



経済学における「次元」の問題

置塩, 信雄

(Citation)

国民経済雑誌, 146(6):1-18

(Issue Date)

1982-12

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/00172766>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00172766>



経済学における「次元」の問題

置 塩 信 雄

1 問 題

経済学において、種々の分析を行なう際に数式を援用することは、いまでは一般に行なわれるようになっている。数式を用いて推論を行なう場合、経済諸量のもつ「次元」(dimension)を明確に意識して定式化することは極めて大切なことである¹。

例えば、ある経済状態を示すのに

$$A=B+C \quad (1)$$

という式が書かれたとすれば A , B , C の三者はいずれも同じ次元をもっていなければならない。 A が [kg] という次元, B が [m] という次元, C が [¥] という次元をもっているという場合は、上式は全く無意味なものとなってしまう。

上式のように単純な場合には、経済量の次元についての「一貫性」(consistency)を保つことは困難なことではない。だから、わざわざ“次元”について論じるまでもないと思われるかもしれない。だが、ちょっと立入って考えると、必ずしもさほど簡単ではない。

いま、年利率が i であるとき、元金が X_0 であるとして、一年後の元利合計 X_1 を求めると、誰でも

$$X_1 = (1+i) X_0 \quad (2)$$

という式を立てて、 X_1 をえるであろう。さて、この式を次元の観点から見て

1 次元 (dimension) という言葉は数学の術語としては多くの意味で用いられている。ここでいう次元 (dimension) は数学的な意味ではなく、経済諸量をもつ測定単位をさす。例えば鉄鋼の量は ton という次元を酒の価格は円 per l (リットル) という次元をもつ。

みるとどうなるだろうか。

X_0, X_1 の次元は明らかに [¥] (円) である。問題なのは、利率 i である。利率は 0.1 とか 5 % とかだから、無次元量であると思えるかもしれないが、実はそうではない。0.1 とか 5 % とかといっても、期間を明示しなければ、その利率は高いのか低いのかを判断できないことから分るように、利率 i は無次元量ではない。

利率 i の次元は何だろう。それは、利率の定義から定まってくる。元金が A であり利子が一年間に a だけであるとき、利率 i は

$$i = a/A$$

で定義できる。右辺の A の次元は [¥], a の次元は [¥]/[年] (年あたり ¥) である。したがって、上式が次元について一貫的であるためには、 i の次元は $1/[\text{年}]$ とならねばならない。

さて、利率 i の次元は明らかになったから式(2)に戻ろう。(2)の左辺は [¥] なる次元をもつから、一貫的であるためには、右辺もまた同じ次元 [¥] をもたなくてはならない。ところが、右辺の X_0 の次元は [¥] であるから、結局、 $(1+i)$ は無次元量でなければならないことになる。だが、既にみたように、 i の次元は $1/[\text{年}]$ である。だから、このままでゆけば、 $(1+i)$ という演算が有意義であるためには、 i に加えられる 1 も無次元量ではなく、 i と同じ次元すなわち $1/[\text{年}]$ をもたねばならなくなる。すると(2)の右辺の次元は [¥]/[年] となって、左辺の次元 [¥] とあわなくなる。どう考えるべきであろうか。

式(2)の場合、実は精密に言えば、

$$X_1 = (1 + i \cdot h) X_0 \quad (3)$$

とかかれなければならないのである。ここで、 h は時間を示し、年で測られ、その次元は [年] であり、その大きさは 1 である。(3)の右辺の $i \cdot h$ は次元 $1/[\text{年}]$ をもつ i と、次元 [年] をもつ h との積で次元 [0] をもつ。つまり、無次元量となる。したがって、 $(1 + i \cdot h)$ も無次元量で、それ故(3)の両辺はともに [¥] という次元をもつことによって、一貫性が保たれるのである。²

この簡単な例からも分るであろうように、経済量の次元を明確に意識して、その一貫性を保つように推論を展開するということは、つねに容易なわけではない。そこで、この問題について、やや立入った議論をしようというのが本稿の目的なのである。

