



R. SolowのSurvival Problemについて

下村, 和雄

(Citation)

国民経済雑誌, 146(6):51-65

(Issue Date)

1982-12

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/00172769>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00172769>



R. Solow の Survival Problem について

下 村 和 雄

I 序

涸渇性資源 (Exhaustible Resources) を有する経済体系を想定しよう。この資源は消費財の生産に不可欠であるとする。当該経済体系が一定の消費水準を永続的に維持していけるためには生産技術が如何なる条件を満たしていなくてはならないであろうか。

R. Solow はこの問題を提示し、以下の様な命題を証明した。¹ 生産関数がコブ = ダグラス型,

$$(1) \quad y = k^\alpha \cdot m^\beta$$

であると仮定する。ただし k は資本, m は資源使用率である。また, 消費財と資本財は完全代替可能であるとし, 蓄積方程式を

$$(2) \quad \dot{k} = k^\alpha \cdot m^\beta - c$$

と表わす。 c はある正の一定値である。Solow はこの方程式の解 $k(t)$ が決して負にはならず, かつ総資源使用量,

$$(3) \quad \int_0^\infty m(t) dt$$

が有限になるための必要かつ充分条件が,

$$(4) \quad \alpha > \beta$$

となることを証明した。

Solow の提示した問題をより緩い仮定のもとで考察することは一つの理論的に興味ある問題であろう。Cass = Mitra [2], Mitra [3] はより一般的な生産関数のもとで永続的に一定の消費水準を維持していく為の条件を求めた。その条

件とは以下の様である。生産関数の等量曲線を $m=\phi(k; y)$ と表わすとき、ある y と $k_0 > 0$ について、

$$(5) \quad \int_{k_0}^{\infty} \phi(k; y) dk < \infty$$

となることである。² Cass, Mitra 等はこの条件が必要充分条件となることを証明したが、この条件の充分性については以下の様に簡単に示すことができる。

いま次の様な資源配分を考えよう。

$$(6) \quad \dot{k} = s \cdot \bar{y}, \quad k(0) = k_0$$

$$(7) \quad c = (1-s) \bar{y}$$

$$(8) \quad m = \phi(k; \bar{y})$$

ただし s は $0 < s < 1$ なる一定値である。(6)より $k = s\bar{y}t + k_0$ であるから $\dot{k}$ は常に正で $t \rightarrow \infty$ のとき無限大となる。それゆえ、

$$(9) \quad \int_0^{\infty} m(t) dt = \frac{1}{s\bar{y}} \int_{k_0}^{\infty} \phi(k; \bar{y}) dk$$

従って $\bar{y}$ を適当に選べば右辺は有限値となり、左辺も有限となる。

Solow の問題は利潤所得に関する理論と関わりがあると思われる。初期の投下資本価値を維持しつつ永続的に取り出し得る最大額が利潤所得であるが、Solow の問題を、涸渇性資源の存在を明示的に考慮したもとの所得概念の成立可能性を問うものとして捉えることができよう。本稿ではこの様な観点に立って、涸渇性資源を明示的に考慮したもとの、利潤所得とそれを規定する諸要因との関係を明らかにする。

II 最適資源配分

消費にも資本蓄積にも使用できる財が一種類存在し、資本と涸渇性資源によって生産されるものとする。財の生産関数を、

$$(10) \quad y = f(k, m)$$

² k_0 は所与の初期資本ストックである。

³ 所得概念については Hicks [3], 置塩 [4] 参照。

と表わす。 f は強凹であり,

$$(11) \quad f(k, 0) = 0 \text{ for } \forall k \geq 0$$

$$(12) \quad \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m} f(k, m) = +\infty$$

