



# 浸透流問題における各種数値解析法とフローネット法

田中, 勉  
景山, 敏一

---

**(Citation)**

神戸大学農学部研究報告, 21(2):157-169

**(Issue Date)**

1995-01-30

**(Resource Type)**

departmental bulletin paper

**(Version)**

Version of Record

**(JaLCD0I)**

<https://doi.org/10.24546/00178056>

**(URL)**

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00178056>



# 浸透流問題における各種数値解析法とフローネット法

田中 勉\*・景山敏一\*\*

(平成6年8月10日受理)

Various Numerical Calculation Methods and Flow-Net Method in Seepage Flow Problems

Tsutomu TANAKA and Toshikazu KAGEYAMA

## Abstract

There are various numerical calculation methods to analyse seepage flow problems. Here the Finite Difference Method(FDM), Finite Element Method(FEM) and Boundary Element Method(BEM) are considered. In the finite element analyses, four types of elements: CST, 4CST, 8ISO and 9ISO are used, which represent a Constant Strain(i.e. constant hydraulic gradient) Triangle element, a rectangular element formed of 4 CST elements, and ISO-parametric elements composed of 8 nodes and 9 nodes, respectively. In the boundary element analyses, two types of elements: BEM-C and BEM-R are used, which represent constant and linear elements. Flow-Net Method(FNM) is also considered.

Two typical problems: seepage flows in soil under a weir and around a sheet pile wall are analysed numerically using FDM, FEM and BEM, and graphically by trial and error using FNM. Following results are then obtained:

- (1) The computer programs coded here run exactly.
- (2) BEM-C and BEM-R give us relatively precise answer in spite of a small number of elements used.
- (3) Finite element analyses using 9ISO and 8ISO elements render precise results. FEM-4CST also give us good answer.
- (4) Hydraulic heads or pressures exerted on a plane are calculated exactly. On the other hand, discharge is computed with a small error.
- (5) Flow net method is simple to use but practically give us good answers. The answers given by 5 persons have errors under 13% for discharge and under 3% for pressure, respectively. The averages of 5 persons have errors of 6% for discharge and 1% for pressure, respectively.

## I. まえがき

頭首工などの水利施設構造物や仮締切り矢板などの仮設構造物の設計においては、構造物基礎をまわる浸透流が問題となる。浸透流量を求め、浸透破壊に対する安定性を求めるためには、浸透流に関する支配方程式を与えられた境界条件の下に解くことが必要となる。二次元地盤内の浸透流問題を解く方法には種々の

方法があるが、著者らは、これまで、差分法、有限要素法 (CST要素, 4CST要素, 8節点アイソパラメトリック要素, 9節点アイソパラメトリック要素), 境界要素法 (一定要素, 線形要素) を用いた解析プログラムを開発してきた。ここでは、これらの数値解析法の概要を示すとともに、典型的な2つの例題について、これらの方法を用いて解析した結果について比較検討し、開発したプログラムの妥当性について考察する。また、図式解法の一つであるフローネット法についても考察を加える。

\*生産環境学研究室

\*\*神戸市農政局農林土木課

Table 1 透水現象の解法の種類

理論解法	解析的方法	微分方程式を直接解く方法 複素関数論を用いる方法
	数値解法	差分法 (FDM) 有限要素法 (FEM) 境界要素法 (BEM) 統計的解法 (RWM)
図式解法	フローネット法 (FNM) フラグメント法 (FGM)	
実験解法	砂モデル	Hele-Shaw モデル 細管網モデル
	粘性流モデル	
	電気相似モデル	
	光弾性モデル	
	ゴムモデル	

II. 浸透流解析法

$x, z$  方向に直交異方透水性をもつ地盤中の浸透流問題について考える。このとき、浸透流の基礎方程式は、

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

と表される。ここに、

$h$ : 全水頭

$k_x, k_z$ :  $x, z$  方向の透水係数

である。二次元断面内の浸透流問題を解く方法には種々のものがある。まとめると Table 1 のようになる<sup>1)</sup>。

理論解法の一つである解析的方法は境界条件が比較

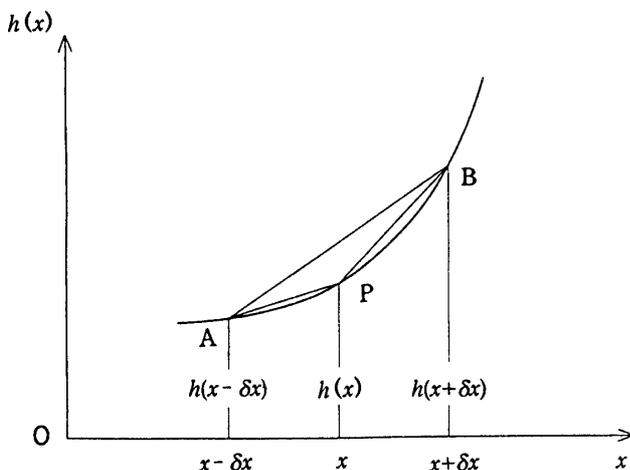


Fig. 1  $x$  の 1 個の曲線の近似

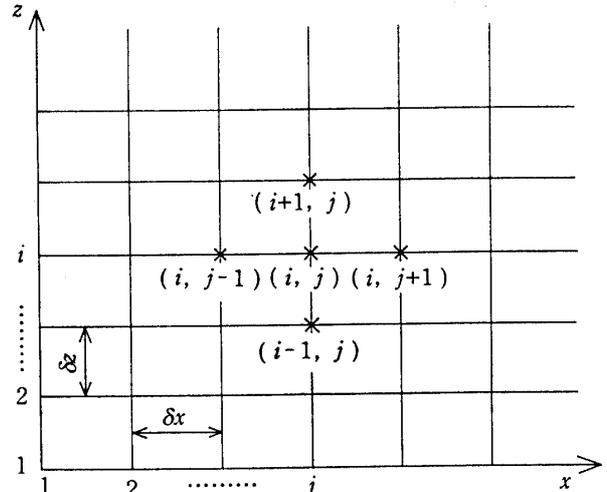


Fig. 2  $x-z$  平面の分割

的簡単なものには適用できるが複雑なものには適用不可能である。

実験解法は、数値解法が発達するまでは、複雑な境界条件の浸透流問題などに対する有効な解析法の一つであった。これによって得られた有用な結論も多い。浸透破壊、飽和・不飽和浸透流、間隙中の物質の移流拡散などの複雑な問題に対しては現在でもよく利用されている。

