



〈学界展望〉線形回帰モデルにおける構造変化のベイズ推定

大谷, 一博

(Citation)

国民経済雑誌, 157(1):101-124

(Issue Date)

1988-01

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/00173733>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00173733>



線形回帰モデルにおける構造変化の ベイズ推定

大 谷 一 博

I 序

消費関数や輸出・入関数のような、いわゆる経済関係式の構造変化について調べることは、計量経済学にとって重要な課題の一つである。

経済関係式が線形回帰モデルで定式化されている場合、計量経済学では回帰のパラメータ値（係数、誤差分散等）の変化を構造変化と呼んでいる。これまでに、構造変化の推定法および検定法に関する非常に多くの研究がなされてきており、その組織的な展望が豊田（1977）によってなされている。しかし、豊田（1977）では、構造変化時点の探索に関しては十分に触れられておらず、またベイジアンによる分析法も十分には紹介されていない。

構造変化時点を探索するための一つのモデルに、Quandt (1958) によって提唱されたスイッチング回帰モデル (switching regression model) がある。このスイッチング回帰モデルは、構造変化時点を探索するための一つの有力なモデルであり、この十年間、特にベイジアンの立場からこのモデルに対する多くの貢献がなされてきた。

本稿の目的は、ベイズ法による構造変化時点の探索についての展望を行なうことである。特に、本稿ではスイッチング回帰モデルに焦点を絞り、このモデルの拡張・発展の過程が、ダミー変数表示を用いることにより統一的に把握出来ることを以下の各節で示す。

II スイッチング回帰モデル

Quandt (1958) は、構造変化時点（すなわち、線形回帰のパラメータ値の変化時点）が未知のときに、この変化時点を探索するためのモデル、いわゆるスイッチング回帰モデルを提唱した。このモデルでは、パラメータの変化は 1 回限りであり、かつパラメータは瞬間的に (abruptly) 変化すると仮定されている。

スイッチング回帰モデルの基本形は次の 2 つの回帰式によって表わされる：

$$\begin{aligned} y_t &= x_t' \beta_1 + u_t; t=1, 2, \dots, t^*, \\ y_t &= x_t' \beta_2 + u_t; t=t^*+1, t^*+2, \dots, T, \end{aligned} \quad (2-1)$$

ただし、 y_t は t 期の従属変数の観測値、 x_t' は t 期の独立変数の観測値の $1 \times k$ ベクトル、 β_1 および β_2 は第 1 および第 2 レジームでの係数の $k \times 1$ ベクトルである。このモデルにおいては、 x_t' は非確率変数であり、 t 期の誤差項 u_t は期間を通じて互いに独立に、平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定されている。¹ また、 β_1 および β_2 の k 個の要素を推定するためには、少なくとも k 個の観測値を必要とするので、 $k \leq t^* \leq T-k$ と仮定する。² もし、構造変化時点 t^* が既知ならば、 β_1 と β_2 が等しいか否か（すなわち、構造変化が生じたか否か）は、例えば Chow (1960) によって提唱された Chow 検定によって統計的に確認することが出来る。しかし、 t^* が未知ならば、まず t^* を推定しなければならぬ。この t^* の推定問題が、いわゆる構造変化時点の推定問題である。

スイッチング回帰モデルは、ダミー変数を使うと、次のように書き換えられる³：

1 Quandt (1958) は、各レジームでの誤差分散が必ずしも等しいとは限らないより一般的なモデルを扱っているが、本稿では変化するパラメータは係数のみであると仮定する。

2 この t^* に関する仮定、 $k \leq t^* \leq T-k$ 、に対する技術的な理由は次の通りである。もし、 $t^* < k$ あるいは $t^* > T-k$ であれば、後に導出される t^* の事後密度関数 ((12-13) を見よ) に含まれる行列 $X^* X^*$ が特異となり、 $|X^* X^*|^{-1}$ は存在しない。従って、 t^* の事後分布に基づく推測は不可能となる。

3 このダミー変数表示についての、標本理論での取り扱いについては森棟 (1983) 参照。

$$y_t = x_t'(\beta + \lambda_t \delta) + u_t \quad (2-2)$$

ただし, λ_t はダミー変数であり, 次のように定義される:

$$\begin{aligned} \lambda_t &= 0 \text{ for } t=1, 2, \dots, t^*, \\ \lambda_t &= 1 \text{ for } t=t^*+1, \dots, T. \end{aligned} \quad (2-3)$$

(2-2)で表わされたモデルと(2-1)で表わされたモデルを比較すると, (2-1)の β_1 は(2-2)では β であり, (2-1)の β_2 は(2-2)では $\beta + \delta$ となっていることが分かる。もし, いくつかの係数が2つのレジームを通じて不変であることが先験的に分かっているならば, それらに対応する δ の要素を0とおけばよいので, 係数のみが増加するモデルでは, これを(2-2)のようにダミー変数表示で表わした方が取り扱いが容易である。例えば, 次の2変数線形回帰モデル

$$y_t = x_{1t}(\beta_1 + \lambda_t \delta_1) + x_{2t}(\beta_2 + \lambda_t \delta_2) + u_t$$

において, 係数 β_1 は不変であることが分かっているならば, $\delta_1 = 0$ という制約を置くことによって, β_2 だけが変化するモデルを容易に取り扱うことが出来る。

モデル(2-2)を行列表示で表わすと次のように書ける:

$$y^* = X^* \gamma + u \quad (2-4)$$

ただし,

$$y^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} x_1' & \lambda_1 x_1' \\ x_2' & \lambda_2 x_2' \\ \vdots & \vdots \\ x_T' & \lambda_T x_T' \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{bmatrix}$$

である。ここで, 陽表的には表われていないが, X^* は変化時点 t^* の関数である。 u が平均0, 共分散行列 $\sigma^2 I_T$ の多変量正規分布に従うので, (2-4)に対する尤度関数は

$$\begin{aligned} l(\gamma, \sigma, t^* | \text{data}) &= (2\pi)^{-T/2} \sigma^{-T} \\ &\times \exp[-(y^* - X^* \gamma)'(y^* - X^* \gamma)/2\sigma^2], \end{aligned} \quad (2-5)$$

与えられる。

パラメータ (γ, σ, t^*) に関する事前情報がほとんど無い場合には, 次の非情報的事前分布 (non-informative prior distribution) が用いられることが多い。

すなわち, γ および $\log \sigma$ が $(-\infty, \infty)$ の上で一様にかつ互いに独立に分布し, t^* が $[k, T-k]$ の上で一様にかつ他のパラメータと互いに独立に分布すると仮定する。このとき, パラメータの同時事前分布は

$$p_0(\gamma, \sigma, t^*) \propto 1/\sigma \quad (2-6)$$

と書かれる。ここで, 記号 “ $\propto$ ” は比例を表わしている。

尤度関数(2-5)と事前分布(2-6)を結合するとパラメータ (γ, σ, t^*) の同時事後分布 (joint posterior distribution) が得られる:

$$p(\gamma, \sigma, t^*) \propto \sigma^{-(T+1)} \exp[-(y^* - X^* \gamma)'(y^* - X^* \gamma)/2\sigma^2] \quad (2-7)$$