を満足すると仮定する。

以上の想定のもとで本稿では次の様な最適問題の解を導出しよう。⁴

[P]

$$(13) \quad \max_{\{m\}} - \int_0^{\infty} m dt \quad \text{subject to}$$

$$\dot{k} = f(k, m) - c$$

$$k(0) = k_0, \quad k \geq 0, \quad m \geq 0$$

最適の為の条件は, λ を補助変数として,

$$(14) \quad -1 + \lambda f_m(k, m) \leq 0, \quad f_m \equiv \frac{\partial}{\partial m} f$$

$$(15) \quad m \{-1 + \lambda f_m(k, m)\} = 0$$

$$(16) \quad \dot{\lambda} = -\lambda f_k(k, m), \quad f_k \equiv \frac{\partial}{\partial k} f$$

最適解に関して以下のような事が成立する。

[レンマ 1] 最適径路上では $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = \infty$

[証明] もし $k(t)$ が有界であるとすれば, 任意の t に対して,

$$(17) \quad k(t) \leq \bar{k}$$

となる $\bar{k}$ が存在する。他方 $\int_0^{\infty} m dt < \infty$ であるから, $t \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow 0$ 。従って,

$$(18) \quad f(k, m) - c \leq f(\bar{k}, m) - c \rightarrow -c$$

すなわち, 充分大きい t 以降 $\dot{k}$ の上限は負値となる。これは k が有限期間内にゼロとなることを意味する。 (証了)

[レンマ 2] 最適径路上では常に $\dot{k} \geq 0$ 。

4 問題 P の解が常に存在するということは必ずしも言えない, しかし f がコブ=ダグラス型であって Solow の条件(4)を満たしていれば最適解は必ず存在する。

[証明] ある $\tilde{t}$ で $\dot{k} < 0$ とする。このとき、充分小さい $\varepsilon > 0$ に対して、

$$(19) \quad k(\tilde{t}) > k(\tilde{t} + \varepsilon)$$

が成立しなくてはならない。更に、レンマ 1 によってある $t^* (> \tilde{t} + \varepsilon)$ に対して

$$(20) \quad k(t^*) = k(\tilde{t})$$

となる。さて、次の様な資源配分径路を考えよう。

(i) $t \in [0, \tilde{t})$ では最適径路と同じ資源配分。

(ii) $t \in [\tilde{t}, \infty)$ では $t \in [t^*, \infty)$ における最適径路と同じ資源配分。

(20) を考慮すれば、このような資源配分が可能であることは明らかである。しかもこの径路に対応する資源使用量は、最適径路に対応する資源使用量よりも少ない。なぜならば、 $t \in [\tilde{t}, t^*)$ において最適径路上では余分に資源を使用しなくてはならないからである。 (証了)

レンマ 2 より、最適径路上では常に $m > 0$ であることがわかる。もしある t で $m = 0$ ならば、その t で $\dot{k} = -c < 0$ となるからである。従って (14) と (15) より、

$$(21) \quad -1 + \lambda f_m(k, m) = 0$$

λ も常に正となる。

最適解は (13), (16) 及び (21) によって構成されるシステムの解であるが、この解を導出するために、ハミルトニアン

$$(22) \quad H = -m + \lambda(f - c)$$

に注目しよう。

$$(23) \quad \dot{H} = \dot{m}(-1 + \lambda f_m) + \dot{\lambda}(\lambda + \lambda f_k) = 0$$

であるから、上記のシステムの任意の解に対して H は一定となる。 H を

$$(24) \quad H(m_0) = \frac{f(k_0, m_0) - m_0 f_m(k_0, m_0) - c}{f_m(k_0, m_0)}$$

と書き直そう。このとき、次の命題が成立する。

[命題 1] 最適径路は $H(m_0) = 0$ となる m_0 から出発する。

[証明] 最適径路が $H(m_0^*) > 0$ なる m_0^* から出発すると仮定しよう。さて、

$$(25) \quad - \int_0^\infty m dt = - \int_{k_0}^\infty \frac{m}{f - c} dk$$

であるが⁵,

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{-m}{f-c} \right) = \frac{-f_m}{(f-c)^2} H < 0$$

