ストルパー・サミュエルソン定理について

下村，和雄

(Citation)
国民経済雑誌,173(2):13-21

(Issue Date)
1996-02

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00176041

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00176041

ストルパー・サミュエルソン定理について

下　村　和　雄

1．序

かって上河泰男教授は，N 財・N 生産要素のヘクシャー・オリーンモデルにおいて第 i 財 ($i=1,\ldots,N$) の価格上昇が第 i 生産要素の価格のそれ以上の上昇と他の $N-1$ 個の生産要素の価格下落を引き起こすために $N\times N$ の分配率行列が満たすべき同値条件を導出した (Uekawa (1971))。またこの上河論文が掲載された Econometrica 誌の同じ号において，第 i 財 ($i=1,\ldots,N$) の価格上昇が第 i 生産要素の価格下落と他の $N-1$ 個の生産要素の価格上昇を引き起こすために $N\times N$ の分配率行列が満たすべき条件についての検討が稲田献一教授によって行われている (Inada (1971))。

数学的に言えば，上河教授は $N\times N$ の分配率行列が Minkowski 行列であるための必要十分条件を導出し，稲田教授はこれが Metzler 行列であるための条件を検討したことになる。[1]

R. Jones 教授 (1995) も述べているようにもし国際貿易論の最も中心的な問題が貿易・非貿易財，諸生産要素市場間の相互関連の分析であるとすれば，上河教授の上記の業績は25年近く経った現在においても国際貿易の純粋理論における重要な cornerstones の一つとしての輝きを失っていないと思われる。

しかしながら，上河教授の Econometrica 論文を読むとき，そこに展開されている同値性の証明の数学的精緻さに感銘を受ける一方，

(a) (若干仮定を強めた上ででも[2]) もっとエレメンタリーな別証明は存在しないのか？

(b) 主要な同値条件は多数の不等式で表現されているが，この不等式系が一体何を意味しているのか。特に，なぜその一群の不等式が「第 i 財の生産に第 i 生産要素が集約的に使用されている」ことを表現していることになるのか？

といった疑問を持つのは筆者のみではないであろう。

これらの疑問を解くためのささやかな一歩を踏み出すことが本稿の目的である。具体的には，

(a) まず $N\times N$ の分配率行列が Minkowski 行列及び Metzler 行列であるための同値条件を提示し，その同値性についてのエレメンタリーな証明を与える。

(b) (1)の (Minkowski 行列であるための) 同値条件の簡単な書き換えによって，実質的に上河教授の同値条件とみなせるものを導出する。

(c) $N=3$ のケースについてこの同値条件を図示する。これによって Minkowski 行列や Metzler 行列であることがなぜ「ある財の生産にある生産要素が集約的或いは非集約的に使用されている」ことになるのかについての幾何的説明を与える。

2．準　備

N 個の財がそれぞれ N 個の本源的生産要素の投入によって生産されるものとする。財 i の生産関数を

$$y_i = F_i(x_{i1}, \cdots\cdots, x_{in}) \qquad i=1, \cdots\cdots N$$

と表す。但し x_{ij} は財 i の生産のための第 j 生産要素投入量。$F_i(.)$ は「新古典派的生産関数」として通常想定される性質を全て備えているとし，更にどの財の生産においても N 生産要素全てが不可欠とする。このとき各財の平均費用

$$c_i(w_1, \cdots\cdots, w_n)$$

が各要素価格 w_j に増加的な concave 関数になること，また財 i の平均費用の第 j 要素価格弾力性

$$b_{ji} \equiv [\partial c_i/\partial w_j]\cdot[w_j/c_i]$$

が，長期均衡条件

$$(1)\quad p_i = c_i(w_1, \cdots\cdots, w_N)$$

のもとで，財 i における要素 j への所得分配率になることはよく知られたことである。

さて今，$b_i \equiv (b_{1i}, \ldots b_n)'$ ($'$は転置記号。従って b_i は列ベクトルである。) とすると，N 個の長期均衡条件式の両辺を財価格と要素価格に関して対数微分することにより，

