集団的意思決定における多数決原理

伊賀，隆

(Citation)
国民経済雑誌,153(5):1-14

(Issue Date)
1986-05

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00173560

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00173560

集団的意思決定における多数決原理

伊　賀　隆

I

企業・政党・組合などの組織は，構成員の自主的な活動を基礎としながらも，全体としてのまとまりをもった統一的活動を展開しなければならないという，根本的な矛盾を抱えている。そのために構成員の合意を確定する必要があり，集団的意思決定のルールを持たなければならないことになる。決定ルールにはさまざまなものがあるけれども，一方の極には階層的決定方式 hierarchical decision rule があって，構成員の中の特定の人々に特別の決定権を与えるものであり，独裁的決定ルールはその極端なものと言える。しかし他方の極には制限的決定方式 restrictivist decision rule があって，集団的決定よりも個人的選好の方を重視するのであり，すべての構成員に拒否権を認める満場一致ルールはその極端なものである。

多数決ルール majority decision rule は，言わば両者の中間にあるとも考えられるのであって，個人的選好よりも集団的決定を優先する点で制限的決定ルールと対立するけれども，集団的決定を特定の個人または少数派の選好に従属させないという点で階層的決定ルールと対立する。しかし集団的意思決定として，現実的にもっとも普遍的に見られるのは多数決ルールである。それは，多数決ルールが論理的にも実際的にも幾つかの「望ましい性質」をもっているからである。

1　広範性[1]　構成員はすべての選択肢に対して，どのような選好順序を表明してもよいということ。つまり個人の選好は全く自由であって，外部から

1　Arrow, K. J., [1], p. 24.

強制されることはないということ。したがってそうした強制をもたらすような集団的決定ルールは，「望ましい」とは言えないのである。

2 独立性[2] 二つの選択肢 x・y について集団的選好が確定したとすると，これと全く関係のない別の選択肢 z が追加（又は削除）されても，x・y に関する集団的選好が変化することはない。この性質は，集団的意思決定ルールが個人間の選好の比較や，選好の強度などを考慮に入れないということを含意している。

3 パレート最適性[3] 構成員のすべてが，x よりも y を選択する場合には，集団的決定においても x より y を選択しなければならない。

さらにまた，多数決ルールは次のような性質を持つことが，May[4] によって明らかにされている。

1 匿名性 個人の選好が互いに交換可能な時，その互換によって集団的決定が変化することはない。これは個人がどのような選好を持とうとも，集団的決定がそれによって影響を受けないということであり，決定ルールはすべての構成員に対して平等に適用されることを意味する。

2 中立性[5] 2つの選択肢 x・y を互換しても，集団的決定はそれによって影響を受けない。つまり集団的決定ルールは，すべての選択肢に対して偏見のない取扱いをするものでなければならない。

3 感応性 ある人の選好が選択肢 x に関して有利に変化した時，他の人々の選好が不変であるならば，集団的決定は x に関して有利に変化するものでなければならない。

こうした性質を持つため，集団的意思決定の方式として多数決が多用されることになるのである。もちろん多数決自体，いろいろなバリエーションがある。絶対多数決と相対多数決，$^1/_2$ 多数決と $^2/_3$ 多数決等々。しかしここではいわゆ

2 Arrow, J. K., [1], pp. 26～28.
3 Arrow, K. J., p. 96.
4 May, K., [2].
5 これは先に掲げた「独立性」と本質的には同じものである。

る単純多数決，すなわち絶対多数決でかつ $1/2$ 多数決に限定して議論をするつもりである。

II

集団的決定と個人選好とが一致すればよいが，そうでない場合には構成員の中に不満が発生することは避けられない。どのような集団的決定方式を採用してもこうした不満は発生するのであるが，その発生する確率を最小にするものが単純多数決であることが分っている。Schofield[6] に従ってこの点を考えてみよう。

ある論点について，次の４つのケースを想定する。

		個人的選好	
		yes	no
集団的決定	yes	A	B
	no	C	D

この中AとDのケースについては，個人的選好と集団的決定とが一致するから問題はない。不満が発生するのはBとCのケースである。そこで個人が「yes」の選好をもつ確率はすべて等しいと仮定し[7]，それを p と書くことにする。そして n 人の構成員の中で k 人が賛成すれば，「yes」にしろ「no」にしろ，集団的意思が決定するものと考える。そうするとケースBの発生する確率は

$$P(B)=\sum_{r=k}^{n-1}\binom{n-1}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

