1=\frac{a}{1+r}+\frac{a}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{a}{(1+r)^n} \tag{27}$$

の最大根 r^* と等しい[2]。また，

$$p_s=\frac{a}{(1+r^*)}+\frac{a}{(1+r^*)^2}+\cdots+\frac{a}{(1+r^*)^{n-s}} \tag{28}$$

$$(s=1, 2, \cdots n-1)$$

である。ここで p_s は s 期古くなった資本1単位の評価（新投入を1とした）で，$p_s\geqq 0$ である。

まず，定差方程式(24)の一般解は，特性方程式，

$$f(\lambda)\equiv\lambda^n-a(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\cdots+\lambda+1)=0 \tag{29}$$

の根を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすると[3]，

$$y_t=\sum_{i=1}^{n}A_i\lambda_i^t+\frac{x}{an-1} \tag{30}$$

---

2 ここで最大根という意味は2重である。1つの意味は実根のうちで代数的に最大なもの。もう1つの意味はすべての根（虚根も含んで）のうち絶対値の最大なもの。（27）の場合には，この両者は一致する。V項参照。

3 方程式（29）は重根をもたない。

$$(\lambda-1)f(\lambda)\equiv F(\lambda)\equiv\lambda^{n+1}-(1+a)\lambda^n+a$$

$$F'(\lambda)\equiv\lambda^{n-1}\{(n+1)\lambda-n(1+a)\}$$

であるが，$F'(\lambda)=0$ は $\lambda=0, \lambda=n(1+a)/(1+n)$ の根しかもたない。他方 $F(\lambda)=0$ は $a>0$ であるから，正単根を2つか，重根 $\lambda=1$ をもち，且つ $\lambda=0$ は根でない。したがって，$F(\lambda)=0$ は重根を全くもたないか，重根 $\lambda=1$ をもつかである。故に $f(\lambda)=0$ は重根をもたない。

となる。ここでは $an-1 \neq 0$ としておこう。$an-1=0$ の場合は後述する。

次に，定差方程式(26)の一般解は，特性方程式，

$$h(\mu) \equiv \mu^{n-1}+p_1\mu^{n-2}+\cdots+p_{n-2}\mu+p_{n-1}=0 \tag{31}$$

の根を $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}$ とすると，

$$y_t=\sum_{i=1}^{n-1}B_i\mu_i^t+\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}p_i} \tag{32}$$

である。但し，$p_0=1$ とする。

さて，(30)と(32)はともに y_t のうごきを示すものであるから，恒等関係になければならない。そのためには，まず，

$$\frac{x}{an-1}=\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}p_i} \tag{33}$$

でなければならない。それだけでなく，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, のうちの適当な $n-1$ 個と $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}$ とが一致しなければならない。番号を適当につけかえて，$\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ が $\mu_1, \cdots, \mu_{n-1}$ と一致するとしよう。すると，除外された λ_n は方程式(29)の最大根である。

というのは，(29)で $a>0$ であるから，Descartes の符号律より，唯一つの正根 λ_n をもつ。ところが，方程式(31)は経済的意味より $p_i \geqq 0$ であるから，正根をもたない。したがって，(29)の根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ と(31)の根 $\mu_1, \cdots, \mu_{n-1}$ のうち，一致しえないのは $\lambda_n>0$ である。

(27)において，$1+r=\lambda$ とおいて変形すれば，(27)は(29)となる。したがって，(29)の唯一の正根 λ_n は，(27)の最大根 r^* に対応し，

$$\lambda_n=1+r^* \tag{34}$$

となる。

したがって，(31)に λ_n なる根をもつようにしてやれば，(31)と(29)は同一の方程式とならねばならないから，

$$(\lambda-\lambda_n)h(\lambda) \equiv f(\lambda) \tag{35}$$

となる。(35)の両辺のそれぞれ対応する係数を等しいとおけば，

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_n p_{n-1}=a\\
&\lambda_n p_{n-2}-p_{n-1}=a\\
&\quad\cdots\cdots\\
&\lambda_n p_1-p_2=a\\
&\lambda_n-p_1=a
\end{aligned}\right\}\qquad(36)$$

