Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2026-11-26

多層系砂柱の浸透破壊問題における押えフィルタの効果と一層(均質)の仮定の合・不合理性

田中, 勉
豊國, 永次
畑, 武志

(Citation)
神戸大学農学部研究報告,18(1):75-88

(Issue Date)
1988-01

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00200491

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00200491

KOBE UNIVERSITY

神大農研報（Sci. Rept. Fac. Agr. Kobe Univ.）18：75－88, 1988

多層系砂柱の浸透破壊問題における押えフィルタの効果と一層（均質）の仮定の合・不合理性

田中　勉*・豊國永次*・畑　武志*

（昭和62年8月10日受理）

EFFECTS OF A LOADED FILTER AND INAPPROPRIATENESS OF ASSUMING HOMOGENEITY IN A SEEPAGE FAILURE PROBLEM OF A MULTI-LAYERED SAND COLUMN

Tsutomu TANAKA, Eiji TOYOKUNI and Takeshi HATA

Abstract

In a series of studies[1)~8)], the seepage failure problem of a piece-wise homogeneous sand column caused by a vertically upward seepage flow were considered theoretically.

In this paper, the critical state for seepage failure of a multi-layered sand column is precisely considered. Where the critical state for seepage failure of a sand column is referred to as the state of a sand column at the critical time when an effective stress becomes, first and foremost, zero in a certain layer or at a certain level (but at a topmost level) within a sand column as the difference in total hydraulic head between the topmost level and the bottom level of a sand column h increases. It is then shown that the following important results obtained by considering the critical state for seepage failure of one-, two- and three-layered sand columns[1)~4)] are true in the case of a general multi-layered sand column:

(1) Three effects of a loaded filter
With p increasing,
(i) a critical location going down,
(ii) increasing in h_c, and
(iii) increasing in the stability of a sand column in its critical state.
Where p is the effective overburden pressure of a loaded filter and h_c is the critical difference in total hydraulic head between the topmost level and the bottom level of a sand column.

(2) Whether or not a sand column becomes critical at the bottom of the sand column in its critical state corresponds, uniquely, to whether or not the assumption that the sand column is homogeneous is reasonable.

Ⅰ．まえがき

著者らは，一次元上昇浸透流による砂柱の破壊に関して理論的に研究[1)~8)]を進めてきた。これらの一連の研究においては，まず一，二，三層系砂柱の浸透破壊問題について詳しく調べ，その結果について詳しく考察した。そして，一，二，三層系砂柱に関して得られた結論が，一般的な多層系砂柱の場合にもいえるかどうかについて考察を進めている。砂柱が限界状態に至るまでの内部有効応力の変化，限界時の残留有効応力分布，破壊形態，限界水頭差，抑止板に作用する力，安全率，限界曲線の性質，最下点限界の最小有効上載圧の存在などに関する

*水利用工学研究室

一般的な解析法（または，証明）は，既報[7)8)]ですでに行った。

ここでは，多層系砂柱について，「押えフィルタの3つの効果」及び「砂柱を一層（均質）と仮定することの合・不合理性」に関して一般的に考察を行う。

「押えフィルタの3つの効果」及び「砂柱を一層（均質）と仮定することの合・不合理性」は，一，二，三層系砂柱に関してのみ導かれた結論であり[1)~4)]，一般的な多層系砂柱の場合にも言えるかどうかは，いまだ明らかにされていない。多層系砂柱の浸透破壊問題を取り扱う場合，これらの事柄に関して詳しく考察しておく必要があると考えられる。