となるし，またケースCの発生する確率は

$$P(C)=\sum_{r=1}^{k-1}\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$$

となる。

そこで $P(B)+P(C)$ を k の関数と考えて $R(k)$ と書くことにし，$R(k)$ が最小となるような k の値を求める。$R(k)$ が k のある値に対して最小となるためには，

6 Schofield, N. J., [3].

7 選好確率が個人によって異る場合については，Curtis, R. B., [4] を参照されたい。

$$R(k) \leqq R(k-1)$$

$$R(k) \leqq R(k+1)$$

でなければならない。初めの方の条件から検討すると，

$$R(k)=\sum_{r=1}^{k-1}\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}+\sum_{r=k}^{n-1}\binom{n-1}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

$$R(k-1)=\sum_{r=1}^{k-2}\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}+\sum_{r=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

であるから，

$$R(k)-R(k-1)=p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}\left[\binom{n-1}{k-2}-\binom{n-1}{k-1}\right]$$

となる。したがって $R(k)-R(k-1) \leqq 0$ であるためには，

$$\frac{1}{k+1} \geqq \frac{1}{n-k-1}$$

または

$$2k \leqq n+2$$

であればよいことが分る。

同様にして

$$R(k+1)=\sum_{r=1}^{k}\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}+\sum_{r=k+1}^{n-1}\binom{n-1}{r}p^k(1-p)^{n-r}$$

から $R(k)-R(k+1) \leqq 0$ となるための条件を求めると，

$$\frac{1}{k} \leqq \frac{1}{n-k}$$

または

$$2k \geqq n$$

を得る。

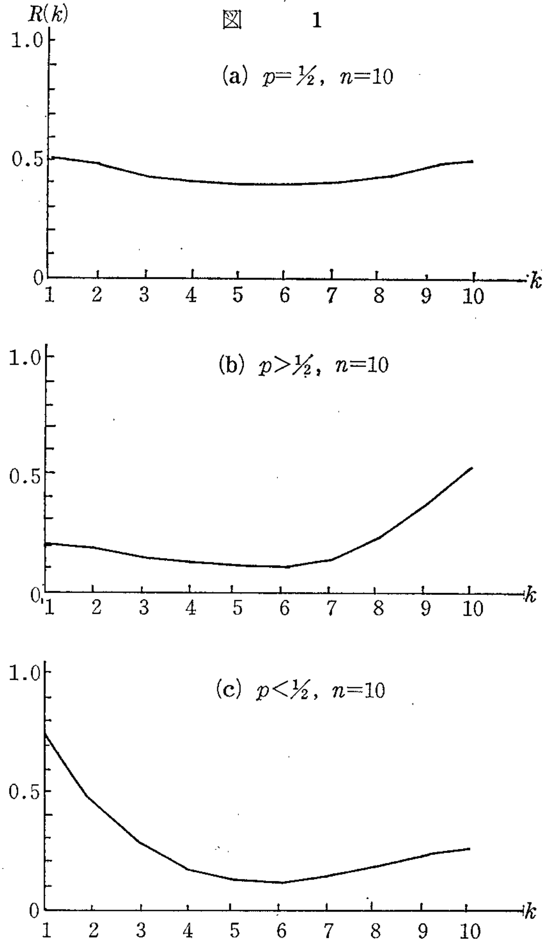
以上のことから，$R(k)$ は

$$n \leqq 2k < n+2 \qquad \text{又は } n < 2k \leqq n+2$$

であるような k に対して，最小値をとることが分る[8]。したがって単純多数決を

8 n が奇数なら $\bar{k}=\frac{n+1}{2}$，また n が偶数なら $\bar{k}=\frac{n}{2}$ とする。このような $\bar{k}$ に対して，$R(k)$ が最小値となるのである。

図　1



採用した場合，各構成員の不満がもっとも少くなると言えるのである。図1はそのことを示したものである。$n=10$ として，p の3通りの値に対する $R(k)$ の変化を描いたものであるが，いずれの場合でも $k=5$ の所で $R(k)$ が最小となっていることが分る。

ところで $k=1$ という特別の場合を考えてみると，これは集団的意思がたった1人の意向によって決定されるという意味で，独裁的決定方式と見てよい。[9] また $k=n$ という特別の場合は，全体が同意しないと集団的意思決定が行われないのであるから，これは満場一致型の決定方式と見てよい。とうぜんのことながら，これらの決定方式を採用した場合は，$1/2$ 多数決を採用した場合よりも不満が大きくなる。そのことは図1ではっきりと示されている。その不満の差は