となることに着目して次の様な径路をつくろう。すなわち、 $\bar{m}_0 < m_0^*$ なるある $\bar{m}_0$ から出発してシステム(13), (16), (21)に従い、 k がある $k_1 (> k_0)$ に到達したあと m を非連続的に動かして以降は最適径路をとらせる。微分方程式の解の初期値に対する連続性によって、 $\bar{m}_0$ と k_1 をそれぞれ m_0^*, k_0 に充分近くとれば、この様な径路をつくることは可能である。さてこのとき、 k_0 から k_1 までは

$$(27) \quad -\frac{m}{f-c} \Big|_{m_0=\bar{m}_0} > -\frac{m}{f-c} \Big|_{m_0=m_0^*}$$

となることが(26)よりわかる。また k_1 以降では、

$$(28) \quad -\frac{m}{f-c} \Big|_{m=m_0^*} = -\frac{m}{f-c} \Big|_{m_0=\bar{m}_0}$$

となる。それゆえ、新たにつくられた径路は最適径路よりも大きい目的関数値を与えることになり、矛盾が生じる。

同様の論法によって $H(m_0) < 0$ となる m_0 が最適解の初期条件とはならないことを証明できる。 (証了)

最適解の一意性については次の命題が成立する

[命題2] もし生産関数が強凹であれば、最適解は一意である。

[証明]

$H(m_0)$ を m_0 に関して微分すると、

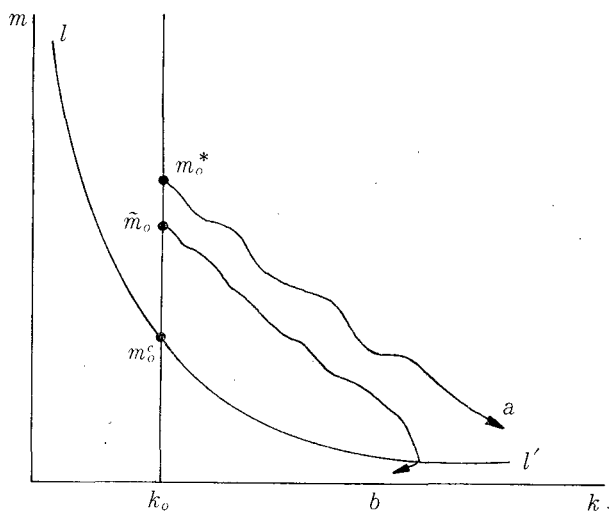
$$(29) \quad \frac{d}{dm_0} H(m_0) = \frac{-f_{mm}}{f^2} (f-c) \geq 0$$

ただし $f_{mm} = \frac{\partial^2}{\partial m^2} f$ である。 $H(m_0) = 0$ なる m_0 では $f-c > 0$ であるから、(29) は最適解が一意であることを含意する。 (証了)

(29)から明らかなように、たとえ強凹でなくとも $f_{mm} < 0$ であれば一意性は成立する。

図1は (k, m) 平面である。曲線 ll' は等量曲線 $f=c$ を表わしている。最

5 レンマ2によりこの積分の変換が正当化される。



〔図 1〕

適解は k_0 からの垂直線上で $H(m_0)=0$ ならしめる点を初期点 m_0^* からの曲線 m_0^*a で表わされている。この曲線の方程式は

$$(30) \quad -m + \frac{f(k, m) - c}{f_2(k, m)} = 0$$

であることが命題 1 によって証明されている。最適解の一意性が保証されている場合には、 k_0 からの垂直線上で、 $(0, m_0^*)$ では $H(m_0) < 0$ 、 (m_0^*, ∞) では $H(m_0) > 0$ となっている。また曲線 m_0^*a は常に等量曲線 l' の上方にある。言い換えれば、決して l' を横切ることはない。もし横切ればそれ以降 $\dot{k} < 0$ となるからレンマ 2 に矛盾する。

m_0^* より小さい m_0 、たとえば図 1 の $\tilde{m}_0$ から出発するシステム (13), (16), (21) の解はどのようになるであろうか。これを以下に示そう。