(γ, σ, t^*) の同時事後分布を σ に関して積分すると, 次の (γ, t^*) の事後分布が得られる:

$$\begin{aligned} p(\gamma, t^* | \text{data}) &= \int_0^\infty p(\gamma, t^*, \sigma | \text{data}) d\sigma \\ &\propto [(y^* - X^* \gamma)'(y^* - X^* \gamma)]^{-T/2} \\ &\propto (s^{*2})^{-T/2} \left[\nu + (\gamma - \hat{\gamma}^*)' \left(\frac{X^{*'} X^*}{s^{*2}} \right) (\gamma - \hat{\gamma}^*) \right]^{-(\nu + 2k - k_0)/2} \end{aligned} \quad (2-8)$$

ただし,

$$s^{*2} = (y^* - X^* \hat{\gamma}^*)'(y^* - X^* \hat{\gamma}^*)/\nu, \quad (2-9)$$

$$\hat{\gamma}^* = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} y^*, \quad (2-10)$$

$$\nu = T - 2k + k_0 \quad (2-11)$$

であり, k_0 は 2 つのレジームを通じて不変である係数の個数である。(2-8)式から, t^* が与えられたときの γ の条件付分布は多変量 t 分布であることが分かる⁴。従って, γ の第 i 要素を γ_i と書くと, t^* が与えられたときの γ_i の条件付周辺事後分布は自由度 ν の t -分布となり, その確率密度関数 (probability density function) は

$$p(\gamma_i | t^*, \text{data}) \propto \left[\nu + \frac{(\gamma_i - \hat{\gamma}_i^*)^2}{s^{*2} m_{ii}^*} \right]^{-(\nu+1)/2} \quad (2-12)$$

4 多変量 t -分布については, 例えば Zellner (1971) 参照。

で与えられる。

t^* の周辺事後分布を得るために、(2-8)を γ に関して積分すると

$$p(t^* | \text{data}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\gamma, t^* | \text{data}) d\gamma$$

$$\propto (s^{*2})^{-1/2} |X^*{}' X^*|^{-1/2} \quad (2-13)$$

を得る。 t^* の周辺事後分布(2-13)の解析的な取り扱い是不可能であるように思われるので、 t^* の事後分布のモード、事後平均および事後分散等は数値計算によって求めざるを得ない。(2-13)から t^* の事後分布が数値的に計算出来るので、 γ_i の周辺事後分布も次の式を通じて数値的に計算出来る：

$$p(\gamma_i | \text{data}) = \sum_{t^*=k}^{T-k} p(\gamma_i | t^*, \text{data}) p(t^* | \text{data}), \quad (2-14)$$

ただし、 $p(\gamma_i | t^*, \text{data})$ は(2-12)で与えられた γ_i の t^* が与えられたときの条件付周辺事後分布である。

(2-13)および(2-14)から、データが与えられると、変化時点 t^* および各係数 γ_i の事後分布が数値的に求められるので、スイッチング回帰モデルのベイズ推定が可能となる。もし、ベイジアン HPD (Highest Posterior Density) 検定により、帰無仮説 $H_0: \delta_i = 0$ がすべての i に対して採択されるならば、構造変化は生じていないと判断される。

ここで、Ferreira (1975) による t^* の事後分布を求めた数値例を示す。

Ferreira (1975) は Quandt (1958) によって使用された実験式、

$$y_t = (2.5 + \lambda_t \cdot 2.5) + [0.7 + \lambda_t(-0.2)]x_t + u_t,$$

$$\lambda_t = 0 \text{ for } t=1, 2, \dots, 12,$$

$$\lambda_t = 1 \text{ for } t=13, 14, \dots, 20,$$

と彼のデータセットを使って t^* の事後分布を求めた。この t^* の事後分布が図 2.1 に示されている。実験式から分かるように、この数値例では、真の変化時点は $t^*=12$ に設定されている。図 2.1 から分かるように、 t^* の事後分布は $t^*=12$ でシャープなモードをもっており、このデータセットに対しては真の

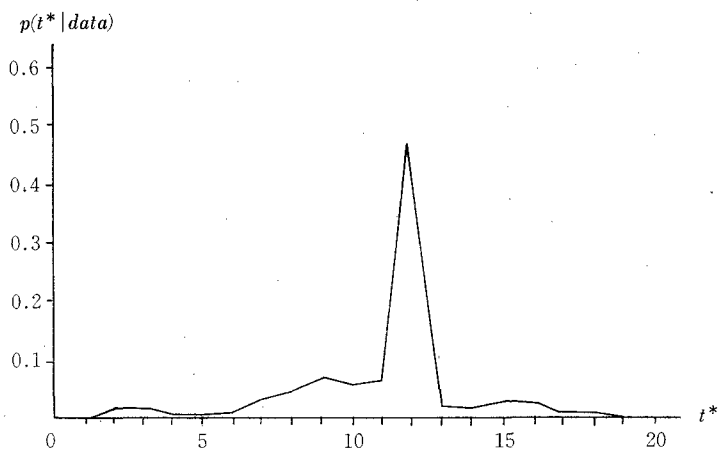


図 2.1 t^* の周辺事後分布 (出所, Ferreira (1975))

変化時点を正しく推定していると言える。

本節では, γ および σ に関する事前情報がほとんど無いと仮定したので, これらのパラメータの事前分布として一様分布が使用された。 γ および σ に関する事前情報が存在して, それが正規-ガンマ分布として表わされるという仮定のもとでのスイッチング回帰モデルは Chin-Choy and Broemeling (1980) によって検討されている。この事前情報がある場合には, t^* に関する制約, $k \leq t^* \leq T-k$, は大幅に緩められる。また, 本節では誤差項の分散は2つのレジームを通じて等しいと仮定されていたが, この誤差分散も変化する場合のスイッチング回帰モデルのベイズ推定については大谷 (1981) が検討している。

III 誤差項に自己相関がある場合

前節で扱われたスイッチング回帰モデルでは, 誤差項は期間を通じて互いに独立であると仮定されていた。しかし経済時系列データを扱うときには, 誤差項に自己相関が存在する場合もかなり多い。本節では, 誤差項に1階の自己相関が存在するときのスイッチング回帰モデルのベイズ推定について考察する。

次のスイッチング回帰モデルを考えよう：

$$y_t = x_t'(\beta + \lambda_t \delta) + u_t, \quad t=1, 2, \dots, T, \quad (3-1)$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3-2)$$

ただし、 y_t , x_t および λ_t は(2-2)で定義されたものと同じであり、 ρ は自己相関係数である。 u_t に含まれる誤差項 ε_t に関して、 ε_t は互いに独立に平均0、分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する。また、変化時点 t^* に関しては、第2節で述べたのと同じ理由から、 $k \leq t^* \leq T-k$ と仮定する。