をえる。(36)の第1式から，(34)を考慮すれば，

$$p_{n-1}=\frac{a}{1+r^*}$$

これを，第2式に代入すれば，

$$p_{n-2}=\frac{a}{1+r^*}+\frac{a}{(1+r^*)^2}$$

をえ，同様にして，(28)であることを示すことができる。

次に(36)の各式を辺々加え合すと，

$$\lambda_n\sum_{i=0}^{n-1}p_i-\sum_{i=1}^{n-1}p_i=na$$

をえる。したがって，$p_0=1$ であるから，

$$(\lambda_n-1)\sum_{i=0}^{n-1}p_i=na-1\qquad(37)$$

である。これを(33)に代入すれば，

$$x=\lambda_n-1$$

となり，(34)を考慮すると，

$$x=r^*\qquad(38)$$

となり命題はすべて証明された。

上述において $na\neq1$ を想定した。$na=1$ であれば，(30)は成立しない。そこで $na=1$ の場合の証明を示しておこう。(23)，(24)の t 個の式を辺々加え合せ，$a=1/n$ であることを考えると，

$$1-y_t-\frac{n-1}{n}y_{t-1}-\cdots-\frac{1}{n}y_{t-n+1}=tx\qquad(39)$$

をえる。この定差方程式の一般解は，特性方程式，

$$\lambda^{n-1}+\frac{n-1}{n}\lambda^{n-2}+\cdots+\frac{2}{n}\lambda+\frac{1}{n}=0 \qquad (40)$$

の特性根を $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ とすれば，

$$y_t=\sum_{i=0}^{n-1}C_i\lambda_i^t+\varphi(t) \qquad (41)$$

となる。$\varphi(t)$ は(39)の一つの特解である。さて，他方 y_t は(32)でなければならないから，この両者が恒等関係にあるためには，$\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ と $\mu_1, \cdots, \mu_{n-1}$ は等しくなければならない。そのためには，方程式(31)と(40)は同一のものでなければならない。したがって，係数比較より，

$$p_s=\frac{n-s}{n} \quad s=1, 2, \cdots, n-1 \qquad (42)$$

をえる。ところが，(23)，(25)のそれぞれ第1式を加え合すと，

$$a+p_1=x+1 \qquad (43)$$

となるが，$a=1/n$，また(42)より $p_1=(n-1)/n$ であるから，

$$x=0 \qquad (44)$$

となる。ところが，既にみたように(27)は $\lambda=1+r$ とおくと，(29)となるが，$na=1$ の場合には，(29)は唯一の正根 $\lambda=1$ をもつ。したがって(27)できまる最大根 r^* は0である。それ故，

$$x=r^*=0 \qquad (45)$$

を結論できる。また，$r^*=0, a=1/n$ であることを考慮すれば，(42)は(28)であることを示している。

IV

再び，第1項で取扱った簡単な project (1) に戻って考えよう。いままでは，利潤率を単位投資を行い，絶えず資本を保存しつつ，毎期あげうる一定純収益の大きさであると考え，これが一般に妥当する規定であることを示した。今度は，資本保存という観点をすてて，利潤率を単位投資を行い，毎期あげうる一定純収益の最大値であると規定することができるかどうかを考えてみよう。

project (1) の場合，はじめに投資1を行い次期に a だけの収益がえられるが，仮りに，1だけの再投下を行わず，例えば0.5だけの再投下しか行わなければ，第1期には $a-0.5$ だけの消費が可能であり，これは，$a-1$ より大である。しかし，このようなことをすると第2期には $0.5a$ しか収益がない。すると $a \geqq 1$ である限り，仮りに，第2期に，この収益をすべて消費するとしても，第1期の消費 $a-0.5$ には及ばない。実際，