2 次元の演算規則

種々の次元をもつ経済量について、種々の演算を行なうと、次元はどのように変化するかについての規則を整理しておくことが、議論をすすめてゆくうえで便利である。

例えば m (メートル) という次元をもち、 x という大きさをもつ量を $x[m]$ と書くことにしよう。まず、同じ次元をもつ量同志の四則演算についてみよう。

$$x[m] + y[m] = (x + y)[m] \quad (4)$$

$$x[m] - y[m] = (x - y)[m] \quad (5)$$

$$x[m] \times y[m] = xy[m] \cdot [m] \quad (6)$$

$$x[m] \div y[m] = x/y[0] \quad (7)$$

(4), (5)は「同じ次元をもった二つの量の和(差)は、やはりその次元をもち、その大きさは二つの量の大きさの和(差)に等しい。」ことを示している。

(6)は「同じ次元をもつ二つの量の積は、その次元の二乗という次元をもち、その大きさは二つの量の大きさの積に等しい。」ことを示している。⁴

(7)は「同じ次元をもった二つの量の商は、無次元量となり、その大きさは二

2 式(3)のように考えることの妥当なことは、次のことから分る。(3)を変形すると

$$(X_1 - X_0)/h = iX_0 \quad (A)$$

とかけるが、 $h \rightarrow 0$ として極限を考えると、

$$dX/dt = iX \quad (B)$$

となる。この微分方程式を $X(0) = X_0$ として、積分すると、 $X(t) = e^{it} X_0$ となる。ここで i はいわゆる「瞬間利率」とよばれるものであるが、 i が次元 $1/[t]$ をもつことにより、 it は無次元となる。また、(A), (B)がえられるのは、(3)において h という[時間]の次元をもつ量を導入したからである。

3 無次元のことを次元 $[0]$ をもつとかくことにする。

4 例えば $3m \times 5m = 15m^2$ で $[m^2]$ という次元は面積を示す。

つの量の大きさの商に等しい。」ことを示している。

次に異なった次元をもつ量の間の四則演算についてみよう。例えば、いま一つ t (年) という次元をもち大きさ z をもつ量 $z[t]$ を考える。

$$x[m] + z[t]: \text{演算不能} \quad (8)$$

$$x[m] - z[t]: \text{演算不能} \quad (9)$$

$$x[m] \times z[t] = xz[m] \cdot [t] \quad (10)$$

$$x[m] \div z[t] = (x/z)[m]/[t] \quad (11)$$

(8), (9)は「異なった次元をもつ二つの量の和 (差) は定義できない。」ことを示している。

(10), (11)は「異なった次元をもつ二つの量の積 (商) は、それら二つの次元の積 (商) という次元をもち、その大きさは二つの量の大きさの積 (商) に等しい。」ことを示している。⁵

次に、巾 (べき) についての規則をみよう。

$$(x[m])^{z[t]}: \text{演算不能} \quad (12)$$

$$(x[m])^{y[0]} = (x^y)[m]^y \quad (13)$$

(12)は「巾に次元をもつ量を用いることはできない。」ことを示している。

(13)は「ある次元をもった量を y 乗すれば (y は無次元量) その結果は、その次元を y 乗した次元をもち、その大きさは、もとの大きさを y 乗したものに等しい。」ことを示している。

次に微分演算についての規則をみよう。いま、 $y[m]$ が $x[t]$ の関数であるとしよう。

$$y[m] = y[m](x[t])$$

$x[t]$ に関する $y[m]$ の微分係数は次のように定義される。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y[m]((x+h)[t]) - y[m](x[t])}{h[t]}$$

5 速度は距離 S を時間 t で微分したものであるが、微分係数の定義から分るように、それは距離の差を時間の差で割ったものである。したがって、速度の次元は、距離の次元を $[m]$ 、時間の次元を $[t]$ とかくとすれば、 $[m]/[t]$ となる。

この分子は次元 $[m]$ をもつ量同志の差であり、(5)からそれは同じ次元 $[m]$ をもつ。分母は次元 $[t]$ をもつ量であるから、(11)から、この分数できまる量は次元 $[m]/[t]$ をもつ。次元の演算に関しては、極限演算は全く無視してもよいことが分る。

最後に積分演算についてみておこう。 $y[m]/[t]$ が $x[t]$ の関数であるとし、 $a[t]$ から $b[t]$ までの定積分は

$$\int_a^b y[m]/[t] \times dx[t]$$

と定義される。被積分項は(10)より、次元 $([m]/[t]) \times [t] = [m]$ をもち、大きさは ydx をもつ量である。積分を実行するということは、和の極限を求めることであるから、(4)から、その結果もまた次元 $[m]$ をもつ。

3 次元の一貫性

筆者はかつて、利潤の源泉は剰余労働の搾取であるというマルクスの命題により一般的な証明を与える目的で、諸商品をそれぞれ一単位生産するために直接・間接に投下しなくてはならない労働量を決定する

$$t_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j + \tau_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