理論解法の一つである数値解法は、コンピュータの進歩により飛躍的に発展し、今日最も有力な解法の一つとなっている。

図式解法は、近似解法ではあるが、慣れてくると精度が向上し大変有用なものである。数値解法が発展した今日でも、浸透流の流況の概略を求めたり、数値解析結果のチェックを行うために有用であると考えられる。特に、フローネット法は基本的にどのような問題にも適用できるという特徴がある。現在でももっと利用されてもよいと考えられる。

1. 差分法<sup>2)</sup> (Finite Difference Method: FDM)

ある点における微分を、ある小区間上の差分商で近似する (Fig.1)。すなわち、 $\delta x$  を小さいものとして、 $\frac{dh}{dx}$  を  $\frac{\delta h}{\delta x}$  で置き換える。関数  $h$  およびその導関数が  $x$  の 1 個の有限連続関数であるとき、テイラーの定理から、

$$h(x+\delta x) = h(x) + h'(x)\delta x + \frac{1}{2}h''(x)(\delta x)^2 + \frac{1}{6}h'''(x)(\delta x)^3 + \dots \quad (2)$$

$$h(x-\delta x) = h(x) - h'(x)\delta x + \frac{1}{2}h''(x)(\delta x)^2 - \frac{1}{6}h'''(x)(\delta x)^3 + \dots \quad (3)$$

となり、これらの2式を加え合わせると、

$$h(x+\delta x)+h(x-\delta x)=2h(x)+h''(x)(\delta x)^2+O((\delta x)^4) \quad (4)$$

となる。 $O((\delta x)^4)$ は $\delta x$ の4次以上の項を含むものである  
ので無視すると、

$$h''(x)=\frac{d^2h}{dx^2} \doteq \frac{1}{(\delta x)^2} \{h(x+\delta x)-2h(x)+h(x-\delta x)\} \quad (5)$$

を得る。(5)式の右辺の誤差は $(\delta x)^2$ 程度となる。

また、(2)、(3)式の差をとり $\delta x$ の3次以上の項を無視  
すると、

$$h'(x)=\frac{dh}{dx} \doteq \frac{1}{2 \cdot \delta x} \{h(x+\delta x)-h(x-\delta x)\} \quad (6)$$

が導かれる。(6)式の右辺の誤差は $(\delta x)^2$ 程度となる。

次に、 $h$ が2変数関数 $h(x, z)$ の場合について考える。  
 $h$ を独立変数 $x, z$ の関数とする。Fig.2に示すように、  
 $x-z$ 平面内の浸透領域を、 $\delta x, \delta z$ を辺とする長方形の集  
まりに分割し、座標 $(x, z)$ で表される一般的な代表  
格子点Pの水頭を $h_{i,j}$ と表す。2回の偏微分 $\frac{\partial h^2}{\partial x^2}, \frac{\partial h^2}{\partial z^2}$ の  
差分近似式は、(5)式を用いて、

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \doteq \frac{1}{(\delta x)^2} (h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1}) \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \doteq \frac{1}{(\delta z)^2} (h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1}) \quad (8)$$

となる。これらを浸透流の基礎方程式(1)に代入する  
と、一般的な格子点 $(i, j)$ における全水頭 $h_{i,j}$ に関す  
る差分近似式が得られる。

$$h_{i,j} = \frac{(h_{i-1,j} + h_{i+1,j})k_x(\delta x)^2 + (h_{i,j-1} + h_{i,j+1})k_z(\delta z)^2}{2 \{k_x(\delta x)^2 + k_z(\delta z)^2\}} \quad (9)$$

同様にして、境界点における条件(境界条件)を定  
式化すると、すべての格子点について差分近似式を得  
ることができる。考えている領域内の格子点の数を $N$   
とすると、これらの差分近似式は、 $N$ 元連立一次方程  
式となり、種々の方法を用いて解くことができる。こ  
こでは、ガウスの消去法を用いて解いた<sup>2)</sup>。

## 2. 有限要素法 (Finite Element Method: FEM)

### 2.1 支配方程式と弱形式表現

浸透水の支配方程式は、浸透場 $S$ において浸透水の  
連続式：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{in } S \quad (10)$$

と運動方程式(ダルシー則)：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= k_x i_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_z &= k_z i_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

から求められ、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{in } S \quad (12)$$

となる。ここに、

$v_x, v_z$ :  $x, z$ 方向の流量流速

$k_x, k_z$ :  $x, z$ 方向の透水係数

$i_x = -\frac{\partial h}{\partial x}, i_z = -\frac{\partial h}{\partial z}$ :  $x, z$ 方向の動水勾配

である。浸透流問題は、全水頭 $h$ に関してFig.3に示  
すような境界条件：

(i) 基本境界(ディリクレ境界, 水頭境界)

$$h = \bar{h} \quad \text{on } C_h \quad (13)$$

(ii) 自然境界(ノイマン境界, 流速境界)

$$v = \bar{v} \quad \text{on } C_v \quad (14)$$

の下に、支配方程式(12)を解くことによって解を得る  
ことができる。

支配方程式(12)の両辺に任意の仮想水頭 $\delta h$ を乗じて  
積分すると、

$$\int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) \right\} \delta h \cdot dS = 0 \quad (15)$$

となる。ガウス・グリーンの定理を用いて、(15)式は、

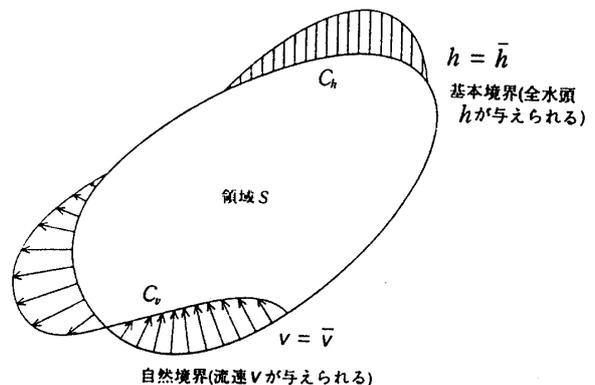


Fig. 3 二次元浸透流問題の領域と境界条件

$$\int_C \left\{ k_x \frac{\partial h}{\partial x} \delta h \cdot n_x + k_z \frac{\partial h}{\partial z} \delta h \cdot n_z \right\} dC - \int_S \left\{ k_x \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial(\delta h)}{\partial x} + k_z \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial(\delta h)}{\partial z} \right\} dS = 0 \quad (16)$$

となる。水頭境界の仮想水頭を0と仮定した場合、(16)式は、

$$\int_S \left\{ k_x \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial(\delta h)}{\partial x} + k_z \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial(\delta h)}{\partial z} \right\} dS + \int_{C_s} (\bar{v}_x n_x + \bar{v}_z n_z) \delta h dC = 0 \quad (17)$$