9　もちろんこれは，政治学的な意味での独裁制とはほとんど関係がない。そのことは逆に満場一致制の場合を考えてみれば分ることで，そこではただ1人の拒否権によって全体の意思決定が妨げられる。政治学的な視点からすれば，これも独裁制に含めてよいはずである。したがって「独裁」という言葉をここで使うことは混乱を招くと思うけれども，Arrow 以後この言葉が慣用されているので，敢えてそのまま使っている。

$$R(1)-R(k^*),\ \ R(n)-R(k^*)$$

で与えられる。そこで

$$\min[R(1)-R(k^*),\ \ R(n)-R(k^*)]$$

を，多数決方式の採用による不満の減少から得られる利得，あるいはそれを簡略化して多数決方式の限界利得と名付けることができよう。図1からも分るように，集団規模が拡大して構成員の数が増加すると，この限界利得は減少していく。[10] この点については，後で再び取り上げて検討するつもりである。

III

上述の議論に関連して，個人選好と集団的決定との間に，次のような関係があることを指摘しておかなければならない。数値例で先に説明しておこう。

ある論点について個人の賛成する確率を p とすると，n 人の構成員の中の l 人がこの論点に賛成する確率 $P(l)$ は，

$$P(l)=\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l}$$

によって与えられる。$n=5$ の場合に $P(l)$ を計算したものが，表で示されている。この表を見ると，$P(l)$ の最大値は $l/n=p$ の点で達成されることが分る。たとえば $p=0.2$ として，表の 0.2 の列を上から下に見ていくと，$l/n=1/5$ $(=0.2)$ の点で $P(l)=0.40960$ となり，これが最大値であることは直ち

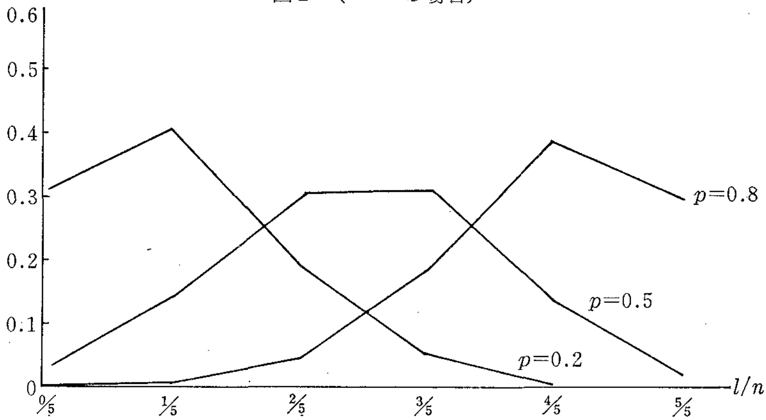
$P(l)=\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l}$ ($n=5$ の値の場合)

(10^{-5})

l/n ＼ p	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
5/5	59049	32768	16807	7776	3125	1024	243	32	1
4/5	32805	40960	36015	25920	15625	7680	2835	640	45
3/5	7290	20480	30870	34560	31250	23040	13230	5120	810
2/5	810	5120	13230	23040	31250	34560	30870	20480	7290
1/5	45	640	2835	7680	15625	25920	36015	40960	32805
0/5	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049

10 この点の証明については Schofield [3] を参照されたい。

図2 ($n=5$ の場合)



に分る。

同じことを $p=0.8$ の列について検討すると，$l/n=4/5$ $(=0.8)$ の点で $P(l)$ が最大値をとる。そのことを図示したものが図2である。

以上のことを，一般的な形で論証しておく。

$$P(l)=\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l}$$

であるから

$$P(l+1)=\binom{n}{l+1}p^{l+1}(1-p)^{n-l-1}$$

$$P(l-1)=\binom{n}{l-1}p^{l-1}(1-p)^{n-l+1}$$

である。そこで

$$P(l)-P(l+1)\geqq 0,$$

および

$$P(l)-P(l-1)\geqq 0$$

となるような l の値を求めればよい。前の方の条件から検討すると

$$P(l)-P(l+1)=\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l-1}\left[(1-p)-\frac{(n-l)}{l+1}p\right]\geqq 0$$

より

$$(1-p)-\frac{n-l}{l+1}p\geqq 0$$

が導かれる。これを整理すると

$$l+1 \geqq p(n+1)$$

が得られる。

次に後の方の条件を検討すると,

$$P(l)-P(l-1)=\binom{n}{l}p^{l-1}(1-p)^{n-l}\left[p-\frac{l}{n-l+1}(1-p)\right]$$