$$(a-0.5)-0.5a=0.5(a-1) \geqq 0$$

であるからである。したがって，毎期，永続的に $a-0.5$ の消費の継続は不可能である。毎期，永続的に一定額行いうる消費の最大の大きさは，$a \geqq 1$ のとき，$1-a$ であるというをことを示そう。

project (1) で当初の投資を1とし，各期における再投入額を y_t とし，毎期可能な一定純収益を x とすると，各期について，

$$a-y_1=x \tag{46}$$

$$ay_{t-1}-y_t=x \quad t=2,3,\cdots \tag{47}$$

が成立する。もちろん，

$$y_t \geqq 0 \quad t=1,2,\cdots \tag{48}$$

でなければならない。(46)～(48)の条件のもとで x の最大値を求めよう。

まず $a=1$ の場合。(46)，(47)の t 個の式を加え合せると，

$$1-y_t=tx \tag{49}$$

いま，もし $x>0$ とすると，(49)の右辺は t が増大すれば，いくらでも増大する。しかるに(48)の制約から(49)の左辺は1を超えない。したがって矛盾が生じる。$x=0$ とすれば，$y_t=1$ となり(48)を充す。それ故，x の最大値は0である。したがって，$x=a-1$ が示された。

次に $a>1$ の場合，(47)より，

$$y_t=Aa^t+\frac{x}{a-1} \tag{50}$$

(46)を考慮して，

$$A=\frac{a(a-x-1)}{a-1} \tag{51}$$

である。ところが，$a>1$ であるから，(50) において，t が増大するにつれ右辺第1項が第2項より，必ず絶対値において上廻ることになる。したがって，(48)の制限下にあるためには $A\geqq 0$ でなくてはならない。$a>1$ のとき，(51)より $A\geqq 0$ のもとで最大の x を求めると，

$$x=a-1 \tag{52}$$

となる。x がこれより大きければ，$A<0$ となり y はやがて負にならざるをえなくなるからである。

以上，$a\geqq 1$ の場合，x の最大値は利潤率と一致することを示した。このとき $a<1$ が除外されたのは何故だろうか。これを考えるために，次のような例を考えよう，

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right) \tag{53}$$

このような project の利潤率は $\frac{1}{2}-1=-50\%$ である。ところが，毎期持続可能な x の最大値は -0.5 ではなく，0 でありうる。実際，$a=\frac{1}{2}$ の場合，(46)，(47)において，

$$y_t=\left(\frac{1}{2}\right)^t \tag{54}$$

とすれば，$x=0$ とすることができる。この場合には，毎期持続可能な x の最大値は0で，利潤率 -0.5 とは一致しないのである。この場合は，y が毎期減少しつづけ，したがって資本の喰つぶしが行われることによって $x=0$ を維持しているのである。資本の保存を条件とすれば $x=-0.5$ 以上になることはできない。このように $a<1$ の場合には利潤率の規定は資本保存を条件として，明示しなければ，単に最大の x によって求めることはできないのである。

これに対して，$a\geqq 1$ の場合には，資本の保存条件をつけなくても，単に最大の x を求めさえすれば，利潤率と一致する。この場合には，最大の x を与える再投下の仕方は，自ら資本保存条件を満足することになるのである。実際，

最大の $x=1-a$ の場合には，(50)，(51)より，$y_t=1$ となり，つねに1だけの資本が保存されている。

さて，以上は最も簡単な project (1) についてみたのであるが，このことは一般的に妥当するであろうか。

V

われわれが証明すべき命題は次のようである。(23)，(24)および，

$$y_t \geqq 0 \quad t=1,2,\cdots \tag{55}$$

の条件の下で，最大の x を求め，それを x^* とすると，

$$x^*=r^* \tag{56}$$

である。r^* は(27)の最大根。但し，

$$na-1\geqq 0 \tag{57}$$

とする。

定差方程式(24)の一般解は $an-1>0$ の場合，(30)で与えられる。y_t のうごきは，特性根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ で規定されるが，これら特性根のうち既にみたように正根は唯1つしかない。これを λ_n としよう。ところが，この λ_n はすべての特性根のうち，絶対値が最大である。その理由は次のようである。