なる方程式を提示した。⁶ここで、 t_i は第 i 商品一単位を生産するために直接・間接に投下しなくてはならない労働量。 τ_i は第 i 商品を一単位生産するために直接に必要な労働量。 a_{ij} は第 i 商品を一単位生産するために消耗しなくてはならない第 j 商品の量である。(14)の右辺第1項は、第 i 商品を生産するために間接に必要な労働量を、第2項は直接に必要な労働量を示し、その和が求める第 i 商品1単位を生産するための必要投下労働量なのである。

ここでの仕事は、方程式(14)を次元の観点から検討することによって、その一貫性を示すことにある。そのため、まず t_i, τ_i, a_{ij} のそれぞれの次元を確定する

6 置塩信雄「価値と価格」(神戸大学経済学研究, 昭和30年3月), 『マルクス経済学』(筑摩書房1977年)所収。

ことからはじめよう。だが、それに先立って、まず、次のような基本的次元を明らかにしておく必要がある。

商品種類は第 1 から第 n まで、 n 個あるが、それらの商品はいずれも、それぞれの商品に固有な次元をもっている。第 i 商品の物量を測る次元を $[i]$ と書くことにしよう。労働量は時間という次元で測ることにし、それを $[h]$ と書くことにしよう。ここでの基本的次元は n 個の $[i]$ と $[h]$ の合計 $n+1$ 個の次元からなる。この基本的次元を用いて、 t_i, τ_i, a_{ij} の次元は次のように定まる。

t_i は第 i 商品を 1 単位生産するために必要な投下労働量であるから、第 i 商品を生産するために必要な総労働量を L_i 、第 i 商品の総生産量を X_i とすれば

$$t_i = L_i[h]/X_i[i]$$

であるから、(11)より t_i の次元は $[h]/[i]$ である。

τ_i は第 i 商品を 1 単位生産するための直接労働量であるから、第 i 商品を生産するために必要な総直接労働量を N_i とすれば

$$\tau_i = N_i[h]/X_i[i]$$

であるから、 τ_i の次元も $[h]/[i]$ である。

a_{ij} は第 i 商品を 1 単位生産するために消耗する第 j 商品の量であるから、第 i 商品を生産するために消耗する第 j 商品の総量を X_{ij} とすれば

$$a_{ij} = X_{ij}[j]/X_i[i]$$

であるから、 a_{ij} の次元は $[j]/[i]$ である。⁹

さて、問題の(14)に戻ろう。(14)の左辺は既にみたように、その次元は $[h]/[i]$ であり、右辺の第 2 項 τ_i の次元も既にみたように $[h]/[i]$ である。したがって、(14)が次元の観点からの一貫性をもつには、右辺の第 1 項を構成する $a_{ij}t_j$ が j の如何にかかわらず、 $[h]/[i]$ なる次元をもっていればよいことが分る。既に

7 例えば鉄鋼の次元が ton であり、石炭の次元がやはり ton であったとしても、それらは異なった次元であると考え、前者は鉄 ton、後者は石炭 ton とする。

8 異なる人々の、また種々の顕現形態（運輸労働か工作労働か）の労働をいかにして、同質の労働としてつかみ、同一の次元 $[h]$ で測るかについては、置塩信雄『資本制経済の基礎理論』（創文社昭和40年）第1章参照。

9 a_{ii} は次元 $[i]/[i]$ をもち、したがって無次元量であることに注意。

述べたことから、(10)を用いれば

$$a_{ij} \frac{[j]}{[i]} \times t_j \frac{[h]}{[j]} = a_{ij} t_j \frac{[h]}{[i]}$$

となり、 $a_{ij} t_j$ は j にかかわらず $[h]/[i]$ という次元をもつ。かくして(14)の両辺の次元は等しいことが示された。

4 行列式の次元

方程式(14)をもう少し異なった角度から眺めて、次元の問題を考えてみよう。

$$\Delta \equiv |E - A| \neq 0 \quad (15)$$

を想定すると、方程式(14)は cramér の公式を用いて

$$t_i = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} \tau_k \quad (16)$$

と書ける。但し、 E は n 次の単位行列、 A は a_{ij} を要素とする n 次の正方行列、 $|E - A|$ は、行列 $E - A$ よりつくられる行列式、 Δ_{ki} は Δ の第 k 行第 i 列の要素に関する余因数 (cofactor) である。

