Harrodモデル再訪

吹春, 俊隆

(Citation)
国民経済雑誌,151(5):60-77

(Issue Date)
1985-05

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00173462

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00173462

Harrod モデル再訪

吹 春 俊 隆

序

Harrod の悲観的な不安定経済成長論が初めて発表されたのは1939年であるから第2次世界大戦前である。周知の如く，1929年より始まる大不況を通じて，資本主義諸国は，その生産水準に於て50％程の減少を経験し，失業率も25％以上に上昇した。他方，共産主義国ソビエト・ロシアは同時期，その生産水準に於て年率20％以上の成長を記録し，Harrod の悲観論は，当時の資本主義国経済学者の間の一般的な気分を反映したものと言えよう。彼によれば，資本主義経済は，企業家の投資態度から発生する，短期的な不安定要因を抱えているし，長期的にも，生産要素の制約を通じ，経済停滞へと向かう傾向を持つ。しかしながら，第2次世界大戦後，資本主義経済はその活力を取戻し，1960年代にはそのピークを迎えた。何故，1930年代には底無しと思われた大不況が続き，戦後に於ては好況が続いたかという疑問に対し，解答を与える重要な鍵は，Keynes 政策の有効性というより，むしろ，「技術革新の内部化」であろう。星野 [1969] によれば，アメリカの大企業が，自ら，研究機関を設け R & D に乗り出すのは1930年代以降であり，この傾向が本格化するのは第2次世界大戦後である。そして，Girifalco [1982] によれば，約150に及ぶ，様々の技術革新を年代順に並べ，その発生の頻度をとると，1820年代，1880年代，及び1940年代に大きなピークがあり，1900年から1920年にかけての技術革新発生の顕著な落ち込みが読みとれる。技術革新が発生し，それが新投資として実現されるまでのラグを考慮すれば，上述の主張を裏付けるものと考えられよう。また，第2次世界大戦後のアメリカ政府により行なわれた，軍事政策に関連する基礎研

究重視政策も周知の事実である。ただ，ここで注意すべきは，金融・財政政策という Keynes 政策の有効性には疑問が持たれるとしても，投資面を重視した Keynes 的有効需要理論は，この現象の説明に重要な役割を果たす事である。いずれにせよ，需要の下支えが確保され，不況が緊急の問題でなくなると，1956年に発表された Solow による楽観的な新古典派経済成長論が，Harrod の悲観論にとって代る事になる。生産関数に於る資本と労働の代替性を認めれば，Harrod 的な経済停滞への傾向は除去されると主張された。

しかし，1973年にオイルショックが世界経済を襲うと，約10年間に及ぶ不況が続いた。正に，Harrod が懸念したように，活況が生産要素の制約により不況に陥ったのである。ただし，この場合，1930年代の大不況程の景気の落ち込みがなかったのも，上述の技術革新の内部化が好影響を与えたと思われる。このオイルショックを機会に，少なからぬ経済学者が，不均衡経済学に興味を示し，特に，フランスで，Keynes や Harrod を再発見しようという動きが高まった。

このような中で，Malinvaud [1980] は，単純な Keynes-Harrod モデルを構築して，需給不均衡下での経済分析を行った。彼の主張のうち，最も重要なものは，古典派的定常成長均衡は不安定であり，（安定的）Keynes 均衡へ移行するであろうというものである。筆者は，この本により，再び Harrod 及び新古典派経済成長論への興味を呼び起された。Harrod モデルの定式化に関しては，既に，Rose [1959] による貢献がある。

本論稿の第 I 節に於て，Harrod の不安定性理論を再構成する為の標準的な1財モデルを構築する。このモデルのアイデアは，Rose のそれに類似している。ただし，Rose の定式化に対し，置塩 [1977] の批判がある事に注意されたい。

第 II 節では，前節に於ける1財モデルを自然な形で2財モデルへ拡張する事を目指す。2財モデルへの拡張という問題については，Allen [1967, 12章], Hicks [1965], 及び置塩 [1977] 等の貢献が成されてきたが，我々のモデルは，

価格の動きを固定している分，より簡単になっている。そして，Harrod 的不安定性を示す。

第Ⅲ節では，第Ⅰ節の Harrod モデルをＩＳ—ＬＭ分析の枠組の中で考察する。即ち，貨幣的側面を導入する事を目指す。これにより，上述の Malinvaud [1980] の命題を考察する事ができる。我々のモデルに類似した貢献として，Allen [1967, 20章] と Phillips [1961] を挙げる事ができようが，彼等とは，投資関数，及び，ＬＭ曲線の形が異なる。特に彼等は，ＬＭ曲線から古典派的部分を仮定により削除している。我々は，通常の考えに従って，Keynes と（ＩＳ—ＬＭ分析上の）古典派の違いは，投機的貨幣需要の取扱いにあると考える。本節では，まず，保証成長率，現実成長率，及び貨幣成長率が等しく，利子率が一定であるような，定常成長均衡は，古典派に於てのみ可能である事を示す。ここで，「古典派」とは，貨幣の投機的需要がゼロの場合を意味する。続いて，この定常成長均衡は不安定である事を示す。これにより，Malinvaud 的な Keynes-Harrod モデルに於ける主張を，我々のモデルで示した事になるであろう。