となり、ベクトル表示すると次のようになる。

$$\int_S (\delta i)^T v dS + \int_{C_s} (n^T \cdot \bar{v}) \delta h dC = 0 \quad (18)$$

ここに、

$$\delta i = \begin{Bmatrix} \delta i_x \\ \delta i_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial(\delta h)}{\partial x} \\ -\frac{\partial(\delta h)}{\partial z} \end{Bmatrix} : \text{仮想の動水勾配ベクトル}$$

$$v = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} : \text{流量流速ベクトル}$$

$$n^T \bar{v} = \bar{v}_x n_x + \bar{v}_z n_z = \bar{q} \quad \text{on } C_s$$

$$n = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_z \end{Bmatrix} : \text{境界における外向き単位法線ベクトル}$$

$$\bar{v} = \begin{Bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_z \end{Bmatrix} : \text{流速境界上において既定された流速}$$

である。(18)式が、(12)~(14)式の弱形式表現である。

## 2.2 有限要素近似<sup>3)</sup>

全水頭  $h$  を領域内の有限個の節点における全水頭  $h_\beta$  ( $\beta = 1, 2, \dots, N$ ) と場所の関数  $N_\beta$  ( $\beta = 1, 2, \dots, N$ ) の一次積和で表すことができるものとする。すなわち、

$$h = \sum_{\beta=1}^N N_\beta h_\beta ; N_\beta = N_\beta(x, z) \quad (19)$$

または、

$$h = [N] H \quad (20)$$

と表すことができるものとする。ここに、

$$[N] = [N_1 N_2 \dots N_N]$$

$$H = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{Bmatrix}$$

である。 $[N]$ は内挿関数マトリックス、 $H$ は節点水頭ベクトルである。動水勾配ベクトル  $i$  は、内挿関数マトリックスの成分を用いて

$$i = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} = -[B]H \quad (21)$$

と表すことができる。ここに、

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_N}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_N}{\partial z} \end{bmatrix}$$

は節点水頭動水勾配マトリックスである。また、流速ベクトル  $v$  は、

$$v = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = [D]i \quad (22)$$

と表すことができる。ここに、マトリックス  $[D]$  は、

$$[D] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix}$$

であり、透水係数テンソルである。

さて、ギャラーキン法では、

$$\delta h = \sum_{\alpha=1}^N N_\alpha \delta h_\alpha = [N] \delta H = \delta H^T [N]^T \quad (23)$$

$$\delta i = -[B] \delta H \quad (24)$$

を用いる。ここに、

$$\delta H = \begin{Bmatrix} \delta h_1 \\ \delta h_2 \\ \vdots \\ \delta h_N \end{Bmatrix}$$

は節点仮想水頭ベクトルである。(18)式に、(23)、(24)式を代入して整理すると次のようになる。

$$(\delta H)^T \left\{ \int_S -[B]^T v dS + \int_{C_s} (n^T \cdot \bar{v}) [N]^T dC \right\} = 0 \quad (25)$$

ここで、 $\delta H$ は基本境界上を除いて任意に選ぶことができるので、(25)式から、

$$\int_S -[B]^T v dS + \int_{C_e} (n^T \cdot \bar{v}) [N]^T dC = 0 \quad (26)$$

が得られる。(26)式に、(21)、(22)式を代入することによって、

$$\int_S [B]^T [D] [B] H dS = - \int_{C_e} (n^T \cdot \bar{v}) [N]^T dC \quad (27)$$

が得られる。マトリックス表示をすると、

$$[K] H = P \quad (28)$$

となる。(27)、(28)式が有限要素近似式である。ここに、

$$[K] = \int_S [B]^T [D] [B] dS = \sum_{e=1}^M [K_e] : \text{透水マトリックス}$$

$$P = -Q : \text{流量ベクトル}$$

$$Q = \int_{C_e} (n^T \cdot \bar{v}) [N]^T dC = \sum_{e=1}^{M'} Q_e : \text{境界流入・流出による流量ベクトル}$$

$$[K_e] = \int_{S_e} [B_e]^T [D] [B_e] dS : \text{要素透水マトリックス}$$

$$Q_e = \int_{C_e'} (n^T \cdot \bar{v}) [N]^T dC : \text{境界流入・流出による要素流量ベクトル}$$

であり、 $M$ は要素の数、サフィックスの $e$ は要素数を表す。 $M'$ は流速境界辺の数、 $e'$ は流速境界辺の番号を表す。

有限要素法は領域を種々の有限な要素に分割するが、一般的に、要素の幾何学的形状(座標)を形状関数(Shape function)  $[S]$  で表現し、全水頭を内挿関数(Interpolation function)  $[N]$  を用いて表現する。すなわち、

$$x = [S] X \\ = [S_1 S_2 \dots S_N] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (29a)$$

$$z = [S] Z \\ = [S_1 S_2 \dots S_N] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{Bmatrix} \quad (29b)$$

$$h = [N] H \\ = [N_1 N_2 \dots N_N] \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{Bmatrix} \quad (30)$$

と表す。形状関数が内挿関数と同じモデルで表現される要素をアイソパラメトリック要素、形状関数が内挿関数よりも低次(または、高次)のモデルで表現される要素をサブパラメトリック要素(または、スーパーパラメトリック要素)と呼ぶ。問題の性質によって使い分けられる。

ここでは、三角形CST要素、四角形4CST要素<sup>3)</sup>、8節点アイソパラメトリック要素、9節点アイソパラメトリック要素を用いて解析を行った。

### 3. 境界要素法<sup>4)</sup>(Boundary Element Method :BEM)

#### 3.1 基礎方程式

異方透水性地盤中を流れる浸透流の基礎方程式：

$$\nabla_0^2 u = 0 \text{ in } \Omega \quad (31)$$

を満足するような領域 $\Omega$ 上のポテンシャル関数 $u$ を考える。ここに、

$$\nabla_0^2 = k_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。この問題に対する境界条件には、次の二つの型：

(a)基本境界条件

$$u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_1$$

(b)自然境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \text{ on } \Gamma_2$$

がある。ただし、境界全体は $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ で表される。

ここで、領域 $\Omega$ 内で連続な1次導関数をもつ重み関数 $u^*$ を導入する。重みつき残差法の表現として、次の式を書くことができる。

$$\int_{\Omega} (\nabla_0^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (32)$$

ただし、

$$q = \frac{\partial u}{\partial n}$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$$

である。(32)式の左辺を2回部分積分することによって、

$$\int_{\Omega} u (\nabla_0^2 u^*) d\Omega = - \int_{\Gamma_1} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (33)$$

