Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-06-05

利子率の期間構造に関する純粋期待仮説の検定 : 改善されたスポット・レート推計値を用いて(斎藤光雄博士記念号)

釜江, 広志

(Citation)
国民経済雑誌,162(4):21-32

(Issue Date)
1990-10

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00174675

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00174675

利子率の期間構造に関する純粋期待仮説の検定

——改善されたスポット・レート推計値を用いて——

釜　江　廣　志

I はじめに

拙稿（1989）では，現物国債の将来価格と所有期間利回りの期待値の算出法と，所有期間利回りの期待形成が合理的期待形成仮説の不偏性の条件を満たしてなされていることが示され，さらに割引債のタームで定式化された利子率の期間構造に関する純粋期待仮説がテストされた。残存期間の長い割引債データの利用可能性は限られているので，利付債データを使う推計によって得られた割引債の最終利回り（即ち，スポット・レート）が長期利子率データとして用いられた。しかしこの推計法の一部を改善すると，より適切な推計値が得られる。本稿ではこのようにして得られる新たな推計値を用いて再テストがなされる。Ⅱ節では純粋期待仮説の定式化とその検定の方法が説明される。Ⅲ節でスポット・レートの推計の方法を中心にデータが説明される。Ⅳ節では，得られたスポット・レートを用いて純粋期待仮説の検定が行なわれる。Ⅴ節では，結論と残された問題が述べられる。

II 純粋期待仮説の定式化とその検定

期 t の期末における残存 i 期の割引債の，最終利回りと1期間の所有期間利回りの線形近似（ともに1期当り，年利表示）とがそれぞれ，$R_t^{(i)}$，$h_t^{(i,1)}$ と書かれる。所有期間利回りを用いると，純粋期待仮説の関係（拙稿（1989）の式

(8)) は

(1)　$E_t(h_t^{(i,1)})=R_t^{(1)}$

と表わされる。

拙稿 (1989) の第2節で得られた結果，即ち，国債のうち最割安銘柄の所有期間利回りに関する期待形成は合理的期待形成仮説の不偏性の条件を満たすこと，が敷衍され，現物国債の全ての銘柄の，1期間の所有期間利回りに関する期待形成が不偏性の条件を満たすと仮定されると，

(2)　$E_t(h_t^{(i,1)})=h_t^{(i,1)}+v_{t+1}$

である。この式を使えば式(1)は

(3)　$h_t^{(i,1)}+v_{t+1}=R_t^{(1)}$

となる。ところで，割引債の所有期間利回りは最終利回りとの間に

$$h_t^{(i,1)}=i\cdot R_t^{(i)}-(i-1)R_{t+1}^{(i-1)}$$

なる関係 (拙稿 (1988) の式(17)) を持つから，これを用いて上式を変形すると，結局

(4)　$R_t^{(i)}=\left(1-\frac{1}{i}\right)R_{t+1}^{(i-1)}+\frac{1}{i}R_t^{(1)}+w_{t+1}$

が得られる[1]。この式は計測のために

(5)　$R_t^{(i)}=a+b\cdot R_{t+1}^{(i-1)}+c\cdot R_t^{(1)}+w_{t+1}$

と表わされる。この式を計測し，得られる係数推定値が

(6)　$\begin{cases} a=0 \\ b=1-\frac{1}{i} \\ c=\frac{1}{i} \end{cases}$

1　デュアレーション (D_t) を用いると，利付債の場合も同様の変形ができるが，係数は D_t の関数となる。ところで，拙稿 (1988) の式(7)に示されているように，D_t は残存期間，クーポン，割引要素の関数で，割引要素は最終利回りを用いて表わされる。仮に，残存期間とクーポンが一定であっても，最終利回りは期毎に価格とともに変化するから，D_t はオーバー・タイムに一定ではない。従って回帰係数も一定ではなく，回帰分析は容易ではない。

を満足すれば，純粋期待仮説が成立する。

計測の単位期間は6カ月であり，データは月次で採集される。この場合，誤差項は5次の移動平均に従うので，定数項と各説明変数のそれぞれの推定値の標準誤差の計測には修正 OLS が用いられる。また，式(6)の係数推定値についての仮説はカイ2乗検定により一括してテストすることもできる[2]。