第Ⅳ節では，むすびに代えて，新古典派経済成長論を不均衡経済学の側面から分析し，Harrod モデルとの比較を行なう。Solow [1956] に始まる，通常の新古典派経済学では，資本と労働は代替可能で，かつ，諸価格の適切な働きで生産要素の完全雇用が満されると仮定されている。そして，投資量とは，完全雇用時の貯蓄に対応するものとされる。これに対し，本節では，特に賃金の働きがなく，現存の資本を用いＩＳ—ＬＭ分析で生ずる生産量を生み出すのに必要な労働量のみが雇用されると仮定する。即ち，労働は不完全雇用の傾向を持ち，投資量は，利子率の関数となる。この際，貨幣が一定率で成長する時，新古典派のように，資本—労働比率が安定的かどうかが吟味される。我々は生産関数を Cobb-Douglas 型に特定化して，利子率の動きが，（ＩＳ—ＬＭ分析の）古典派的部分に限定される時，資本—労働比率は安定的である事を示す。しかしながら，これは，通常の新古典派程の積極的主張とはなり得ない事に注意さ

れたい。というのは，我々のモデルでは，労働は不完全雇用状態の可能性が高いからである。ただし， Harrod モデルに於けるような，労働雇用量が単調に減少するという状況は克服されている点に，新古典派的特徴を見出す事ができよう。

I 1部門 Harrod モデル

周知のように，Harrod [1973] は，資本主義経済は不安定であると主張した。即ち，一旦，現実成長率が，定数で与えられる保証成長率から乖離すれば，前者は決して後者へ戻る事はないという主張である。言葉を代えて言えば，もし経済がスランプ（経済停滞）に陥れば，それは一層悪化して行くし，逆にブームになれば，それは過熱化して行くと主張された。更に，後者の場合，長期的には，そのブームでさえ，生産要素（彼の場合，労働）の不足によって変調をきたし，結局はスランプに陥ってしまうとされた。しかしながら，彼の言葉による証明（説明）には曖昧な点が指摘され，幾多の数学的定式化が試みられてきたのが現状である。そこで，本節では，我々は， Harrod モデルを次のように定式化する。生産関数は，

$$Y=f(K,L)=\min\left(\frac{K}{C_r},\frac{L}{u}\right) \tag{1-1}$$

で与えられる。ただし，Yはキャパシティ（生産能力）産出量，Kは資本量，Lは労働量であり，C_r, u は正の定数で与えられる。C_r は，必要資本比率 (required capital ratio) と呼ばれる。明らかに，(1-1) は，資本と労働が非代替的である事を示している。我々は，まず，次の場合を考察しよう。

Case-A: 労働に余剰がある場合

我々のモデルは，次のように表現される。

$$Y(t)=\frac{K(t)}{C_r}, \tag{1-1'}$$

$$y(t)=\frac{I(t)}{s} \tag{1-2}$$

ただし，$\dot{K}(t)=I(t)$ である。また，s は貯蓄性向 (定数) であり，$s=1-c$；

c: 消費性向，$0<c<1$ と表わされる。$I(t)$ は t 期に於ける投資量である。この時，通常の所得分析より，$y(t)$ は，t 期に於ける（産出に対する）需要を意味する。ここで，$y(t)=Y(t)\,(\forall t)$ なる状態は，次のように表わされる。即ち，

$$\frac{(\dot{I}(t))}{I(t)}=\frac{(\dot{y}(t))}{y(t)}=\frac{s}{C_r}\equiv G_w \tag{1-3}$$

G_w は，保証成長率 (warranted rate of growth) と呼ばれる。このモデルから，Harrod の不安定理論を吟味しよう。$y(0)<Y(0)$ が生じたと仮定する。これは，Keynes 的悲観論を反映している。この際，投資の調整を以下のように仮定する。

$$\dot{G}(t)=\alpha(y(t)\dot{-}Y(t)) \quad \alpha>0, \text{定数} \tag{1-4}$$

ただし，$G(t)=\dfrac{(\dot{I}(t))}{I(t)}$ で，投資の増加率を示す。$y(t)-Y(t)$ は，キャパシティに対する超過需要である。この時，$(y(t)\dot{-}Y(t))$ は景気の動向を表わす事に注意されたい。しかも，たとえ，$y(t)<Y(t)$ であっても $(y(t)\dot{-}Y(t))>0$ である限り，企業家は，投資の増加率を上昇させると仮定されている事にも注意されたい。というのは，これは，景気の回復期と見做され，また，企業家の animal spirit が仮定されているからである。(1-4) は，Rose [1959] による定式化に類似していると思われる。

