誤差項に自己相関があるスイッチング回帰モデル : 自己相関係数が変化する場合(斎藤光雄博士記念号)

大谷, 一博

(Citation)
国民経済雑誌,162(4):99-109

(Issue Date)
1990-10

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00174679

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00174679

誤差項に自己相関がある スイッチング回帰モデル

——自己相関係数が変化する場合——

大　谷　一　博

I 序

消費関数や輸出・入関数のような経済関係式が回帰モデルによって定式化されているとき，この回帰モデルのパラメータ値の変化を計量経済学では構造変化という。構造変化時点が未知のとき，線形回帰モデルの構造変化時点を推定するためのいくつかの手法およびモデルが提唱されてきた。その代表的なものは，Brown, Durbin and Evans (1975) によって提唱された累積（自乗和）検定 (cumulative sum (of squares) test) に基づく推定法，および Quandt (1958) によって提唱されたスイッチング回帰モデル (switching regression model) に基づく推定法である。これらの推定法を応用した研究としては，たとえば，Khan (1974), Stern, Baum and Greene (1979), Boughton (1981) および Volker (1982) などがある。

累積（自乗）和検定およびスイッチング回帰モデルに基づく構造変化時点の推定法は，元来は誤差項が互いに独立であるという仮定のもとで導出されたものである。従って，誤差項に自己相関が認められるときには，必ずしも効果的な推定法であるとはいえない。

線形回帰分析において経済時系列データが使用されるときには，誤差項の自己相関がしばしば問題となる。このことから，誤差項の自己相関を明示的に考慮したいくつかのタイプのスイッチング回帰モデルが，たとえば，Smith

(1977), Ohtani (1982), Salazar, Broemeling and Chi (1982), Ilmakunnas and Tsurumi (1984, 1985) および Ohtani and Katayama (1986) らによって提唱されてきた。しかし Ilmakunnas and Tsurumi (1984, 1985) を除いて，これらの研究においては誤差項の自己相関係数は時点を通じて一定であると仮定されている。

Ilmakunnas and Tsurumi (1984, 1985) は自己相関係数も変化するスイッチング回帰モデルを扱っているが，Ilmakunnas and Tsurumi (1984) では構造変化時点が既知であると仮定されている。また Ilmakunnas and Tsurumi (1985) は，まず誤差項の自己相関を無視して構造変化時点の推定を行い，次に推定された変化時点を所与として変化時点以外のパラメータ（自己相関係数およびその他のパラメータ）の推定を行っている。(Ilmakunnas and Tsurumi (1985, p. 48) 参照。) 従って，Ilmakunnas and Tsurumi (1985) の推定は2段階の推定である。しかも，推定の第1段階では自己相関が無いものと仮定し，第2段階では自己相関が有り得ると仮定しているので; 各段階での推定モデルは必ずしも整合的であるとはいえない。

本稿では，自己相関係数も変化し得るスイッチング回帰モデルを考え，構造変化時点と自己相関係数の変化を同時に推定するための最尤推定法を示す。Ilmakunnas and Tsurumi (1984) は，変化時点を所与としたときの自己相関係数の変化に対するベイズ検定を示した。しかし，標本理論に基づく検定はこれまで明示的には示されていない。本稿では，構造変化時点と自己相関係数の変化の同時推定法の副産物として，変化時点を所与したときの自己相関係数の変化に対する尤度比検定が得られることを示す。本稿で示された推定法の応用例として，第2次石油危機前後での日本と米国の（集計的）輸入需要関数の構造変化について検討する。

II モデルおよび推定法

次の1階の自己回帰過程に従う誤差項をもつスイッチング回帰モデルを考え

よう：

$$y_t = x_t'(\beta+\lambda_t)\delta + u_t$$
$$= x_t'\beta + (\lambda_t x_t')\delta + u_t, \qquad (1)$$
$$u_t = (\rho+\lambda_t\theta)u_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad t=2, \cdots, T, \qquad (2)$$
$$u_1 = \varepsilon_1, \qquad (2)'$$