〔レンマ 3〕 最適解が存在するためには等量曲線 $f=c$ 上において $m \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。

〔証明〕

等量曲線 $f=c$ 上において $m \rightarrow \sigma > 0 (k \rightarrow \infty)$ と仮定しよう。このことは任意の t に対して最適径路上で常に $m > \sigma$ となることを意味するが、これは総資

源使用量が有限値になるための必要条件 $m \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ と矛盾する。

(証了)

[命題3] 図1において、開線分 $m_0^* m_0^*$ から出発するシステム(13), (16), (21)の解は、曲線 $\tilde{m}_0 b$ のように等量曲線 II' を横切る。

[証明] 開線分 $m_0^* m_0^*$ 上の任意の点 m_0 を $\tilde{m}_0$ としよう。 $H(\tilde{m}_0) < 0$ である。さて等量曲線 II' と水平線 $m = -H(\tilde{m}_0)$ の交点を取り、この点を通るシステム(13), (16), (21)の解を考える。このような交点が存在することはレンマ3によって保証されている。この解は $t \rightarrow -\infty$ とするとき必ず垂直線 $k = k_0$ と交わる。さもなければこの解は最適解 $m_0^* a$ とどこかで交わらなくてはならないからである。システム(13), (16), (21)の任意の解に対して H は一定であるから、この交点は m_0 に他ならない。

(証了)

開線分 $m_0^* m_0^*$ 上において m_0 を m_0^* に近づけていくと、システム(13), (16), (21)の解曲線と等量曲線 II' の交点は II' 上でいくらかでも横座標軸に接近していくことになる。最適解を表わす曲線 $m_0^* a$ は $m_0^* < m_0 < m_0^*$ なる m_0 によって定まる曲線群の「極限」となっているのである。

III 「比較静学」

前節までの議論によって、最適解を以下のシステムによって表わし得ることが明らかとなった。

$$(31) \quad f(k, m) - m f_m(k, m) = c$$

$$(32) \quad M = \int_0^\infty m dt = \int_{k_0}^\infty \frac{m}{f(k, m) - c} dk$$

$$(33) \quad \dot{k} = f(k, m) - c, \quad k(0) = k_0: \text{ given}$$

このシステムにおいて、変数は $M, \{k(t)\}, \{m(t)\}$, パラメーターは c と k_0 である。本節では両者の関係を検討する。

(31)より、 m を k と c との関数とみなすことができる。これを $m(k, c)$ と表わそう。ここで、

$$(34) \quad m_k \equiv \frac{\partial}{\partial k} m(k, c) = \frac{1}{m f_{mm}} (f_k - m f_{km})$$

$$(35) \quad m_c \equiv \frac{\partial}{\partial c} m(k, c) = \frac{1}{m f_{mm}} > 0$$

となる。 $m(k, c)$ を用いると本節冒頭のシステムは、

$$(36) \quad \dot{M} = \int_{k_0}^{\infty} \frac{dk}{f_m(k, m(k, c))}$$

$$(37) \quad \dot{k} = f(k, m(k, c)) - c; k(0) = k_0$$

と書き直すことができる。

さて、(36)の被積分項 $\frac{1}{f_m}$ に注目しよう。(35) と $f_{mm} < 0$ より、 $c^1 > c^2$ のとき、

$$(38) \quad \frac{1}{f_m(k, m(k, c^1))} > \frac{1}{f_m(k, m(k, c^2))}$$

が任意の $k \geq k_0$ に対して成立する。したがってより大きい消費水準に対してはより大きい総資源使用量に対応する。

次に(36)を k_0 に関して微分すると、

$$(39) \quad \frac{\partial}{\partial k_0} M = \frac{-1}{f_m(k_0, m(k_0, c))} < 0$$