さて，(1-4) は

$$\dot{G}(t)=\alpha\left[\frac{I(t)}{s}(G(t)-G_w)\right]$$

と変形され，$G(0)\gtreqless G_w$ に応じて $\dot{G}(t)\gtreqless 0$ となる。つまり，Harrod 的不安定性を意味する。更に，$G(0)>G_w$，$y(0)<Y(0)$ の状態（ただし $I(0)>0$）から始まると，我々は，必然的に，ある時点 t_0 で $y(t_0)=Y(t_0)$ に到達し，以後，$y(t)>Y(t)$ なる状況へ入る事に注意されたい。というのは，

$$y(t)-Y(t)=[y(0)-Y(0)]+\int_0^t\frac{I(r)}{s}[G(r)-G(0)]dr,$$

$$I(r)\geqq I(0)>0,\quad G(r)-G_w\geqq G(0)-G_w>0\ (\forall r)$$

が満されるからである。必ずある時点 t_0 が存在し，$y(t_0)=Y(t_0)$ となる。こ

こで，t_0 時点に於て

$$[y(t_0)\dot{-}Y(t_0)]=\frac{I(t_0)}{s}[G(t_0)-G_w]>0$$

であるから，$y(t)>Y(t)$　$t>t_0$ となる。暫くの間は，$y(t)-Y(t)$ は，それまでに累積されてきた在庫により賄われるであろうが，ブームの間，資本が一層蓄積されるにつれ，労働不足が顕在化してくる。というのは，労働は，無限に存在するものではないからである。我々は，次に，以下の場合を考察せねばならない。

Case-B: 労働がボトルネックになる時

ただし，$\frac{(\dot{L}(t))}{L(t)}=n\equiv G_n$ で $G_n<G_w$ とする。ここで，$L(t)$ は，t 期に於る労働賦存量であり，G_n は，自然成長率 (natural rate of growth) と呼ばれる。さて，時間を適当に調整する事により，0時点で，次の状態になったと仮定しよう。

$$Y(0)=\frac{K(0)}{C_r}=\frac{L(0)}{u},\ \ G(0)>G_w,\ \ y(0)>Y(0).$$

この際，キャパシティは，労働に制約されるので，小さな t'' に対し，

$$Y(t)=\frac{L(t)}{u}\qquad t''>t>0$$

となる。ただし，$y(t)-Y(t)$ は，それまでに累積してきた在庫から賄われる。ところで，$Y(t)$ を生産するのに必要な資本量は $C_rY(t)$ であるから，必要な投資量は

$$I_a(t)=\dot{K}(t)=C_r\dot{Y}(t)$$

となる。当然，$(\dot{I_a}(t))/(I_a(t))=n$ である。Case-A に於ては，資本は最適に利用されていないにもかかわらず投資の増加率は上昇してきたのに，何故，Case-B に於て，この率は n へと低下するのであろうか？　それは，Case-B に於てのみ，<u>純粋な</u>資本余剰が発生するからである。確かに，時点0 (Case-A では時点 t_0) 以前に於てキャパシティ産出量が完全には売れないという意味で資本は最適に利用されていない。しかしながら，労働に関して余剰であるから，少なくとも，労働を宛がえば生産が増加するという意味では，資本の余剰はない。

実際，この在庫増加は，ブーム時に利用されるのである。他方，Case–B は，その宛がうべき労働がないのであるから，純粋の資本余剰状態と呼ぶべきであろう。この意味で，Case–B に於て，投資の増加率は n に制約される。投資の増加率がこのように調整されると，$I_a(t)$ により生み出される需要は $y(t)=I_a(t)/s$ である。

$$y(t)-Y(t)=\frac{C_r}{s}\dot{Y}(t)-Y(t)=\frac{L(0)}{G_w u}e^{nt}[G_n-G_w]<0$$

となる。仮定により，$G_n<G_w$ である。更に，

$$[y(t)\dot{-}Y(t)]=\frac{G_n L(0)}{G_w u}e^{nt}[G_n-G_w]<0$$

となる。従って，投資の増加率は，ほどなく一層低下するであろう。このようにして，ブームの火は消えて行くのである。

II 2部門 Harrod モデル

1部門 Harrod モデルを2部門化するという点で，これまで，幾多の貢献が成されてきた。（例えば，Allen [1967]，Hicks [1965]，置塩 [1977] を参照の事。） 本節では，第I節に於ける我々のモデルをできるだけ自然に2部門化する事を試みたい。（この節を通じて，我々は，労働余剰の場合のみを考察する。） 我々のモデルは以下の通りである。

$\dfrac{K_1(t)}{C_{r1}}=Y_1(t)$：消費財部門（第1部門）のキャパシティ，

$\dfrac{K_2(t)}{C_{r2}}=Y_2(t)$：資本財部門（第2部門）のキャパシティ，

$\dot{K}_1(t)=I_1(t)$：第1部門に於ける投資，

$\dot{K}_2(t)=I_2(t)$：第2部門に於ける投資，

$\bar{y}(t)=\dfrac{1}{s}I(t)=\dfrac{1}{s}(I_1(t)+I_2(t))$：国民所得， (2–1)

$c\bar{y}(t)=\bar{C}(t)$：消費財に対する需要， (2–2)

$\dfrac{(\dot{I}_1(t))}{I_1(t)}=\alpha(\bar{C}(t)\dot{-}Y_1(t))$， (2–3)

$$\frac{(\dot{I}_2(t))}{I_2(t)}=\beta(I(t)\dot{-}Y_2(t)) \tag{2-4}$$

このモデルでは，消費財と資本財の相対価格は1であり，本節を通じて，それぞれの財に対する需給が乖離しても常に1であると仮定される。$\bar{C}(t)=Y_1(t)$，$I(t)=Y_2(t)$ $(^{\forall}t)$ が成立する為の条件は次の通りである。

$$\frac{(\dot{K}_i(t))}{K_i(t)}=\frac{(\dot{y}(t))}{y(t)}=\frac{(\dot{I}(t))}{I(t)}=\frac{(\dot{I}_i(t))}{I_i(t)}=\frac{s}{(1-s)C_{r_1}+sC_{r_2}}=\bar{G}_w(i=1,2)$$