方程式(29)は $a>0$ のとき Descartes の符号律より唯1つの単正根をもつが，更に $an-1>0$ のとき，

$$f(1)<0$$

であるから，$\lambda_n>1$ である。さて，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ のうち λ_n をのぞいた根をすべてもつ方程式は，

$$f(\lambda)\equiv(\lambda-\lambda_n)\phi(\lambda) \tag{58}$$

とおけば，

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)\equiv&\lambda^{n-1}+(\lambda_n-a)\lambda_n{}^{-2}+(\lambda_n^2-a\lambda_n-a)\lambda^{n-3}\\&+\cdots+(\lambda_n^{n-2}-a\lambda_n^{n-3}-\cdots-a\lambda_n-a)\lambda+\frac{a}{\lambda_n}=0\end{aligned} \tag{59}$$

である。この方程式の係数はすべて正である。何故なら，後から数えて第 s 番

目の係数を β_s とすると，λ_n が(29)の正根であることに留意して，

$$\beta_s=\lambda_n^{n-s}-a(\lambda_n^{n-s-1}+\cdots+\lambda_n+1)$$
$$=\frac{a}{\lambda_n^s}(\lambda_n^{s-1}+\cdots+\lambda_n+1)>0 \quad s=1,2,\cdots,n-1 \tag{60}$$

だからである。次に，

$$0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_{n-1}<1 \tag{61}$$

である。何故ならば，

$$\beta_s-\beta_{s-1}=(1+a)\lambda_n^{n-s-1}-\lambda_n^{n-s} \tag{62}$$

であるが，

$$1+a>\lambda_n>1 \tag{63}$$

である。というのは，$f(1)<0$ であるのに，

$$f(1+a)=1>0 \tag{64}$$

だからである[4]。したがって，

$$\beta_s-\beta_{s-1}>0 \tag{65}$$

である。更に，

$$1-\beta_{n-1}=1+a-\lambda_n>0 \tag{66}$$

であるから，(61)なることが示された。ところが掛谷の定理により，(61)が成立すれば，方程式(59)のすべての根の絶対値は1より小である[5]。しかるに，既にみたように $na-1>0$ のとき $\lambda_n>1$ であるから，λ_n は $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ のうちで絶対値が最大である。

だから，(30)の右辺のうちで，t が充分に大きくなると，$A_n\lambda_n^t$ の項の絶対値が優越する。したがって，y_t が非負でありつづけるためには，

$$A_n\geqq 0 \tag{67}$$

でなければならない。

(23)の $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に，(30)において $t=1,2,\cdots,n$ とおいたものを代入して整理すると，

4　$f(\lambda)=\lambda^n-a\left(\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}\right)$ と変形して，$\lambda=1+a$ を代入すればよい。

5　高木貞治「改訂　代数学講義昭和32年　共立出版社　117ページ

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \cdots\cdots\cdots\cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2-a\lambda_1 \cdots\cdots & \lambda_n^2-a\lambda_n \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1^n-a\lambda_1^{n-1}-\cdots-a\lambda_1 \cdots & \lambda_n^n-a\lambda_n^{n-1}-\cdots-a\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$=a\begin{pmatrix} 1-\dfrac{n}{na-1}x \\ 1-\dfrac{n-1}{na-1}x \\ \vdots \\ 1-\dfrac{1}{na-1}x \end{pmatrix} \tag{68}$$

となる。これから A_n を求めると，

$$\frac{A_n}{a}=\frac{\varDelta_1-\dfrac{x}{na-1}\varDelta_2}{\varDelta} \tag{69}$$