モデル(3-1)を

$$y_t = x_t' \beta + \lambda_t x_t' \delta + u_t \quad (3-3)$$

と書き換え、 y_t から ρy_{t-1} を引くと

$$y_t - \rho y_{t-1} = (x_t' - \rho x_{t-1}') \beta + (\lambda_t x_t' - \rho \lambda_{t-1} x_{t-1}') \delta + \varepsilon_t \quad (3-4)$$

を得る。Zellner and Tiao (1964) に従って、 y と x の初期値 y_0 および x_0 を非確率的な既知の値であると仮定すると、(3-4)は行列表示で次のように表わされる：

$$y^* = X^* \gamma + \varepsilon \quad (3-5)$$

ただし、

$$y^* = \begin{bmatrix} y_1 - \rho y_0 \\ y_2 - \rho y_1 \\ \vdots \\ y_T - \rho y_{T-1} \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} x_1' - \rho x_0', & \lambda_1 x_1' - \rho \lambda_0 x_0' \\ x_2' - \rho x_1', & \lambda_2 x_2' - \rho \lambda_1 x_1' \\ \vdots & \vdots \\ x_T' - \rho x_{T-1}', & \lambda_T x_T' - \rho \lambda_{T-1} x_{T-1}' \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

である。ここで、陽表的には表われていないが、 y^* および X^* は t^* および ρ の関数である。

パラメータ $(\gamma, \sigma, \rho, t^*)$ に関する事前情報がほとんど無いと仮定すると、これらのパラメータに対する非報知的事前分布は

$$p(\gamma, \sigma, \rho, t^*) \propto 1/\sigma \quad (3-6)$$

と書かれる。⁵ $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_T)$ であるので、(3-5)に対する尤度関数は、 y^* および X^* が t^* の他に ρ に依存するという点を除けば、形式的には(2-4)に対する尤度関数と同じ形をしているので、2 節と同様の方法によって (γ, ρ, t^*) の事後分布を得ることが出来る：

$$p(\gamma, \rho, t^*) \propto (s^{*2})^{-T/2} \times \exp \left[\nu + (\gamma - \hat{\gamma}^*)' \left(\frac{X^{*'} X^*}{s^{*2}} \right) (\gamma - \hat{\gamma}^*) \right]^{-\left(\nu + 2k - k_0\right)} \quad (3-7)$$

ここで、 s^{*2} および $\hat{\gamma}^*$ は、 ρ および t^* に依存するという点を除けば、形式的には(2-9)および(2-10)で与えられた s^{*2} および $\hat{\gamma}^*$ と同じ形をしており、 ν は(2-11)で与えられたものと同じである。また、 k_0 は2つのレジームを通じて不変である係数の個数である。(3-7)から、 ρ と t^* が与えられたときの、 γ の条件付事後分布は多変量 t -分布であることが分かるので、 γ の第 i 要素 γ_i の条件付事後分布は自由度 ν の t -分布であり、その密度関数は形式的には(2-12)と同じ形をしている。

(3-7)を γ について積分すると、 (ρ, t^*) の事後分布が得られる：

$$p(\rho, t^* | \text{data}) \propto (s^{*2})^{\nu/2} |X^{*'} X^*|_0^{-1/2} \quad (3-8)$$

(3-8)を ρ に関して解析的に積分することは不可能であるように思われるので、 t^* の周辺事後分布は数値積分によって求めざるを得ない。すなわち、 t^* の周辺事後分布は

$$p(t^* | \text{data}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\rho, t^* | \text{data}) d\rho \quad (3-9)$$

の右辺に数値積分を施すことによって求められる。 t^* の周辺事後分布が数値的に求まると、 ρ の周辺事後分布は

$$p(\rho | \text{data}) = \sum_{t^*=k}^{T-k} p(\rho | t^*, \text{data}) p(t^* | \text{data}) \quad (3-10)$$

5 ここでは、Zellner and Tiao (1964) に従って、 $-1 < \rho < 1$ を仮定していない。もし、 $-1 < \rho < 1$ を仮定するならば、 ρ の事前分布として $p(\rho) \propto (1 - \rho^2)^{-1/2}$ が用いられることが多い。(例えば、Fomby and Guilkey (1978) 参照。)

から数値的に計算可能であり、さらに γ_t の周辺事後分布も

$$p(\gamma_t | \text{data}) = \sum_{t^*=k}^{T-k} \int_{-\infty}^{\infty} p(\gamma_t | \rho, t^*, \text{data}) p(\rho | t^*, \text{data}) \\ \times p(t^* | \text{data}) d\rho \quad (3-11)$$

から数値的に計算可能である。

ここで、各パラメータの周辺事後分布を計算した数値例を示す。Ohtani (1982) は 2 変数回帰モデル

$$y_t = (\beta_1 + \lambda_t \delta_1) x_{1t} + (\beta_2 + \lambda_t \delta_2) x_{2t} + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t=1, 2, \dots, 20,$$

を想定し、 $\beta_1=3.0$, $\beta_2=1.5$, $\delta_1=0.01, 0.02, 0.05, 0.10$, $\delta_2=0$, $\rho=0.5$, $t^*=5, 10, 15$ において、 t^* およびその他のパラメータの事後分布を数値計算によって求めた。ここで、 x_{1t}, x_{2t} の値としては 1~20 の一様分布から生成された一様乱数の値が、 ε_t の値としては標準正規分布から生成された正規乱数の値が用いられている。また、 $\delta_2=0$ であるので、2 つのレジームを通じて第 2 変数 x_{2t} に対する係数は不変であると仮定されている。 $\delta_1=0.02$, $t^*=5, 10, 15$

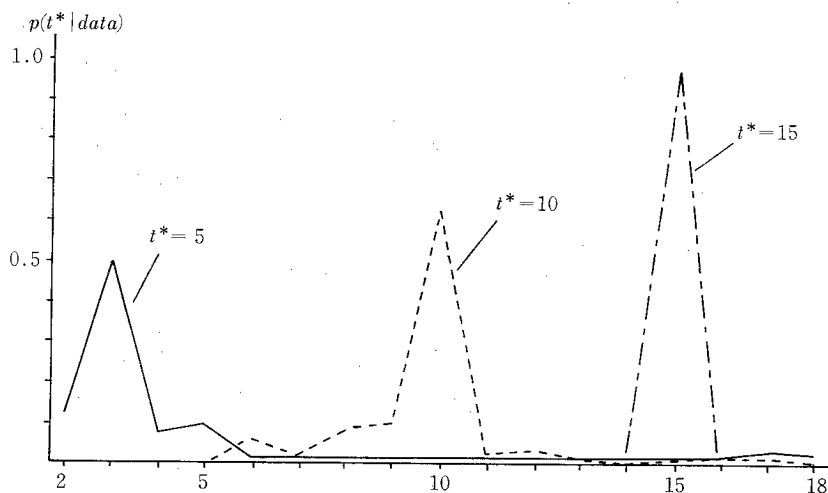


図 3.1 $\delta_1=0.02$ のときの t^* の周辺事後分布 (出所: Ohtani (1982))