より

$$p-\frac{l}{n-l+1}(1-p) \geqq 0$$

が導かれる。これを整理すると

$$p(n+1) \geqq l$$

が得られる。

以上の結果を総合すると

$$l+1 \geqq p(n+1) \geqq l$$

であるような l の値に対して, $P(l)$ が最大となることが分る。たゞし等号はどちらか一方だけが適用されるものとする。先の数値例をあてはめると, $n=5$, $p=0.2$ であるから

$$l+1 \geqq 1.2 \geqq l$$

であり, このことから $l=1$ が直ちに導かれる。したがって $l/n=0.2$ $(=p)$ となるのである。

IV

すでに述べたように, 多数決はいくつかの「望ましい性質」を持っている点から考えて, 集団的決定方式としてこれ以上のものを求めることはできないと思われる。もちろん Arrow の一般的不可能性定理[11]がある以上, 理想的な集団的決定方式は存在しないわけで, その意味では多数決方式も決して最善のものではあり得ない。しかし Arrow の要請は,「ないものねだり」に近い性質のも

11 Arrow, K. J., [1].

のであり，それを満足しないからと言って欠陥呼ばわりするのはどうかと思う。

多数決方式の欠陥は，もっと別の点に求められるべきである。それは多数決方式が，個人選考に対して高度に反応しすぎることであり，過敏性という所にあると考える。いま n 人から成る集団を考える。便宜上 n は奇数であるとしておく。そうすると過半数は $k\left(=\frac{n+1}{2}\right)$ 人である。そこである論点に関する個人の賛成確率を p と書くと，この論点が集団的決定として採択される確率は

$$R(n)=\sum_{r=0}^{k-1}\binom{n}{r}p^{n-r}q^{r}+\binom{n}{k}p^{n-k}q^{k},\quad (q=1-p)$$

である。

また $n-1$ 人から成る集団では，

$$R(n-1)=\sum_{r=0}^{k-1}\binom{n-1}{r}p^{n-r-1}q^{r}+\frac{1}{2}\binom{n-1}{k}p^{n-k-1}q^{k}$$

である。右辺第2項については，若干の説明を要するであろう。n を奇数とすると $n-1$ は偶数であり，賛否同数という事態が発生する。その確率が

$$\binom{n-1}{k}p^{n-k+1}q^{k}$$

である。そして賛否同数の場合は，たとえば議長裁決のような手法で集団的意思決定を行うものとしておけば，少くとも不決定という事態は回避できる。そして議長が何らの予断も抱かず，ケース・バイ・ケースで裁決を行うと想定すると，賛成する確率は $1/2$ となる。したがってこの場合の賛成確率は

$$\frac{1}{2}\binom{n-1}{k}p^{n-k+1}q^{k}$$

となる。

以上のことを前提として，集団規模の変化が賛成確率にどのような影響を与えるかを考えてみる[12]。そのため

$$R(n-1)-R(n)=\sum_{r=0}^{k-1}p^{n-r-1}q^{r}\left[\binom{n-1}{r}-\binom{n}{r}p\right]$$
$$+p^{n-k-1}q^{k}\left[\frac{1}{2}\binom{n-1}{k}-\binom{n}{k}p\right]$$

12 ここで展開されている議論は，前回行ったものを若干の点で整理したものである。伊賀　隆〔5〕，

を検討する。$p<1/2$ とすると $p<q$ であるから，

$$p^{n-r-1}q^{r}>n^{n-1}q^{0} \qquad (r=0,1,\cdots,k-1)$$

が成立する。そうすると

$$R(n-1)-R(n)>p^{n-1}q^{0}\left[\sum_{r=0}^{k-1}\left\{\binom{n-1}{r}-\binom{n}{r}p\right\}\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{1}{2}\binom{n-1}{k}-\binom{n}{k}p\right\}\right]$$

この右辺は，二項係数の性質より[13]

$$p^{n-1}q^{0}\left(\frac{1}{2}\right)\left[(2)^{n-1}-(2)^{n}p\right]=p^{n-1}q^{0}\left(\frac{1}{2}\right)(2)^{n-1}(1-2p)$$

となる。$p<1/2$ と仮定しているから，

$$1-2p>0。$$

したがって

$$R(n-1)-R(n)>0$$

である。

反対に $p>1/2$ なら $p>q$ であるから，上と同様の考え方によって

$$R(n-1)-R(n)<p^{n-k-1}q^{k}\left\{\sum_{r=0}^{k-1}\left[\binom{n-1}{r}-\binom{n}{r}p\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{2}\binom{n-1}{r}-\binom{n}{r}p\right]\right\}$$