を得る。

### 3.2 基本解

ここで、 $u^*$ について考える。一つの集中負荷が点 $i$ に作用するとき、支配方程式は、

$$\nabla_0^2 u^* + \Delta^i = 0 \quad (34)$$

となる。ここに、 $\Delta^i$ はディラックのデルタ関数を表す。この方程式の解は基本解と呼ばれ、次の性質がある。

$$\int_{\Omega} u(\nabla_0^2 u^* + \Delta^i) d\Omega = \int_{\Omega} u \nabla_0^2 u^* d\Omega + u^i \quad (35)$$

$u^i$ は負荷を与えた点における未知関数 $u$ の値である。基本解は、(34)式を満たしているので、(35)式は、

$$\int_{\Omega} u \nabla_0^2 u^* d\Omega = -u^i \quad (36)$$

となる。したがって、(33)式は、

$$u^i + \int_{\Gamma_1} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q u^* d\Gamma \quad (37)$$

となる。二次元異方透水性地盤における、(34)式の基本解は、

$$u^* = \frac{1}{\sqrt{k_x k_z}} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{k_x} + \frac{z^2}{k_z}}} \quad (38)$$

となる。

### 3.3 境界上の方程式

(37)式は領域内の任意の点で成り立つが、問題を境界法によって定式化するためには、この式を境界上で考察する必要がある。極限操作を加えることにより、(37)式は境界上の点に関する次の方程式に帰着することができる。

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (39)$$

(39)式において、 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ であり $\Gamma_1$ 上では $u = \bar{u}$ 、 $\Gamma_2$ 上では $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$ であると考えられる。ただし、 $c^i u^i$ は総和をとらない。なお、なめらかな境界に対しては $c^i = \frac{1}{2}$ である。

### 3.4 境界要素法

境界上のポテンシャル $u$ と流速 $q$ が境界上の有限個の節点におけるポテンシャル $u^i$ と流速 $q^i$ ( $i = 1, 2, \dots, N$ )と場所の関数 $\phi_\beta$ ( $\beta = 1, 2, \dots, N$ )の一次積和で

表すことができるものとする。すなわち、

$$\begin{cases} u = [\phi] \mathbf{U} \\ q = [\phi] \mathbf{Q} \end{cases} \quad (40)$$

と表すことができるものとする。ここに、

$$[\phi] = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_N]$$

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix}$$

である。(40)式を用いると、(39)式は、

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} [\phi] \mathbf{U} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} [\phi] \mathbf{Q} u^* d\Gamma \quad (41)$$

となる。ここで、

$$\begin{cases} \widehat{H} = \int_{\Gamma} [\phi] q^* d\Gamma \\ \mathbf{G} = \int_{\Gamma} [\phi] u^* d\Gamma \end{cases} \quad (42)$$

とおくと、

$$c^i u^i + \widehat{H} \mathbf{U} = \mathbf{G} \mathbf{Q} \quad (43)$$

となる。いま、

$$\begin{cases} H_{ij} = \widehat{H}_{ij} & (i \neq j) \\ H_{ij} = \widehat{H}_{ij} + c^i & (i = j) \end{cases} \quad (44)$$

とおくと、(42)式は、

$$[\mathbf{H}] \mathbf{U} = [\mathbf{G}] \mathbf{Q} \quad (45)$$

となる。

$u$ の $N_1$ 個の値と $q$ の $N_2$ 個の値は既知であることに注意すると、(43)式には $N = N_1 + N_2$ 個の未知数があることになる。すべての未知数が左辺にくるように式を書き直せば、

$$[\mathbf{A}] \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (46)$$

を得る。ただし、 $\mathbf{X}$ は $u$ と $q$ うちで未知数となるものを集めたベクトルである。

境界要素法においても種々の境界要素が用いられる。(42)、(44)式によって $[\mathbf{H}]$ 、 $[\mathbf{G}]$ が計算されると、(45)、または、(46)式によって、境界全体における $u$ と $q$ の値がわかる。これらの値から、領域内部の任意の点における $u$ の値及び流速を求めることができる。

ここでは、一定要素と線形要素を用いて解析を行った。

4. フローネット法 (Flow-Net Method:FNM)

浸透流の支配方程式を境界条件の下に解くことによって、等ポテンシャル線と流線によって形づくられる流線網を描くことができる。等方性地盤においては、等ポテンシャル線と流線は直交することが知られているが、フローネット法とは、ある浸透領域について試行錯誤によってフリーハンドで流線網を描く方法である。慣れてくると精度が高くなることが知られている。流線網は、等方性地盤について、正方形(Curvilinear square)に近づけることによって完成する。正方形網が完成すると、ダルシーの法則を用いて断面内を流れる単位奥行き当りの流量 $q$ は、

$$q = \frac{N_f}{N_d} k H \tag{47}$$

と求めることができる。ここに、

$k$  : 透水係数

$H$  : フローネット中の全水頭損失

$N_f$  : 流路の数

$N_d$  : 等ポテンシャル線の区分数

である。また、浸透領域内の間隙水圧 $u$ は、

$$u = \gamma_w (h-z) \tag{48}$$

から計算することができる。ここに、

$\gamma_w$  : 水の単位体積重量

$h$  : 全水頭

$z$  : 位置水頭

である。構造物に作用する全水圧は(48)式によって得られる間隙水圧を考えている構造物の面に沿って積分することによって求めることができる。

異方透水性地盤に関しては、 $x$ 軸を

$$x^* = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} x \tag{49}$$

と座標変換することにより、(1)式が

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \tag{50}$$

となり、 $x^*-z$ 変換断面では等方の透水現象に帰着される。 $x^*-z$ 座標系で流線網を描き、その後 $x^* \rightarrow x$ として実断面に変換すればよい。なお、このときの断面内浸透流量は等価透水係数として $\sqrt{k_x k_y}$ を用いて計算できる<sup>1)</sup>。

Ⅲ. 各種浸透流解析結果の比較

ここでは、典型的な2つの例題：頭首工問題、矢板問題について、各種浸透流解析法を用いて解析を行った。ここで用いた数値解析法は、差分法(FDM)、有限要素法(FEM)、境界要素法(BEM)である。有限要素法では、4つのタイプの要素：三角形要素(FEM-CST)、4つのCST要素からなる四角形要素(FEM-4CST)<sup>3)</sup>、8節点アイソパラメトリック要素(FEM-8ISO)、9節点アイソパラメトリック要素(FEM-9ISO)を用いた。境界要素法では、2つのタイプの要素：一定要素(BEM-C)、線形要素(BEM-R)を用いた。また、同じ問題について、卒業年次の異なる5人の学生がフローネット法(FNM)によって解析した結果がある<sup>5) 6) 8) 9) 10)</sup>。(この場合、それぞれの学生は他の人の結果はみていない。)以下では、これらの種々の解析から得られた結果について考察する。