となる。但し，ここで，

$$\varDelta=\begin{vmatrix} \lambda_1 \cdots\cdots\cdots\cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2-a\lambda_1 \cdots\cdots & \lambda_n^2-a\lambda_n \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1^n-a\lambda_1^{n-1}-\cdots-a\lambda_1 \cdots & \lambda_n^n-a\lambda_n^{n-1}-\cdots-a\lambda_n \end{vmatrix} \tag{70}$$

$$\varDelta_1=\begin{vmatrix} \lambda_1 \cdots\cdots\cdots\cdots & \lambda_{n-1} & 1 \\ \lambda_1^2-a\lambda_1 \cdots\cdots & \lambda_{n-1}^2-a\lambda_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^n-a\lambda_1^{n-1}-\cdots-a\lambda_1 \cdots & \lambda_{n-1}^n-a\lambda_{n-1}^{n-1}-\cdots-a\lambda_{n-1} & 1 \end{vmatrix} \tag{71}$$

$$\varDelta_2=\begin{vmatrix} \lambda_1 \cdots\cdots\cdots\cdots & \lambda_{n-1} & n \\ \lambda_1^2-a_1\lambda_1 \cdots\cdots & \lambda_{n-1}^2-a\lambda_{n-1} & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^n-a\lambda_1^{n-1}-\cdots-a\lambda_1 \cdots & \lambda_{n-1}^n-a\lambda_{n-1}^{n-1}-\cdots-a\lambda_{n-1} & 1 \end{vmatrix} \tag{72}$$

である。

$\varDelta$ の第1行に a を掛けて，第2行目に加えると，第2行目は $(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2)$ となり，行列式の値は変らない。このような変形を行ったのち，再び第1行目に a を掛け，第2行目に a を掛けたものを第3行目に加えると，第3行目は，$(\lambda_1^3,\cdots,\lambda_n^3)$ となる。同様の操作を繰返すと，$\varDelta$ の第 s 行は $(\lambda_1^s,\cdots,\lambda_n^s)$ となるから，

$$\Delta=\lambda_1\cdots\lambda_n\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^2\\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix} \tag{73}$$

となるが，右辺の行列式は Vandermonde の行列式であるから[6]，

$$\Delta=\lambda_1\cdots\lambda_n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i>j}^{n}(\lambda_i-\lambda_j) \tag{74}$$

となる。

Δ_1 について，上と同様の操作を行うと，

$$\Delta_1=\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & 1\\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} & (1+a)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_{n-1}^{n-1} & (1+a)^{n-1}\end{vmatrix} \tag{75}$$

となる。右辺の行列式は再び Vandermonde の行列式であるから，

$$\Delta_1=\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1+a-\lambda_1)\cdots(1+a-\lambda_{n-1})\prod_{i>j}^{n-1}(\lambda_i-\lambda_j) \tag{76}$$

となる[7]。

更に Δ_2 について，同様の操作を行うと，

$$\Delta_2=\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & \frac{1}{a}+\left(n-\frac{1}{a}\right)\\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} & \frac{1}{a}+\left(n-\frac{1}{a}\right)(1+a)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \frac{1}{a}+\left(n-\frac{1}{a}\right)(1+a)^{n-1}\end{vmatrix} \tag{77}$$

となるから，

$$\Delta_2=\left(n-\frac{1}{a}\right)\Delta_1+\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}\frac{1}{a}\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & 1\\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-1} & 1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} & 1\end{vmatrix} \tag{78}$$

6　請川高三郎他著「線形代数」（昭和51年，培風館）p. 28.

7　$\prod_{i>j}^{n-1}(\lambda_i-\lambda_j)$ は $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ のうちから添数の大なるものから，添数の低いものをさしひいたすべての差の積を示す。

となる。右辺第2項の行列式を Δ_3 とかけば，これまた Vandermonde の行列式であるから，

$$\Delta_3=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_{n-1})\prod_{i>j}^{n-1}(\lambda_i-\lambda_j) \tag{79}$$

となる。

さて，(74)，(76)から，

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{(1+a-\lambda_1)\cdots(1+a-\lambda_{n-1})}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})} \tag{80}$$