すなわち、より大きい初期資本ストックにはより小さい総資源使用量に対応する。

(k_0, c) と $\{k(t)\}, \{m(t)\}$ の関係を調べよう。まず k_0 と $\{k(t)\}$ 。(37)の解を $k(t; k_0, c)$ と書くことができるが、 $k_0^1 > k_0^2$ のとき初期のある期間 $k(t; k_0^1, c) > k(t; k_0^2, c)$ でなくてはならない。微分方程式の解の初期条件に対する一意性により、任意の $t \geq 0$ に対して $k(t; k_0^1, c) = k(t; k_0^2, c)$ となることはあり得ない。ゆえに、より大きい初期資本ストックから出発した最適径路上においては各時点での資本ストックはより大きい。

他の関係についてはこれほど明確なことを言うことはできない。しかしもし

$$(40) \quad 1 \geq \left| \frac{m f_{mm}}{f_k} \right| + \left| \frac{m f_{mm}}{f_m} \right|$$

が全ての (k, m) に対して成立していたと仮定すると, c と $\{k(t)\}, k_0$ と $\{m(t)\}$ の関係は確定する。以下これを示そう。

(37) を c について微分すると,

$$(41) \quad \left(\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} \right) = \frac{f_k f_m}{m f_{mm}} \left(1 - \left| \frac{m f_{km}}{f_k} \right| - \left| \frac{m f_{mm}}{f_m} \right| \right) \left(\frac{\partial k}{\partial c} \right) - \left(\frac{f_m}{m f_{mm}} + 1 \right)$$

ただし $\left(\frac{\partial k}{\partial c} \right) \Big|_{t=0} = 0$ である。(40)は右辺第2項が正であることを意味するから,

$$(42) \quad \left(\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} \right) \Big|_{t=0} > 0$$

すなわち, 充分小さい $\varepsilon > 0$ に対して,

$$(43) \quad \left(\frac{\partial k}{\partial c} \right) \Big|_{t=\varepsilon} > 0$$

となる。さていまある $\tilde{t} > 0$ で $\left(\frac{\partial k}{\partial c} \right) = 0$ とすると,

$$(44) \quad \left(\frac{\partial k}{\partial c} \right) \Big|_{t=\tilde{t}} = - \left(\frac{f_m}{m f_{mm}} + 1 \right) > 0$$

従って任意の $t \geq 0$ に対して $\left(\frac{\partial k}{\partial c} \right) > 0$ でなくてはならない。言い換えれば,

より大きい c の水準には各時点より大きい資本ストックが対応する。

次に $m(k, c)$ を k_0 で微分すると,

$$(45) \quad \frac{\partial m}{\partial k_0} = \left(\frac{\partial k}{\partial k_0} \right) m_k$$

ここで $\frac{\partial k}{\partial k_0}$ は既述より正。また(40)のもとでは m_k は負となる。従ってより大きい初期資本ストックから出発した径路上では各時点における資源使用率はより小さい。

c と $\{m(t)\}$ の関係は明白でない。 $m(k, c)$ を c で微分すると,

$$(46) \quad \frac{\partial m}{\partial c} = \left(\frac{\partial k}{\partial c} \right) m_k + m_c$$

となるが, 右辺第一項 (負) は c の「増加」が各時点におけるより大きい資本蓄積を必要とすることから生ずる資本の資源に対する代替効果を示し, 第二項 (正) は直接効果を示している。両者は相殺し合う。

ただし, 初期においては $-\frac{\partial m}{\partial c} > 0$ である。なぜなら $\left(\frac{\partial k}{\partial c} \right) \Big|_{t=0} = 0$ だから

表 1

従属変数 独立変数	M	$\{k\}$	$\{m\}$
k_0	-	+	-
c	+	+	?

