効用の測定とその困難性

伊藤, 駒之

(Citation)
国民経済雑誌,153(4):41-57

(Issue Date)
1986-04

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00173553

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00173553

効用の測定とその困難性

伊　藤　駒　之

I　はじめに

普通，大きく分けて2つの視点，すなわち，記述的視点と規範的視点から期待効用は解釈されている。記述的視点では，期待効用は意思決定者の実際の行動を説明または予測することが意図されている。規範的視点では，期待効用は意思決定者の実際の行動において指針として役立つことが意図されている。

現実の行動を予測するためには，まず，意思決定者がどのような行動原理に従っているかが知られなければならない。記述的視点の期待効用におけるこの原理は意思決定者が期待効用を最大にするように行動すると主張する。これは期待効用仮説と言われる。つぎに，リスクに対する意思決定者の態度が導き出されなければならない。これは所与の状況においてある意思決定者の選好表現を通してなされる。そして，このプロセスには確実な結果の集合上で定義される効用関数の推定が含まれる。

一方，規範的期待効用の目的として，前述の指針を含めた，つぎの3つの項目が掲げられている (Fishburn, 1968):

1.　合理的指針。

2.　複雑な選択対象に選好順位をつけること。

3.　最適化問題のアルゴリズムに適用すること。

これらを達成するには，特定の状況における特定の意思決定者の効用関数が必要とされる。

このように，いずれの視点においても効用関数の推定は欠くことのできない要素となっている。そして，この推定は意思決定者の，多分に，移り気な

(erratic) 選好に基づいて進められなければならない。すなわち，規範的視点のための効用関数といえども，それの推定は記述的視点が問題とする現実の行動を観測することによってなされなければならない。

本稿では，現実の意思決定と深く係わる効用関数推定の問題を検討しよう。この問題は記述的視点ならびに規範的視点の期待効用が現実の証拠からどの程度まで弁明されるかという検証性に関連している。

II節では，効用の測定と期待効用仮説に焦点をあわし，期待効用仮説の意味が議論される。また，測定の一般的な議論から効用の測定可能性について考察しよう。

III—1節では，効用推定手続の簡単な分類，定量的制約，定性的制約について解説がなされる。III—2節では，効用推定手続の中で最も簡明な手続，すなわち，半々くじにより，確実等価額を算定し，定量的制約が決定される手順が解説される。III—3節では，定量的制約のもとでの効用関数の推定とそれにともなう一般的な困難が議論される。

IV節では，初期条件がリスク的であるとき，前節の効用推定手続，すなわち，数多くの文献で使われている推定手続には論理的困難が存在することを指摘しよう。

II 期待効用仮説と効用の測定

リスクを含む選択対象の選好に関して意思決定者はあたかも期待効用を最大化しているかのごとく行動するという仮説，これは期待効用仮説と呼ばれている。期待効用仮説をたてる目的は意思決定者の行動をその仮説によって予測することである。その際に注意すべき点はまだ観測されていない行動を仮説が予測できるかどうかということである。

一見して矛盾を生みそうにない仮説は行動の予測に有効ではあるが，それから興味ある事実は引き出されないであろう。それゆえに，有力な仮説は人にそれが真であるかどうかを疑わせるようなものでなければならない。すなわち，

有力な仮説は原則的に反論を受けるような内容でなければならない (Friedman-Savage, 1952, p. 465)。

そのような仮説が現実に照し合わされたとき，予測された行動と現実の行動が，しばしば，明確に，相違しているならば，その仮説は誤りとされるだろう。一方，仮説が，数多くの異なるケースで，しばしば，正確な予測をなしうるならば，それは，増々，有力な仮説とされるだろう。

そのとき，行動の予測可能性を重視しすぎる結果，期待効用仮説が他の仮説よりも正確な予測精度をもつかどうかを強調することになるかもしれない。そして，公理と仮定された計算機構は，特別に，重要視されることなく，公理の記述的有効性 (descriptive validity) よりも，むしろ仮説の予測能力だけが仮説の意義を決めるとされるかもしれない (Schoemaker, 1982)。