1. 頭首工問題

Fig.4に示すようなフローティング・タイプの頭首工の基礎地盤中を流れる浸透流について解析を行った。頭首工の左右の地盤表面からの水位がそれぞれ7m、1m(水位差6m)であり、左右境界(頭首工上下流端からそれぞれ27m)は不透水性境界とする。また、地盤の透水係数は $k = 1.0 \times 10^{-4}$ m/sとする。各数値解析法によって得られた断面流量 $Q_1$ ( $m^3/s/m$ )、頭首工の底面にかかる圧力 $P_1$ (tf/m)をTable 2に示す。地盤の左右不透水性境界が無遠慮の場合の理論解<sup>1)</sup>は、 $Q_1 = 2.24 \times 10^{-4} m^3/s/m$ 、 $P_1 = 72.0$ tf/mである。数値解析では、左右に不透水性境界を設けているが充分広くとっているため、ここで取り扱っている問題の正解は無遠慮境界の理論解とはほぼ等しいと考えられる。

まず、 $Q_1$ について考える。数値解による流量 $Q_1$ は、BEM-Cを除いて、理論解よりも大きく算出されている。BEM-Cによる流量は $2.15 \times 10^{-4} m^3/s/m$ で精度は-4.0%となっており、その他の方法による流量は $2.29 \sim 2.40 \times 10^{-4} m^3/s/m$ で精度は2.2~7.1%となっている。後者の場合、FDMでは前後の節点における水頭値からダルシーの法則を用いて節点の流速を求め断面流量を算出しており、FEMでは要素の流速(または要素内のガウスの積分点における流速)から節点の流速を求め断面流量を算出しているが、このときに誤差が生じているものと考えられる。分割方法が異なるので直接比較はできないが、有限要素法

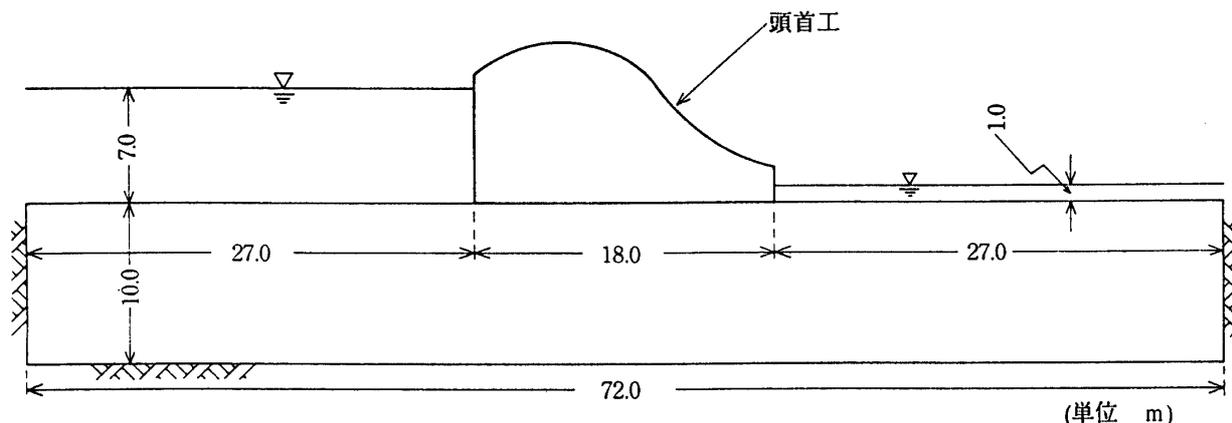


Fig. 4 頭首工の基礎地盤中における浸透流

で9節点アイソパラメトリック要素, 8節点アイソパラメトリック要素を用いたものが最も正解に近い。

次に,  $P_1$  に関してみると, すべて正解値が得られている。圧力(すなわち水頭値)の計算精度はかなり高いと考えられる。

BEM-C 及 BEM-R は要素数が少ないにもかかわらず

ず, 流量, 揚圧力とも比較的精度よく計算されていることがわかる。

次にフローネット法による結果について考える。同じ問題について5人の学生がフローネット法によって求めた  $Q_1$ ,  $P_1$  を示すと Table 3 となる。まず,  $Q_1$  についてみると,  $2.04 \sim 2.50 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s/m}$  (平均  $2.25 \times 10^{-4}$ )

Table 2 各種数値解析法による結果 (頭首工問題)

解析者 (年)	方法	$Q_1$ ( $\text{m}^3/\text{s/m}$ )	$P_1$ (tf/m)	備考
竹田忠生(1983) <sup>5)</sup>	FDM	$2.39 \times 10^{-4}$	72.0	格子点数 25×6=150 Original
絹谷公伸(1986) <sup>6)</sup>	FEM-CST	$2.40 \times 10^{-4}$	72.0	NNP=175, NEL=288 Segerlind <sup>7)</sup>
西山哲司(1987) <sup>8)</sup>	BEM-C	$2.15 \times 10^{-4}$	72.0	NNP=58 Brebbia <sup>4)</sup>
	BEM-R	$2.34 \times 10^{-4}$	72.0	NNP=64 (角点6点を含む) Brebbia <sup>4)</sup>
更田 準(1988) <sup>9)</sup>	FEM-CST	$2.39 \times 10^{-4}$	72.0	NNP=189, NEL=312 Segerlind <sup>7)</sup>
景山敏一(1990) <sup>10)</sup>	FEM-CST	$2.37 \times 10^{-4}$	72.0	NNP=189, NEL=312 Original
田中 勉(1994)	FEM-4CST	$2.34 \times 10^{-4}$	72.0	NNP=189, NEL=156 Original
	FEM-8ISO	$2.31 \times 10^{-4}$	72.0	NNP=150, NEL=39 Original
	FEM-9ISO	$2.29 \times 10^{-4}$	72.0	NNP=189, NEL=39 Original