$$(2)\quad (dp/p)' = (dw/w)'(b_1, \cdots\cdots, b_N)$$
$$\equiv (dw/w)'B$$

但し

$$(dp/p)' \equiv (dp_1/p_1, \cdots\cdots, dp_N/p_N)$$
$$(dw/w)' \equiv (dw_1/w_1, \cdots\cdots, dw_N/w_N)$$

b_i の定義から B は各列和が１になる正確率行列である。もし B が非特異行列であれば

$$(3)\quad (dp/p)'B^{-1} = (dw/w)'$$

補題１：B^{-1} の各列和は１である。

証明：$E' \equiv (1, \ldots, 1)$ (N 次元ベクトル)，I_N を単位行列とすると，

$$I_N = BB^{-1}$$

よって

$$E'I_N = E'BB^{-1}$$

すなわち

$$E' = E'B^{-1}$$

（証明終り）

以下，B は非特異であると仮定する。

さて，Inada (1971) はストルパー・サミュエルソン基準を二通りの形で定義した。

(SS-I) B が Minkowski 行列であること：注1と(3)より，もし B が Minkowski 行列であれば第 i 財価格の上昇は第 i 生産要素価格の上昇とそれ以外の全ての要素価格の下落を引き起こす。しかも，補題1を考慮すれば，第 i 財価格変化に対する第 i 生産要素価格変化の弾力性は1より大でなくてはならない。いわゆる "magnification effect" が成立する。

(SS-II) B が Metzler 行列であること：注1と(3)より，もし B が Metzler 行列であれば第 i 財の価格上昇は第 i 要素価格の下落とそれ以外の全ての要素価格の上昇を引き起こす。(SS-I) の場合と同様，第 i 財価格変化に対する第 i 生産要素価格変化の弾力性は1より大でなくてはならない。

3．同値命題

B が Minkowski あるいは Metzler であるための同値条件を提示しよう。

命題1 (Shimomura (1995))： (P-1) と (P′-1) のそれぞれは B が Minkowski 行列であるための同値条件であり，(P-II) と (P′-II) のそれぞれは B が Metzler 行列であるための同値条件である。

(P－I) 任意の i に対して $b_i \in \Lambda^*(e_i, B_{-(i)})$

(P′－I) 任意の i に対して $\bar{b}_i \in \Lambda(e_i, \bar{B}_{-(i)})$

(P－II) 任意の i に対して $\Lambda^*(b_i, e_i) \cap \Lambda^*(B_{-(i)}, e_i) \neq \phi$

(P′－II) 任意の i に対して $\Lambda(\bar{b}_i, e_i) \cap \bar{\Lambda}(B_{-(i)}, e_i) \neq \phi$

但し $\bar{b}$ は B の第 i 行，$B_{-(i)}$ は B から第 i 列を，$\bar{B}_{-(i)}$ は第 i 行を取った残りの行列である。e_1 は I_n の第 i 行（列），ϕ は空集合である。また，$X \equiv (x_1, \ldots, x_q) = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)'$ を $n \times q$ 行列とするとき，

$$\Lambda^*(X) \equiv \{\sum_i^q \bar{a}_i \mid a_i > 0,\ \sum a_i = 1\}$$

$$\Lambda(X)\equiv\{\sum_i^n a_i x_i \mid a_i>0\}$$

次に本稿の主要命題を証明しよう。

命題２：(i) 次の条件のそれぞれが (SS-I) のための同値条件である：集合 $\Theta\equiv\{1,\ldots,N\}$ の任意の部分集合 J と J に属さない任意の $k\in\Theta$ に対して

(Q－Ｉ)　$b_k\in\Lambda^*(e_k, E_{-Jk}, B_J)$, 但し $E_{-Jk}\equiv\{e_k \mid s\in\Theta-J-\{k\}\}$, $B_J\equiv\{b_j \mid j\in J\}$。

(Q′－Ｉ)　$\bar{b}_k\in\Lambda(e_k, E_{-Jk}, \bar{B}_J)$, 但し $\bar{B}_J\equiv\{b_j \mid j\in J\}$