であるが[8]，右辺の分母子ともに正であるから $\Delta_1/\Delta>0$ である。というのは，方程式(29)は，

$$f(\lambda)\equiv(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_{n-1})(\lambda-\lambda_n) \tag{81}$$

とかけるから，(64)を思いおこすと，

$$f(1+a)=1=(1+a-\lambda_1)\cdots(1+a-\lambda_{n-1})(1+a-\lambda_n)$$

であり，

$$(1+a-\lambda_1)\cdots(1+a-\lambda_{n-1})=\frac{1}{1+a-\lambda_n} \tag{82}$$

となるが，(63) より確かに (80) の右辺の分子は正である。また，方程式(59)は，

$$\phi(\lambda)\equiv(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_{n-1}) \tag{83}$$

とかけるが，(59)に λ_n を代入すると，(59)の係数がすべて正で，$\lambda_n>0$ だから，$\phi(\lambda_n)>0$ である。故に，(80)の右辺の分母も正である。

次に，Δ_2/Δ の符号をしらべよう。(78) をみると，右辺第1項は既に述べたことから Δ と同符号をもつ。第2項を Δ で除した商は(74)，(79)より，

$$\frac{\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}\Delta_3}{a\Delta}=\frac{(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_{n-1})}{a\lambda_n(\lambda_n-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})} \tag{84}$$

となる。右辺の分母は既にみたように正である。分子は(81)より，

$$f(1)=1-na=(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_{n-1})(1-\lambda_n) \tag{85}$$

---

8 (74) において，

$$\prod_{i>j}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)=(\lambda_n-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})\prod_{i>j}^{n-1}(\lambda_i-\lambda_j)$$

なることに注意。

であるから，

$$(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_{n-1})=\frac{na-1}{\lambda_n-1} \tag{86}$$

となり正となる。したがって $\Delta_2/\Delta>0$ であることが分る。

かくして，(69)において $\Delta_1/\Delta>0, \Delta_2/\Delta>0$ であるから，xをある限度をこえて大きくすると，$A_n<0$ となる。すると λ_n の絶対値が特性根のなかで最大であるから，y_t は早晩，負となることになる。$A_n\geqq 0$ の条件のもとでのxの最大値は(69)より，

$$x^*=(na-1)\Delta_1/\Delta_2 \tag{87}$$

である。(76)，(78)，(79)より，

$$x^*=\frac{a(na-1)(1+a-\lambda_1)\cdots(1+a-\lambda_{n-1})}{(na-1)(1+a-\lambda_1)\cdots(1+a-\lambda_{n-1})+(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_{n-1})} \tag{88}$$

である。(88)に(82)，(86)を代入すると，

$$x^*=\lambda_n-1 \tag{89}$$

をえる。したがって(34)より，

$$x^*=r^* \tag{90}$$

なることが証明された。

この x^* を毎期あたえることが実際に可能であることを確めておかねばならない。(23)，(24)において $x=x^*$ なるとき，y_t は，

$$y_t=\sum_{i=1}^{n-1}A_i\lambda_i^t+\frac{x^*}{an-1} \tag{91}$$

となる。ところが，既に示したように，$\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ の絶対値はいづれも1より小である。したがって右辺第1項の絶対値 t はの増大とともに減少してゆく。他方，第2項は正であるから，$t=1$ においてyが正であれば，それ以後yは0や負となることはない。しかるに(23)の第1式より，

$$y_1=a-r^* \tag{92}$$

であるが，(63)より $\lambda_n=(1+r^*)<1+a$ であるから，y_1 は確かに正である。したがって，x^* を毎期あたえる再投資は実行可能である。それ故 x^* は実行可