表 3.1 各パラメータの周辺事後平均

δ_1	t^*	$\hat{t}^*$	$\hat{\rho}$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\delta}_1$
0.01	5	4.60	0.792	2.988	1.493	0.020
	10	8.06	0.218	3.005	1.499	0.002
	15	14.62	0.617	3.000	1.505	0.017
0.02	5	5.19	0.722	3.000	1.493	0.018
	10	9.66	0.315	3.002	1.499	0.015
	15	15.00	0.617	3.000	1.505	0.028
0.05	5	4.71	0.681	3.004	1.496	0.045
	10	10.00	0.342	3.001	1.499	0.047
	15	15.00	0.618	3.000	1.505	0.058
0.10	5	4.94	0.702	3.002	1.496	0.097
	10	10.00	0.342	3.001	1.499	0.096
	15	15.00	0.618	3.000	1.505	0.108

(出所, Ohtani (1982))

に対する t^* の事後分布が図 3.1 に、各パラメータに対する事後平均の値が表 3.1 に示されている。表 3.1 において、例えば $\hat{t}^*$ は、 t^* の事後分布の平均（すなわち、事後平均 $E[t^* | \text{data}]$ ）を表わしている。

図 3.1 および表 3.1 から、 $\delta=0.02$ で $t^*=5$ のときには t^* の事後分布は $t^*=3$ でモードをもつが、事後平均は 5.19 であり、かなり正確に真の変化時点 ($t^*=5$) を推定していることが分かる。Zellner (1971) によって示されるように、2 次の損失関数を仮定するならば、事後平均が最小の期待損失を与えるという意味で最良なベイズ推定値であるので、事後平均の方が事後モードよりも正確な推定値を与えているという事実は驚くべきことではない。

本節では、事前情報がほとんど無い場合の、誤差項に 1 階の自己相関が存在するスイッチング回帰モデルのベイズ推定について考察した。パラメータ (γ, σ, ρ) の事前情報が存在して、それが正規-ガンマ事前分布として定式化される場合の分析については Salazar, Broemeling and Chi (1981) がある。こ

6 t^* は整数値のみをとる変数であると定義されているが、 t^* の事後平均は $E[t^* | \text{data}] = \sum_{t^*=k}^{T-k} t^* p(t^* | \text{data})$ から計算されるため、必ずしも整数値をとるとは限らない。

の場合には、 t^* に関する制約、 $k \leq t^* \leq T-k$ は大幅に緩められる。

IV 構造変化が漸進的な場合 (I)

第2節および第3節で考察されたスイッチング回帰モデルは、構造変化が瞬間的に (abruptly) 生じるという仮定のもとで、その変化時点を推定するためのモデルである。しかし、経済構造の変化は瞬間的よりも、むしろある程度徐々に (gradually) 生じると考えた方が自然な場合も多い。この観点から、本節では漸進的な構造変化を扱うことの出来る、いわゆる漸進的スイッチング回帰モデル (gradual switching regression model) について考察する。

次のスイッチング回帰モデルを考えよう：

$$y_t = x_t'(\beta + \lambda_t \delta) + u_t, \quad t=1, 2, \dots, T. \quad (4-1)$$

ここで、構造変化が瞬間的に生じると仮定される場合には、 λ_t は次のように定義される：

$$\begin{aligned} \lambda_t &= 0 \text{ for } t=1, 2, \dots, t^*, \\ \lambda_t &= 1 \text{ for } t=t^*+1, t^*+2, \dots, T. \end{aligned} \quad (4-2)$$

Tsurumi (1980) は、Bacon and Watts (1971) によって提唱されたモデルを計量経済分析にヨリ適切な形に再定式化し、 λ_t を次のように定義すれば時点 t に関する漸進的な変化を扱い得ることを示した：

$$\begin{aligned} \lambda_t &= 0 \text{ for } t < t^*, \\ \lambda_t &= \text{trn}(s_t/\eta) \text{ for } t \geq t^*, \end{aligned} \quad (4-3)$$

ただし、 $s_t = t - t^*$ であり、 $\text{trn}(s_t/\eta)$ は推移関数 (transition function) と呼ばれる関数である。この推移関数は、係数の推移過程を近似するための関数であり、それは s_t を通じて構造変化の開始時点 t^* に、また漸進的な変化の程度を表わすパラメータ η とに依存する関数である。ここで、 t^* は前節までのように整数値をとる変数として定義されておらず、任意の実数値をとり得る変数として定義されている。

推移関数は次の条件を満たさなければならない：

$$(i) \lim_{s \rightarrow \infty} \text{trn}(s/\eta) = 1,$$

$$(ii) \text{trn}(0) = 0,$$

$$(iii) \lim_{\eta \rightarrow 0} \text{trn}(s/\eta) = 1.$$

条件(i)は、 t が t^* よりも大きくなるにつれて、推移関数は 1 に漸近していく（言い換えると、係数 β が変化後の係数 $\beta + \delta$ に漸近していく）ことを意味している。条件(ii)は変化の開始時点 $t = t^*$ では推移関数の値は 0 であり、条件(iii)は変化に対する反応の速度が速くなればなるほど（すなわち、 η が 0 に近いほど）、推移関数の値は速く 1 に収束することを意味している。

この漸進的変化モデルを実際に応用するには、推移関数を何らかの関数に特定化しなければならない。実証研究においてしばしば用いられる推移関数には次のようなものがある：

$$(a) \text{ 双曲線正接関数 : } \tanh(s_t/\eta),$$

$$(b) \text{ 2 次関数の比 : } (s_t/\eta)^2 / (1 + s_t/\eta)^2,$$

$$(c) \text{ 指数関数 : } 1 - \exp(-s_t/\eta).$$

これらの関数はいずれも上の 3 つの条件を満足している。

(4-1) を行列表示で表わすと次のようになる：

$$y^* = X^* \gamma + u, \quad (4-4)$$

ただし、

$$y^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} x'_1 & \lambda_1 x'_1 \\ x'_2 & \lambda_2 x'_2 \\ \vdots & \vdots \\ x'_T & \lambda_T x'_T \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{bmatrix}$$