(ii) 次の条件のそれぞれが (SS-II) のための同値条件である：集合Θの任意の部分集合 J と J に属さない任意の $k\in\Theta$ に対して

(Q－Ⅱ)　$\Lambda^*(b_k, e_k, E_{-Jk})\cap\Lambda^*(B_J)\neq\phi$

(Q′－Ⅱ)　$\Lambda(\bar{b}_k, e_k, E_{-Jk})\cap\Lambda^*(\bar{B}_J)\neq\phi$

証明：命題１より，(P-X) ⇔ (Q-X) 及び (P′-X) ⇔ (Q′-X)，但し X=I, II, を証明すればよい。以下では (P-II) ⇔ (Q-II) を示す。残りの同値性も同様に証明できる。

まず，J が ϕ である場合を考えれば (Q-II) ⇒ (P-II) は明白である。従って (P-II) ⇒ (Q-II) の証明に集中しよう。まず，もし $N=2$ であれば (Q-II) の E_{-JK} は存在しなくなるから，(Q-II) は事実上 (P-II) と一致する。そこで以下では $N\geqq 3$ とする。(P-II) より，$i\neq j$ なる任意のペア (i, j)，i, $j\in\Theta$, に対して，

$$\Lambda^*(b_i, e_i)\cap\Lambda^*(B_{-(i)})\neq\phi$$

と

$$\Lambda^*(b_j, e_j)\cap\Lambda^*(B_{-(i)})\neq\phi$$

が成り立つ。従って，以下の等式系を満たす正数α_1，β_1，γ_{si}，γ_{hi}が存在する。

$$\alpha_i b_i+\beta_i e_i=\sum_{s\neq i,j}\gamma_{si}b_s+\gamma_{ji}b_j$$

$$\alpha_j b_j+\beta_j e_j=\sum_{s\neq i,j}\gamma_{sj}b_s+\gamma_{ij}b_i$$

この二つの等式の最初の式の両辺に γ_{ij}/α_i を掛けて二番目の等式の両辺にそれぞれ足し併せると

$$(4)\qquad (\alpha_j-\gamma_{ij}\gamma_{ji}/\alpha_i)b_j+\beta_j e_j+(\gamma_{ij}\beta_i/\alpha_i)e_i =\sum_{s\neq i,j}(\gamma_{sj}+\gamma_{ij}\gamma_{ji}/\alpha_j)b_s$$

を得る。B が $N \geqq 3$ の正行列であること，及び e_i や e_j の定義を考慮することにより，この等式から（$\alpha_j - \gamma_{ij}\ \gamma_{ji}/\alpha_i$）が正となることが解る。従って任意の i, j, $i \neq j$, に対して

$$\Lambda(b_j,\ e_i,\ e_j) \cap \Lambda(B_{-(i,j)}) \neq \phi$$

但し

$$B_{-(i,j)} \equiv \{b_i,\ \cdots\cdots,\ b_{i-1},\ b_{i+1},\ \cdots\cdots,\ b_{j-1},\ b_{j+1},\ \cdots\cdots,\ b_N\}k$$

更に(4)の両辺に左から N 次元ベクトル $E' \equiv (1, \ldots, 1)'$ を掛けてやることにより

$$\alpha_j - \gamma_{ij}\gamma_{ji}/\alpha_i) + \beta_j + \gamma_{ij}\beta_i/\alpha_i = \sum_{s \neq i,j} (\gamma_{sj} + \gamma_{ij}\gamma_{ji}/\alpha_i)$$
$$= \{\alpha_i(1-\gamma_{ij}) + \gamma_{ij}(1-\gamma_{ji})\}/\alpha_i$$
$$> 0$$