さて、ここでの問題は次元の観点から(16)を眺めて、その一貫性をみようということである。

まず、(16)の左辺の次元は前節の所説から分るように、 $[h]/[i]$ である。また、右辺に現われている τ_k は、 $[h]/[k]$ である。したがって、(4)および(10)から両辺が同一の次元をもつためには、 Δ_{ki}/Δ が $[k]/[i]$ なる次元をもてばよい。このことを調べよう。

このために、まず行列式 Δ の次元を調べよう。そのためには行列式の定義に戻って考えるのが便利である。¹¹

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{vmatrix} \quad (17)$$

10 生産活動によって純生産物（生産したものから、それを生産するために必要な生産財の消耗部分を差引いた残余）を生産できる場合には、 Δ は必ず正である。置塩信雄『資本制経済の基礎理論』第1章。

行列式 A の値は次のように定義されている。まず第 1 列の要素から 1 つの要素を取り出し、その要素の行番号を r_1 とする。次に第 2 列から行番号 r_1 以外の行の要素を取り出し、その要素の行番号を r_2 とする。次に第 3 列から行番号 r_1, r_2 以外の行の要素を取り出し、その要素の行番号を r_3 とする。……一般に、第 m 列から行番号 $r_1, r_2, \dots, r_{m-1}$ 以外の行の要素を取り出し、その要素の行番号を r_m とし、第 n 列に至る。このようにして、とり出した n 個の要素の積をつくり、順列 $r_1, r_2, \dots, r_n$ が偶順列であれば 1 を、奇順列であれば -1 をかける。このような n 個の要素のとり出し方は、合計 $n!$ あるが、その各々について、上記の計算を行ない、その合計を求めたものが行列式 A の値である。

さて、 A の次元をみるために、上の定義にしたがって、各列から同じ行からはとらないように注意しながら要素を一つずつとり出し、その要素の次元を書きならべてみよう。まず第 1 列からは、第 r_1 行の要素を取り出したとすると、その要素の次元は、前後の所説から分るように、 $[1]/[r_1]$ である。次に第 2 列からは第 r_2 行の要素を取り出したとすると、その次元は $[2]/[r_2], \dots$ となる。これらの要素の積をつくるのであるから、その次元は、(10) より次元の積となるから、

$$\frac{[1]}{[r_1]} \cdot \frac{[2]}{[r_2]} \cdots \frac{[n-1]}{[r_{n-1}]} \cdot \frac{[n]}{[r_n]} \quad (18)$$

となる。ところが、 $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$ は、 $1, 2, \dots, n$ の繰返しを許さない順列であるから、順序を適当に入れかえれば、(18) の分母は、分子と一致するから、(7) より A は無次元量であることが分る。

同様の方法で A_{ki} の次元を調べよう。 A_{ki} は、 A の第 k 行第 i 列の要素に関する余因数であるから、(17) の右辺の行列式から第 k 行と第 i 列を取り去った行列式に $(-1)^{k+i}$ を乗じたものである。

この A_{ki} について、いま A について行なったと同様に、第 1 列、第 2 列と各列から、行をかさならないように一要素ずつとり出し、その次元の積をつくると、

11 行列式の定義については、例えば二階堂副包『経済のための線型数学』（培風館、昭和36年）参照。

$$\frac{[1] \cdot [2] \cdots [k] \cdots [n]}{[r_1] \cdot [r_2] \cdots [r_{n-2}] \cdot [r_{n-1}]} \quad (19)$$

となる。ところが、 $r_1, \dots, r_{n-1}$ は

$$1, 2, \dots, k, \dots, n$$

の繰返しを許さない順列であるから、(19)は結局 $[k]/[i]$ となる。こうして、 Δ_{ki} の次元は $[k]/[i]$ であることが分った。したがって、(16)の両辺の次元がいずれも $[k]/[i]$ であるという一貫性が保たれていることが示された。

5 もう一つの例

筆者は、前述の方程式(14)を提示したとき、同時に、マルクスの「生産価格論」の諸命題を明確化する目的で、均等利潤率を決定する

$$p_i = (1+r) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} p_j + \tau_i w \right) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad w = \sum_{j=1}^n b_j p_j \quad (20)$$

なる方程式を提示した。¹²ここで、 p_i は第 i 商品の単位価格、 w は貨幣賃金率、 r は利潤率、 $(b_1, \dots, b_n)$ は労働者が労働時間当り受取る賃金で購入できる商品のバスケット。生産技術を示す a_{ij}, τ_i と労働者の受取る実質賃金率を示す $(b_1, \dots, b_n)$ が与えられれば、(20)は、利潤率と $p_1, \dots, p_n, w$ の相対比を決定する。