ただし，y_t は従属変数の第 t 観測値，x_t' は独立変数の第 t 観測値の $1\times k$ ベクトル，β および δ は $k\times 1$ ベクトルである。また，λ_t は次のように定義される：

$$\left.\begin{aligned} \lambda_t &= 0, \qquad t=1, 2, \cdots, t^* \\ &= 1, \qquad t=t^*+1, \cdots, T. \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

ε_t に関して，$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_T$ は互いに独立に平均0，分散 σ^2 の正規分布に従い，ε_1 は $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_T$ と独立に平均0，分散 $\sigma^2/(1-\rho^2)$ の正規分布に従うと仮定する。

このモデルでは，未知の変化時点 t^* において，回帰係数は β から $\beta+\delta$ に，自己相関係数は ρ から $\rho+\theta$ に変化すると仮定されている。後で示されるように，もし $t^*<k$ または $t^*>T-k$ ならば，回帰係数は推定できない。従って，$k\leqq t^*\leqq T-k$ と仮定する。この仮定から，λ_1 は必然的に0となる。また，自己相関係数は，変化の前でも後でも絶対値において1より小さいと仮定する（すなわち，$|\rho|<1$，$|\rho+\theta|<1$）。

y^*, X^*, γ および ε^* を次のように定義する：

$$y^* = \begin{bmatrix} (1-\rho^2)^{1/2}y_1 \\ y_2-(\rho+\lambda_2\theta)y_1 \\ \vdots \\ y_T-(\rho+\lambda_T\theta)y_{T-1} \end{bmatrix},$$

$$X^* = \begin{bmatrix} (1-\rho^2)^{1/2}x_1', & (1-\rho^2)^{1/2}\lambda_1 x_1' \\ x_2'-(\rho+\lambda_2\theta)x_1', & \lambda_2 x_2'-(\rho+\lambda_2\theta)\lambda_1 x_1' \\ \vdots & \vdots \\ x_T'-(\rho+\lambda_T\theta)x_{T-1}', & \lambda_T x_T'-(\rho+\lambda_T\theta)\lambda_{T-1}x_{T-1}' \end{bmatrix}$$

$$\gamma = [\beta', \delta']', \quad \varepsilon^* = [(1-\rho^2)^{1/2}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_T].$$

このとき，(1)，(2)，(2)′および(3)によって与えられるモデルは，行列表示で次のように書ける：

$$y^*=X^*\gamma+\varepsilon^*,\ \varepsilon^*\sim N(0,\ \sigma^2 I_T). \tag{4}$$

モデル(4)に対する対数尤度関数は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} &L(t^*;\ \rho,\ \theta,\ \gamma,\ \sigma\mid y,\ X)\\ &=-(T/2)\log 2\pi-(T/2)\log\sigma^2\\ &\quad-(y^*-X^*\gamma)'(y^*-X^*\gamma)/(2\sigma^2)+(1/2)\log(1-\rho^2), \end{aligned} \tag{5}$$

ただし，(5)の最後の項は ε から y^* への変換のヤコビアンである。(5)を γ と σ^2 に関して偏微分してゼロとおき，γ と σ^2 について解くと，t^*, ρ および θ を所与としたときの γ と σ^2 の最尤推定値が得られる：

$$\hat{\gamma}^*=(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}y^*, \tag{6}$$

$$\hat{\sigma}^{*2}=(y^*-X^*\hat{\gamma}^*)'(y^*-X^*\hat{\gamma}^*)/T. \tag{7}$$

もし $t^*<k$ または $t^*>T-k$ ならば，$X^{*\prime}X^*$ が特異となり γ は推定できない。これが $k\leqq t^*\leqq T-k$ を仮定する理由である。

(6)と(7)を(5)に代入すると，次の集中対数尤度関数が得られる：

$$\begin{aligned} L_{\max}(t^*,\ \rho,\ \theta\mid y,\ X)&=-(T/2)(1+\log 2\pi)-(T/2)\log\hat{\sigma}^{*2}\\ &\quad+(1/2)\log(1-\rho^2). \end{aligned} \tag{8}$$

t^*, ρ および θ の最尤推定値（これらを，$\hat{t}^*$, $\hat{\rho}$ および $\hat{\theta}$ で表す）は，集中対数尤度関数(8)を最大にする t^*, ρ および θ の値である。