よって最初の等式の両辺を二番目の等式の右辺で割ってやれば（当然）その等式の両辺の値は1になるから，任意の i, j, $i \neq j$, に対して

$$\Lambda^*(b_j,\ e_i,\ e_j) \cap \Lambda^*(B_{-(i,j)}) \neq \phi$$

次にこれをもとにして同じような推論により，互いに相異なる任意の i, j, $k \in \Theta$ に対して

$$\Lambda^*(b_j,\ e_i,\ e_j,\ e_k) \cap \Lambda^*(B_{-(i,j,k)}) \neq \phi$$

を示すことが出来る。以下 $J \in \Theta - \{i,\ j,\ k,\ \ldots\}$ が空になるまで同様に続けて行けばよい。

（証明終り）

さて，以上の同値条件のうち例えば（Q′-II）を取り上げよう。これは B の第 k 行 $\bar{b}_k$ が e_k, E_{-Jk}, $\bar{B}$ の正1次結合になることを意味している。従って Θ を J とその補集合 I に分割したとき，（Q′-II）は

$$(5)\quad b_{ki} > \sum_{j \in J} b_{ji} x_j \qquad for\ any\ i \in \mathrm{I}$$
$$b_{ki} > \sum_{j \in J} b_{ji} x_j \qquad for\ any\ i \in \mathrm{I}$$

となる正数 xj, $j \in J$, が存在することを意味する。

この条件，より正確に言えば，Θ の任意の分割 I, J と任意の $k \in$ に対して(5)が成立する，ということは上河教授が提示した B が Minkowski 行列であるための主要な同値条件（Uekawa（1971）の Condition　IV）と実質的に同じものとなっている。

4．幾何学的表現

最後に，本稿の同値条件から，B が Minkowski 行列や Metzler 行列であることがなぜ「ある財の生産にある生産要素が集約的或いは非集約的に使用されている」ことになるのかについての幾何的説明を与える。そのために以下では $N=3$ と仮定する。

ここで用いる幾何学的な工夫は McKenzie (1955) 以来経済分析でしばしば使われてきた。いま図1のような各頂点から対応する辺におろした垂線の長さを1とする正三角形 FCD

を考える。この三角形の任意の1点から各辺におろした3本の垂線の長さを足しあわせると常に1になることが簡単に証明できる。従っていま，f 財，c 財，d 財という3財がF, C, Dという3生産要素で生産されるとしたとき，例えば d 財の D, F, C 要素への分配率は図1の点 d から辺 FC, CD, FD におろした垂線の長さによって表せるので，正三角形 FCD の3個の点f, c, d によって分配率行列 B を幾何学的に表現できることになる。さてこの小三角形 fcd の3辺をそれぞれ延長すると，この f, c, d それぞれを頂点とする錐が各点に対して二つずつ得られる。例えば点 d に対しては d_1dd_2 とf_1dc_1 の二つである。その一つは正小三角形 fcd を含み，今一つは含まない。含まないほうを正錐，含むほうを副錐と名付けよう。

Minkowski 行列とは小三角形の各点の正錐が大三角形 FCD の頂点の内ただ一つを含んでいるものである。そして Metzler 行列とは小三角形の各点の副錐が大三角形 FCD の頂点の内ただ一つを含んでいるものである。このとき各財とその生産において集約的に利用される生産要素の関係は，Minkowski 行列の場合は大三角形の各頂点とそれを含む副錐の頂点との関係によって，Metzler 行列の場合は大三角形の各頂点とそれを含む正錐に属する（正錐の）頂点以外の小三角形の2頂点との関係によって，それぞれ幾何的に表わされることになる。図2，図3から，集約的に利用される生産要素の分配率は相対的に大きいことがわかる。