もし，$C_{r_1}=C_{r_2}=\bar{C}_r$ であれば，$\bar{G}_w=s/\bar{C}_r$ となる事に注意されたい。このモデルは大域的に安定性を満さない事を示すのは，ほぼ，自明である。実際，もし，$G_1(0)>s/((1-s)C_{r_1})$ $(>\bar{G}_w)$ で，$G_2(0)>1/C_{r_2}$ $(>\bar{G}_w)$ ならば，$\dot{G}_i(t)>0$ である。(ただし，$G_i(t)=(\dot{I}_i(t))/I_i(t)$ $(i=1,2)$ である。) というのは，$\dot{I}_i(t)>0$ より $(I_i(t)\geqq 0$ を仮定すると)

$$\begin{aligned}\dot{G}_1(t)&=\alpha\left\{\frac{1-s}{s}\dot{I}(t)-(I_1(t)/C_{r_1})\right\}\\&\geqq\alpha\left\{\frac{1-s}{s}\dot{I}_1(t)-(I_1(t)/C_{r_1})\right\}\\&=\alpha\frac{1-s}{s}I_1(t)\{G_1(t)-(s/(1-s)C_{r_1})\}>0\end{aligned}$$

となり，$\dot{G}_2(t)>0$ も同様に示される。

我々のモデルが小域的に不安定である事を示す為に，$\alpha=\frac{1}{I_1(t)}$，$\beta=\frac{1}{I_2(t)}$ と仮定しよう。この仮定は，Rose [1959] の定式化に類似している。この時，(2-3)，(2-4) は，$z=I_2/I_1$ と置いて，

$$\dot{G}_1(t)=\frac{1-s}{s}\{G_1(t)+G_2(t)z(t)\}-\frac{1}{C_{r_1}},$$

$$\dot{G}_2(t)=G_1(t)/z(t)+G_2(t)-\frac{1}{C_{r_2}},$$

$$\dot{z}(t)=\{G_2(t)-G_1(t)\}z(t)$$

となる。明らかに，$(G_1{}^*, G_2{}^*, z^*)$，ただし，$G_1{}^*=G_2{}^*=\bar{G}_w$，$z^*=sC_{r_2}/\{(1-s)C_{r_1}\}$，は定常状態である。これより，$(G_1{}^*, G_2{}^*, z^*)$ に於けるJacobi 行列；J_2，を計算してみよう。J_2 は次のように表わされる。

$$J_2=\begin{pmatrix} \frac{1-s}{s} & \frac{1-s}{s}z^* & \frac{1-s}{s}\bar{G}_w \\ \frac{1}{z^*} & 1 & -\bar{G}_w/(z^*)^2 \\ -z^* & z^* & 0 \end{pmatrix}$$

ここで，$|-J_2|<0$ は，簡単にチェックできよう。即ち，固有方程式の固有根のうち，少なくとも1個は，正の実数となる。故に，我々の2部門 Harrod モデルは，小域的不安定性を持つ。

注意—1：第1節に於けるように，この体系への最初のショックは，$I(0)$ と，$\bar{C}(0)$ の下落（これは，Keynes 的悲観論を反映する）から生ずると仮定している。

III I S—L M分析の拡張としての1部門 IS-LM モデル

本論稿の序で述べたように，Malinvaud [1980] は，Keynes-Harrod モデルを構築する事により，古典派的定常状態は不安定であり，Keynes 的定常状態へ移行するであろうと主張した。本節では，第I節の Harrod モデルをＩＳ—ＬＭ分析の枠組の中で構築する事をその目的とする。即ち，貨幣的側面を考慮に入れるのである。まず，定常成長均衡（$y(t)=Y(t)$ $\forall t$，利子率は一定，貨幣供給量は G_w の比率で増加する）が可能な場合は，古典派的状況のみである事を示す。ただし，この場合の古典派的状況とは，貨幣の投機的需要がゼロの場合（即ち，ＬＭ曲線の垂直部分）であると定義する。その上で，古典派的定常成長均衡は小域的に不安定である事を示す。この方向に沿った貢献は，これまで，幾らか行なわれている。（例えば，Allen [1967 20章]，Phillips [1961] を参照。）しかしながら，彼等のモデルでは，特殊なＬＭ曲線が仮定されており，古典派的状況は排除されている。即ち，ＬＭ曲線の垂直部分は，仮定により排除されている。しかも，投資関数の定義が，我々の Harrod 的なそれと異なっている。（本節を通じて，労働が余剰の場合のみを考察する。）本節では，2種類のモデルが考察される。