Savin and White (1978) と同様の方法に従うと，t^* を所与としたときの，帰無仮説 $H_0:\rho=0$ および $H_0:\theta=0$ に対する条件付き大標本尤度比検定を行うことができる。自由度1のカイ自乗分布の上側 100α パーセント有意点を $\chi^2_\alpha(1)$ で表すと，もし

$$\begin{aligned} &L_{\max}(\hat{\rho},\ \hat{\theta}\mid\hat{t}^*,\ y,\ X)-L_{\max}(\rho=0,\ \hat{\theta}\mid\hat{t}^*,\ y,\ X)\\ &\geqq\chi^2_\alpha(1)/2 \end{aligned} \tag{9}$$

ならば，帰無仮説 $H_0:\rho=0$ は有意水準 α で棄却される。(9)において，$L_{\max}(\rho,\theta\mid\hat{t}^*,\ y,\ X)$ は t^* の最尤推定値に関して条件付きの集中対数尤度関

数を表している。

同様にして，もし

$$L_{\max}(\hat{\rho},\ \hat{\theta}\mid\hat{t}^*,\ y,\ X)-L_{\max}(\hat{\rho},\ \theta=0\mid\hat{t}^*,\ y,\ X)$$
$$\geqq\chi^2_{\alpha}(1)/2. \tag{10}$$

ならば，帰無仮説 $H_0:\theta=0$ は有意水準 α で棄却される。仮説 $H_0:\theta=0$ は自己相関係数の変化が無いことを意味するので，(10)に基づく尤度比検定は，自己相関係数の変化に対する標本理論に基づく検定の一つである。

t^* は離散型変数であるので，構造変化時点 (t^*) に対する尤度比検定は厳密には実行できない。(たとえば，Johnston (1984, p. 409) 参照。) これが，(9)および(10)において $L_{\max}(\hat{\rho},\ \hat{\theta},\ \hat{t}^*\mid y,\ X)$ の代わりに $L(\hat{\rho},\ \hat{\theta}\mid\hat{t}^*,\ y,\ X)$ が使用された理由である。回帰係数の変化に対する検定は，帰無仮説 $H_0:\delta_i=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ を検定することによって実行できる。もしすべての i に対して仮説 $H_0:\delta_i=0$ が採択されたならば，回帰係数の変化は無いものと判断される。

III 応　用　例

前節で示された構造変化時点と自己相関係数の同時推定の応用例として，第2次石油危機前後での日本と米国の（集計的）輸入需要関数の構造変化について検討する。Houthakker and Magee (1969) に従うと，輸入需要関数の基本型は次式で与えられる：

$$\log M_t=\beta_1+\beta_2\log P_t+\beta_3\log Y_t+u_t, \tag{11}$$

ただし，M_t，P_t および Y_t は，それぞれ，第 t 時点での輸入量，輸入財価格の国内財価格に対する相対価格，輸入国の実質 GNP（所得の代理変数）である。

この輸入需要関数に対するスイッチング回帰モデルは

$$\begin{aligned}\log M_t=&(\beta_1+\lambda_t\delta_1)+(\beta_2+\lambda_t\delta_2)\log P_t\\&+(\beta_3+\lambda_t\delta_3)\log Y_t+u_t.\end{aligned} \tag{12}$$

で与えられる。(12)において，u_t と λ_t は(2)，(2)′および(3)で与えられたものと同じである。使用されたデータは，1975年第1四半期から1984年第4四半期までの日本と米国に対する季節調整済みの四半期データであり，*International Financial Statistics* から抽出された。なお，変数の定義とデータの詳細については，Katayama, Ohtani and Toyoda (1987) を参照されたい。本稿で使用されたデータと同じデータを用いて，Ohtani and Toyoda (1989) は日本の輸入需要関数の構造変化を調べた。彼らは誤差項に自己相関があるときでも有効な構造変化の検定法を提示し，それに基づいて構造変化時点が1978年第4四半期であるか否かを検定している。しかし，彼らの分析では構造変化時点を所与としており，また自己相関係数には変化が無いものと仮定している。第2次石油危機前後での日本の輸入需要関数の構造変化に関しては，Ohtani, Kakimoto and Abe (1990) も検討しているが，彼らは誤差項には自己相関が無いものと仮定している。