しかしながら，期待効用仮説論者は現実の行動を記述する能力よりも，他の点を強調しているようにみえる。期待効用仮説の非常に現実的な魅力はその取り扱い方が簡単なことと，少なくともある重要な領域で，仮説が矛盾を引きおこしそうにない間接的な証拠（すなわち公理系のもっともらしさ）にもとづいていること，この両者である。"Von Neuman-Morgenstern の重要な，独創的な貢献は，正しく，仮説を公理化することによってこの間接的な証拠を提供したことである (Friedman-Savage, 1952, p. 467)。"

効用関数の存在と公理系は，論理的に同値であるゆえに，事実，必要充分条件の関係にある。しかしながら，公理系は期待効用仮説の必要条件であるが，期待効用仮説の正当性を主張するための充分条件ではない。すなわち，期待効用仮説の成立から公理系は導きだされる。一方，公理系が行動の記述という点に関して全く妥当であるとしても，期待効用仮説は公理系が指している行動よりももっと広い範囲における行動を予測しようとしている。公理系が意思決定者の行動を予測するに充分な条件であるという保証はない。それゆえに，期待効用定理の成立は期待効用仮説の成立を意味していると我々は言うことができない。

一般的に言って，仮説はある現象や事実を合理的・体系的に説明するために仮に設けられた仮定である。したがって，たとえ期待効用仮説が，ある範囲内で，意思決定者の行動を正確に，かつ，しばしば予測しえたとしても，それは有力な推測手段であり，より良い予測成果をもたらすだろうと期待されるにすぎない。したがって，1プラス1が2であるというような予測結果がもたらされることを期待効用仮説が意味しているわけではない。

公理系を満足するような効用関数の存在を期待効用定理は保証している。しかしながら，効用の測定可能性の問題がある。期待効用仮説を立証するためには効用は測定可能でなければならない。測定されるということは何を意味しているのか。この点に関して，測定の基礎から少し考察してみよう (Krantz-Luce-Suppes-Tversky, 1971, 1章)。

測定とは，経験的な関係 (emprical relations) からなるシステムE（経験的関係システムと呼ぶ）と数値的な関係 (numerical relations) からなるシステムN（数値的関係システムと呼ぶ）の間における変換f（正確には，準同型写像）の確立と考えられる。

註　準同型写像 (homomorphism) の定義を示そう。システムEは要素の集合S，要素間の関係 r_i, $i=1,2,\cdots m$, 要素に関する演算 O_j, $j=1,2,\cdots,n$ から構成され，システムE'は要素の集合S'，要素間の関係 r_i', $i=1,2,\cdots,m$, 要素に関する演算 O_j', $j=1,2,\cdots n$ から構成されているとしよう。記号的には，

$$E=\{S,\ r_i,\ i=1,2,\cdots m,\ O_j,\ j=1,2,\cdots,n\},$$

$$E'=\{S',\ r_i',\ i=1,2,\cdots,m,\ O_j',\ j=1,2,\cdots,n\}$$

と定義される。そのとき，EからE'の中への準同型写像はつぎの条件(a), (b)を満す，SからS'の中への写像Hである；

(a)　もしSにおいて ar_ib ならば，そのとき S' において $aHr_i'bH$, $i=1,2,\cdots,m$ であり，

(b)　全ての $a,b\in S$ に対して $(aO_jb)H=aHO_j'bH$, $j=1,2,\cdots,n$ である

(Finkbeiner, 1966, p. 261)。

経験的関係システムEは現実の対象の集合とそれの間にある関係の集合から構成されている；例えば，対象の集合はリンゴの集りであり，関係の集合は“より重い”，“より軽い”，“等しい”の三つの関係からなる集りである。一方，数値的関係システムNは実数の集合とそれの間にある数値的関係の集合から成立している；例えば，実数の集合は，リンゴの集りに対しては，正の実数であり，数値的関係の集合は“大きい”，“小さい”，“等しい”の三つの関係からなる集りとなる。

そのとき，測定のシステムはシステムE，システムN，システムEの対象の集合とシステムNの実数の集合との間における変換fの三つの組(E, N, f)と定義される。ただし，変換f（準同型写像）はある経験的関係とある数値的関係を対応させている。

例えば，ハカリによって，リンゴには正の数が割り当てられる。そのとき，リンゴaがリンゴb“より重い”という経験的関係はリンゴaの60gがリンゴbの30g“より大きい”という数値的関係に対応している。