III データ

III—1 短期利子率

3か月物現先レート（期末における平均，年当り，年利表示）を $R^{(0.5)}$ と書く時

$$1+R^{(1)}=(1+R^{(0.5)}/4)^2$$

なる関係から推計される6か月レート（1期，即ち6か月当りで表示）が短期利子率として用いられ，$R^{(1)}$ と書かれる。

III—2 長期利子率（スポット・レート）の推計法

割引国債は現存するが，そのデータのサンプルは多くなく，残存期間も限られている。そこで本稿では，利付国債のデータを利用して割引債（つまりクーポンがゼロの債券）の利回り，即ちスポット・レートが推計される。割引債利回りの推計法としては，割引要素がスプライン関数に従うと仮定する McCulloch (1975) の方法など，いくつかのものがある。本稿では，しばしば用いられている McCulloch 法を簡略化した Thies (1985) の方法が修正して用いられる。McCulloch (1975) と Thies (1985) においては，クーポンが連続的に支払われると想定されているが，実際の支払いは離散的である。以下では，クーポンが離散的に支払われているとの想定が設けられる。またその場合，Thies (1985) で明示的には考慮されていない経過利子を考慮に入れる必要がある。

わが国の利付国債はそのクーポンの支払いが半年毎に行われる。利付債の年

2 修正 OLS とカイ2乗検定は Hansen and Hodrick (1980), Jones and Roley (1983) 参照。

当りのクーポンを C，計測がなされる時点での残存期間を M 年とする。なお本稿では，計測の単位期間，即ち1期は利払いの期間である6か月とされる。N を $2M$ の小数点以下を切り捨てた整数部分とすると，残存 M 年の債券の利払いは，計測時点から $(M-N/2)$ 年後，$(M-N/2+1/2)$ 年後，・・・，$(M-1/2)$ 年後，M年後になされる。経過利子を考慮すると，最初の利子は $C/2$ ではなく $(2M-N)\cdot(C/2)$ である。[3] この債券の価格は

$$
\begin{aligned}
(7)\quad P &= (2M-N)(C/2)\cdot\delta(2M-N) \\
&\quad +(C/2)\cdot\delta(2M-N+1)+\cdots \\
&\quad +(C/2)\cdot\delta(2M-1)+(C/2+100)\cdot\delta(2M) \\
&= (2M-N)(C/2)\cdot\delta(2M-N) \\
&\quad +(C/2)\sum_{r=1}^{N}\delta(2M-N+r)+100\cdot\delta(2M)
\end{aligned}
$$

に等しい。ここに $\delta(s)$ は s・利払い期間の割引要素であり，期 t における s・利払い期間のスポット・レートを R^*_{st} として一般的に $1/(1+R^*_{st})^s$ と表わされる。以下ではクロス・セクション回帰がなされるので t は略記される。割引要素は次のように s の3次のスプライン関数で近似できると仮定される。

$$
\begin{aligned}
(8)\quad \delta(s) &= d_0+d_1\cdot s+d_2\cdot s^2+d_3\cdot s^3 \\
&\quad +d_4\cdot z_1^3+d_5\cdot z_2^3+d_6\cdot z_3^3,
\end{aligned}
$$

ここに

$$
z_i=\begin{cases} s-k_i & (\text{if } s-k_i>0) \\ 0 & (\text{it } s-k_i\leqq 0)\end{cases}
$$

である。k_i はスプライン関数の節 (knot) 点で，以下ではア・プリオリに $k_1=2$，$k_2=4$，$k_3=8$（単位は利払い期）であるとされる。割引要素を式(7)に代入して整理すると

$$
(9)\quad P=d_0[(C/2)(2M-N)+C\cdot N/2+100]
$$

3　拙稿 (1989) では経過利子が考慮されていない。従って，利付債として残存年が10年未満のものだけが対象とされ，かつ残存期数が整数に等しい債券は，それを購入すれば直ちにクーポン支払いがなされると仮定されている。