Type I

我々は，一般に Harrod モデルを次のように定義する。

$$sy(t)=I=I(i,t),\ \frac{\partial I}{\partial i}<0,$$

$$m(t)=ky(t)+m_2(i),\ \frac{dm_2(i)}{di}<0,\ m_2(i)\geqq 0,$$

$$\left(\frac{\dot{\frac{\partial I}{\partial t}}}{I}\right)=\frac{(y(t)\dot{-}Y(t))}{I}.$$

ただし，$Y(t)$ は，(1-1′) で与えられる。また，$m(t)$ は t 期に於ける貨幣供給量であり，$m_2(i)$ は投機的貨幣需要である。i は市場利子率を示す。ここで，関数を特定化して，以下のように置こう。

$$sy(t)=I=I_1(i)+I_2(t),\ I_1(i)=I_0+\bar{I}i,\ \bar{I}<0, \tag{3-1}$$

$$m(t)=ky(t)+m_2(i),\ m_2(i)=m_0+\bar{m}i,\ \bar{m}<0, \tag{3-2}$$

$$\left(\frac{(\ddot{I}_2(t))}{I}\right)=\frac{(y(t)\dot{-}Y(t))}{I} \tag{3-3}$$

まず最初に，定常状態 $(y(t)=Y(t)\ {}^{\forall}t,\ i(t)=\bar{i}\ {}^{\forall}t)$ の条件を吟味しよう。それは，

$$G_w=\frac{(\dot{y}(t))}{y(t)}=\frac{(\dot{I}(t))}{I(t)}=\frac{(\dot{I}_2(t))}{I(t)}$$

となる。更に，$G_w=\dfrac{(\dot{m}(t))}{m(t)}$ と仮定すれば，この定常状態は，古典派的状況；即ち $m_2(\bar{i})=0$，でのみ可能となる。というのは，まず (3-1)，(3-2) より

$$\frac{(\dot{m}(t))}{m(t)}=\left[\left(\frac{k}{s}\bar{I}+\bar{m}\right)\left(\frac{di}{dt}\Big/\frac{k}{s}I\right)+\frac{(\dot{I}_2)}{I}\right]\Big/\left[1+\left(m_2(i)\Big/\frac{k}{s}I\right)\right] \tag{3-4}$$

となる。よって，もし $\dfrac{(\dot{m}(t))}{m(t)}=G_w=\dfrac{(\dot{I}_2)}{I}$，$i(t)=i\ {}^{\forall}\bar{t}$ なら，$m_2(\bar{i})=0$ が成立せねばならない。実際，$G_w=\dfrac{(\dot{m}(t))}{m(t)}$ と置いてみよう。(3-4) より，

$$\frac{di}{dt}\Big/I=\frac{k}{s}\ \frac{1}{\delta}\left[\left(G_w-\frac{(\dot{I}_2)}{I}\right)+G_w\frac{m_2(i)}{\frac{k}{s}I}\right],$$

ただし，$\delta=\dfrac{k}{s}\bar{I}+\bar{m}<0$ である。この関係より，以下に示す Harrod モデルを

得る。ただし，$H_1=\frac{(\dot{I}_2)}{I}$, $H_2=\frac{(\dot{m}_2)}{I}$ である。即ち，

$$\dot{H}_1(t)=\frac{1}{s}\,\frac{1}{\delta}\Big[\bar{m}H_1(t)+\bar{I}G_wH_2(t)+G_w\frac{k}{s}\bar{I}\Big]-\frac{1}{C_r},$$

$$\dot{H}_2(t)=(\bar{m}-H_2(t)\bar{I})\frac{k}{s}\,\frac{1}{\delta}\Big[(G_w-H_1(t))+G_w\frac{s}{k}H_2(t)\Big].$$

もし，$H_1(0)=G_w$, $H_2(0)=0$ なら，$H_1(t)=G_w$, $H_2(t)=0$ ($^{\forall}t$) となる。さてこの体系が，小域的に安定かどうかを吟味しよう。J_3 により，定常状態に於ける Jacobi 行列を示すと，

$$J_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{s}\,\frac{\bar{m}}{\delta} & \frac{1}{s}\bar{I}G_w/\delta \\ -\frac{\bar{m}}{\delta}\,\frac{k}{s} & -\frac{k}{s}\bar{I}G_w/\delta\end{pmatrix}$$

となる。

従って，$|J_3|=0$ となり，固有根のうち，少くとも1つは0であり，小域的不安定性を意味する。

次に，この結論が，(3-3) を以下の (3-3′) へと変更しても不変かどうかを吟味しよう。

Type II

1つの練習問題として，(3-3) を以下のように変更しよう。

$$sy(t)=I=I_1(i)+I_2(t),\ \ I_1(i)=I_0+\bar{I}i,\ \ \bar{I}<0, \tag{3-1}$$

$$m(t)=ky(t)+m_2(i),\ \ m_2(i)=m_0+\bar{m}i,\ \ \bar{m}<0, \tag{3-2}$$

$$\left(\frac{(\dot{I}_2(t))}{I_2(t)}\right)=\frac{(y(t)\dot{-}Y(t))}{I} \tag{3-3′}$$