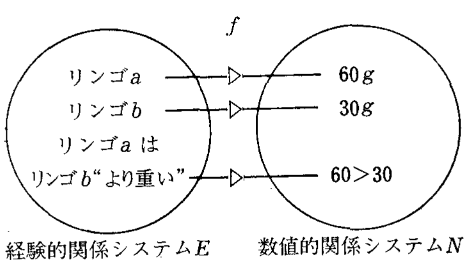

図　1

期待効用を測定システム(E, N, f)の視点から眺めるとき，経験的関係システムEは選択対象の集合と公理系から成り立っており，数値的関係システムNは期待効用と大小関係から成り立っており，変換fは効用関数であると言える。

普通，重さが測定されたと言うとき，リンゴaはリンゴb“より重い”という関係だけでなく，リンゴaの重さはリンゴbの重さの2倍であるという関係も維持されていなければならない。さらに，重さは加算，減算をも可能にさせ

る測定値を要求している。すなわち，重さが測定されたと言うとき，重さに関する経験的関係が数値的関係によって表現され，数値的関係が重さに関する経験的関係によって表現されることが意味されている。

同様に，期待効用が測定されたと言うとき，選好に関する経験的関係が数値的関係すなわち効用的関係によって表現され，数値的関係すなわち効用的関係が選好に関する経験的関係によって表現されることが成立しなければならない。すなわち，効用的関係または期待効用仮説が経験的関係を予測しなければならない。

しかしながら，重さが測定されたというときと期待効用が測定されたというときでは，現実にはかなり相違がある。重さの測定では経験的関係が我々の常識に合致するように数値的関係に反映されている。一方，期待効用の測定では，現在までの研究が示すところは期待効用仮説と調和していないようにみえる (Schoemaker, 1980, 1982)。ただ，このことをもって，効用を測定することはできないと言うことはできないだろう。

期待効用論者の中でも，規範的視点を重くみる人々，例えば Marschak (1951), は期待効用仮説に沿った行動をしないことを意思決定者の計算能力の欠除に帰着させている。さらに，重さの測定の場合でも常に測定可能であると言えない。例えば，測定の尺度が細かくなればなるほど，測定は，増々，困難になり，ハカリが振動している状況でしか測定できない物体では，重さを測定することは不可能であるかもしれない。

それゆえに，測定の尺度を粗くとり，測定される対象と測定がなされる環境を限定するとき，効用は測定可能であると言えるかもしれない。

III 効用関数の推定手続

III-1 はじめに

確実な結果の集合Xは金額によって定義されているとしよう。そして，$a, b, c \in X$ は $a>b>c$ であるとしよう，そのとき，“くじ” $l=(p \cdot a, (1-p) \cdot c)$

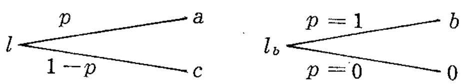

図 2

と金額 b との間に選好関係が考えられる。ただし金額 b は確率1で b が生じる“くじ” l_b とみなしておく。

“くじ” l, l_b は標準くじ (Standard reference lotteries) と呼ばれる。効用の評価は，普通，これらの標準くじ間の選好関係を意思決定者に要求することによってなされる。

これら2つの標準くじ l, l_b には4つの変数 a, b, c, p が含まれている。これら4変数の中で，3変数が固定され，l と l_b が無差別になるように，残り一変数の値を意思決定者が決めることによって効用の推定手続は進められる。したがって，標準くじ l, l_b ではどの変数の値を意思決定者が決定するかにより，4つの効用の推定手続が考えられる；

(1) 確実等価法：a, c, p が所与であり，意思決定者は $l \sim l_b$ となるような b の値を決める。

(2) 確率等価法：a, b, c が所与であり，意思決定者は $l \sim l_b$ となるような p の値を決める。

(3) a–等価法：b, c, p が所与であり，意思決定者は $l \sim l_b$ となるような a の値を決める。

(4) c–等価法：a, b, p が所与であり，意思決定者は $l \sim l_b$ となるような c の値を決める。

しかしながら，実際に，効用の推定手続に使われている方法の多くは確実等価法と確率等価法である (Hershey-Kunreuther-Schoemaker, 1982)。以下，我々は確実等価のもとで議論しよう。確実等価法では，固定された a, c, p に対して，すなわち，“くじ” $l=(p \cdot a, (1-p) \cdot c)$ に対して確実等価額を意思決定者が表明するが，この4つの変数 a, b, c, p 間における意思決定者の制約関係 (a, b, c, p) は定量的制約 (quantitative restrictions) と呼ばれている (Myer-Pratt, 1968, Keeney-Raiffa, 1976)。