グリッド・サーチによって，t^*，ρ および θ の最尤推定値を求めた。表1には，種々の t^* の値に対して集中対数尤度関数を最大にする ρ と θ の値が示されている。表1から，集中対数尤度関数を最大にする t^*，ρ および θ の値

表1 種々の t^* の値に対して集中対数尤度関数を最大にする ρ と θ の値

t^*	日本			米国		
	ρ	θ	L_{max}	ρ	θ	L_{max}
17	0.43	0.05	132.487	0.72	−0.09	126.597
18	0.43	0.03	132.708	0.52	0.00	127.720
19	0.52	−0.03	133.698	0.50	−0.33	126.997
20	0.45	−0.01	135.463	0.49	−0.50	130.390
21	0.52	−0.20	131.175	0.48	−0.64	131.357
22	0.37	0.04	136.745	0.48	−0.49	132.875
23	0.43	−0.06	132.338	0.43	−0.44	129.815
24	0.46	−0.03	132.837	0.48	−0.45	129.726
25	0.55	−0.14	131.447	0.53	−0.68	130.414
26	0.60	−0.15	131.632	0.53	−0.86	130.953
27	0.67	0.13	130.182	0.60	−0.99	130.916

(これらのパラメータの最尤推定値)を見いだすことができる。すなわち,日本の輸入需要関数に関しては,$\hat{t}^*=22(1980:Q2)$, $\hat{\rho}=0.37$, $\hat{\theta}=0.04$ であり米国の輸入需要関数に関しては $\hat{t}^*=22(1980:Q2)$, $\hat{\rho}=0.48$, $\hat{\theta}=-0.49$ である。Ohtani and Toyoda (1989) は日本の輸入需要関数の構造変化時点を1978年第4四半期であると仮定したが,本稿での結果は構造変化時点は1980年第2四半期であることを示している。

表2は, $t^*=22$ を所与したときの ρ と θ の種々の値に対する集中対数尤度

表2　$t^*=22$ を所与としたときの,種々の ρ と θ の値に対する集中対数尤度関数の値

国	ρ	θ							
		−.30	−.20	−.10	.00	.04	.10	.20	.30
日本	.00	130.567	131.686	132.687	133.548	133.848	134.248	134.768	135.093
	.10	132.277	133.308	134.196	134.919	135.157	135.456	135.793	135.919
	.20	133.745	134.653	135.392	135.924	136.105	136.287	136.416	136.327
	.30	134.904	135.653	136.210	136.560	136.639	136.691	136.599	136.291
	.37	135.498	136.116	136.530	136.728	136.745	136.703	136.457	136.002
	.40	135.692	136.250	136.600	136.731	136.721	136.639	136.328	135.813
	.50	136.056	136.403	136.532	136.439	136.341	136.129	135.615	134.917
	.60	135.968	136.093	136.001	135.694	135.514	135.186	134.496	133.670
	.70	135.418	135.326	135.025	134.526	134.276	133.851	133.044	—
	.80	134.413	134.119	133.634	132.976	132.674	132.196	—	—

国	ρ	θ							
		−.60	−.50	−.49	−.40	−.30	−.20	−.10	.00
米国	.00	128.112	128.819	128.111	129.408	129.868	130.192	130.375	130.418
	.10	129.623	130.238	130.293	130.721	131.061	131.255	131.303	131.207
	.20	130.894	131.395	131.437	131.751	131.955	132.007	131.911	131.676
	.30	131.874	132.242	132.270	132.455	132.512	132.416	132.177	131.810
	.40	132.521	132.741	132.755	132.803	132.709	132.468	132.095	131.611
	.48	132.778	132.875	132.875	132.813	132.601	132.252	131.786	131.223
	.50	132.805	132.870	132.868	132.778	132.538	132.164	131.675	131.095
	.60	132.708	132.619	132.602	132.381	132.009	131.521	130.942	130.288
	.70	132.226	131.992	131.961	131.625	131.143	130.570	129.925	129.212
	.80	131.353	130.994	130.951	130.524	129.966	129.338	128.644	127.864