である。ここで、陽表的には表われていないが、 X^* は t^* および η の関数である。

$u \sim N(0, \sigma^2 I_T)$ であるので、(4-4) に対する尤度関数は、 X^* が t^* と η に依存するという点を除いて、形式的には (2-5) と同じ形をしている。また、パラメータ ($\gamma, \sigma, t^*, \eta$) に関する事前情報がほとんど無いと仮定すると、これらのパラメータに対する非報知的事前分布は

$$p_0(\gamma, \sigma, t^*, \eta) \propto 1/\sigma \quad (4-5)$$

で表わされる。モデル(4-4)に対する事前分布と尤度関数は、形式的にはモデル(2-4)に対するそれらと同じ形をしているので、2節と同様の方法で (γ, t^*, η) の事後分布を得ることが出来る：

$$p(\gamma, t^*, \eta | \text{data}) \propto (s^{*2})^{-T/2} \times \left[\nu + (\gamma - \hat{\gamma}^*)' \left(\frac{X^{*'} X^*}{s^{*2}} \right) (\gamma - \hat{\gamma}^*) \right]^{- (\nu + 2k - k_0) / 2} \quad (4-6)$$

ここで、 s^{*2} および $\hat{\gamma}^*$ は、 t^* および γ に依在するという点を除けば、形式的には(2-9)および(2-10)と同じ形をしており ν は(2-11)で与えられたものと同じである。また、 k_0 は2つのレジームを通じて不変である係数の個数を表わしている。 t^* および η が与えられたときの、 γ の条件付事後分布は多変量 t -分布であるので、 γ の第 i 要素 γ_i の条件付周辺事後分布は自由度 ν の t -分布であり、その密度関数は形式的には(2-12)と同じ形をしている。

(4-6)を γ に関して積分すると、 (t^*, η) の事後分布が得られる：

$$p(t^*, \eta | \text{data}) \propto (s^{*2})^{-\nu/2} |X^{*'} X^*|^{-1/2} \quad (4-7)$$

$p(t^*, \eta)$ を t^* および η に関して解析的に積分することは不可能であるように思われるので、 t^* および η の周辺事後分布は数値積分によって求めざるを得ない。すなわち、 t^* の周辺事後分布は

$$p(t^* | \text{data}) = \int_0^\infty p(t^*, \eta | \text{data}) d\eta \quad (4-8)$$

の右辺に数値積分を施すことによって求められる。 t^* の周辺事後分布が数値的に求まると、 η の周辺事後分布は

$$p(\eta | \text{data}) = \int_0^T p(\eta | t^*, \text{data}) p(t^* | \text{data}) dt^* \quad (4-9)$$

から数値的に計算可能であり、さらに γ_i の周辺事後分布も

$$p(\gamma_i | \text{data}) = \int_0^T \int_0^\infty p(\gamma_i | t^*, \eta, \text{data}) p(\eta | t^*, \text{data})$$

$$\times p(t^* | \text{data}) d\gamma dt^* \quad (4-10)$$

から数値的に計算可能である。

漸進的スイッチング回帰を実証研究に応用した例として、Tsurumi and Tsurumi (1983) による合衆国における日本製乗用車の需要関数の構造変化の推定について述べる。Tsurumi and Tsurumi (1983) は、Gompertz 曲線から出発して、合衆国における日本車の需要関数に対する漸進的スイッチング回帰モデルを最終的に次のように特定化した：

$$q_t/s_{t-1} = (\beta_1 + \lambda_1 \delta_1) + (\beta_2 + \lambda_1 \delta_2) \log p_t + (\beta_3 + \lambda_1 \delta_3) \log y_t \\ + (\beta_4 + \lambda_1 \delta_4) \log p_{gt} + (\beta_5 + \lambda_1 \delta_5) \log s_{t-1} + u_t, \quad (4-11)$$

ただし、 q_t は日本車に対する需要量、 p_t は自動車の相対価格、 y_t は一人当たりの所得、 p_{gt} はガソリン価格、そして s_t は自動車の一人当たりのストックである。また、 λ_t は(4-3) で定義されたものと同じものである。

予備的分析により、(4-11)における定数項および s_{t-1} に対する係数是不変であったと考えられるとして、Tsurumi and Tsurumi (1983) は $\delta_1 = \delta_5 = 0$ という仮定を置いている。また、日本車の需要の増大はガソリン価格が高騰して燃費の良い車がヨリ選好された結果であるので、ガソリン価格は構造変化以

表 4.1 合衆国における日本車に対する需要関数の推定結果

パラメータ	事後平均	事後標準偏差
t^*	23.9	2.0
η	2.52	1.30
β_1	-0.0488	1.0315
β_2	-0.2112	0.0800
β_3	0.0989	0.1311
β_4	—	—
β_5	-0.0400	0.0367
δ_1	—	—
δ_2	0.1393	0.0825
δ_3	-0.0403	0.0367
δ_4	0.0024	0.0071
δ_5	—	—

(出所：Tsurumi and Tsurumi (1983))

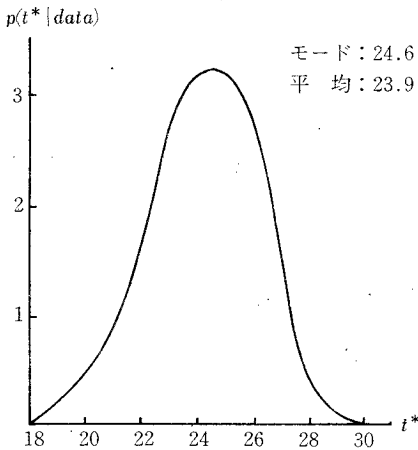


図 4.1 t^* の周辺事後分布
(出所: Tsurumi and Tsurumi (1983))

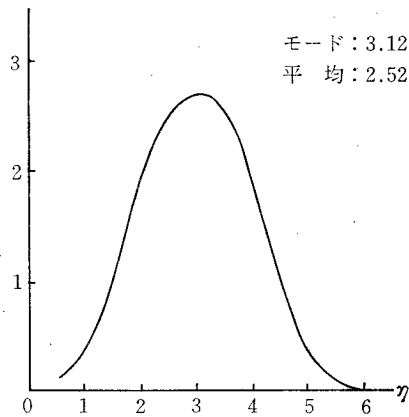


図 4.2 η の周辺事後分布
(出所: Tsurumi and Tsurumi (1983))

前には日本車への需要に影響を及ぼしていないと考えられるとして、 $\beta_4=0$ という仮定を置いている。

1971年第1四半期から1980年第4四半期までの四半期データを用いて漸進的変化モデルを推定した結果（各パラメータの事後平均と標準偏差）が表 4.1 に、また t^* および η の周辺事後分布が図 4.1 および図 4.2 に示されている。

図 4.1 および図 4.2 から、次のことが分かる。まず、構造変化は24番目の観測値（すなわち、1976年の第4四半期）の周辺で始まった。また、もし η の事後平均で調整の速度を計算すると、新しいレジームへの移行にはほぼ1年強を必要とした。ここで注意すべきことは、推移関数 $\text{trn}(s_t/\eta)$ の値は、 t が有限である限り完全に1に収束することはない、という点である。従って、第1レジームから第2レジームへの移行の期間については、推移関数がある程度1に接近したところで第2レジームへの移行がほぼ完了したと判断されている。このことは、第2レジームの出発点（あるいは移行期間の長さ）に対する明確な点推定値はこのモデルからは得られない、ということの意味している。例えば、推移関数として双曲線正接関数を用い、 η の事後平均 ($\hat{\eta}=2.52$) で調整速度