この時，$G_w=\frac{(\dot{y}(t))}{y(t)}=\frac{(\dot{I}(t))}{I(t)}=\frac{(\dot{I}_2(t))}{I_2(t)}=\frac{(\dot{m}(t))}{m(t)}$, $i(t)=\bar{i}\ ^{\forall}t$ が成立する為には，以下の条件が必要である。

$$m_2(\bar{i})=0,\ \ I_1(\bar{i})=0$$

この状況は，利子率が非常に高いので，投資家は貨幣の投機的需要を持たず，企業家も，成長して行く生産物需要を賄う為以外には投資機会を持たないという意味で，古典派的である。

$$\frac{(\dot{m}(t))}{m(t)}=\frac{\delta\left[\frac{di}{dt}\Big/\left(\frac{k}{s}I_2\right)\right]+(\dot{I}_2)/I_2}{\left[\frac{k}{s}I_1(i)+m_2(i)\right]\Big/\left(\frac{k}{s}I_2\right)+1} \tag{3-4'}$$

に注意されたい。ただし，$\delta=\frac{k}{s}\bar{I}+\bar{m}<0$ である。$G_w=\frac{(\dot{m}(t))}{m(t)}$ と置くと，(3-4′) より

$$\frac{di}{dt}=\frac{k}{s}\ \frac{I_2}{\delta}\left[\left(G_w-\frac{(\dot{I}_2)}{I_2}\right)+G_w\left(\frac{k}{s}I_1(i)+m_2(i)\right)\Big/\left(\frac{k}{s}I_2\right)\right]$$

を得る。この関係から以下の体系を得る。

$$\dot{N}_1=\frac{1}{s\delta}\left(\frac{1}{N_3+1}\right)\left[\frac{k}{s}\bar{I}G_w+N_1\bar{m}+G_w\bar{I}N_2+G_w\frac{k}{s}\bar{I}N_3\right]-\frac{1}{C_r},$$

$$\dot{N}_2=\frac{\bar{m}}{\delta}\ \frac{k}{s}\left[(G_w-N_1)+G_w\left(N_3+\frac{s}{k}N_2\right)\right]-N_1N_2,$$

$$\dot{N}_3=\frac{k}{s}\ \frac{\bar{I}}{\delta}\left[(G_w-N_1)+G_w\left(N_3+\frac{s}{k}N_2\right)\right]-N_1N_3$$

ただし，$N_1=\frac{(\dot{I}_2)}{I_2}$，$N_2=\frac{m_2(i)}{I_2}$，及び $N_3=\frac{I_1}{I_2}$ である。$N_1(0)=G_w$，$N_2(0)=0$，$N_3(0)=0$ と置けば，定常状態は維持される。そこで，この体系が小域的に安定かどうかを吟味しよう。Jacobi 行列を J_3' と置くと，

$$J_3'=\begin{pmatrix} \frac{1}{s}\ \frac{\bar{m}}{\delta} & \frac{1}{s}\ \frac{\bar{I}}{\delta}G_w & -\frac{1}{s}\ \frac{\bar{m}}{\delta}G_w \\ -\frac{\bar{m}}{\delta}\ \frac{k}{s} & -\frac{\bar{I}}{\delta}\ \frac{k}{s}G_w & \frac{\bar{m}}{\delta}\ \frac{k}{s}G_w \\ -\frac{k}{s}\ \frac{\bar{I}}{\delta} & \frac{\bar{I}}{\delta}G_w & -\frac{\bar{m}}{\delta}\ G_w \end{pmatrix}$$

となる。$|J_3'|=0$ となる事は簡単にチェックされよう。実際には，a_1^*，a_2^*，a_3^* を固有根と置くと，

$$a_1^*=0,\ \ a_2^*>0,\ \ a_3^*<0$$

となる。いずれにせよ，Type I と同様に小域的不安定性を得る。

注意—2：本節では，定常状態は，位相図の境界上に存在するので，不安定性を吟味するに際し，注意を要する。即ち，定常状態からの乖離の要因として，まず，$y(0)<Y(0)$ が生じ，貨幣当局が $\frac{(\dot{m}(0))}{m(0)}$ を G_w から上昇させた後，す

ぐに G_w に戻すという政策を採用したと仮定する。これにより，初期時点で利子率が下落し，I_1 は正となり，ここから動学的運動が始まると仮定している。

IV 結びに代えて——新古典派不均衡成長理論

我々はこれまで，Harrod 的経済成長理論を吟味してきた。本節では，結びに代えて，新古典派との比較を行なう。Solow [1956] に始まり，1960年代にその隆盛の頂点を迎えた新古典派経済成長理論は，ただ単に，生産関数を生産要素代替可能なものへと変更しただけでなく，生産要素は完全雇用を保証されるとの仮定を付け加えている。即ち，諸価格が適切に調整されると仮定してきた。しかしながら，これまで，本論稿で仮定してきたのは，諸価格は，必ずしもそのような調整作用を持たないという事であった。従って，Harrod モデルと，新古典派モデルを比較する場合，最も望ましいのは，他の事情を一定にして，生産関数のみを変更する事であろう。我々は，前節に於て，Harrod モデルをＩＳ—ＬＭ分析の枠組の中で構築したように，この仮定の下で，新古典派モデルを同様にＩＳ—ＬＭ分析の枠組の中で構築したい。新古典派モデルの定義として，資本と労働は代替的と仮定していると置こう。