註:(8)の定数項の値は,この表の集中対数尤度関数の値の中には含まれていない。

関数の値を示したものである。表2と(9)および(10)で示された検定手順に従うと，$t^*=22$ を所与したときの，仮説 $H_0:\rho=0$ および $H_0:\theta=0$ に対する尤度比検定を行うことができる。日本の輸入需要関数に関しては，仮説 $H_0:\rho=0$ は5％水準で棄却されるが，仮説 $H_0:\theta=0$ は50％水準でさえ採択される。このことは，誤差項には有意な自己相関が認められるが自己相関係数には有意な変化は認められない，ということを意味している。よって，本稿での結果は，自己相関係数は変化しないという Othani and Toyoda (1989) の仮定は不適切な仮定ではなかったことを示している。米国の輸入需要関数に関しては，$H_0:\rho=0$ は1％水準で棄却され，仮説 $H_0:\theta=0$ は5％水準では採択されるが10％水準では棄却される。よって，誤差項には有意な自己相関が認められるが，自己相関係数の変化に関してはそれほど強い結論は得られない。

次に，t^*，ρ および θ の最尤推定値を所与したときの β_i および δ_i $(i=1, 2, 3)$ の条件付き推定値を計算した。これらの推定値は，変換されたモデル(4)の未知パラメータ t^*，ρ および θ をそれらの最尤推定値で置き換え，この置き換えられたモデルに最小自乗法を適用して得られた推定値である。その結果が表3に示されている。δ_i は第 i 回帰係数の変化の大きさを表すパラメータであるので，変化後の第 i 回帰係数の推定値は $\hat{\beta}_i+\hat{\delta}_i$ によって与えられる。たとえば，日本の輸入需要の変化後の所得弾力性の推定値は 0.326 (=1.098−0.772) である。日本の輸入需要関数においては，すべての回帰係数が5％水

表3　t^*，ρ および θ を所与としたときの，その他のパラメータの条件付き推定値

国	const.		$\log Pt$		$\log Yt$		$\overline{R}^2$	σ	D.W.
	β_1	δ_1	β_2	δ_2	β_3	δ_3			
日本	−0.759 (−1.02)	6.964 (2.70)	−0.124 (−1.46)	−0.622 (−2.04)	1.098 (9.08)	−0.772 (−2.57)	0.972	0.0355	1.962
米国	−6.322 (−4.78)	−4.924 (−1.67)	−0.261 (−1.07)	0.516 (1.41)	2.187 (9.42)	0.441 (1.21)	0.999	0.0390	1.929

註：括弧内の数値は t 値，$\overline{R}^2$ は自由度修正済み決定係数，D.W. はダービン・ワトソン比を表す。

準で有意に変化している（対立仮説は $H_1: \delta_i \neq 0$)。しかし，米国の輸入需要関数においては，すべての回帰係数が10%水準で有意に変化していない。よって，米国の輸入需要関数においては，自己相関係数が唯一の変化の可能性のあるパラメータであると考えられる。

日本の輸入需要関数の β_2 および米国の β_2 と δ_2 の t 値を見ると10%水準で有意ではない。このことは，相対価格は日本の変化以前の輸入需要に対して意味のある説明変数ではなく，米国の輸入需要に対しては全期間を通じて意味のある説明変数ではない，ということを意味している。また，我々の計測結果は，米国の輸入需要の所得弾力性は不変（すなわち，$\delta_3=0$）であり，日本の輸入需要の所得弾力性は 1.098 から 0.326 に変化したことを示している。この結果に従うと，1980年第2四半期以後の輸入需要の所得弾力性は，日本に対しては 0.326，米国に対しては全期間を通じて 2.187 となる。従って，1980年第2四半期から1984年第4四半期までの日米の輸入需要の所得弾力性を比較すると，米国の所得弾力性は日本のそれの約7倍にもなっている。