ここでの仕事は前節と同様、(20)を次元の観点から眺めることである。 a_{ij}, τ_i の次元については既に第3節でみたから、まず、 p_i, w, b_i, r の次元についてみてゆくことにしよう。

p_i は第 i 商品の単位価格であるから、第 i 商品の総価額を Y_i 、総生産量を X_i とすれば、 Y_i の次元は $[\text{¥}]$ 、 X_i の次元は $[i]$ であるから、

$$p_i = Y_i [\text{¥}] / X_i [i]$$

より、 p_i の次元は $[\text{¥}]/[i]$ であることが分る。

w は貨幣賃金率であるから、賃金総額を W 、雇用総計を N とすれば、 W の次元は $[\text{¥}]$ 、 N の次元は $[h]$ であるから、

$$w = W [\text{¥}] / N [h]$$

12 置塩信雄「価値と価格」(前出)。

より、 w の次元は $[\text{¥}]/[h]$ である。

b_i は労働時間当り労働者が受取りうる第 i 商品の量であるから、労働者が受取る第 i 商品の量を B_i 、総労働量を N とすれば、 B_i の次元は $[i]$ 、 N の次元は $[h]$ だから、

$$b_i = B_i[i]/N[h]$$

より、 b_i の次元は $[i]/[h]$ である。

r は利潤率である。本稿の冒頭で例示した利子率と同様、 r は一見、無次元量のようにみえるが実はそうではない。投下資本が例えば 1 億円で利潤が 2 億円あるといわれても、それが、どれだけの期間の間の利潤であるかがわからなければ、利潤率の大小を論じることは出来ないということを考えても分るように、利潤率は時間に関係した次元をもち、利子率の場合と同様に $1/[t]$ という次元をもつ。¹³

さて、(20) に戻ろう。(20) の第 1 式の左辺の次元は上述より $[\text{¥}]/[i]$ である。右辺の括弧内の第 2 項 $\tau_i w$ の次元は

$$\frac{[h]}{[i]} \cdot \frac{[\text{¥}]}{[h]} = \frac{[\text{¥}]}{[i]}$$

であり、第 1 項の $a_{ij} p_j$ の次元は

$$\frac{[j]}{[i]} \cdot \frac{[\text{¥}]}{[j]} = \frac{[\text{¥}]}{[i]}$$

で、合計が出来て、その結果の次元も $[\text{¥}]/[i]$ である。問題は、右辺にかかっている $(1+r)$ である。利潤率は既に述べたように $1/[t]$ という次元をもつ。したがって、このままでは次元の一貫性が失われる。冒頭で述べた利子率の場合と同様、(20) の第 1 式の $(1+r)$ は、精確には $(1+r \cdot h)$ とかくべきで、 h は大きさは 1 で、 $[t]$ の次元をもつ量である。すると、 rh は無次元量となり、 $1+r$ も無次元量で、(20) の第 1 式の両辺の次元は $[\text{¥}]/[i]$ となり一貫性が保たれる。

13 利潤率がどのような期間についてもものであるかを明白にするために例えば年利潤率などといわれる。マルクス『資本論』第 3 巻第 14 章参照。利子率について、年利率、月利率などというのと同じである。

(20)の第2式の左辺の次元は $[¥]/[h]$ である。右辺の各項 $b_j p_j$ の次元は

$$\frac{[j]}{[h]} \cdot \frac{[¥]}{[j]} = \frac{[¥]}{[h]}$$

となり、次元の一貫性は保たれている。

6 列和, 行和の条件

方程式(20)の第2項を第1式に代入して整理をすると,

$$\lambda p_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} p_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

となる。但し,

$$\lambda = 1/(1+r) \quad (22)$$

$$c_{ij} = a_{ij} + \tau_i b_j \quad (23)$$

λ は無次元量。 c_{ij} は a_{ij} と同じ次元すなわち $[j]/[i]$ をもつ。また $\tau_i b_j$ の次元も

$$\frac{[h]}{[i]} \cdot \frac{[j]}{[h]} = \frac{[j]}{[i]}$$

より, 同じ次元をもつ。

さて, (22)より, λ が決まれば利潤率 r は決定されるが, (21)より, λ は

$$|\lambda E - C| = 0 \quad (24)$$

の根としてきまる。ここで E は n 次の単位行列で,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

である。経済的意味より $C \geq 0$ 。行列 C が indecomposable であると想定すれば, 方程式(21)において, $p_i > 0$ ならしめる λ は唯一つしかなくそれは正であり, (24)の絶対値最大の単根である。(Frobenius の定理)¹⁴。これを λ^* としよう。