意思決定者はこの定量的制約に加えて，定性的制約 (qualitative restrictions) を持っているだろう；例えば，意思決定者がリスク回避的であるかリスク愛好的であるかというような効用関数の性質を決定する要因がある。そして，効用関数の定義域 X のある点 w，すなわち，ある金額 w よりも大なる領域では意思決定者はリスク回避的であり，w よりも小なる領域では起死回生を期してリスク愛好的であるかもしれない。さらに，意思決定者がリスク回避的であるとしても，彼の資産が w より増大していくとき，ある“くじ” l に対するリスク・プレミアムは減少していくかもしれない，すなわち，意思決定者は逓減リスク回避的であるかもしれない。

定性的制約が定量的制約と無矛盾である保証はない，すなわち，意思決定者の選好表現は一貫していないかもしれない。このような矛盾を修正するプロセスを通じて効用関数の推定手続は進められる。

III-2　定量的制約の決定手順

定量的制約を決定する，最も簡明な方法は半々くじ $l=\left(\frac{1}{2}\cdot c, \frac{1}{2}\cdot a\right)$ に対する確実等価額を意思決定者に求めることである (Marschak, 1964, Raiffa, 1968, Schlaifer, 1969, Keeney-Raiffa, 1976)。いま，区間 $[c, a]$ における定量的制約が求められているとしよう。ただし，$a>c$ である。そして，求められるべき意思決定者の効用関数は $u(\cdot)$ であるとしよう。

期待効用定理により

$$u(c)=0 \tag{1}$$

$$u(a)=1 \tag{2}$$

とすることができる，$c=x_0$, $a=x_1$ とおこう。そのとき，“くじ” $l_1=\left(\frac{1}{2}\cdot x_0, \frac{1}{2}\cdot x_1\right)$ に対する確実等価額は $x_{1/2}$ つぎの式を満す；

$$u(x_{1/2})=\frac{1}{2}u(x_0)+\frac{1}{2}u(x_1) \tag{3}$$

式(1), (2)から

$$u(x_{1/2})=\frac{1}{2} \tag{4}$$

となる。したがって，一つの定量的制約 $\left(x_0, x_{1/2}, x_1, \frac{1}{2}\right)$ が得られる。

つぎに，意思決定者は“くじ” $l_2=\left(\frac{1}{2}\cdot x_0, \frac{1}{2}\cdot x_{1/2}\right)$ に対する確実等価額を $x_{1/4}$ と評価したとしよう。そのとき，

$$u(x_{1/4})=\frac{1}{2}u(x_0)+\frac{1}{2}u(x_{1/2}) \tag{5}$$

となり，式(1)，(4)から

$$u(x_{1/4})=\frac{1}{4} \tag{6}$$

となる。また，“くじ” $l_3=\left(\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}, \frac{1}{2}\cdot x_1\right)$ に対しても同様に

$$u(x_{3/4})=\frac{1}{2}u(x_{1/2})+\frac{1}{2}u(x_1) \tag{7}$$

となり，

$$u(x_{3/4})=\frac{3}{4} \tag{8}$$

が得られる。これらの点 $(x_0, 0)$，$\left(x_{1/4}, \frac{1}{4}\right)$，$\left(x_{1/2}, \frac{1}{2}\right)$，$\left(x_{3/4}, \frac{3}{4}\right)$，$(x_1, 1)$ は，座標上に描くとき，図3のようになる。

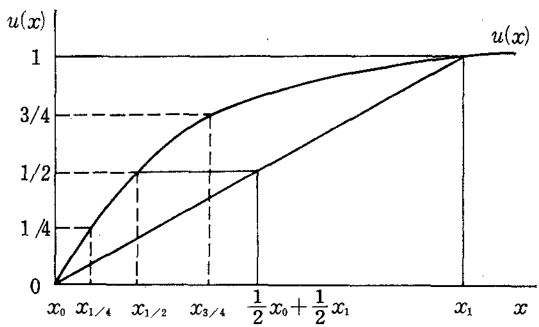

図　3

同様に，“くじ” $l_4=\left(\frac{1}{2}\cdot x_0, \frac{1}{2}\cdot x_{1/4}\right)$ では

$$u(x_{1/8})=\frac{1}{2}u(x_0)+\frac{1}{2}u(x_{1/4}) \tag{9}$$

$$u(x_{1/8})=\frac{1}{8} \tag{10}$$

となり，“くじ” $l_5=\left(\frac{1}{2}\cdot x_{1/4}, \frac{1}{2}\cdot x_{1/2}\right)$ では