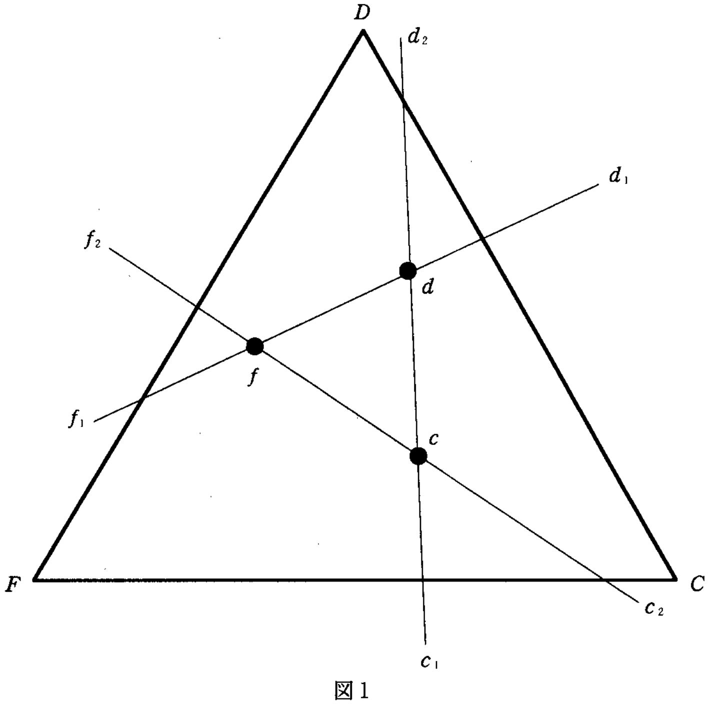

図1

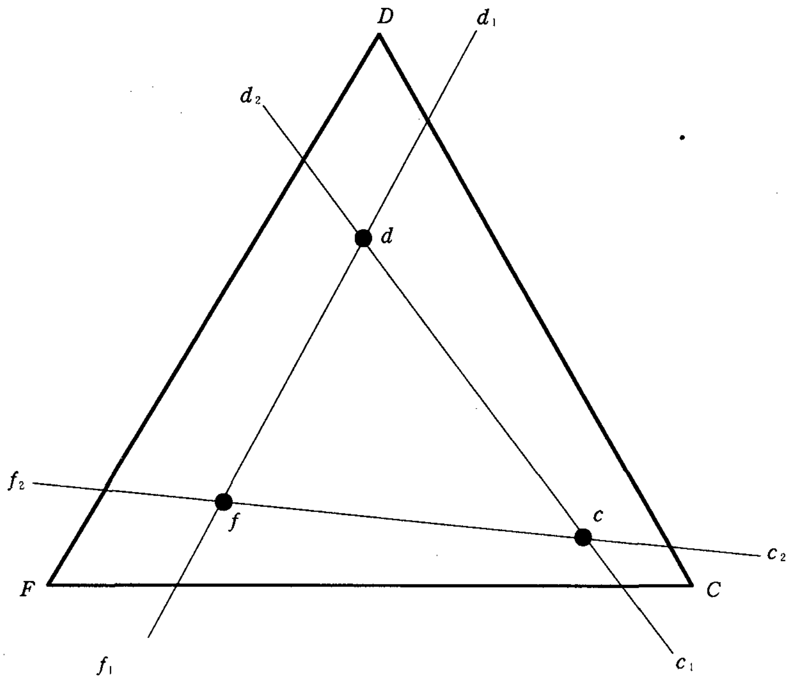

図2 Minkowski 行列

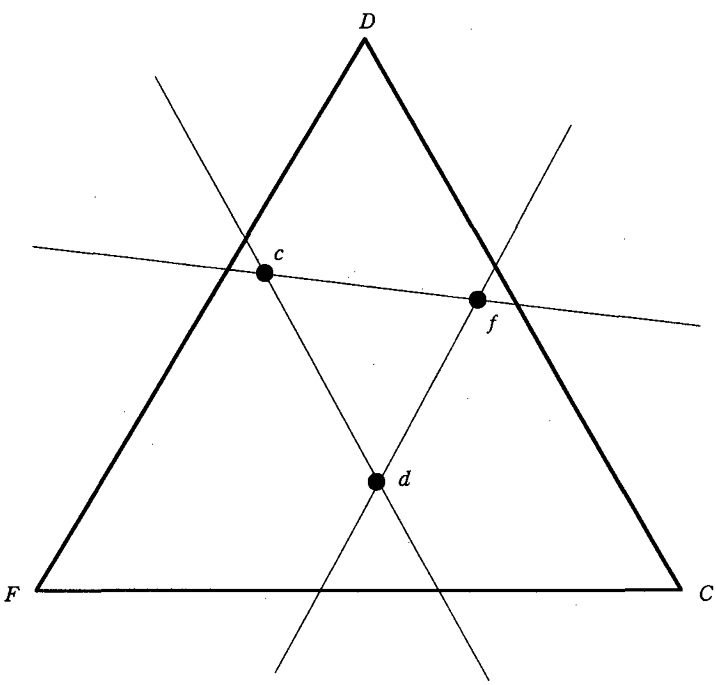

図3：Metzler 行列

5．結びにかえて

本稿の主要命題とその証明は上河教授の同値条件と実質的にみなせるものを，全ての財において全ての生産要素が用いられるという若干強い仮定を置くことによって，行列やベクトルの単純な演算だけから証明できることを示している。

また図２，図３は，barycentric coordinates を用いることによって，Minkowski 行列，Metzler 行列の構造の幾何的表現を与えている，ここで示された幾何学的テクニックは $N=4$ のケースにも適用できる。従来，各財とその生産において集約的に利用される要素の関係を示すものとして Kemp-Wegge 条件(Kemp and Wegge(1969))と呼ばれるものがあり，$N=3$ のときはこれが Minkowski 行列であるための同値条件だが $N=4$ では単なる必要条件になることが知られている。B が Kemp-Wegge の条件を満たすにもかかわらず，(SS-I) が成立しないケースを本稿の幾何学的方法を $N=4$ のケースに拡張することにより表すことが出来る (Shimomura (1994))。

注

1 逆行列の対角要素が非負(非正)，非対角要素が非正(非負)の確率行列をMinkowski(Metzler)行列という。これらの行列の性質については Kemp and Kimura (Chap. 3, 1978) 参照。

2 後述のように，本稿ではどの財の生産にも全ての生産要素の投入が不可欠であるという若干強い仮定をおく。

3 相違点は(5)の等式が上河教授の場合には等号付きの不等号‘≦’になっている点である。しかしながら上河教授が自身の同値条件に与えている経済学的解釈 (pp.215-216, Uekawa (1971)) は本稿の(5)にもそのまま適用可能である。

4 最近の例として Leamer (1987), Jones and Marjit (1991), Jones (1992) が挙げられる。

参照文献

Inada, K., “The Production Coefficient Matrix and the Stolper-Samuelson Condition”, *Econometrica* 39 (1971), 219-240.

Jones, R.W., “The Discipline of International Trade”, Rochester University (1995).