Ⅱ．多層系砂柱の浸透破壊問題

引用文献1で述べた仮定に基づいて，一次元浸透流，一次元応力状態の場を考える。

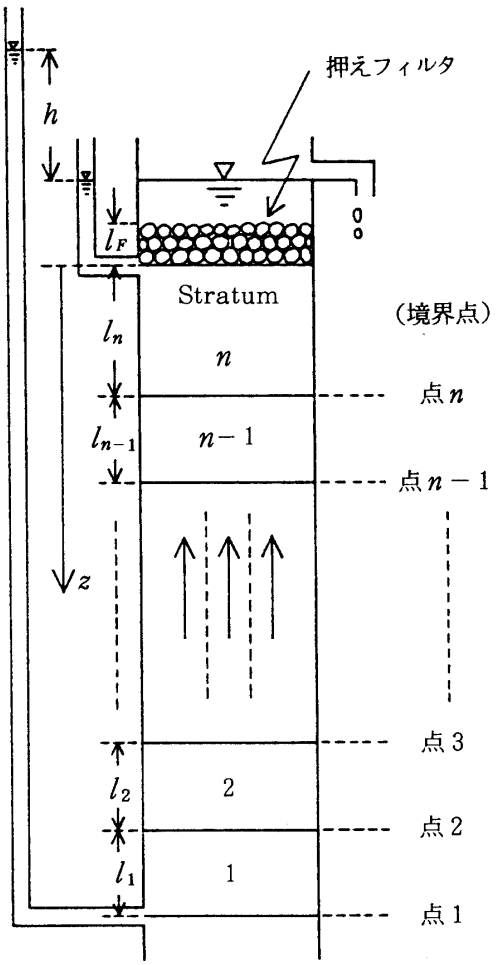


Fig. 1　多層系砂柱（n層系（押えフィルタあり））

Fig. 1に示すような多層系砂柱（n層系（押えフィルタあり））を考える。Fig. 1のように，砂層は下から上へ第一層，第二層，……，第n層とする。また，砂層の層と層の境界点を，Fig. 1に示すように，下から上へ点1，点2，……，点nとする。ここに，次のような記号を用いる。

h：砂柱の上下端における全水頭の差

γ_w：水の単位体積重量

l_j（$j=1, 2, \cdots\cdots, n$）：第j層の層厚

$L=\sum_{j=1}^{n} l_j$　：砂柱の全長

k_j（$j=1, 2, \cdots\cdots, n$）：第j層の透水係数

γ_j'（$j=1, 2, \cdots\cdots, n$）：第j層の水中単位体積重量

$\gamma_{av}'=\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j' l_j$：砂柱の平均水中単位体積重量

i_j（$j=1, 2, \cdots\cdots, n$）：第j層における動水勾配

q：流量流速（discharge velocity）

$p=\gamma_F' l_F$　：押えフィルタの有効上載圧

γ_F', l_F：押えフイルタの水中単位体積重量，および，層厚

ここで，限界時（または，限界状態）の一般的な定義づけをする[2)]。

層状堆積の砂柱内を一次元上昇浸透流が流れるとき，Fig. 2[注)]に示すように，砂柱の上下端における全水頭の差hが増加してある値h_cになると，砂柱内のある層，または，ある点（砂柱の最上端を除く）で，それまで正であった鉛直有効垂直応力σ_z'が0となる。このとき（または，この状態）を限界時（または，限界状態）と呼ぶ。また，このとき限界となる点（すなわち，$\sigma_z'=0$となる点）を限界点と呼び，このとき砂柱内に残留しているσ_z'（分布）を限界時の残留有効応力（分布）と呼ぶ。また，h_cは，限界時の砂柱の上下端における全水頭の差であり，限界水頭差と呼ぶ。ここに，

$(\cdots\cdots)_c$　：サブスクリプトcをつけて限界時の値を示す。（以下では，断りなしに用いる）

である。

ここでは，既報[7)8)]で得られた結果をまとめておく。

砂柱が限界状態に達するまでは（$0 \leqq h \leqq h_c$），ダルシー則が成り立つものとすると，浸透水の流量の連続条件から次の関係式が得られる[7)]。

注）Fig. 2は，限界時に境界点tで限界となる場合を示している。

$$q = k_j i_j \quad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n) \quad \cdots\cdots(1)$$

$$q = \frac{h}{\sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k_j}} \quad \cdots\cdots(2)$$

(1), (2)式から, i_j は次のようになる。

$$i_j = \frac{1}{k_j} \cdot \frac{h}{\sum_{m=1}^{n} \frac{l_m}{k_m}} \quad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n) \cdots(3)$$

また, 砂柱が境界点 t で限界となるとすると, そのとき(2)式は次のようになる。

$$q_{tc} = \frac{h_{tc}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k_j}} \quad \cdots\cdots(4)$$