NNP: 節点数, NEL: 要素数, Original: オリジナルプログラム

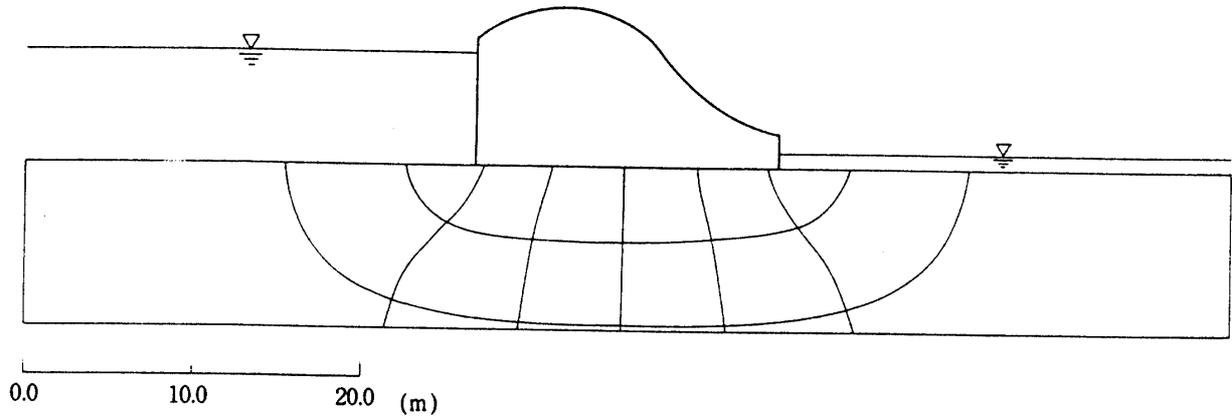


Fig. 5 FNMによるフローネット<sup>10)</sup> (頭首工問題)

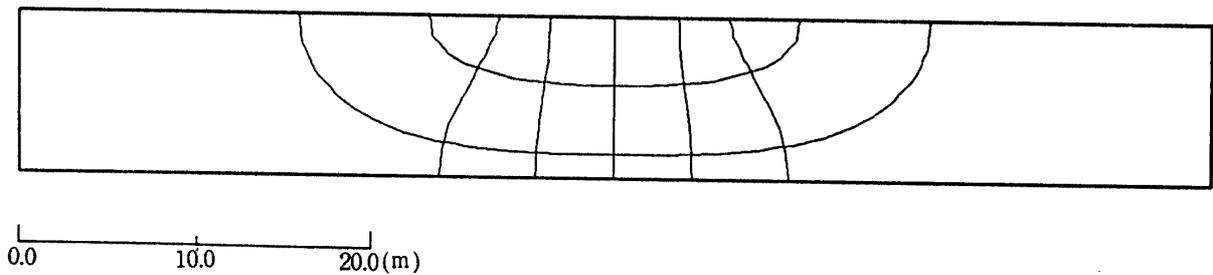


Fig. 6 FEMによるフローネット (頭首工問題)

m<sup>3</sup>/s/m)の範囲となっており、精度は-8.9%~11.6% (平均0.4%)となっている。また、 $P_1$ についてみると71.6~73.7tf/m(平均72.7tf/m)の範囲となっており、精度は-0.6~2.4%(平均1.0%)となっている。フローネット法による場合は、流量については12%程度以内、揚圧力については3%程度以内の精度で求められていることがわかる。5人の平均をとると、流量、揚圧力ともに1%の精度が得られることがわかる。

図式解法(FNM)によって得られたフローネットの一例<sup>10)</sup>をFig.5に、FEMによって求めたフローネットをFig.6に示す。FEMによるフローネットの作図法は引用文献11による。

## 2. 矢板問題

Fig.7に示すような単列矢板の前後地盤中の浸透流について解析を行った。矢板の左右の地盤表面からの水位がそれぞれ8m、0m(水位差8m)とし、左右境界(矢板からそれぞれ30m)は不透水性境界とす

Table 3 フローネット法による結果 (頭首工問題)

解析者(年)	$Q_1$ (m <sup>3</sup> /s/m)	$P_1$ (tf/m)
竹田忠生(1983) <sup>5)</sup>	$2.50 \times 10^{-4}$	71.1
絹谷公伸(1986) <sup>6)</sup>	$2.25 \times 10^{-4}$	71.6
西山哲司(1987) <sup>8)</sup>	$2.25 \times 10^{-4}$	72.0
更田 準(1988) <sup>9)</sup>	$2.20 \times 10^{-4}$	73.7
景山敏一(1990) <sup>10)</sup>	$2.04 \times 10^{-4}$	72.0

る。また、地盤の透水係数は $k=1.0 \times 10^{-4}$ m/sとする。各数値解析法によって得られた断面流量 $Q_2$ (m<sup>3</sup>/s/m)、矢板の左右側面にかかる圧力 $P_L$ 、 $P_R$ をTable 4に示す。地盤の左右境界が無限遠の場合の理論解<sup>1)</sup>は、 $Q_2=4.00 \times 10^{-4}$  m<sup>3</sup>/s/mである。数値解析結果では、左