この λ^* が均等利潤率 r をきめるのであるが, (22)から分るように, 均等利潤率 r がプラスであるためには λ^* は1より小でなければならない。したがって, 均

14 Frobenius の定理については, 二階堂『線型数学』(前出)第2章参照。

等利潤率がプラスであるための条件を求めるには、 λ^* が1より小である条件を探せばよいことになる。

ところが λ^* が1より小であるための条件として、次のものが知られている。¹⁵

行列 C の行和 $\sigma_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}$ 、列和 $s_j = \sum_{i=1}^n C_{ij}$ に対して、

$$\max_i \sigma_i < 1 \quad (25)$$

$$\max_j s_j < 1 \quad (26)$$

であれば、 λ^* は1より小である（行和、列和の条件）。

さて、われわれの主題である次元の問題に戻ろう。均等利潤率がプラスであるための一つの十分条件として、行和がすべての行について1より小であり、列和がすべての列について1より小であることが挙げられているのであるが、この条件に含まれている行和、列和とは何であるかを次元の観点からみてみるとどうなるであろうか。

既にみたように、行列 C の要素 C_{ij} は $[j]/[i]$ なる次元をもっていた。すると、行和

$$\sigma_i = C_{i1} + C_{i2} + \cdots + C_{in}$$

は次元を無視しない限り、(8)より定義不能である。

また、列和

$$s_j = C_{1j} + C_{2j} + \cdots + C_{nj}$$

も、右辺の各項はいずれも次元を異にしており、したがって合計は意味をもたないのである。

では、次元の観点を堅持する限り、上記の行和、列和の条件は全く無意味なものであろうか。これについて立入って考えてみようというのが、われわれの次の仕事である。

7 次元演算規則の無視

これを考えるために、行和、列和の条件がどのようにして導かれたかをふり

15 註14参照。

かえてみることに有益である。

列和の条件は次のようにして導かれる。(21)を構成する n 個の方程式を加え合
せると、

$$\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n C_{ij} - \lambda^*) p_j = 0 \quad (27)$$

Frobenius の定理から $p_j > 0$ である。(27)を $\sum_{j=1}^n p_j > 0$ で割ると、

$$\lambda^* = \sum_{j=1}^n s_j p_j / \sum_{j=1}^n p_j \quad (28)$$

をえる。(28)の右辺は列和 s_j に p_j の加重値をつけた $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ の加重平均 (weighted average) である。ところが、(26)が成立すれば、 $s_1, s_2, \dots, s_n$ はすべて 1 より小であるから、その加重平均 (加重値 $p_i > 0$) もまた 1 より小であり、したがって、(28)より

$$\lambda^* < 1 \quad (29)$$

となる。

行和の条件も同様にして、次のように導かれる。 λ^* は(24)の絶対値の最大の単
根であるから、それはまた

$$|\lambda E - C'| = 0 \quad (30)$$

の絶対値の最大な単根でもある。ここで C' は行列 C の転置行列である。それ
故、 λ^* は

$$\lambda x_j = \sum_{i=1}^n C_{ij} x_i \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (31)$$

において、 $x_j > 0$ ならしめる唯一の λ でもある。

さて、(31)を構成する n 個の方程式を加え合せると、

$$\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n C_{ij} - \lambda^*) x_i = 0 \quad (32)$$

これより、

$$\lambda^* = \sum_{i=1}^n \sigma_i x_i / \sum_{i=1}^n x_i \quad (33)$$

をえる。これより、 λ^* は行和 σ_i の加重平均 (加重値 $x_i > 0$) に等しいから、(25)
が成立すれば、 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ はすべて 1 より小となり、したがって(29)が成立する。

次元の観点からみると、以上の推論のうちで最も問題なのは、(27), (32)の導出である。というのは、例えば、(27)は(21)を構成する n 個の方程式を加え合わせて導かれたが、このことは次元の観点から可能であろうか。(21)を構成する n 個の方程式の第 i 番目の式は前節でみたように、 $[\mathbb{Y}]/[i]$ なる次元をもつ量と等しいことを示していた。したがって、これらの式をそのままに加え合せるということとは、

$$\frac{[\mathbb{Y}]}{[1]} + \frac{[\mathbb{Y}]}{[2]} + \cdots + \frac{[\mathbb{Y}]}{[n]}$$