$$u(x_{3/8})=\frac{1}{2}u(x_{1/4})+\frac{1}{2}u(x_{1/2}) \tag{11}$$

$$u(x_{3/8})=\frac{3}{8} \tag{12}$$

となり，“くじ” $l_6=\left(\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}, \frac{1}{2}\cdot x_{3/4}\right)$ では

$$u(x_{5/8})=\frac{1}{2}u(x_{1/2})+\frac{1}{2}u(x_{3/4}) \tag{13}$$

$$u(x_{5/8})=\frac{5}{8} \tag{14}$$

となる。さらに，“くじ” $l_7=\left(\frac{1}{2}\cdot x_{3/4}, \frac{1}{2}\cdot x_1\right)$ では

$$u(x_{7/8})=\frac{1}{2}u(x_{3/4})+\frac{1}{2}u(x_1) \tag{15}$$

$$u(x_{7/8})=\frac{7}{8}$$

が得られる。

原則的には，このようにして得られた，数多くの点に最も適合する関数が意思決定者の効用関数とされている。

III-3 効用関数の推定

前節における手順で定量的制約が得られたとしよう。しかしながら，意思決定者の選好表現は一貫していないかもしれない。例えば，“くじ” $l_8=\left(\frac{1}{2}\cdot x_{1/8}, \frac{1}{2}\cdot x_{5/8}\right)$ に対して意思決定者が確実等価額 x^* を示したとき

$$u(x^*)=\frac{1}{2}u(x_{1/8})+\frac{1}{2}u(x_{5/8}) \tag{17}$$

$$u(x^*)=\frac{3}{8} \tag{18}$$

となる。しかしこの x^* が $x_{3/8}$ と同じでないかもしれない。もしこのような事実が観測されたならば，期待効用の視点から一貫した選好がなされていないことになる。

そのとき，意思決定者は，$x^*, x_{5/8}$ あるいはそれら両者を変更し，期待効用の算定と彼の選好が矛盾しないようにしなければならない。また，意思決定者がリスク回避的であるにもかかわらず，

$$u(x_{7/8}) > u\left(\frac{1}{2}x_{3/4} + \frac{1}{2}x_1\right) \tag{19}$$

を示すかもしれない。そのとき

$$u\left(\frac{1}{2}x_{3/4} + \frac{1}{2}x_1\right) > u(x_{7/8}) \tag{20}$$

となるように意思決定者は確実等価額 $x_{7/8}$ を再評価しなければならないかもしれない。

しかしながら，確実等価額は意思決定者の“くじ”に対する態度によって決定される。したがって“くじ”に対するリスク回避の程度と“くじ”の結果の両者が意思決定者の選好に反映される。そのとき，意思決定者の効用関数がどのようなものであるかは不明であるゆえに，単に確実等価額 $x_{7/8}$ を変更すべきか，あるいは，意思決定者がリスク回避的であることを変更すべきかに対する解答が必要とされる。残念ながら，この問題に対して論理的に明確な解を与える根拠がない。

確実等価額を再評価しなければならないとき，どの確実等価額が信頼しうるかについて意思決定者は慎重に考慮しなければならない。一つの確実等価額の変更は数多くの確実等価額の変更に導くかもしれない。定性的制約との一貫性を含めて，一貫性のある効用を評価する手続はかなり煩雑である。さらに，仮に定性的制約と定量的制約に関して一貫性が得られたとしても，それらの制約を満す効用関数を定める一般的手続は存在しない (Keeney-Raiffa, 1976, p. 197)。ただし，定量的制約が確定しているという条件のもとで所与の定性的制約を満す効用関数が存在するかどうかの問題に対しては，限定されてはいるがかなり重要なケースにおいて，その存在を確認するアルゴリズムが与えられている (Myer-Pratt, 1968)。

とにもかくにも，試行錯誤によって定量的制約と定性的制約を満す効用関数は作成されるだろう。“原則的には，金額の上で定義された効用関数は効用に操作的な意味を与えるようなある実験によって決定される”とされている (Savage, 1971, p. 785)。しかしながら，“くじ”の結果を金額に換算することが