能な最大値を与えている。

これまでの証明は $na-1>0$ を前提してきた。$na=1$ の場合にも命題は成立することを示そう。$na=1$ である場合には，(23)，(24)を加え合せることによって(39)が成立する。いま $x>0$ と仮定すれば，右辺は t の増大とともにいくらでも大となる。しかし，左辺は $y_t \geqq 0$ の制約のため1をこえることができないから矛盾が生じる。そこで $x=0$ を考えよう。$x=0$ のときには(39)の一般解は，

$$y_t=\sum_{i=1}^{n-1}C_i\lambda_i^t+\frac{2}{n+1} \tag{93}$$

である。ここでは $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 方程式(40)の根であるが，(40)の係数はすべて正で，且つ単調に減少しているから，再び掛谷の定理により，すべての根の絶対値は1より小である。したがって，t が増大するにともない(93)の右辺第1項の絶対値は減少してゆく。第2項は正であるから，$y_1>0$ であれば，それ以後の y は正でありつづける。$x=0$ のとき，(23)の第1式より，

$$y_1=a$$

であるから，確かに y_1 は正である。それ故 $x=0$ は実行可能である。したがって，最大の x は $x^*=0$ となる。ところが，(27)において $na=1$ なるときには，その最大根は $r^*=0$ であるから $x^*=r^*=0$ なることが証明された。[9]

補

第Ⅲ項で，$x=r^*$ あることを証明するのに，十分条件を用いて議論を行った。[10]

9　本項での議論を，更に一般的な，

$$(-1, a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

の場合に拡張することは容易ではない。a_i のうちに0や負値が含まれる場合に，$y_t \geqq 0$ の条件を要求することができなくなるという事情がある。これらの場合に拡張する場合には，更に広い観点が必要となる。このことについては別稿で論じよう。

10　方程式（31）の根が，λ_n をのぞいた方程式（29）の根に等しいとしたが，それであれば y のうごきを示す（30）と（32）は一致するが，もし，B_i と A_i がどれか同じ i について $A_i=B_i=0$ であれば，その i に対応する根は必ずしも等しくなくてもよいという議論が成立しうる。「十分条件を用いて」というのはこの意味である。

しかし，これがまた必要であることを示しておこう。

(23)の n 個の方程式から，$y_1, \cdots, y_n$ を求めると，

$$y_s=(a-x)(1+a)^{s-1} \quad s=1, 2, \cdots, n \tag{94}$$

をえる。

(25)の n 個の方程式を $(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, 1)$ を未知数とする同次連立1次方程式とみなすと，これが non-trivial な解をもつためには，係数のつくる行列式，

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1-1 \\ y_1 & 1 & & \vdots & y_2-1 \\ y_2 & y_1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & y_{n-1}-1 \\ y_{n-1} & y_{n-2} & & y_1 & y_{n-1} \end{vmatrix}=0 \tag{95}$$

とならねばならない。

しかるに，

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 0 & y_1 \\ y_1 & \ddots & \vdots & y_2 \\ y_2 & & \vdots & y_3 \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ y_{n-1} & \cdots & y_1 & y_n \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ y_1 & \ddots & \vdots & 1 \\ y_2 & & \vdots & 1 \\ \vdots & & 1 & 1 \\ y_{n-1} & \cdots & y_1 & 1 \end{vmatrix} \tag{96}$$

右辺第2項の行列式の第1から第 $(n-1)$ 列のそれぞれに a をかけ，第 n 列に x をかけて，第1から第 $(n-1)$ 列までを加えて第 n 列からさしひくと，(23)より，

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 0 & -y_1 \\ y_1 & \ddots & \vdots & -y_2 \\ \vdots & & 1 & -y_{n-1} \\ y_{n-1} & \cdots & y_1 & a-y_n \end{vmatrix}=a-\varDelta_0 \tag{97}$$

となる。ここで，$\varDelta_0$ は(96)の右辺の第1項の行列式である。したがって(95)は[11]，

11 ここでは $x \neq 0$ と想定しよう。$x=0$ の場合は後述する。

$$\Delta=\left(1+\frac{1}{x}\right)\Delta_0-\frac{a}{x} \tag{98}$$

となる。

ところが，(94)より，

$$y_s=(1+a)\,y_{s-1} \tag{99}$$

であるから，

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} 1\cdots\cdots 0 & y_1 \\ y_1 \quad \vdots & (1+a)\,y_1 \\ \vdots \quad\ 1 & \vdots \\ y_{n-1}\ \ y_1 & (1+a)\,y_{n-1} \end{vmatrix}=(1+a-y_1)\begin{vmatrix} 1\cdots\cdots 0 & y_1 \\ y_1 \quad \vdots & \vdots \\ \vdots \quad\ 1 & \vdots \\ y_{n-2}\ \ y_1 & y_{n-1} \end{vmatrix}$$