ここに,

h_{tc}, q_{tc} : 境界点 t で限界となるときの水頭差 h, 及び, 流量流速 q の値

$(\cdots\cdots)_{tc}$: サブスクリプト tc をつけて境界点 t で限界となるときの値を示す

(以下では, 同じような記法を断りなしに用いる)

注) summation convention ではない。$q = k_1 i_1$, $q = k_2 i_2$, $\cdots\cdots$, $q = k_n i_n$ を意味する。summation を表す場合は, $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j' l_j$ 等々, summation 記号 $\sum_{j=1}^{n}$ を用いる。本報では, summation convention を用いない。

である。

次に, 砂柱内の鉛直有効垂直応力について考える。Fig. 2 に, 一般的な n 層系 (押えフィルタあり) の砂柱において, 水頭差 h が $h = 0$ (初期状態) から増加してゆき $h = h_{tc}$ (限界状態) に至るまでの, 砂柱内部鉛直有効垂直応力分布の変化 (点 t で限界となる場合) を示している。ここに, 次のような記号を用いる。

σ_z' : z 地点における鉛直有効垂直応力 (圧縮を正にとる)

$\sigma_{z'(点m)}$: 砂柱内の境界点 m ($m = 1, 2, \cdots\cdots, n$) における鉛直有効垂直応力(圧縮を正にとる)

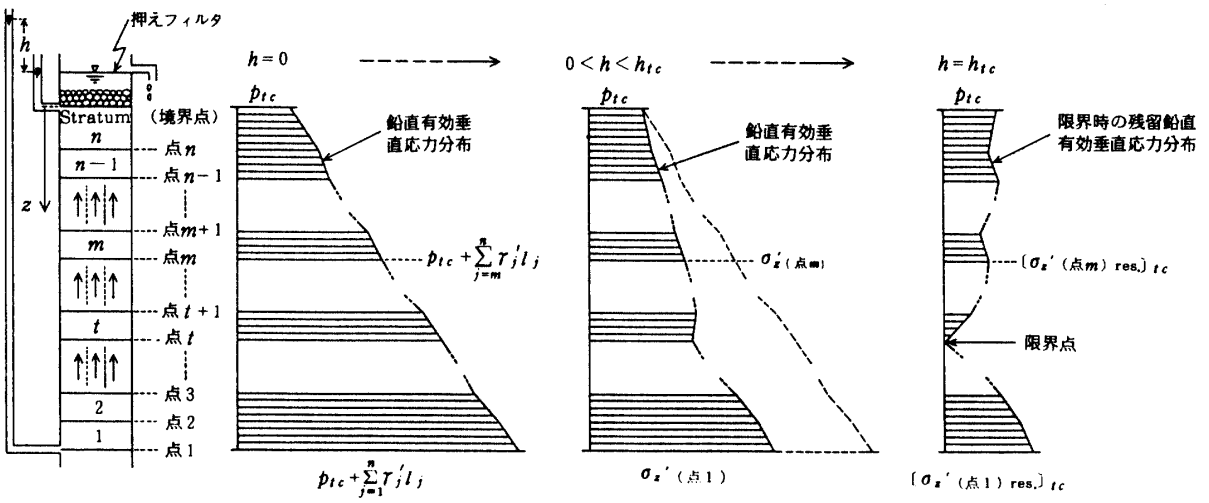
$[\sigma_{z'(点m)\ \mathrm{res.}}]_{tc}$: 点 t で限界となるときの境界点 m ($m = 1, 2, \cdots\cdots, n$) における残留鉛直有効垂直応力 (圧縮を正にとる)

z : Fig. 2 (1)に示すように砂柱の上端からの距離

このような記号を用いると, Fig. 2 (2)−(b)に示すように砂柱に水頭差 h がかかった場合の $\sigma_{z'(点m)}$ の値は, 点 m における力の釣り合い式から, 浸透力を考慮して次のようになる[8]。

$$\sigma_{z'(点m)} = p + \sum_{j=m}^{n} (\gamma_j' - i_j \gamma_w) l_j \quad \cdots\cdots(5)$$

($m = 1, 2, \cdots\cdots, n$)



(1) 多層系砂柱 (n 層系 (押えフィルタあり))

(2) 鉛直有効垂直応力分布の変化

Fig. 2　砂柱内部の鉛直有効垂直応力分布の変化
(点 t で限界となる場合 : $p = p_{tc}$)