(すなわち、推移関数の値)を計算すると、

s_t	1	2	3	4	5
$\text{trn}(s_t/\eta)$	0.377	0.660	0.831	0.920	0.963

という値が得られる。従って、新しいレジームへの移行に1年強を要したという結論は、推移関数の値が $s_t=5$ のとき 0.95 を越えるので、調整期間は $s_t=4$ (1年) および $s_t=5$ (1年3カ月) の中間のいずれかであろう、という判断から出されているように思われる。

表 4.1 から、次のことが分かる。まず、合衆国における日本車の需要関数の価格に対する係数は、構造変化以前は $\beta_1 = -0.2112$ であるが、変化以後は $\beta_1 + \delta_1 = -0.0719$ となりその絶対値が減少している。このことは、構造変化の後では、日本車の価格が上がっても日本車への需要は変化以前ほどには減少しない、ということの意味している。また、構造変化以後のガソリン価格に対する係数は正であるので、ガソリン価格が上がると日本車の需要は増大することになる。

なお、本節で展開された漸進的スイッチング回帰モデルを、従属変数が多変量でかつ係数に確率的線形制約がある場合に拡張したものとして、Tsurumi, Wago and Ilmakunnas (1986) がある。

V 構造変化が漸進的な場合 (II)

前節では、構造変化が徐々に起こる場合を取り扱うことが出来る漸進的スイッチング回帰モデルを考察した。しかし、前節のモデルでは、構造変化の開始時点に対しては明確な点推定値が得られるが、構造変化の終了時点に対しては明確な点推定値が得られない、という欠点が存在していた。本節では、この欠点をカバーすることの出来る、代替的な漸進的スイッチング回帰モデルについて考察する。

次のスイッチング回帰モデルを考えよう：

$$y_t = x_t'(\beta + \lambda_t \delta) + u_t, \quad t=1, 2, \dots, T. \quad (5-1)$$

前節では、ダミー変数 λ_t に推移関数を導入することによって漸進的な構造変化がスイッチング回帰モデルのフレームワークの中で取り扱い得ることを示した。ここでは、係数の推移過程を時点 t の線形関数で近似して λ_t を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\lambda_t &= 0 \text{ for } t=1, 2, \dots, t^*-1, \\ \lambda_t &= (t-t^*)/(t_2^*-t_1^*) \text{ for } t=t^*, t_1^*+1, \dots, t_2^*, \\ \lambda_t &= 1 \text{ for } t=t_2^*+1, t_2^*+2, \dots, T.\end{aligned}\quad (5-2)$$

λ_t を(5-2)のように定式化すると、構造変化の開始時点（すなわち、第1レジームの終了時点）および変化の完了時点（すなわち、第2レジームの出発時点）は、それぞれ t^* および t_2^* によって表わされる。ここで、 t^* および t_2^* は前節とは異なり、整数値のみをとる変数として定義されている。また、 t^* および t_2^* に関して、 $k \leq t^* < t_2^* \leq T-k+1$ ，という仮定を置く⁷。

λ_t を(5-2)のように定式化すると、 t^* および t_2^* の明確な点推定値が得られる反面、非線形的に係数が変化する場合への推移関数の柔軟性は失なわれる。しかしながら、実際によく使用される推移関数（例えば、双曲線正接関数）の概形をプロットすると、それがかなりの程度で t の線形関数で近似出来ることが分かる。（例えば、Bacon and Wattz (1971, 図2) 参照）。従って、構造変化の推移過程を、(5-2)のように t の線形関数で近似することはある程度きつい仮定であるが、構造変化の開始時点と完了時点を明確に推定出来る漸進的スイッチング回帰モデルを構築する第1段階としては、許容出来ない程きつい仮定ではないと思われる。

(5-1)を行列表示で表わすと次のようになる：

$$y^* = X^* \gamma + u, \quad (5-3)$$

ただし、 y^* , X^* , γ および u は、(4-4)で定義されたそれらと形式的には同じ形をしている。(4-4)で定義された X^* との違いは、ここでは λ_t の定義の違いにより、 X^* が t^* および t_2^* に依存する、という点である。パラメータ

7 この仮定を置く意味は、本質的には、第2節の脚注(2)と同じである。

$(\gamma, \sigma, t_1^*, t_2^*)$ に関する事前情報がほとんど無いと仮定すると、これらのパラメータに対する非報知的事前分布は

$$p_0(\gamma, \sigma, t_1^*, t_2^*) \propto 1/\sigma$$

で表わされる。

モデル(5-3)に対する尤度関数は、 $u \sim N(0, \sigma^2 I_T)$ であるので、 X^* が t_1^* および t_2^* に依存するという点を除いて、形式的には(2-5)に対する尤度関数と同じ形をしている。また、パラメータ $(\gamma, \sigma, t_1^*, t_2^*)$ の事前分布も形式的には(2-6)と同じ形をしているので、2節と同様の方法に従うと、パラメータ (γ, t_1^*, t_2^*) の事後分布が得られる：

$$p(\gamma, t_1^*, t_2^* | \text{data}) \propto (s^{*2})^{-T/2} \times \left[\nu + (\gamma - \hat{\gamma}^*)' \left(\frac{X^{*'} X^*}{s^{*2}} \right) (\gamma - \hat{\gamma}^*) \right]^{- (\nu + 2k - k_0) / 2} \quad (5-4)$$

ここで、 s^{*2} および $\hat{\gamma}^*$ は、 t_1^* および t_2^* に依存するという点を除けば、形式的には(2-9)および(2-10)と同じ形をしており、 ν は(2-11)で与えられたものと同じである。また、 k_0 は2つのレジームを通じて不変である係数の個数を表わしている。 t_1^* および t_2^* が与えられたときの、 γ の条件付事後分布は多変量 t -分布であるので、 γ の第 i 要素 γ_i の条件付周辺事後分布は自由度 ν の t -分布であり、その密度関数は形式的には(2-12)と同じ形をしている。

(5-4)を γ に関して積分すると、 (t_1^*, t_2^*) の事後分布が得られる：

$$p(t_1^*, t_2^* | \text{data}) \propto (s^{*2})^{-1/2} |X^{*'} X^*|^{-1/2} \quad (5-5)$$

t_1^* および t_2^* の周辺事後分布を(5-5)から解析的に導出することは不可能であるように思われるので、 t_1^* および t_2^* の周辺事後分布は数値計算によって求めざるを得ない。すなわち、 t_1^* および t_2^* の周辺事後分布は、次の式の右辺に数値計算を施すことによって求められる：

$$p(t_1^* | \text{data}) = \sum_{t_2^*=t_1^*+1}^{T-k+1} p(t_1^*, t_2^* | \text{data}), \quad (5-6)$$

$$p(t_2^* | \text{data}) = \sum_{t_1^*=k}^{T-k} p(t_1^*, t_2^* | \text{data}). \quad (5-7)$$