である。

以上、資源と資本の限界生産力の資源に対する弾力性の和が1を超えないという追加的な仮定のもとで最適解に関する「比較静学」をおこな

った。その結果を表1にまとめておく。

IV 賃金率と利潤

システム(31), (32), (33)における c は所得としての意義を有している。まずこのことを示し、次に賃金率を体系の中に導入して両者の関係を検討しよう。

(31), (32), (33)によって決まる写像 $(k_0, c) \Rightarrow M$ において、この関係を満足する (k_0, M) のもとで c はとりうる最大値であることをまず示そう。いま、この (k_0, M) に対して $\bar{c} > 0$ が存在して $\bar{c} > 0$ かつ、

$$(47) \quad M \geq \int_0^{\infty} m(t; \bar{c}) dt$$

及び、(13)を満たす $k(t; \bar{c})$ が任意の t に対して非負と仮定しよう。この $\bar{c}$ と k_0 から決まる最小の M を $\bar{M}$ とする。ところが、前節の議論から、 $\bar{c} > c$ ならば、

$$(48) \quad M < \bar{M}$$

となる。(47)と(48)は両立しない。

すなわち、いま適当に k_0 と M を定めてやると(31), (32), (33)を満足する c は、資源総使用量が M を越えず、かつ、どの時点においても資本ストックが非負であるという条件のもとで永続的に每期とり出し得る最大値である。従って c は明らかに所得としての意義を有している。

本稿ではこれまで、生産は資本と資源によっておこなわれると仮定してきた。いま第三の生産要素として労働を導入し、これが一定の賃金率のもとで利用可能であるとする。生産関数を

$$(49) \quad y = f(k, m, l)$$

ただし l は労働、と表わし、これが規模に関して収穫一定で、通常の企業理論

で想定される全ての性質を満たしているものとする。このとき、問題 [P] は次の様に書きかえられる。

$$\begin{aligned} [P_1] \quad & \max_{\{m, l\}} - \int_0^\infty m dt \\ & \text{subject to } \dot{k} = f(k, m, l) - wl - c \\ & k(0) = k_0, w; \text{ given} \end{aligned}$$

この問題の解が満たすべき条件として、

$$(50) \quad f_l \equiv \frac{\partial}{\partial l} f = w$$

を得る。従って l は k と m の関数 $l(k, m; w)$ となり、

$$(51) \quad l_1 \equiv \frac{\partial}{\partial k} l = - \frac{f_{lk}}{f_{ll}}$$

$$(52) \quad l_2 \equiv \frac{\partial}{\partial m} l = - \frac{f_{lm}}{f_{ll}}$$

となる。

さて、次の様な関数を定義しよう。

$$(53) \quad g(k, m; w) \equiv f(k, m, l(k, m; w)) - wl(k, m; w)$$

明らかに、

$$(54) \quad g_k \equiv \frac{\partial}{\partial k} g = f_k + f_l l_k - w l_k = f_k > 0$$

$$(35) \quad g_m \equiv \frac{\partial}{\partial m} g = f_m + f_l l_m - w l_m = f_m > 0$$

もし $0 = l(k, 0; w)$ という仮定を追加すれば、

$$(56) \quad f(k, 0, l) = 0 \quad \text{for } \forall (k, l) > 0$$

という条件のもとで、

$$(57) \quad g(k, 0; w) = 0 \quad \text{for } \forall k > 0$$

となる。 $g_m > 0$ であるから、

$$(58) \quad g(k, m; l) > 0 \quad \text{for } \forall (k, m) > 0$$

また、

$$(59) \quad g_{mm} \equiv \frac{\partial^2}{\partial m^2} g = f_{mm} - \frac{f_{lm}}{f_{ll}} f_{ml} = \frac{1}{f_{ll}} (f_{ll} f_{mm} - f_{lm}^2)$$

は f が擬凹であれば負となるから、第 II 節に示したように問題 $[P_1]$ の解は一意となる。またこの場合には Cass 等の求めた条件が適用できる。すなわち、もし g の等量曲線 $\phi_g(k; y, w) = m$ に対して、

$$(60) \quad \int_{k_0}^{\infty} \phi_g(k; y, w) dk < \infty$$

となるようなものがあれば、総資源使用量が有限で、かつ資本ストックが負にならないような資源配分経路で每期永続的に一定の c を取り出すことのできるものが存在する。なお、(60) の充分条件のひとつは、 f のある等量曲面 $m = \phi_f(k, l; y)$ に関して

$$(61) \quad \int_{k_0}^{\infty} \int_0^{\infty} \phi_f(k, l; y) dl dk < \infty$$