という加算を行なったことであり、これは(8)より不可能なことである。

また(32)は(31)を構成する n 個の方程式を加え合せて導かれた。しかし、(31)を構成する n 個の方程式の第 j 番目の式は、次元の観点からどのようなものであろうか。(31)は x_i を $[i]$ なる次元をもつ量とすると、次元の一貫性は保たれる。というのは左辺の次元は $[j]$ となり、右辺の次元は

$$\frac{[j]}{[i]} \cdot [i] = [j]$$

となるからである。そこで、これらの式をそのままに加え合せるということとは

$$[1] + [2] + \cdots + [n]$$

という加算を行なったことであり、これもまた(8)より不可能なことである。

では、これらの困難を回避して、列和・行和の条件を意味あらしめることは出来ないだろうか。

8 次元を考慮した列和、行和の条件

列和の条件を導くために、(21)をいきなり加え合せて(27)をえることはできない。加え合わせるためには、加え合わす各々の次元をいづれも等しいものにする必要がある。(21)の第 i 番目の式は $[\mathbb{Y}]/[i]$ という次元をもっているから、各々の式が加え合わせられるようにするには、第 i 番目の式に次元 $[i]$ をもつ量 y_i を掛ければよい。すると、(27)に代って、

$$\lambda^* \sum_i p_i y_i = \sum_i \sum_j C_{ij} p_j y_i \quad (34)$$

をえる。これより

$$\lambda^* = \sum_j (\sum_i C_{ij} y_i / y_j) p_j y_j / \sum_i p_i y_i \quad (35)$$

を導くことができる。この式から $\lambda^* < 1$ なるための次のような十分条件を導くことができる。

$$\sum_i C_{ij} y_i / y_j < 1 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (36)$$

ならしめる $y_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) が存在すれば, $\lambda^* < 1$ である。

実際, (36)を充たす $y_i > 0$ が存在すれば, (35)において, 右辺の分子の括弧の中はすべて1より小となる。ところが λ^* はそれらの加重平均 (加重値 $p_j y_j > 0$) であるから, λ^* も1より小となる。

この列和の条件は, 次元の一貫性を保っている。実際(36)の不等式の左辺の次元をしらべてみよう。分子の各項 $C_{ij} y_i$ の次元は

$$\frac{[j]}{[i]} \cdot [i] = [j]$$

であり, 分母の y_j の次元は $[j]$ であるから, 結局, 左辺の次元は無次元であり, それが無次元の量1と比較されている。

また, (35)の右辺の加重値 ($p_1 y_1, p_2 y_2, \dots, p_n y_n$) はいずれも

$$\frac{[\yen]}{[i]} \cdot [i] = [\yen]$$

という共通の次元 $[\yen]$ をもっている。

行和の条件も同様の考えで導くことができる。(31)をそのまま加え合せ(32)をえることはできない。(31)の第 j 番目の式は $[j]$ という次元をもっているから, 各々の式を加え合わせられるようにするには, 第 j 番目の式に次元 $[*]/[j]$ をもつ量 q_j を掛ければよい。ここで, $[*]$ はある特定の次元を示す。すると(32)に代って

$$\lambda^* \sum_j x_j q_j = \sum_j \sum_i C_{ij} x_i q_j \quad (37)$$

をえる。これより,

$$\lambda^* = \sum_i (\sum_j C_{ij} q_j / q_i) x_i q_i / \sum_i x_i q_i \quad (38)$$

を導くことができる。

この式から $\lambda^* < 1$ なるための次のような十分条件を導くことができる。

$$\sum_j C_{ij} q_j / q_i < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (39)$$

ならしめる $q_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ が存在すれば、 $\lambda^* < 1$ である。

実際、(39)を充す $q_i > 0$ が存在すれば、(38)において、右辺の分子の括弧の中はすべて1より小となる。ところが λ^* はそれらの加重平均（加重値 $x_i q_i > 0$ ）であるから λ^* も1より小となる。

9 その経済的意味

列和、行和の条件を次元についての一貫性を保ちながら書きかえたのが、(36)、(39)であるが、その経済的意味は何であろうか。次元を考えずに導かれた行和、列和の条件(25)、(26)は次元についての演算規則を侵しているために、経済的解釈を許さないものであった。だが、(36)、(39)は次元についての一貫性を保っているから、その経済的解釈を下すことができる。

列和の条件、(36)は $y_i > 0$ であることを考慮すれば

$$y_i > \sum_j C_{ij} y_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (40)$$