IV　結　　語

本稿では，誤差項に自己相関があり，自己相関係数も変化し得るスイッチング回帰モデルを考えた。構造変化時点と自己相関係数の変化の同時推定法を示し，変化時点を所与としたときの自己相関係数の変化に対する尤度比検定を示した。また，本稿で示された推定法の応用例として，日本および米国の（集計的）輸入需要関数の構造変化について調べた。

本稿のモデルでは自己相関係数の変化は明示的に考慮されているが，誤差分散については全期間を通じて一定であると仮定されていた。経済時系列データを扱うときには，誤差項の自己相関同様，誤差分散の不均一性もしばしば問題となる。この観点から，誤差項の自己相関に加えて誤差分散の不均一性も考慮したスイッチング回帰モデルを構築することは意味のあることである。

また，本稿では，構造変化は瞬時に（abruptly）起こると仮定されていたが，

実際の経済構造は徐々に変化すると考えた方が自然な場合も多い。この観点から，自己相関係数も変化し得る漸次的スイッチング回帰モデル（gradual switching regression model）を構築することも意味のあることである。

これらのより進んだスイッチング回帰モデルを考え，その推定法を導くことは今後に残された課題である。

参 考 文 献

Boughton, J. M. (1981). "Recent Instability of the Demand for Money: An International Perspective," *Southern Economic Journal 47*, 579–597.

Brown, R. L., J. Durbin and J. M. Evans (1975). "Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time," *Journal of the Royal Statistical Society B37*, 149–163.

Houthakker, H. S. and P. Magee (1969). "Income and Price Elasticities in World Trade," *The Review of Economics and Statistics 51*, 111–125.

Ilmakunnas, P. and H. Tsurumi (1984). "Testing for Parameter Shifts in a Regression Model with Two Regimes of Autocorrelated Errors,"『季刊理論経済学』35, 45–56.

Ilmakunnas, P. and H. Tsurumi (1985). "Testing the Lucas Hypothesis on Output–Inflation Trade–offs," *Journal of Business and Economic Statistics 3*, 43–53.

Johnston, J. (1984). *Econometric Methods,* 3rd ed., New York: McGraw–Hill.

Katayama, S., K. Ohtani and T. Toyoda (1987). "Estimation of Structural Change in the Import and Export Equations: An International Comparison,"『季刊理論経済学』38, 148–158.

Khan, M. S. (1974). "The Stability of the Demand–for–Money Function in the United States 1901–1965," *Journal of Political Economy 82*, 1205–1219.

Ohtani, K. (1982). "Bayesian Estimation of the Switching Regression Model with Autocorrelated Errors," *Journal of Econometrics 18*, 251–261.

Ohtani, K., S. Kakimoto and K. Abe (1990). "A Gradual Switching Regression Model with a Flexible Transition Path," *Economics Letters 32*, 43–48.

Ohtani, K. and S. Katayama (1986). "A Gradual Switching Regression Model with Autocorrelated Errors," *Economics Letters 21*, 169–172.

Ohtani, K. and T. Toyoda (1989). "Testing Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions When Error Terms are Autocorrelated,"『季刊理論経済学』40, 35–47.

Quandt, R. E. (1958). "The Estimation of the Parameters of a Linear Regression System Obeying Two Separate Regimes," *Journal of the American Statistical Association 53,* 873–880.

Salazar, D., L. Broemeling and A. Chi (1981). "Parameter Changes in a Regression with Autocorrelated Errors," *Communications in Statistics–Theory and Methods A17,* 1751–1758.

Savin, N. E. and K. J. White (1978). "Estimation and Testing for Functional Form and Autocorrelation: A Simultaneous Approach." *Journal of Econometrics 8,* 1–12.

Smith, A. F. J. (1977). "A Bayesian Analysis of Some Time–Varying Models," J. R. Barra et al. (eds.), *Recent Developments in Statistics,* Amsterdam: North–Holland, 257–267.

Stern, R. M., C. F. Baum and M. N. Greene (1979). "Evidence on Structural Change in the Demand for Aggregate U. S. Imports and Exports," *Journal of Political Economy 87*, 179–192.

Volker, P. A. (1982). "On the U. S. Import Demand Function: A Comment," *Journal of Political Economy 90*, 1295–1299.