この右辺は

$$p^{n-k-1}q^{k}\left(\frac{1}{2}\right)(2)^{n-1}(1-2p)$$

に等しい。したがって $p>1/2$ ならば

$$1-2p<0$$

であるから

$$R(n-1)-R(n)<0$$

---

13 $\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}+\frac{1}{2}\binom{n-1}{k}=\frac{1}{2}(2)^{n-1}.$

$\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}=\frac{1}{2}(2)^{n}.$

となる。

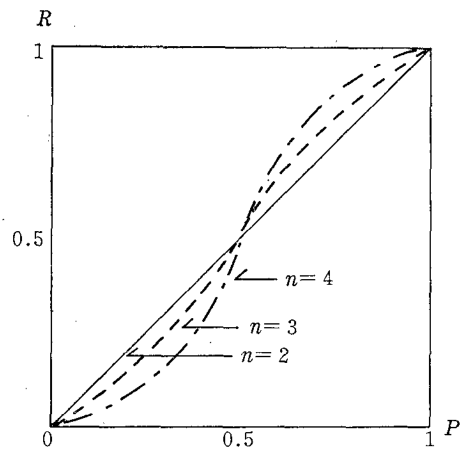
もしも $p=1/2$ ならば

$$R(n-1)-R(n)=0$$

となる。

また $p=0$ ならば $R=0$，$p=1$ ならば $R=1$。このことを図示したものが図3である。個人の賛成確率が $1/2$ である時には，集団の賛成確率も $1/2$ である。しかし p が $1/2$ 以下の時には集団の賛成確率が個人の賛成確率を下まわるし，逆に p が $1/2$ 以上の時には集団の賛成確率が個人の賛成確率を上まわる。このように p が $1/2$ でない場合，集団の賛成確率は個人の賛成確率を増幅した形になるのであり，その意味で多数決には過敏性という欠陥がつきまとっている。

図 3



V

個人の賛成確率が $1/2$ である場合には集団の賛成確率も $1/2$ であり，両者の間に乖離は生じない。その代りに賛否両論の結着がつかないという意味での，不決定状態が発生しやすくなる。集団に属している個人の数を n とすると，その中の r 人が賛成する場合の数は二項係数

$$\binom{n}{r}=\frac{n\,!}{r\,!(n-r)\,!}$$

で与えられる。これを r の関数と見て

$$f(r)=\binom{n}{r}$$

とすると，$r=n/2$ で最大値をとり，$r=0$，$r=n$ の時に最小となる。この最大値と最小値の比率を考えてみる。

$$\binom{n}{n/2}=\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2}$$

$$\binom{n}{0}=1, \quad \binom{n}{n}=1$$

であるが，スターリングの公式

$$n!\simeq n^n e^{-n}$$

を用いると

$$\binom{n}{n/2}\simeq\frac{n^n e^{-n}}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{N/2}e^{-N/2}\right]^2}=2^N$$

となる。したがって集団の規模が大きくなると，不決定の場合の数が急速に大きくなり，全員賛成や全員反対という場合の数は，それと比べるとほとんど無視し得る程度に小さくなっていく。

ここで次のようなプロセスを考えてみる。時刻 t に賛成側にいた個人の数を $r(t)$ とし，それが単位時間の経過した後に反対側に変る確率を a とする。逆に反対側から賛成側に変る確率を b とする。そこで賛成者の数の変化を式であらわすと，

$$-\frac{dr}{dt}=ar-b(n-r)$$

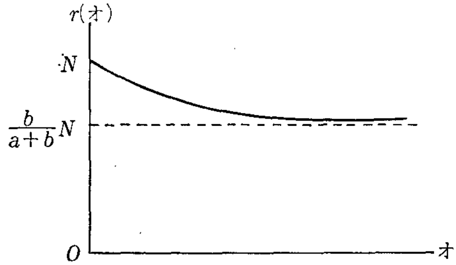
のように書ける。これを初期条件（$t=0$ の時 $r=n$）を使って解くと，

$$r(t)=n\left\{\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}e^{-(a+b)t}\right\}$$