となることである。

さて、いまある一定量の資源と資本ストックを有する経済主体を想定しよう。この主体は每期一定の賃金率 w のもとで労働を雇用して、手持ち資源を費消しつつ生産活動をおこなっているものとする。このとき、本節冒頭の議論により、問題 $[P_1]$ の解のような形で生産活動が行われているとき c はこの経済主体が每期とり出し得る一定額の最大値であることがわかる。従って c が利潤としての意義を有していることは明らかである。

賃金率と利潤の関係を検討するために、問題 $[P_1]$ の最適解が満たすべき体系をあらためて明示しよう。

$$(62) \quad g - mg_2 = f_k(k, m, l(k, m; w))k = c$$

$$(63) \quad \dot{k} = f(k, m, l(k, m; w)) - wl(k, m; w) - c$$

$$(64) \quad M = \int_{k_0}^{\infty} \frac{dk}{f_m(k, m, l(k, m; w))}$$

まず、 w と M の関係を求める。

$$(65) \quad \left. \frac{\partial l}{\partial w} \right|_{(50)} = \frac{1}{f_{ll}}$$

を利用して、(62) を k 一定として偏微分すると、

$$(66) \quad \frac{\partial m}{\partial w} = \frac{-f_{kl}}{f_{lk}k_{km} - f_{kl}f_{km}}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned}
 (67) \quad & \frac{\partial}{\partial w} f_m(k, m, l(k, m; w)) \\
 &= (f_{mm} + f_{ml}l_m) \frac{\partial m}{\partial w} + f_{ml} \frac{\partial l}{\partial w} \Big|_{(60)} \\
 &= \frac{f_{km}f_{ml} - f_{kl}f_{mm}}{f_{ll}f_{km} - f_{kl}f_{ml}}
 \end{aligned}$$

となる。これが負となることを以下に示そう。まず、 f が一次同次であることから、

$$(68) \quad f_{ik}k + f_{im}m + f_{il}l = 0$$

ただし $i = k, m, l$ 。 (68) において $i = k, m$ の場合の 2 式より、

$$(69) \quad l = k \cdot \left| \frac{f_{kk}}{f_{mk}} \quad \frac{f_{km}}{f_{mm}} \right| \cdot \left| \frac{f_{km}}{f_{mm}} \quad \frac{f_{kl}}{f_{ml}} \right|^{-1} > 0$$

$i = l, m$ の場合の 2 式より、

$$(70) \quad k = -m \cdot \left| \frac{f_{mm}}{f_{lm}} \quad \frac{f_{ml}}{f_{ll}} \right| \cdot \left| \frac{f_{mk}}{f_{lk}} \quad \frac{f_{ml}}{f_{ll}} \right|^{-1} > 0$$

となるが、(69) の分子は正、(70) の分子は負であるから、(69) の分母すなわち (67) の右辺分子は正、(70) の分母すなわち (67) の右辺分母は負となる。従って (67) は負である。これより、 $w^1 > w^2$ のとき、

$$(71) \quad \frac{1}{f_m(k, m, l(k, m; w^1))} > \frac{1}{f_m(k, m, l(k, m; w^2))}$$