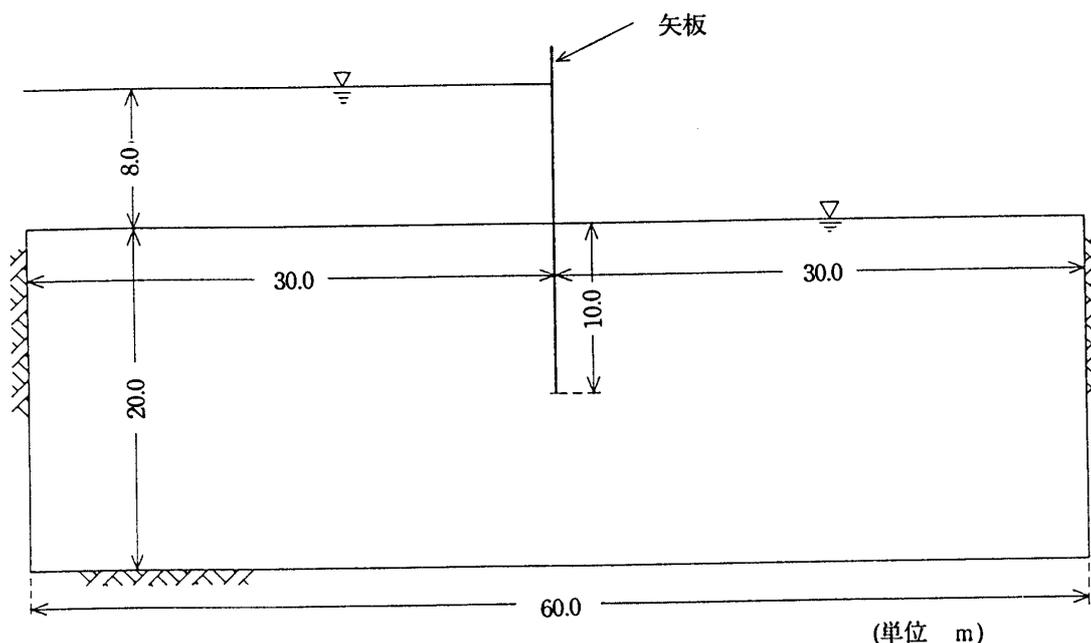


Fig. 7 矢板前後の地盤中における浸透流

右に不透水性境界を設けているが充分広くとっているため、ここで取り扱っている問題の正解は、無限遠境界の理論解とほぼ等しいと考えられる。

まず、 $Q_2$ について考える。数値解析による流量 $Q_2$ は、BEM-Cを除いて、ほぼ正解値に等しいか少し大きく計算されている。BEM-Cによる流量は $3.83 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s/m}$ で精度は-4.3%となっており、その他の方法による流量は $3.99 \sim 4.22 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s/m}$ で精度は0.3~5.5%となっている。後者の場合、誤差の原因は(1)で述べた理由と同じものであると考えられる。分割方法が異なるので直接比較はできないが、有限要素法で9節点アイソパラメトリック要素または8節点アイソパラメトリック要素を用いたもの、4CST要素を用いたもの、CST要素で細分割したものは精度が高い。

次に $P_L$ ,  $P_R$ について考える。これに関しては、理論解を求めているないので、ここでは9節点アイソパラメトリック要素を用いて得られた値( $P_L=115.3\text{tf/m}$ ,  $P_R=64.7\text{tf/m}$ )が理論解にほぼ等しいと考え、これを基準として考察する。BEM-Cによるものは、 $P_L=117.1\text{tf/m}$ ,  $P_R=62.9\text{tf/m}$ となっており、精度はそれぞれ1.6%, -2.80%となっておりほぼ正解値が得られているが、他の方法とは若干傾向が異なる。その他の方法によるものは $P_L=113 \sim 115.6\text{tf/m}$ ,  $P_R=64.7 \sim 66.3\text{tf/m}$ の範囲となっており、精度はそれぞれ-1.4%~0.3%, 0.0~2.5%となりほぼ正解値が得られているものと考えら

れる。

BEM-C及びBEM-Rは要素数が少ないにもかかわらず、流量、圧力とも比較的精度よく計算されていることがわかる。

次に、フローネット法による結果について考える。ここでも、同じ問題について5人の学生がフローネット法によって求めた $P_L$ ,  $P_R$ を示すとTable 5となる。まず、 $Q_2$ についてみると、 $3.49 \sim 4.00 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s/m}$ (平均 $3.77 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s/m}$ )の範囲となっており、精度は-12.8~0.0%(平均-5.8%)となっている。また、 $P_L$ ,  $P_R$ についてみると、 $P_L=113.1 \sim 116.0\text{tf/m}$ (平均 $114.4\text{tf/m}$ ),  $P_R=64.0 \sim 66.3\text{tf/m}$ (平均 $65.3\text{tf/m}$ )の範囲となっており、精度は、それぞれ、-1.9~0.6%(平均-0.8%), -1.1~2.5%(平均0.9%)となっている。フローネット法による場合は、流量については13%程度以内、圧力については3%程度以内の精度で求められていることがわかる。5人の平均をとると流量は6%, 圧力は1%程度の精度が得られることがわかる。

図式解法(FNM)によって得られたフローネットの一例<sup>10)</sup>をFig.8に、FEMによって得られたフローネットをFig.9に示す。

Table 4 各種数値解析法による結果 (矢板問題)

解析者 (年)	方法	$Q_2$ (m <sup>3</sup> /s/m)	$P_L$ (tf/m)	$P_R$ (tf/m)	備考
竹田忠生(1983) <sup>5)</sup>	FDM	$4.18 \times 10^{-4}$	114.0	66.0	格子点数 229 Original
絹谷公伸(1986) <sup>6)</sup>	FEM-CST	$4.16 \times 10^{-4}$	113.7	66.3	NNP=229, NEL=384 Seegerlind <sup>7)</sup>
西山哲司(1987) <sup>8)</sup>	BEM-C	$3.83 \times 10^{-4}$	117.1	62.9	NNP=40 Brebbia <sup>9)</sup> 半断面ずつ解析
	BEM-R	$4.08 \times 10^{-4}$	114.6	65.4	NNP=45(角点5点を含む) Brebbia <sup>9)</sup> 半断面ずつ解析
更田 準(1988) <sup>9)</sup>	FEM-CST	$4.22 \times 10^{-4}$	114.1	65.9	NNP=346, NEL=600 Seegerlind <sup>7)</sup>
景山敏一(1990) <sup>10)</sup>	FEM-CST	$3.99 \times 10^{-4}$	115.6	64.7	NNP=871, NEL=1600 Original
田中 勉(1994)	FEM-4CST	$4.05 \times 10^{-4}$	114.9	65.2	NNP=569, NEL=512 Original
	FEM-8ISO	$4.02 \times 10^{-4}$	115.1	64.9	NNP=441, NEL=128 Original
	FEM-9ISO	$3.99 \times 10^{-4}$	115.3	64.7	NNP=569, NEL=128 Original

NNP: 節点数, NEL: 要素数, Original: オリジナルプログラム

Table 5 フローネット法による結果 (矢板問題)

解析者 (年)	$Q_2$ (m <sup>3</sup> /s/m)	$P_L$ (tf/m)	$P_R$ (tf/m)
竹田忠生 (1983) <sup>5)</sup>	$4.00 \times 10^{-4}$	114.3	64.7
絹谷公伸 (1986) <sup>6)</sup>	$3.56 \times 10^{-4}$	116.0	64.0
西山哲司 (1987) <sup>8)</sup>	$4.00 \times 10^{-4}$	113.7	66.3
更田 準 (1988) <sup>9)</sup>	$3.49 \times 10^{-4}$	114.9	65.1
景山敏一 (1990) <sup>10)</sup>	$3.80 \times 10^{-4}$	113.1	66.3

#### IV. まとめ

種々の浸透流解析法: FDM, FEM-CST, FEM-4CST, FEM-8ISO, FEM-9ISO, BEM-C, BEM-R, 及び, FNM について述べ, 2つの典型的な例題: 頭首工問題, 矢板問題について解析を行った。そして, 次の結論を得た。

(1) ここで開発した各種浸透流解析プログラムは正しく動くことがわかった。

(2) BEM-Cで得られた結果は他の数値解析法と比べて若干異なる傾向を示す。BEM-C及びBEM-Rは要素数が少なくても計算精度が比較的高い。

(3) FEM解析は, 高次の要素(9節点アイソパラメトリック要素, 8節点アイソパラメトリック要素)を用いたり, CST要素の場合でも細分割すると精度がよくなる。4CST要素を用いた計算は, CST要素の欠点を補い, 良好な結果を与える。