__________, “Factor Scarcity, Factor Abundance and Attitudes towards Protection: the 3×3 Model”, *Journal International Economic Integration 7* (1992), 1-19.

__________, and S. Marjit, “The Stolper-Samuelson Theorem, the Leamer Triangle and the Produced Mobile Factor Structure”, Chapter 6 in *Trade, Policy, and International Adjustments*, A. Takayama, M. Ohyama and H. Ohta eds., (San Diego: Academic Press 1991), 95-107.

Kemp, M. C. and L. Wegge, “On the Relation between Commodity Prices and Factor Rewards”, *International Economic Review* 10 (1969), 407-413.

__________ and Y. Kimura, *Introduction to Mathematical Economics*, Springer (1978).

Leamer, E., "Paths of Development in the Three-Factor n-Good General Equilibrium Model", *Journal of Political Economy 95* (1987), 961-999.

McKenzie, L., "Equality of Factor Prices in World Trade", *Econometrica 23* (1955), 239-257.

Shimomura, K., "A Geometric Approach to the Stolper-Samuelson Theorem in the 4×4 Hecksher-Ohlin Model", *RIEB Disscusion Paper 33* (1993), Kobe University.

__________, "A New Set of Equivalent Conditions for a Given N×N Stochastic Matrix to be Minkowski or Metzler", *RIEB Disscusion Paper 43* (1993), Kobe University.

__________, "A Geometric Approach to the Stolper-Smuelson Theorem" (1995), Kobe University.

Uekawa, Y., "Generalizations of the Stolper-Samuelson Theorem", *Econometerica 39* (1971), 197-217.