容易でないならば，効用の測定は一層困難になるだろう。

例えば，癌患者の治療に関して，手術と放射線治療の比較がなされた。手術では，手術の失敗による危険はあるが，術後における生存率は放射線治療におけるそれよりも高い。医者のあるグループに2つの治療の各々における1年間と5年間の生存率が示された。このデータのもとで，医者の84％は手術を選好し，残りの16％は放射線治療を選好した。一方，医者の他のグループには同じデータで異なる表現が示された。すなわち，生存率の代りに，死亡率が使われた。死亡率は1マイナス生存率であるゆえに，死亡率と生存率は論理的に同値であるだけでなく，2つの表現は互いに簡単に変換されうるものである。死亡率と生存率の間における変換は医者にとっていとも容易なことでもあるにもかかわらず，放射線治療よりも手術を選好する医者の比率は84％から50％に落ちた (Arrow, 1982)。

このように，同じ内容に関して表現の方法あるいは文脈が異なるとき，効用測定の手続は異なる選好表現をもたらすかもしれない。さらに，この選好の逆転現象 (preference reversal phenomenon) は金額で定義されている状況においても生じると報告されている (Grether-Plott, 1979, Hershey-Kunreuther Schoemaker, 1982)。この現象は文脈的効果 (context effects) と言われている。

IV　リスク的初期条件における推定

とにもかくにも，金額の集合Xの上で定義された効用関数$v(\cdot)$が前節で述べられたような手続によって推定されたとしよう。そのとき，初期条件がリスク的であるならば，推定された効用関数$v(\cdot)$はどのような問題点を含んでいるかを検討しよう。

まず，代表的な期待効用論者の一人である Schlaifer の見解をみてみよう。効用の推定区間$[c, a]$でなされ，意思決定者の初期条件は-4000ドルであるとしよう。ある“くじ”$l=(p_1 \cdot x_1, p_2 \cdot x_2)$に意思決定者が直面しているとき，彼は最終的資産の視点から$(-4000) * l$について評価をなす。ただし記号＊

は“たたみこみ (convolution)”である。したがって,

$$-4000*l=-4000*(p_1\cdot x_1,\ p_2\cdot x_2)$$
$$=(p_1\cdot(x_1-4000),\ p_2\cdot(x_2-4000)) \qquad (21)$$

であるゆえに,意思決定者の最終的資産は (x_1-4000) か (x_2-4000) のどちらかになる。いま,$x_1-4000=W$ とおこう。そのとき,“くじ” l による結果が x_1 であると言うことと意思決定者に起りうる最終的資産の一つが W であると言うことは同じ内容を2つの異なった形で表現しているにすぎない。

このような議論のもとで,Schlaifer はつぎのように言う;“もし Mallon 氏が区間〔c, a〕に関して最終的資産Wの効用を q とするならば,そのとき区間〔$c+4000,\ a+4000$〕に関して“くじ” l の結果 $x_1=W+4000$ の効用もまた q である (Schlaifer, 1969, p. 164)”。この結論から,意思決定者は,最終的資産に関心をもっていようとも,単に“くじ”そのものを選択対象とすることによって矛盾なく効用を決定することができることになる。これは伊藤 (1982) の式⑽によって示されている増分型の効用評価,すなわち

$$v(y)=u(x)-u(w) \qquad (22)$$

ただし $y=x-w$

の有効性を主張している。

さて,意思決定者のリスク的初期条件は“くじ” l_0 であるとしよう。そして,効用関数の推定手続における半々くじ $l_1=\left(\frac{1}{2}\cdot x_0,\ \frac{1}{2}\cdot x_1\right)$ の確実等価額が $x_{1/2}$ であったとしよう。さらに,意思決定者の,推定されようとしている効用関数は $u(\cdot)$ であるとしよう。

そのとき,意思決定者にとって関心のある最終的資産の視点からは,

$$l_0*x_{1/2}\sim l_0*l_1$$

すなわち,

$$u(l_0*x_{1/2})=u(l_0*l_1) \qquad (23)$$

でなければならない。一方,区間〔c, a〕で推定された効用関数を $v(\cdot)$ としよう。そのとき,“くじ” $l_1=\left(\frac{1}{2}\cdot x_0,\ \frac{1}{2}\cdot x_1\right)$ と確実等価額 $x_{1/2}$ が無差別であ