まず，貨幣量 $\bar{M}$ は所与であると仮定する。ＩＳ—ＬＭ分析に於る新古典派モデルは，前と同じ記号を使って，

$$\dot{K}(t)=I(i(t)) \tag{4-1}$$

$$sY(K(t),L(t))=I(i(t)), \tag{4-2}$$

$$\bar{M}=kY(K(t),L(t))+m_2(i(t)), \tag{4-3}$$

と表わされる。ただし，$L(t)$ は，t 期に雇用される労働量であり，物価 P は1と仮定している。新古典派不均衡成長理論を，このように，不完全雇用を許すものと定義する。これに対し，通常の完全雇用を仮定する理論を，これまで通り新古典派均衡成長理論と呼ぶ事にする。

さて，新古典派不均衡成長理論では，$\dot{i}(t)=0$ $({}^{\forall}t)$ となる。というのは (4-2)，(4-3) より

$$0=\left(\frac{k}{s}I'+m_2'\right)\dot{i}(t)$$

となり，$I', m_2'<0$ だからである。よって，(4-1) より $\dot{K}(t)=I(\bar{i})>0$, $\bar{i}$: 定数を得て，(4-2) から $\dot{L}(t)<0$ ($^{\forall}t$) となる。従って，資本を明示的に導入する時には，もし貨幣的拡張が行なわれなければ雇用は，漸次，減少して行く。これは，周知の Keynes 的帰結であろう。

あるいは，全く逆の場合を考えて，労働の完全雇用量を $\bar{L}$ と与えて，この完全雇用を維持する為に，貨幣量はいかに変化せねばならないかと考えてもよい。（ここで，人口成長は考慮外である。）これは以下のようになる。

$$\dot{K}(t)=I(i(t)), \tag{4-1'}$$

$$sY(K(t), \bar{L})=I(i(t)), \tag{4-2'}$$

$$m(t)=kY(K(t), \bar{L})+m_2(i(t)). \tag{4-3'}$$

まず，(4-1')，(4-2') より $s\dfrac{\partial Y}{\partial K}I(t)=I'(i(\dot{t}))>0$ となり，$\dot{i}(t)<0$ を得る。次に，(4-2')，(4-3') より，$\dot{m}(t)=\left(\dfrac{k}{s}I'+m_2'\right)(\dot{i}(t))$ となり，$\dot{m}(t)>0$ を得る。これは上述のモデルを別の角度から述べたものにすぎない。

さて，Harrod モデルとの比較の為，生産関数を，次のように特定化しよう。

$$Y(K, L)=\frac{K}{C_r}+\frac{L}{u} \quad (C_r, u \text{ は正の定数})$$

これは，Solow [1956] による新古典派生産関数の条件を満していない。この時，完全雇用が維持される為には，いかなる条件が必要であろうか。それは (4-1')，(4-2') より

$$\frac{(\dot{I})}{I}=\frac{s}{C_r}$$

である。第Ⅲ節では，古典派的仮定を置いて定常状態を考えた。即ち，$i(t)=\bar{i}$ ($^{\forall}t$)，$\dfrac{(\dot{m}(t))}{m(t)}=\dfrac{s}{C_r}$ を仮定した。しかしながら，新古典派の場合，この意味での定常状態の概念は不可能である。というのは，上述の通り，$\dfrac{\partial Y}{\partial K}$, $\dfrac{\partial Y}{\partial L}>0$ を仮定する限り，$\dot{i}(t)<0$（と $\dot{m}(t)>0$）が必要なのである。そこで，$\dfrac{(\dot{m}(t))}{m(t)}=\dfrac{s}{C_r}=G_w$ と置いて，現実雇用量 $L(t)$ がどう動くかを吟味しよう。この時，

$$\dot{K}(t)=I(i(t)), \tag{4-1''}$$

$$sY(K(t),L(t))=I(i(t)), \tag{4-2''}$$

$$m_0e^{G_wt}=kY(K(t),L(t))+m_2(i(t)) \tag{4-3''}$$

となる。(4-2″), (4-3″) より

$$\dot{i}(t)=\frac{G_w\left(\frac{k}{s}I(i)\right)+m(i)}{\left(\frac{k}{s}I'+m_2'\right)}$$

を得る。これと, (4-1″), (4-2″) から

$$\frac{s}{u}\dot{L}(t)=\frac{G_w(I'm_2(i)-m_2'I(i))}{\frac{k}{s}I'+m_2'}$$

となる。ここで, 第Ⅲ節と同様に I' 及び m_2' は負の定数であると仮定しよう。この時,

$$\frac{s}{u}\ddot{L}(t)=0$$

となり, $\dot{L}(t)=\alpha$: 定数 ($\forall t$), $L(t)=L(0)+\alpha t$ で,

$$\left|\frac{I'(0)}{I(0)}\right|\gtreqless\left|\frac{m_2'(0)}{m_2(0)}\right|\Leftrightarrow\alpha\gtreqless 0$$

を得る。(ただし, $L(0), I(0), m_2(0)$ 共に所与ではなくこのモデルの内部で決定される点に注意されたい。) これは, ある種の不安定性を意味すると言えよう。