(t_1^*, t_2^*) の事後分布(5-5)は数値的に求まるので, γ_i の周辺事後分布も

$$p(\gamma_i | \text{data}) = \sum_{t_1^*=k}^{T-k} \sum_{t_2^*=t_1^*+1}^{T-k+1} p(\gamma_i | t_1^*, t_2^*, \text{data}) p(t_1^*, t_2^* | \text{data}) \quad (5-8)$$

から数値的に計算可能である。

本節で展開された漸進的スイッチング回帰モデルの実証研究への応用例として, Ohtani and Katayama (1985) による日本におけるエネルギー需要関数の構造変化について述べる。エネルギーに対する需要 (E_i) が, エネルギー価格の一般物価水準に対する相対価格 (p_i) と GDP で測られた所得 (y_i) に依存すると仮定して, Ohtani and Katayama (1985) はエネルギー需要に対する漸進的スイッチング回帰モデルを次のように特定化した:

$$\begin{aligned} \log E_i = & (\beta_1 + \lambda_i \delta_1) + (\beta_2 + \lambda_i \delta_2) \log p_i \\ & + (\beta_3 + \lambda_i \delta_3) \log y_i + u_{i0}. \end{aligned} \quad (5-9)$$

ここで, λ_i は(5-2)で定義されたものと同じものであり, 各変数は対数によって測られているので, $\log p_i$ および $\log y_i$ に対する係数は, それぞれ, 価格および所得の弾力性を表わしている。予備的分析により, 価格弾力性は2つのレジームを通じて不変であったとして, Ohtani and Katayama (1985) は $\delta_2 = 0$ という仮定を置いている。

1969年第1四半期から1978年第4四半期までの, 季節調整済みの四半期データをを用いて漸進的変化モデルを推定した結果 (各パラメータの事後平均と標準偏差) が表 5.1 に, t_1^* および t_2^* の周辺事後分布が図 5.1 に示されている。

ベイズ推定値を事後平均とすると, 図 5.1 および表 5.1 から, 次のことが分かる。日本におけるエネルギー需要は, 19番目の観測値 (すなわち, 1973年の第1四半期) から構造変化が始まり, 26番

表 5.1 日本におけるエネルギー需要関数の推定結果

パラメータ	事後平均	事後標準偏差
t_1	19.00	3.26
t_2	26.20	2.13
β_1	-3.852	0.657
β_2	0.101	0.039
β_3	1.286	0.056
δ_1	8.733	1.647
δ_2	—	—
δ_3	-0.743	0.136

(出所: Ohtani and Katayama (1985))

目の観測値（すなわち、1975年の第2四半期）で変化が完了している。このことから、エネルギーに対する需要構造の変化の開始時点は第1次石油ショックが生じた時期にはば一致し、かつ第1次石油ショックに対する調整には1年半の期間を要した、ということが分かる。

表 4.1 から、価格弾力性の符号は正であり、このことは経済理論とは相容れないものであるが、その絶対値は極めて小さいことが分かる。エネルギーは必需品であるので、価格に対して非弾力的であ

り、その価格の弾力性の絶対値は小さな値となりやすい、ということが一般的に認められている。従って、ここで得られた価格弾力性の推定値は、符号は経済理論と相容れないものであるが、許容出来ない程不合理な値ではないと思われる。

また、第1レジーム（第1次石油ショック以前）での所得の弾力性は1よりも大きい。このことは、エネルギー需要は高度成長期にあたる第1レジームでは所得に対して弾力的であったことを意味する。しかし、第2レジーム（第1次石油ショック以後）では日本経済は安定成長となり、エネルギー需要に対する所得弾力性はそれ程弾力的ではなくなった。このことは、第2レジームにおける所得の弾力性が $0.543 (= \beta_3 + \delta_3)$ に減少していることから分かる。この所得弾力性の減少は、第1次石油ショック以前には日本の産業はエネルギー消費型であったが、それ以後はエネルギー節約型に徐々に転換し、またエネルギー

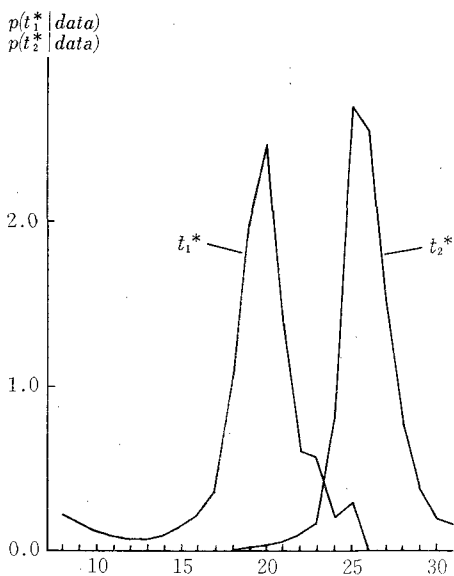


図 5.1 t_1^* および t_2^* の周辺事後分布
(出所: Ohtani and Katayama (1985))

消費型産業は次第にそのシェアを失っていった、ということによって説明できるかもしれない。

なお、本節で展開された漸進的スイッチング回帰モデルを輸出・入関数に応用した例として、Katayama, Ohtani and Toyoda (1987)がある。

VI 結 語

本稿では、スイッチング回帰モデルのベイズ推定について述べた。特に、誤差項に自己相関がある場合、あるいは構造変化が漸進的な場合にスイッチング回帰モデルがいかに拡張されるかについて考察した。

誤差項に自己相関があつて、かつ構造変化が漸進的である場合のスイッチング回帰モデルについては本稿では触れられなかった。Ohtani and Katayama (1986) は、このモデルに対する最尤推定法を導いているが、ベイズ推定法はまだ考察されていない。従つて、誤差項に自己相関がある場合の漸進的スイッチング回帰モデルのベイズ推定法を開発し、それを意味のある実証研究に応用することは残された課題である。

また、本稿では一貫して誤差項に関するパラメータ（誤差分散、自己相関係数等）は2つのレジームを通じて不変であると仮定されていた。しかし、係数が変化する場合には、誤差項のパラメータも変化する可能性がある。従つて、係数および誤差項のパラメータの両方が変化するスイッチング回帰モデル、特に漸進的スイッチング回帰モデルを開発することは一つの残された課題である。

最後に、第5節で示された漸進的スイッチング回帰モデルでは、係数の推移過程が時点 t の線形関数であると仮定されていた。Wilton (1975) は、この係数の推移過程を時点 t の多項式で近似することを提唱しているが、そのベイズ推定については触れていない。Wilton (1975) の方法を用いると、係数の推移過程が非線形的である場合も取り扱うことが出来、かつ構造変化の完了時点の明確な点推定値を得ることも出来るので、そのベイズ推定法を開発することも残された課題であると言える。