とかける。 y_i は次元 $[i]$ をもつ量であるから、第 i 商品の生産量と解釈できる。すると、(40)の右辺は各商品を $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ だけ生産するために必要とする第 j 商品の量を示す。係数 C_{ij} の定義(23)から分るように、 C_{ij} は第 i 商品を一単位生産するために消耗（生産財として）しなくてはならない第 j 商品の量 a_{ij} と、第 i 商品を一単位生産するために投下しなければならない直接労働量 τ_i に対して、労働者が受取る第 j 商品の量 $\tau_j b_j$ との和である。だから、(40)の右辺は各商品をそれぞれ $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ だけ生産するために、生産財として、また労働者のための消費財として第 j 商品をどれだけ必要とするかを示す。したがって、(40)はそれぞれの商品が、それら必要量をこえて生産され得ることを要求している。すなわち、各商品について剰余生産物 (surplus products) が生産されるということを要求している。かくして、列和の条件の経済的意味は「各

商品について制余生産物が生産可能であれば、均等利潤率はプラスとなる。¹⁶ということであることが分った。

行和の条件(39)は $q_i > 0$ であることを考慮すれば、

$$q_i > \sum_j C_{ij} q_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (41)$$

とかける。 q_i は次元 $[*]/[i]$ をもつ量であったから、条件(41)の経済的意味を考えるには、次元 $[*]$ を確定しなくてはならない。

まず、次元 $[*]$ を $[\text{¥}]$ であるとしてみよう。すると、 q_i は $[\text{¥}]/[i]$ の次元をもつ量であるから、第 i 商品の単位当り価格と解釈できる。すると、(41)の右辺は第 i 商品 1 単位を生産するために必要な生産費を示す。この生産費には、消耗生産財のほかに賃金も含まれている。そしてその次元は

$$\frac{[j]}{[i]} \cdot \frac{[\text{¥}]}{[j]} = \frac{[\text{¥}]}{[i]}$$

で、左辺の次元と一致する。そして、(41)の経済的意味は「各商品の生産について、生産費を上廻る価格をつけることが可能であれば、均等利潤率はプラスとなる。」ということになる。

次に、次元 $[*]$ を $[\text{¥}]$ ではなく、労働時間を測る $[h]$ であるとしてみよう。すると、 q_i は $[h]/[i]$ の次元をもつ量となるから、 q_i を第 i 商品一単位生産するために直接・間接必要な投下労働量（第3節の t_i ）であると解釈できる。すると、(41)は(23)と第3節の(14)を用いて、次のように書きかえられる。

$$t_i > \sum_j (a_{ij} + \tau_i b_{ij}) t_j \quad (42)$$

$$\sum_j a_{ij} t_j + \tau_i > \sum_j (a_{ij} + \tau_i b_{ij}) t_j$$

$$1 > \sum_j b_{ij} t_j$$

(42)の経済的意味をみるまえに、(42)の右辺の次元をみておこう。 $b_{ij} t_j$ の次元は

$$\frac{[j]}{[h]} \cdot \frac{[h]}{[j]} = [0]$$

となり無次元である。 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ は労働 1 単位当り労働者が受取る諸商品のバスケットであり、 t_j は第 j 商品 1 単位生産のための投下労働量であるから、

16 この命題は置塩「価値と価格」(前出)でえられている。

$\sum b_i t_i$ は、労働者が労働 1 単位当りに受取る諸商品のバスケットを生産するために直接・間接に必要な労働時間が労働 1 単位時間に占める比率を与えているのである。それ故、(42)の意味は労働者が剰余労働 (surplus labor) を行なっていることを示している。だから、(41)の経済的意味は「労働者が剰余労働を行なわ¹⁷されていれば、均等利潤率はプラスとなる。」ということであることが分る。

10 結

本稿において、われわれは若干の例を挙げて、経済学への数学的方法の援用において、経済諸量の次元の確認、次元間の一貫性をチェックして議論をすすめることが大切であることを論じてきた。もちろん、次元の分析が大切であるのは、上にあげた諸例にとどまるわけではない。広く、多くの研究において、問題のこの側面の検討をすすめることが必要であると筆者は考える。また、更に深く、次元についての演算規則の形式化、その根拠についてのより深い哲学的研究などが行なわれなくてはならない。幸にして、本稿がこの方面に読者の注意を喚起することができ、より立入った数多くの労作が出現すれば望外のよろこびである。¹⁸

17 この命題もまた置塩「価値と価格」(前出)でえられている。

18 物理学における次元の研究はかなり立入って行なわれており、物理学研究に有効な貢献をしている。例えば A. W. Porter, *The method of dimensions*, Methuen, London, 1958,