(4) 数値解は, 一般に, 圧力(すなわち節点水頭)に関する計算精度が高く, 流量の計算精度がやや落ちる。これは, 節点水頭から節点流速を求めたり(FDM), 要素流速やガウスの積分点における流速から節点流速を求める(FEM)ときに誤差が生じるものと考えられる。

(5) フローネット法は簡単な方法であるが, 精度よく浸透流問題を解くことができる。卒業年次が異なる5人の学生が上述の2つの問題に対して求めた結果によると, 流量に関して13%以内の精度, 圧力に関し

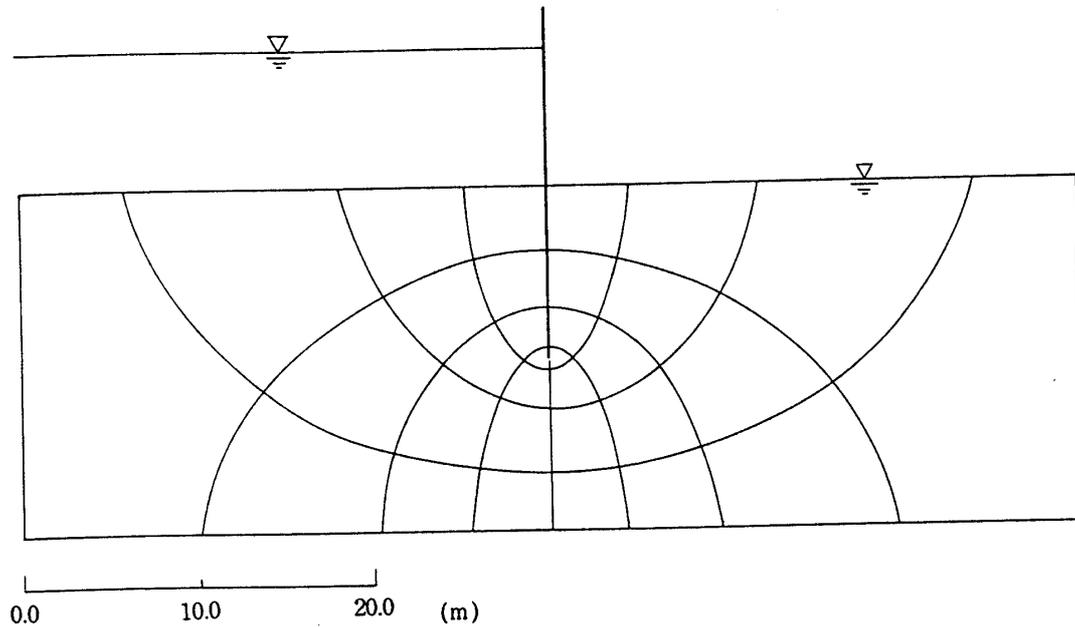
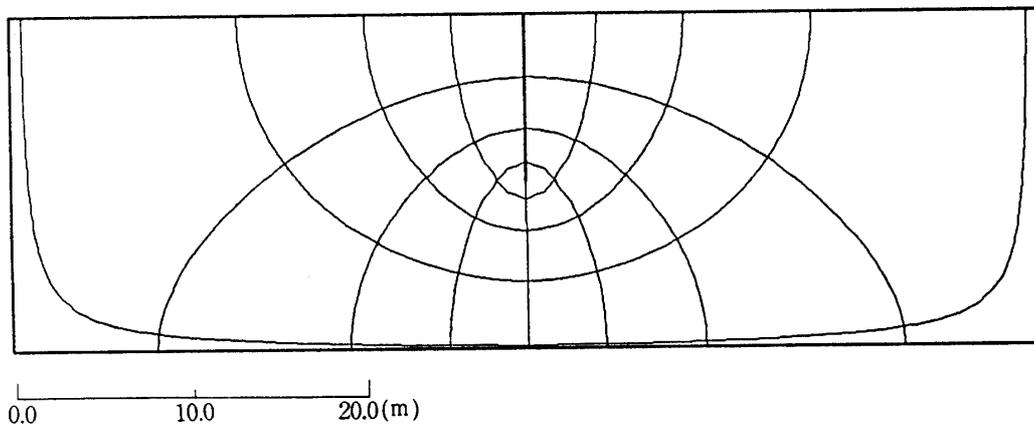
Fig. 8 FNMによるフローネット<sup>10)</sup> (矢板問題)

Fig. 9 FEMによるフローネット (矢板問題)

て3%以内の精度となり、5人の結果を平均すると流量に関して6%、圧力に関して1%の精度となった。十分実用にたえる精度であると考えられる。この場合も圧力(すなわち節点水頭)の計算精度が高いことがわかる。

#### 謝 辞

浸透流解析を行うにあたり、神戸大学農学部水利用

工学研究室卒業生の竹田忠生君、絹谷公伸君、西山哲司君、更田準君に大変お世話になりました。ここに心より感謝の意を表します。

#### 引用文献

- 1) HARR, M.E.: *Groundwater and Seepage*, McGraw-Hill, 315p.(1962).
- 2) G.D. スミス著(藤川洋一郎訳): 電算機による偏微

- 分方程式の解法, サイエンス社, 191p.(1971).
- 3) C.S. デザイ・J.F. アーベル著(山本善之訳):マトリックス有限要素法—基本理論とその応用—, 科学技術出版社, 545p.(1974).
  - 4) C.A. プレビア著(神谷紀生・田中正隆・田中喜久昭訳):境界要素法入門, 培風館, 178p.(1980).
  - 5) 竹田忠生:差分法による浸透流解析, 神戸大学農学部 卒業論文, 170p.(1983).
  - 6) 絹谷公伸:FEMによる浸透流解析, 神戸大学農学部 卒業論文, 142p.(1986).
  - 7) L.J. セガリンド著(川井忠彦監訳; 築地恒夫・風間悦夫・川端康洋訳):応用有限要素解析, 丸善, 418p.(1978).
  - 8) 西山哲司:BEMによる浸透流解析, 神戸大学農学部 卒業論文, 234p.(1987).
  - 9) 更田 準:掘削地盤背後の浸透流FEM解析・図化システムの開発とそれによる具体例の安定解析, 神戸大学農学部 卒業論文, 176p.(1988).
  - 10) 景山敏一:浸透流によって生じる地盤内応力の有限要素解析, 神戸大学農学部 卒業論文, 172p.(1992).
  - 11) 田中 勉・豊國永次・景山敏一:二次元異方透水性地盤における浸透流—流線網の一作図手法の提案—, 第26回土質工学研究発表会平成3年度発表講演集, pp.1711~1714(1991).