$$
\begin{aligned}
&+d_1\{(C/2)(2M-N)^2+(C\cdot N/2)[(2M-N)\\
&+(N+1)/2)]+200M\}\\
&+d_2\{(C/2)(2M-N)^3+(C\cdot N/2)[(2M-N)^2\\
&+(N+1)(2M-N)+(N+1)(2N+1)/6]+400M^2\}\\
&+d_3\{(C/2)(2M-N)^4+(C\cdot N/2)[(2M-N)^3\\
&+3(N+1)(2M-N)^2/2+(N+1)(2N+1)\\
&\times(2M-N)/2+N(N+1)^2/4]+800M^3\}\\
&+d_4\{(C/2)(2M-N)(2Z_1-N)^3+(C\cdot N/2)\\
&\times[(2Z_1-N)^3+3(N+1)(2Z_1-N)^2/2+(N+1)\\
&\times(2N+1)(2M-N)/2+N(N+1)^2/4]+800M^3\}\\
&+d_5\{(C/2)(2M-N)(2Z_2-N)^3+(C\cdot N/2)\\
&\times[(2Z_2-N)^3+3(N+1)(2Z_2-N)^2/2+(N+1)\\
&\times(2N+1)(2M-N)/2+N(N+1)^2/4]+800M^3\}\\
&+d_6\{(C/2)(2M-N)(2Z_3-N)^3+(C\cdot N/2)\\
&\times[(2Z_3-N)^3+3(N+1)(2Z_3-N)^2/2+(N+1)\\
&\times(2N+1)(2M-N)/2+N(N+1)^2/4]+800M^3\}
\end{aligned}
$$

が得られる。ここに

$$
Z_i=\begin{cases} M-k_i/2 & (M-k_i/2>0)\\ 0 & (M-k_i/2\leqq 0)\end{cases}
$$

であり，$k_i/2$ の単位は年である。上式を月毎にクロス・セクション回帰すると各月の d_0 などの係数推定値が得られる。

特定の C, M に対応する債券の各月の価格 P の推計値は，式(9)に係数推定値とこれらの C, M を代入すると得られ，さらに P を次の式に代入して解くと，特定のクーポンと残存期間を持つ債券の各月の1期当り最終利回り R（年利表示）が計算できる。

$$
(10)\quad P=\sum_{s=2M-N}^{2M}(C/2)/(1+R)^s+100/(1+R)^{2M}.
$$

M年，つまり$2M$期の残存期間を持つ割引債の年利表示の1期当り最終利回り（即ち，スポット・レート）が$R^{(2M)}$と表わされると，割引債のクーポンはゼロであるから，上式は

(11)　$P=100/(1+R^{(2M)})^{2M}$

となる。

利付債のサンプルは東証に上場の長期国債で，価格は小口売買取引の月末値である。クーポン・レートと残存期間がともに等しい銘柄が複数個あれば，残存額の多い方が採用される。データは，国債先物の取引開始後の1985年10月から88年9月までの期間の各月末値が採集される。推計される割引債は残存期間が3期（1.5年）から20期（10年）までの10種類のそれで，利回りデータは36か月分得られる。残存j年の割引債の1年当りの最終利回り（年利表示）はR0j と書かれる。j=10, 09.5, 08, 07.5, 06, 05.5, 04, 03.5, 02, 01.5 についての推計結果は後掲の付表の通りである。

ところで，割引要素を，それが特定の関数に従うとの仮定を置かないで，直接計算する方法もあり，Carlton and Cooper (1976) などで試みられている。小峰他（1989）のいわゆる逐次代入方式もその1つである。後者では，本稿の式(7)と同様の式と満期日が6か月間隔の利付債のデータとを用いて，まず，最短の残存期間の利付債データからその期間に対応する割引要素が計算され，次に，得られた割引要素と残存期間が2番目に短い利付債データとからその期間に対応する割引要素が求められる。以下同様にして全ての期間に対応する割引要素が得られ，これらと本稿の式(11)とからスポット・レートの現実の値が計算される。この方法によれば，スポット・レート，即ちある残存期間を持つ割引債の利回りの現実値は，同じ残存期間の利付債が存在すれば計算可能であるが，利付債が存在しない残存期間については，計算不可能である。小峰他（1989）では6か月間隔の利付債データのみが採用されて計算がなされ，それ以外の期間については，スポット・レースが期間に関する3次関数であると仮定した上で推計が行なわれている。[4]