最後に Solow [1956] 型の新古典派生産関数を導入してみよう。これは, 次の性質を持つと仮定される。即ち,

$$Y(\gamma K,\gamma L)=\gamma Y(K,L) \quad \forall\gamma>0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K},\ \frac{\partial Y}{\partial L}>0,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2},\ \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}<0.$$

むしろ, 我々は, $Y(K,L)$ を Cobb-Douglas 型と置こう。即ち,

$$Y(K,L)=K^{\alpha}L^{1-\alpha}\quad 0<\alpha<1. \tag{4-4}$$

この時, ある仮定の下で安定化作用が働く事を見よう。貨幣供給の成長率を μ と置く。新古典派不均衡成長論は, (4-3″) が一般的に,

$$m_0e^{\mu t}=kY(K(t), L(t))+m_2(i(t)) \tag{4-5}$$

と変更されるのみである。(4-2″), (4-5) より

$$\dot{i}(t)=\frac{\mu\left(\frac{k}{s}I(i)+m_2(i)\right)}{\frac{k}{s}I'+m_2'} \tag{4-6}$$

を得る。ここで，第Ⅲ節に於るＩＳ―ＬＭ的古典派の仮定を強めて次のように置こう。

$$\left.\begin{aligned} &m'_2(i(t))=0, \\ &m_2(i(t))=0. \end{aligned}\right. \quad (\forall t) \tag{4-7}$$

即ち，ＬＭ曲線の垂直部分を動くと仮定している。この時，(4-6), (4-7) より

$$\frac{(I\dot{(t)})}{I(t)}=\mu \tag{4-8}$$

となる。よって

$$\frac{(\dot{K})}{K}=\frac{I(0)e^{\mu t}}{K_0+\frac{1}{\mu}I(0)e^{\mu t}}$$

となる。さて，$\frac{K}{L}=v$ の動きを見てみよう。まず，

$$\dot{v}=v\left(\frac{\dot{K}}{K}-\frac{\dot{L}}{L}\right) \tag{4-9}$$

である。(4-1″), (4-2″), (4-8) より

$$\frac{(\dot{L})}{L}=\frac{\mu-s\frac{\partial Y}{\partial K}}{s\frac{\partial Y}{\partial L}L}I=\frac{\mu-s\frac{\partial Y}{\partial K}}{s\frac{\partial Y}{\partial L}}\,\frac{K}{L}\,\frac{(\dot{K})}{K}$$

であるから，(4-9) は，

$$\dot{v}=v\frac{(\dot{K})}{K}\left\{1-\frac{\mu}{s}\,\frac{v}{\frac{\partial Y}{\partial L}}+v\frac{\frac{\partial Y}{\partial K}}{\frac{\partial Y}{\partial L}}\right\}$$

となる。ところで，(4-4) より $v\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\Big/\frac{\partial Y}{\partial L}\right)=\frac{\alpha}{1-\alpha}$, $v\Big/\frac{\partial Y}{\partial L}=\frac{1}{1-\alpha}v^{1-\alpha}$

であるから，結局

$$\dot{v}=\frac{(\dot{K})}{K}f(v)$$

$$f(v)=v\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}-\frac{\mu}{s(1-\alpha)}v^{1-\alpha}\right)$$

となり，明らかに v が小の時 $f(v)>0$ であり，v が大の時 $f(v)<0$ である。即ち，

$$\dot{v}=\frac{(\dot{K})}{K}f(v)$$

は安定的である。

ただし，(4-7) の仮定は，極めて恣意的である事に注意されたい。しかしながら，この事に注意すれば，（即ち，この微分方程式の経路は，必ずＬＭ曲線の垂直部分を動くという強い仮定の下で）貨幣供給量の成長率を上昇させて，雇用量の成長率を（長期的に）高める事が出来よう。しかしまた重要な注意点は，貨幣供給量の成長率を上昇させた時の初期雇用量は，変化前のそれと等しいという保証はない事である。

参考文献

[1] Allen, R. G. D. [1967] *Macro-Economic Theory — A Mathematical Treatment:* Macmillan, London.（邦訳：現代経済学——マクロ分析の理論，新開，渡部訳，東洋経済新報社）

[2] Girifalco, L. A. [1982] "The Dynamics of Technological Change," *The Wharton Magazine* (Vol. 7, No. 1).

[3] Hahn, F. H. and R. C. O. Matthews [1964] "The Theory of Economic Growth: A Survey", *Economic Journal.*

[4] Harrod, R. [1973], *Economic Dynamics:* Macmillan, London.

[5] Hicks, J. R. [1965], *Capital and Growth*, Oxford University Press, New York.

[6] 星野芳郎 [1969]「第二次産業革命」と科学・技術の発展，岩波講座：世界歴史23，岩波書店。

[7] Malinvaud, E. [1980], *Profitability and Unemployment:* Cambridge University Press, Cambridge, London, and New York.

[8] 置塩信雄 [1977] 現代経済学，筑摩書房。

[9] Phillips, A. W. [1961] "A Simple Model of Employment, Money, and Prices in a Growing Economy", *Economica.*

[10] Rose, H. [1959] "The Possibility of Warranted Growth," *Economic Journal*.
[11] Solow, R. M. [1956], "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*.