(64) を考慮すれば、(71) は

$$(72) \quad M[w^1] > M[w^2]$$

を意味する。

前節において、より大きい c に対応する M はより大きいことが示されていた。従って (72) のようになっているとき $M[w^1]$ と $M[w^2]$ を等しくするためには w^1 に対応する c がより小さくなくてはならない。すなわち、 w^1 に対応する c を c^1 、 w^2 に対応する c を c^2 とするとき、

$$(73) \quad w^1 > w^2 \Rightarrow c^1 < c^2$$

が成立する。以上、 k_0 と M が与えられているとき、賃金率と利潤が逆行関係に

あることを示した。

V 結びに代えて

本稿の議論を踏まえて論ずべき問題を以下に列挙する。

(i) 総資源使用量が有限で、資本ストックが常に非負になる資源配分の存在の同値条件である Cass=Mitra 条件は必ずしも問題 [P] の最適解の存在を保証しない。生産関数がコブニダグラス関数である場合は Cass=Mitra 条件がその存在を保証するが、他に充分条件が存在するかどうかを検討すること。

(ii) 本稿で論じられた経済主体は、初期に一定の投下資本を有しそれをもって一定の資本設備と「埋蔵量の確定している鉱山」を購入して生産活動をおこなっているものと解釈することができよう。しかし現実には例えばわが国のように国内に十分な資源を持たず他国から購入しなくてはならない場合が存在する。個別経済主体の立場から言えば、労働 l だけではなく資源 m もまた外部から購入しなくてはならない、という場合である。このとき、体系の維持可能性、所得、利潤と賃金率の関係がどのようなになるかを考察すること。⁷

(iii) 本稿では資源の採取自体は costly ではないと仮定していた。Kemp=Long [5] は資源の採取のために生産要素の投入が必要である場合について Survival Problem を考察している。彼等は、財の生産関数が

$$(74) \quad y = f(k_1, m, l_1)$$

資源の生産関数が

$$(75) \quad m = g(k_2, l_2)$$

であるとして、資本、労働、資源の完全利用・雇用条件と蓄積方程式からなる体系において

$$(76) \quad \sup c \geq 0$$

となるための条件を求めている。より一般的な生産関数のもとで、しかも (76) で

7 このような場合について体系の維持可能性を論じたものとして Majumdar, et., al. [6], Ray [7] が挙げられうる。

はなくある正の c を維持する条件を考察すること。

(iv) 本稿では資本財と消費財の完全代替可能性を仮定したが、資源の存在を考慮した上で資本財と消費財からなる 2 部門モデル⁸を構成し、体系の維持可能性、所得、利潤と賃金率の関係等を検討すること。

(v) 資源が複数種類存在する場合、あるいは消費財が複数種類存在する場合に体系を拡張すること、後者の場合には複数消費財から得られる効用 $U(c_1, \dots, c_n)$ がある水準 $\bar{U} (> U(0, \dots, 0))$ よりも低くならないような資源配分の方法を検討することが議論の中心となろう。

以上の問題については稿を改めて論じたい。

参 照 文 献

- [1] Solow, R. M., "Intergenerational Equity and Exhaustible Resources", *Review of Economic Studies*, 41 (1974), 29-45.
- [2] Cass, D. and Mitra, T., "Persistence of Economic Growth Despite Exhaustion of Natural Resources", *CARESS Working paper*, #79-27 (1979).
- [3] Mitra, T., "On Maintainable Consumption Levels and Exhaustible Resources", *Stony Brook Working paper*, No. 198. (1978).
- [4] Hicks, J. R., *Value and Capital*, 2nd ed., Oxford, Clarendon Press, 1946.
- [5] 置塩信雄「利潤率の意義について」, 国民経済雑誌, 第134巻第5号。
- [6] Kemp, M. C. and Long, N. V., "A Note on Solow's Survival Problem", mimeographed, (1982).
- [7] Majumdar, M., Mitra, T. and Ray, D., "Feasible Alternatives under Deteriorating Terms of Trade", mimeographed, (1980).
- [8] Ray, D., "Survival, Growth and Technical Progress in an Open Economy Facing Deteriorating Terms of Trade", mimeographed, (1981).
- [9] Chiarella, C., "The Optimal Depletion of an Exhaustible Resources in a two-sector model", in Kemp, M. C. and Long, N. V., ed., *Exhaustible Resources, Optimality and Trade*, North Holland, (1979).

8 たとえば Chiarella [8] 参照。