III—3　スポット・レートの推計結果

次に，本稿の方法を用いて得られるスポット・レートの推計値が，小峰他（1989）で計算されている4時点の現実値と比べられる。本稿で推計がなされる残存年に近い残存年をもつ国債の利回り，即ちスポット・レートの推計値と現実値は次のとおりである（1年当り，年利，単位%）。第Ⅳ節での計測に用いる残存約3.5年以上に関しては，両者の違いは大きくない。[5]

（a）　86年12月

残存年	1.649	2.151	3.647	4.151	5.562	6.066	7.562	8.066	9.567
推計値	4.850	4.626	4.508	4.541	4.707	4.781	5.026	5.113	5.377
現実値	4.471	4.484	4.556	4.653	4.796	4.921	5.082	5.225	5.554

（b）　87年6月

残存年	1.644	2.142	3.644	4.140	5.559	6.055	7.559	8.055	9.559
推計値	2.521	3.225	3.978	4.061	4.170	4.196	4.312	4.374	4.684
現実値	3.730	3.766	3.915	3.997	4.189	4.211	4.324	4.356	4.820

（c）　87年12月

残存年	1.647	2.148	3.644	4.148	5.559	6.063	7.559	8.063
推計値	2.082	3.162	4.289	4.407	4.540	4.567	4.712	4.802
現実値	3.925	3.956	4.188	4.237	4.426	4.516	4.598	4.695

（d）88年6月

残存年	1.644	2.140	3.644	4.055	5.559	6.055	7.559	8.060
推計値	2.423	3.458	4.456	4.523	4.595	4.615	4.813	4.950
現実値	4.204	4.264	4.367	4.379	4.475	4.516	4.756	5.100

4　スポット・レートが期間に関する特定の関数であることの根拠はなく，従って「恣意的な仮定を排除」しているとは言えない。なお，スポット・レートのデータからスポット・レート曲線を導出する試みとして，Nelson and Siegel (1987) などがある。

5　スプライン関数を用いるスポット・レート推定が不適切であると指摘する論者もいる（小峰他（1989）参照）。確かに残存期間が非常に短い場合と非常に長い場合，即ち両端では推定値は適切とは言えないかもしれない（Nelson and Siegel (1987) p. 474 参照）が，本稿や小峰他（1989）の図6に示されるように，中間部分ではそうではない（Melino (1988) p. 359 注1参照）。

これらから，本稿の推計値は現実値の変動をよくフォローしていると言えよう。

IV 計測結果

式(5)の推定結果は表1の通りである。残存期間が4期（2年）から20期（10年）までの5種類の割引債に関するテストのうち，説明変数の係数推定値は，個別に見れば，式(6)で示される値と有意に異なる。また，定数項と各係数のそれぞれの推定値を一括してテストすると，全てのケースにおいて得られるカイ2乗値はカイ2乗分布表からの臨界値 $\chi^2_{0.05}(3)=7.81$ よりも大きく，これらの推定値が式(6)で示される値に等しいとの仮説は否定される。このように，個別にテストしても一括してテストしても，式(6)は否定され，純粋期待仮説は成立しない。

表1　純粋期待仮説の計測結果

残存期数	定数項	$R_{t+1}^{(t-1)}$	$R_t^{(1)}$	SE	$\bar{R}^2$	χ^2
4	−0.6423** (0.3769)	−0.004205* (0.09388)	1.228* (0.1855)	0.3711	0.7585	81.23#
8	1.827* (0.4464)	−0.4767* (0.2333)	0.6767* (0.09694)	0.1942	0.7392	59.77#
12	2.157* (0.4717)	−0.4975* (0.2444)	0.6302* (0.1044)	0.2207	0.6518	63.52#
16	2.389* (0.4808)	−0.4675* (0.2411)	0.5701* (0.1003)	0.2171	0.6175	77.90#
20	2.824* (0.6338)	−0.2783* (0.2248)	0.2508* (0.09766)	0.2167	0.3018	36.26#

注：この表は式(5)の計測結果を示す。サンプル数は30，被説明変数は残存4期（2年）から20期（10年）までの割引債の利回り $R_t^{(1)}$ であり，定数項と各係数の推定値の下の（　）内は修正OLSにより得られるそれらの推定値の標準誤差である。定数項と各係数推定値につけた*と**は，それらの推定値が式(6)に示される値とそれぞれ5％，10％水準で有意に異なることを意味する。また，カイ2乗値につけた#は，定数項と各係数のそれぞれの推定値が式(6)で示される値に等しいとの仮説が5％水準で棄却されることを意味する。