参 考 文 献

- Bacon, D. W. and D. G. Watts (1971). "Estimating the Transition between Two Intersecting Straight Lines," *Biometrika* 58, 525-534.
- Broemeling, L. D. (1974). "Bayesian Inferences About a Changing Sequence of Random Variables," *Communications in Statistics* 3, 243-255.
- Broemeling, L. D. and J. H. Chin Choy (1981), "Detecting Structural Change in Linear Models," *Communications in Statistics-Theory and Methods* A10, 2551-2561.
- Chin Choy, J. H. and L. D. Broemeling (1980). "Some Bayesian Inferences for a Changing Linear Model," *Technometrics* 22, 71-78.
- Chow, G. C. (1960). "Tests of Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions," *Econometrica* 28, 591-605.
- Ferreira, P. E. (1975). "A Bayesian Analysis of a Switching Regression Model: Known Number of Regimes" *Journal of the American Statistical Association* 708, 370-374.
- Fomby, T. B. and D. K. Guilkey (1978). "On Choosing the Optimal Level of Significance for the Durbin-Watson Test and the Bayesian Alternative," *Journal of Econometrics* 8, 203-213.
- Hsu, D. A. (1982). "A Bayesian Robust Detection of Shift in the Risk Structure of Stock Market Returns," *Journal of the American Statistical Association* 77, 29-39.
- Ilmakunnas, P. and H. Tsurumi (1984). "Testing for Parameter Shifts in a Regression Model with Two Regimes of Autocorrelated Errors," 『季刊理論経済学』 35, 46-56.
- Ilmakunnas, P. and H. Tsurumi (1985). "Testing the Lucas Hypothesis on Output-Inflation Trade-offs," *Journal of Business and Economic Statistics* 3, 43-53.
- Katayama, S., K. Ohtani and T. Toyoda (1987). "Estimation of Structural Change in the Import and Export Equations: An International Comparison," 『季刊理論経済学』 38, 148-158.
- Land, M. and L. Broemeling (1983). "Bayesian Forecasting with Changing Linear Models," *Communications in Statistics-Theory and Methods* 12, 1421-1430.
- Lee, A. F. S. and S. M. Heghinian (1977). "A Shift of the Mean Level in a Sequence of Independent Normal Random Variables-A Bayesian Approach," *Technometrics* 19, 503-506.
- Menzeffricke, U. (1981). "A Bayesian Analysis of a Change in the Precision of a Sequence of Independent Normal Random Variables at an Unknown

- Time Point," *Applied Statistics* 30, 141-146.
- Moen, D. H. and L. D. Broemeling (1985). "The Uncertainty of Forecasting Models with Structural Change Versus Those without Changing Parameters," *Communications in Statistics-Theory and Methods* 14, 2029-2040.
- Moen, D. H., D. Salazar and L. D. Broemeling (1985). "Structural Change in Multivariate Regression Models," *Communications in Statistics-Theory and Methods* 14, 1757-1768.
- 森棟公夫 (1983). 「構造変化の推定と検定」『日本経済の構造分析』(創文社), 45-62.
- 大谷一博 (1981). 「Switching Regression モデルにおける変化時点のベイズ推定」『商大論集』(神戸商科大学) 33, 173-185.
- Ohtani, K. (1982). "Bayesian Estimation of the Switching Regression Model with Autocorrelated Errors," *Journal of Econometrics* 18, 251-261.
- Ohtani, K. and S. Katayama (1985). "An Alternative Gradual Switching Regression Model and Its Application," 『季刊理論経済学』 36, 148-153.
- Ohtani, K. and S. Katayama (1986). "A Gradual Switching Regression Model with Autocorrelated Errors," *Economics Letters* 21, 169-172.
- Poirier, D. J. (1976). *The Econometrics of Structural Change*, North-Holland: Amsterdam.
- Quandt, R. E. (1958). "The Estimation of the Parameters of a Linear Regression System Obeying Two Separate Regimes," *Journal of the American Statistical Association* 53, 873-880.
- Quandt, R. E. (1960). "Tests of the Hypothesis That a Linear Regression System Obeys Two Separate Regimes," *Journal of the American Statistical Association* 55, 324-330.
- Salazar, D., L. Broemeling and A. Chi (1981). "Parameter Changes in a Regression Model with Autocorrelated Errors," *Communications in Statistics-Theory and Methods* A10, 1751-1758.
- Smith, A. F. M. (1975). "A Bayesian Approach to Inference about a Change-Point in a Sequence of Random Variables," *Biometrika* 62, 407-416.
- Smith, A. F. M. (1977). "A Bayesian Analysis of Some Time-Varying Models," *Recent Developments in Statistics*, eds. J. R. Barra et al., North-Holland: Amsterdam, 257-267.
- Smith, A. F. M. and D. G. Cook (1980). "Straight Lines with a Change-Point: A Bayesian Analysis of some Renal Transplant Data," *Applied Statistics* 29, 180-189.
- 豊田利久「構造変化の推定モデル：展望」『神戸大学経済学研究年報』 24, 83-117.
- Tsurumi, H. (1980). "A Bayesian Estimation of Structural Shifts by Gradual

- Switching Regressions with an Application to the US Gasoline Market," *Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics*, ed. A. Zellner, North-Holland: Amsterdam, 213-240.
- Tsurumi, H. (1982). "A Bayesian and Maximum Likelihood Analysis of a Gradual Switching Regression in a Simultaneous Equation Framework," *Journal of Econometrics* 19, 165-182.
- Tsurumi, H. (1983). "A Bayesian and Maximum Likelihood Analysis of a Gradual Switching Regression Model with Sampling Experiments," 『季刊理論経済学』 34, 237-247.
- Tsurumi, H. and Y. Tsurumi (1980). "A Bayesian Test of the Product Life Cycle of the Japanese Automobile Industry," 『季刊理論経済学』 31, 193-206.
- Tsurumi, H. and Y. Tsurumi (1980). "A Bayesian Test of the Product Life Cycle Hypothesis as Applied to the U. S. Demand for Color-TV Sets," *International Economic Review* 21, 583-597.
- Tsurumi, H. and Y. Tsurumi (1983). "U. S.-Japan Automobile Trade: A Bayesian Test of a Product Life Cycle," *Journal of Econometrics* 23, 193-210.
- Tsurumi, H., H. Wago and P. Ilmakunnas (1986). "Gradual Switching Multivariate Regression Models with Stochastic Cross-Section Constraints and an Application to the KLEM Translog Production Model," *Journal of Econometrics* 31, 235-253.
- Wilton, D. A. (1975). "Structural Shift with an Instrumental Transition Function," *Canadian Journal of Economics* 8, 423-432.
- Zellner, A. (1971). *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, Wiley and Sons: New York.
- Zellner, A. and G. C. Tiao (1964). "Bayesian Analysis of the Regression Model with Autocorrelated Errors," *Journal of the American Statistical Association* 59, 763-778.