ることをこの効用関数 $v(\cdot)$ で表現すると

$$v(l_1)=v(x_{1/2}) \tag{24}$$

である。推定されるべき効用関数 $u(\cdot)$ と推定された効用関数 $v(\cdot)$ は意思決定者の選好表現に関して論理整合的でなければならない。

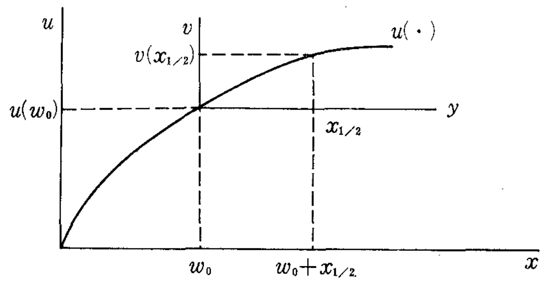

図 4

いま，推定された効用関数 $v(\cdot)$ はある点 w_0 から算定されたものとしよう。すなわち，

$$v(l)=u(w_0*l)-u(w_0) \tag{25}$$

であるとしよう。式(25)を図に描くとき，図 4 が得られる。そのとき，図 4 から理解されるように，$v(x_{1/2})$ は関数 $u(\cdot)$ においては $u(w_0*x_{1/2})$ すなわち $u(w_0+x_{1/2})$ と同じ値をもつ。そして，推定されるべき効用関数 $u(\cdot)$ と推定された効用関数 $v(\cdot)$ が論理整合的であるためには

$$u(l_0*x_{1/2})=u(l_0*l_1)=u(w_0*x_{1/2})=u(w_0*l_1) \tag{26}$$

でなければならない。

もし式(26)を満すような w_0 が存在するならば，効用関数の推定手続はこの w_0 を原点とする関数 $v(\cdot)$ を決定することができる。いま，区間〔c, a〕は正の金額上にあると仮定しておく。

意思決定者が一定リスク回避的であり，初期条件 l_0 の確実等価額 $\phi(l_0)$ が w_0，すなわち，

$$w_0=\phi(l_0)=u^{-1}u(l_0) \tag{27}$$

であるならば，そのとき，Fukuba-Ito (1984) の定理から，

$$u(l_0 \ast l_1)=u(w_0 \ast l_1) \tag{28}$$

となる。さらに，Pfanzagl の一貫性公理，(Pfanzagl, 1959) から，

$$u(l_0 \ast x_{1/2})=u(w_0 \ast x_{1/2}) \tag{29}$$

となり，式(26)が成立する。したがって，もし意思決定者が一定リスク回避的であり，初期条件 l_0 が既知であるならば，初期条件 l_0 に対する確実等価額 w_0 が推定された効用関数 $v(\cdot)$ の原点となる。ただし，一定リスク回避の場合には，効用関数の推定手続から理解されるように，関数 $v(\cdot)$ の推定に初期条件 l_0 は必要とされない。

一方，意思決定者が逓減リスク回避的であり，初期条件 l_0 の確実等価額が $w_0=\phi(l_0)$ であるならば，そのとき，Fukuba-Ito (1984) の定理より，

$$u(l_0 \ast l_1)>u(w_0 \ast l_1) \tag{30}$$

となる。したがって，確実等価額 w_0 は式(26)を満さず，推定された効用関数 $v(\cdot)$ の原点になる資格をもたない。

それでは，$w_0=\phi(l_0)$ 以外の点 w_0' を原点として効用関数 $v(\cdot)$ が推定されたであろうか，この質問に対する答は否定的である。

効用 $u(l_0 \ast x_{1/2})$ に対する確実等価額 $\phi(l_0 \ast x_{1/2})$ は，リスク・プレミアム $\pi(l_0 \ast x_{1/2})=\pi(0, l_0 \ast x_{1/2})=\pi(x_{1/2}, l_0)$ から

$$\phi(l_0 \ast x_{1/2})=E(l_0)+x_{1/2}-\pi(x_{1/2}, l_0) \tag{31}$$

と表現される。そのとき，式(26)における

$$u(l_0 \ast x_{1/2})=u(w_0' \ast x_{1/2})$$

は

$$\phi(l_0 \ast x_{1/2})=w_0'+x_{1/2} \tag{32}$$

を意味する。したがって，式(31)，(32)から

$$w_0'=E(l_0)-\pi(x_{1/2}, l_0) \tag{33}$$

が得られる。

“くじ” l_0 は，初期条件であるゆえに，効用関数の推定手続のプロセスにおいて変ることはない。一方，$x_{1/2}$ は “くじ” $l_1=\left(\frac{1}{2}\cdot x_0, \frac{1}{2}\cdot x_1\right)$ の確実等価額