V 結論と残された問題

本稿では，割引債の利回り，即ちスポット・レートが新たな方法で推計され，得られた推計値が現実の値に近いことが示された。さらに，推計値を用いて利

子率の期間構造に関する純粋期待仮説の単独のテストがなされた。残存期間が2年から10年までの割引債の利回りを使うと，この仮説は棄却されることが示された。

残された問題は次の通りである。スポット・レートの推計についてはさらに改善の余地があろう。利子率の期間構造を純粋期待仮説で説明できないことは，リスク・プレミアが存在することを含意しているのであり，プレミアムについての理論的・実証的分析がなされなければならない。

参　考　文　献

Carlton, W. T. and I. Cooper (1976), "Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, Sept.

Hansen, L. and R. Hodrick (1980), "Forward Exchange Rates as Optimal Predictors of Future Spot Rates," *Journal of Political Economy*, Oct.

Jones, D. and V. V. Roley (1983), "Rational Expectations and the Expectations Model of the Term Structure," *Journal of Monetary Economics*, Sept.

釜江廣志（1988）「国債利回りの期間構造——予備的分析——」『一橋論叢』2月。

釜江廣志（1989）「期待形成と期間構造の純粋期待仮説」『一橋大学研究年報　商学研究』3月。

小峰みどり，山岸正明，松本和幸，二木高志，司淳，長尾知幸，砂川和彦，佐野尚史（1989）「わが国債券市場固有の現象と期間構造分析」『フィナンシャル・レビュー』（大蔵省）10月。

McCulloch, J. H. (1975), "The Tax-Adjusted Yield Curve," *Journal of Finance*, Jan.

Melino, A. (1988), "The Term Structure of Interest Rates: Evidence and Theory," *Journal of Economic Survey*, No. 4.

Nelson, C. R. and A. F. Siegel (1987), "Parsimonious Modelling of Yield Curves," *Journal of Business*, Oct.

Thies, C. F. (1985), "New Estimates of the Term Structure of Interest Rates: 1920–1939," *Journal of Financial Research*, Winter.

*　拙稿を感謝をこめて斎藤光雄先生に捧げたい。本稿は1989年度簡易保険郵便年金文化財団の研究助成に基づく研究の一部である。計測は一橋大学情報処理センターを利用して行った。村本孜教授（成城大学）から御教示をいたた

き，山岸正明氏（大蔵省）にはデータを提供していただいた。記して御礼申し上げる。

付表　割引債の利回り（推計値）（1）

年　月	R010	R009.5	R008	R007.5	R006
1985:10	6.41460	6.50008	6.70474	6.75531	6.85072
1985:11	6.13573	6.23159	6.30716	6.27978	6.13024
1985:12	5.63481	5.77036	5.97114	5.98145	5.90639
1986: 1	5.88420	5.91929	5.96896	5.97052	5.94700
1986: 2	5.40779	5.47098	5.47375	5.42685	5.21386
1986: 3	4.98610	5.04852	5.05889	5.01583	4.80931
1986: 4	5.09795	5.16730	5.21209	5.18157	4.99707
1986: 5	5.22751	5.44754	5.73902	5.73020	5.48702
1986: 6	5.07608	5.24544	5.48739	5.49096	5.33665
1986: 7	5.42555	5.43729	5.44895	5.44337	5.38710
1986: 8	5.32963	5.27908	5.16887	5.14182	5.06957
1986: 9	5.71231	5.67356	5.50762	5.43969	5.21453
1986:10	5.71368	5.65514	5.39740	5.29267	4.95984
1986:11	5.53414	5.46814	5.21752	5.12274	4.83368
1986:12	5.45334	5.36563	5.10189	5.01560	4.77129
1987: 1	5.20944	5.15630	4.92675	4.83271	4.52331
1987: 2	5.39472	5.08461	4.51884	4.42125	4.29648
1987: 3	4.84512	4.66024	4.23239	4.12399	3.87349
1987: 4	4.14673	4.00419	3.77958	3.75731	3.78175
1987: 5	3.97629	3.86163	3.64197	3.60265	3.55478
1987: 6	4.81832	4.66805	4.36672	4.30519	4.19311
1987: 7	5.23793	5.20879	5.03162	4.94892	4.65636
1987: 8	4.98190	5.12951	5.27934	5.24329	4.93915
1987: 9	6.33266	6.27183	6.16742	6.14599	6.05823
1987:10	5.53923	5.39461	5.16844	5.14435	5.14926
1987:11	5.44761	5.33354	5.06061	4.98639	4.78564
1987:12	5.48487	5.24591	4.78960	4.70321	4.56376
1988: 1	5.26164	5.02969	4.59057	4.50981	4.39148
1988: 2	5.32498	5.06880	4.57653	4.48281	4.33604
1988: 3	5.40735	5.09637	4.49049	4.37123	4.17488
1988: 4	5.57136	5.18401	4.42912	4.27947	4.03575
1988: 5	5.83190	5.44292	4.69689	4.55345	4.33515
1988: 6	6.01321	5.63738	4.93092	4.80004	4.61217
1988: 7	6.15938	5.72228	4.87643	4.71034	4.45223
1988: 8	6.19219	5.87182	5.13149	4.94588	4.54828
1988: 9	5.69138	5.49044	4.90378	4.72114	4.25497