となり，同様の操作を繰返すと，

$$\Delta_0=(1+a-y_1)^{n-1}y_1 \tag{100}$$

となるが，(23)の第１式より，

$$\Delta_0=(1+x)^{n-1}(a-x) \tag{101}$$

となる。これを(98)に代入し，

$$1+x=\lambda \tag{102}$$

とおいて整理すると(95)は，

$$\lambda^n-a(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\cdots+\lambda+1)=0 \tag{103}$$

となる。

(102) を(94)に代入すると，

$$y_s=(1+a-\lambda)(1+a)^{s-1} \quad s=1,2,\cdots,n \tag{104}$$

となるが，これを(25)に代入し，その第１式をとると，

$$p_1=\lambda-a \tag{105}$$

である。しかるに $p_1\geqq 0$ でなければならないから，$\lambda>0$ である。ところが (103) は $a>0$ のとき唯一の正根 λ_n をもつから，

$$x=\lambda_n-1=r^* \tag{106}$$

である。したがって (105) より

$$\frac{p_1}{1+r^*}+\frac{a}{1+r^*}=1$$

となるが，r^* が(27)の根であることから，

$$p_1=\frac{a}{1+r^*}+\cdots+\frac{a}{(1+r^*)^{n-1}}$$

であることが分る。また，(25)の第2式から，

$$p_2=1-p_1(a-r^*)-(1+a)(a-r^*)$$

となるが(107)より，

$$p_2=(1+r^*)^2-(1+r^*)a-a$$

となり，これは，

$$\frac{p_2}{(1+r^*)^2}+\frac{a}{(1+r^*)^2}+\frac{a}{(1+r^*)}=1$$

を意味するが，r^* が(27)の根であることから，

$$p_2=\frac{a}{1+r^*}+\cdots+\frac{a}{(1+r)^{n-2}}$$

である。同様にして(28)を示すことができる。

$x=0$ の場合には，(98)は成立しない。$x=0$ のときには，

$$y_s=a(1+a)^{s-1} \quad s=1,2,\cdots,n \tag{107}$$

となる。したがって，(25)の第1式から，

$$p_1=1-a$$

また第2式より，

$$p_2=1-2a$$

同様にして，

$$p_s=1-sa \qquad s=1,2,\cdots,n-1 \tag{108}$$

である。(26)で $t=n$ とおいた式に，(108)，(109) を代入すると，

$$a(1+a)^{n-1}+(1-a)a(1+a)^{n-2}+\cdots+\{1-(n-1)a\}a=1 \tag{109}$$

これを整理すると，

$$na=1$$

となる[12]。すなわち $x=0$ のときは $a=1/n$ である。$na=1$ のときには既に示したように $r^*=0$ であるから，確かに $x=r^*$ が成立する。また $a=1/n$ であるから，

$$p_s=\frac{n-s}{n}$$

となり(28)も成立する[13]。

12 (109) の左辺を aX とすると，

$$X=\sum_{k=0}^{n-1}(1-ak)(1+a)^{n-1-k}$$

とかけるが，$1+a=A$ とおくと，

$$X=\sum_{k=0}^{n-1}(1+k-kA)A^{n-1-k}=\sum_{k=1}^{n}kA^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}kA^{n-k}=n.$$

13 本稿のテーマに関連して，次の文献を参照されたい。松田和久「内部利子率について」（昭和42年5月），「内部利子率と資本の自己増殖」（昭和43年4月），「内部利子率と利潤率」（昭和44年4月），いづれも『国民経済雑誌』所載。