であった。式(33)から容易に理解されるように，点 w_0' は確実等価額 $x_{1/2}$ に依存している。このことは，推定手続において“くじ” l_1 とは異なる“くじ”，例えば $l_2=\left(\frac{1}{2}\cdot x_0, \frac{1}{2}\cdot x_{1/2}\right)$，に対する確実等価額 $x_{1/4}$ が求められたとき，

$$w_0'=E(l_0)-\pi(x_{1/4}, l_0) \tag{34}$$

の成立を要請する。

リスク・プレミアム $\pi(x_{1/2}, l_0)$，$\pi(x_{1/4}, l_0)$ が同じでないとき，式(33)と(34)は両立しない。推定されるべき効用関数 $u(\cdot)$ が一定リスク回避的であるならば，リスク・プレミアム $\pi(x_{1/2}, l_0)$，$\pi(x_{1/4}, l_0)$ は同じであるゆえにこの困難は生じない。しかしながら，効用関数あるいは意思決定者が逓減リスク回避的であるならば，そのときリスク・プレミアム $\pi(x_{1/4}, l_0)$，$\pi(x_{1/2}, l_0)$ は異なる。

したがって，効用関数 $v(\cdot)$ の原点 w_0' は，確実等価額の値が異なるような“くじ”が意思決定者によって評価されるたびに，移動する。このように，初期条件がリスク的であり，意思決定者が逓減リスク回避的であるとき，推定されたはずであった効用関数 $v(\cdot)$ には効用を測定する一意的な原点が存在しない。

参 考 文 献

Arrow, K. J. (1982), Risk Perception in Psychology and Economics, *Economic Inquiry*, 20, p. 1–9.

Finkbeiner, D. T. (1960), *Matrices and Linear Transformation*, Freeman.

Fishburn, P. C. (1968), Utility Theory, *Management Science*. Vol. 14, No. 5.

Friedman, M. and Savage, L. J. (1952), The Expected Utility Hypothesis and Measurability of Utility, *Journal of Political Economy*, Vol. 60, No. 6.

Fukuba, Y. and Ito, K. (1984), The So-Called Expected Utility Theory Is Inadequate, *Mathematical Social Sciences*, Vol. 7, No. 1.

Grether, D. M. and Plott, C. R. (1979), Economic Theory of Choice and the Preference Reversal Phenomenon, *American Economic Review*, 69.

Hershey, J. C., Kunreuther, H. and Schoemaker, P. J. H. (1982), Sources of Bias in Assessment Procedures for Utility Functions, *Management Science*, Vol. 28.

Keeney, R. L. and Raiffa, H. (1976), Decisions with Multiple Objectives, Wiley.

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P. and Tversky, A. (1971), *Foundations of Measurement*, Vol. I, Academic.

Marschak, J. (1951), Why Should Statisticions and Businessman Maximize Moral Expectation?, in *Economic Information, Decision and Prediction*, (1974), Reidel.

——— (1964), Actual Versus Consistent Decision Behavior, *Behavioral Science*, 9.

Meyer, R. F. and Pratt, J. W. (1968), The Consistent Assessment and Fairing Preference Functions, IEEE, *System Science and Cybernetics*, SSC–4.

Pfanzagl, J. (1959), A General Theory of Measurement: Application to Utility, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 6.

Raiffa, H. (1968), *Decision Analysis*, Addison-Wesley, (宮沢光一, 平館道子訳「決定分析入門」, 1972, 東洋経済新報社)。

Savage, L. J. (1971), Elicitation of Personal Probabilities and Expectations, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 66, No. 336.

Schlaifer, R. (1969), *Analysis of Decisions under Uncertainty*, McGraw.

Schoemaker, P. J. H. (1980), *Experiments on Decisions under Risk*, Martinus.

——— (1982), The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations, *Journal of Economic Literature*, Vol. XX.

Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.

伊藤駒之 (1982), 期待効用の初期条件, 国民経済雑誌, 第146巻, 第5号。