割引債利回り（推計値）（2）

年　月	R005.5	R004	R003.5	R002	R001.5
1985:10	6.86198	6.81563	6.76299	6.35339	6.00836
1985:11	6.08468	6.13560	6.29444	8.16528	10.10847
1985:12	5.86488	5.80655	5.85850	6.80401	7.87972
1986: 1	5.93460	5.91396	5.92553	6.16413	6.43780
1986: 2	5.13971	5.04370	5.11523	6.38716	7.82027
1986: 3	4.73312	4.60179	4.64404	5.67811	6.89457
1986: 4	4.91659	4.68823	4.64528	4.94522	5.47025
1986: 5	5.36291	5.02620	4.99214	5.88920	7.18824
1986: 6	5.24932	4.98789	4.94397	5.42531	6.20430
1986: 7	5.35058	5.14908	5.03149	4.27845	3.67724
1986: 8	5.04202	4.90342	4.81747	4.18837	3.63973
1986: 9	5.13677	4.92191	4.86775	4.88944	5.07091
1986:10	4.85358	4.62181	4.60736	5.16731	5.91853
1986:11	4.74452	4.55993	4.55502	5.06759	5.72711
1986:12	4.69806	4.52915	4.50274	4.67572	4.95962
1987: 1	4.41809	4.14096	4.08152	4.24399	4.62206
1987: 2	4.28335	4.15095	3.99692	2.31052	0.60300
1987: 3	3.80834	3.63154	3.56406	3.17144	2.83968
1987: 4	3.79936	3.73211	3.60142	2.09491	0.56409
1987: 5	3.55297	3.52814	3.48554	2.93112	2.33182
1987: 6	4.16731	4.04135	3.94593	3.06723	2.21351
1987: 7	4.55098	4.25231	4.17593	4.21907	4.49876
1987: 8	4.78857	4.26709	4.09664	3.86820	4.11438
1987: 9	6.00033	5.59212	5.30894	3.20125	1.38850
1987:10	5.15359	5.01860	4.85452	3.20694	1.60921
1987:11	4.71942	4.44986	4.31252	3.43283	2.70804
1987:12	4.53645	4.37879	4.24229	2.91050	1.60149
1988: 1	4.37386	4.26115	4.14844	2.95489	1.74816
1988: 2	4.31197	4.18790	4.07384	2.88222	1.67735
1988: 3	4.14199	4.01026	3.89861	2.71692	1.50732
1988: 4	4.00049	3.90219	3.81660	2.78002	1.66202
1988: 5	4.31020	4.24749	4.17557	3.19384	2.10757
1988: 6	4.59275	4.51602	4.42155	3.23219	1.95953
1988: 7	4.42506	4.40986	4.38320	3.76457	2.99263
1988: 8	4.46892	4.42597	4.50128	5.33773	6.12712
1988: 9	4.14337	4.07940	4.22111	6.08274	8.03269