となるから，時間が十分に経過した後には，$\frac{b}{a+b}N$に収束する。これが平衡状態である。もしも $a=b$ ならば，$\frac{1}{2}N$が平衡状態となることは直ちに分る。

a または b という外力を加えて，個人を賛成側または反対側にまわら

図　4



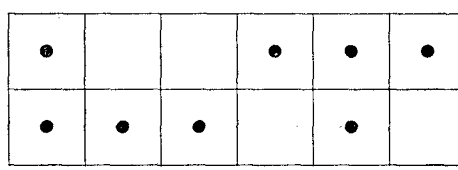
せるとすると，a と b の大きさのちがいによって，いつかは全員が賛成側または反対側にまわってしまうように考えられるが，決してそうではなく平衡状態に到達するだけである。これはもともと個人の賛成確率を $^1/_2$ と仮定したことから出てくる結論であって，$p=1/2$ である限り $\binom{n}{0}$，$\binom{n}{n}$ という状態の発生する確率はきわめて小さいのである。しかも集団規模が拡大すると，$\binom{n}{0}$や$\binom{n}{n}$といった全員一致の状態が発生することは，ほとんど考えられなくなってしまう。

ここに集団的決定の真の難点が存在する。集団が大きくなると，満場一致方式をとる限り，ほとんどつねに不決定の状態に追いこまれる。しかし外力を加えてむりやり賛成者を増加させたとしても，一定限度以上に賛成者をふやすことはできない。そして外力をかけ続けるためのコストが，次第に大きくなっていく。独裁的決定方式は，そういう形で破綻に追いこまれるのである。

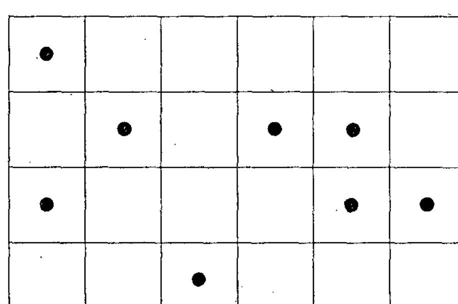
多数決方式を採用しても，難点は解消しない。この場合は賛成者と反対者の数が接近するという形の不決定状態が，発生しやすくなるのである。これは熱力学で言うところの，「エントロピー増大傾向」[14]と似ている。粒子の動きに何らの拘束も加えなければ，粒子は一様に拡散していく。そのため粒子の運動を利用して仕事をすることが，困難になっていく。人間の集団においても同様であり，意見の分裂によって集団的決定が困難になると，行動力が低下して活力が失われる。

図　5

(a)



(b)



14　Georgescu-Roegen, N., [6] を参照されるとよい。

このような観点から，集団的決定問題にエントロピーの考え方を導入してみることもできる。構成員の数をnとし，論点の数をmとする。n人がm/nこの党派に所属するとして，その所属のしかたの数は

$$W(a)=n!$$

ある。論点の数を2倍にすると，所属のしかたの数は

$$W(b)=n!2^n$$

ある。そこでエントロピーを

$$S=k\log W$$

と定義すると，状態aと状態bとでは，

$$\begin{aligned}\varDelta S=S(b)-S(a)&=b\log W(a)-k\log W(b)\\&=k\log\frac{W(b)}{W(a)}=k\log 2^n=nk\log 2\end{aligned}$$

だけのエントロピー差がある。kは比例常数である。

このように論点の数が増大すると，所属の状況の「あいまいさ」が増加する。つまりエントロピーが増大したのである。賛否のみを問い，保留または棄権を許さない場合の方が，それらを許す場合よりもエントロピーは低い，集団のエントロピーを低下させるためには，このような規制が必要である。そうすると規制のために投入されるエネルギーと，規制によって低下させられたエントロピー，そしてそこから取り出せるエネルギーとの比較が問題となってくる。こうした考え方に従って，集団的決定問題を扱っていく必要があると思われる。

参考文献

[1] Arrow, J. K., *Social Choice and Individual Value,* 2nd ed. (Yale Univ. Press), 1963.

[2] May, K., A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision, *Econometrica,* 20, 1952.

[3] Schofield, N. J., Is Majority Rule Special?, *Probability Model of Collect*isive *Decision Making,* ed. by Niemi, R. G. and Weisberg H. F., Merrill Publishing, 1972.

[4] Curtis, R. B., Decision-Rules and Collective Values in Constitutional Choice, *Probability Models of Collective Decision Making,* ed. by Niemi, R. G. and Weisberg, H. F., Merrill Publishing, 1972.

[5] 伊賀　隆,「集団的意思決定と多数決原理」, 国民経済雑誌　138巻4号, 1978。

[6] Georgescu-Roegen, N., *Economics of Natural Resources——Myths and Facts,* 1981.