(5)式は，(1)，(2)，(3)式を用いて次のように書き換えられる。

$$\sigma_z'(\text{点}m) = p+\sum_{j=m}^{n}\gamma_j' l_j - q\gamma_w\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j} \quad \cdots\cdots(6)$$

$$= p+\sum_{j=m}^{n}\gamma_j' l_j - \frac{\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot h\gamma_w \quad \cdots\cdots(6)'$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

また，Fig. 2 (2)−(c)に示すように砂柱が点 t で限界となるとすると，$[\sigma_z'(\text{点}m)\,\text{res.}]_{tc}$ は，(6)，(6)' 式から次のようになる。

$$[\sigma_z'(\text{点}m)\,\text{res.}]_{tc} = p_{tc}+\sum_{j=m}^{n}\gamma_j' l_j - q_{tc}\gamma_w\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j} \quad \cdots\cdots(7)$$

$$= p_{tc}+\sum_{j=m}^{n}\gamma_j' l_j - \frac{\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot h_{tc}\gamma_w \quad \cdots(7)'$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

(7)，(7)' 式において，p_{tc} は境界点 t で限界となるときの p の値である[注1)]。

砂柱の限界時（または，限界状態）の定義から，「限界時において限界点では $\sigma_z'=0$ である」ので，$p=p_{tc}$ のとき砂柱が境界点 t で限界となるとすると，Fig. 2 (2)−(c) に示すように，

$$[\sigma_z'(\text{点}t)\,\text{res.}]_{tc}=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

である。したがって，(7)式で $m=t$ とおいて(8)式を考慮すると，p_{tc} が次のように求められる。

$$p_{tc} = q_{tc}\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j} - \sum_{j=t}^{n}\gamma_j' l_j \quad \cdots\cdots(9)$$

また，(7)' 式で $m=t$ とおいて(8)式を考慮すると h_{tc} が次のように求められる。

$$h_{tc} = \left(p_{tc}+\sum_{j=t}^{n}\gamma_j' l_j\right)\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}} \quad \cdots\cdots(10)$$

また，限界時の定義から明らかに，「限界時において限界点 t 以外の境界点 m ($m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ ($m\neq t$)) では σ_z' (点m) $\geqq 0$ である」ので（Fig. 2 (2)−(c) 参照），

$$[\sigma_z'(\text{点}m)\,\text{res.}]_{tc}\geqq 0 \quad \cdots\cdots(11)$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\ (m\neq t))$$

（等号は，点 m が点 t と同時に限界となるときに成立する）

である。(11)式と(7)式から次の不等式が得られる。

$$p_{tc}\geqq q_{tc}\gamma_w\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j} - \sum_{j=m}^{n}\gamma_j' l_j \quad \cdots\cdots(12)$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\ (m\neq t))$$

（等号は，点 m が点 t と同時に限界となるときに成立する）

以下の議論では，種々の p の値に対応して砂柱が限界となる点が前もってわかっているものとする[8) 9)注2)]。また，層状堆積の砂柱の浸透破壊問題においては，砂柱内部の有効応力が層毎に直線的に変化するので層と層の境界点だけについて考えればよいことを示した[7)]。したがって，砂柱の限界状態を考える場合，ここでも砂柱内の境界点についてのみ考える。

Ⅲ．押えフィルタの3つの効果

著者らは，一，二，三層系砂柱の浸透破壊問題[1)〜3)]に関して（とくに，砂柱の限界状態に関して）詳しく考察し，押えフィルタには次の3つの効果があることを示した[6) 9)]。

(1) 限界点の降下　ある砂柱について限界となる点が砂柱の中間または最上層にあるとき，その砂柱に押えフィルタを載せることにより，p が大きくなるにつれて，限界となる点は，そこから下方へ移動し最終的に砂柱の最下端へ達する。

(2) 限界水頭差の増大　押えフィルタの有効上載圧 p の増加により，限界の動水勾配（すなわち，限界水頭差 h_c）が増大する。

(3) 限界時における砂層の安定性の増大　押えフィルタの有効上載圧 p の増加により，限界点より上の砂層中の限界時の残留有効応力が増大し，限界点より上の砂層の安定性が増す。

押えフィルタに関するこれら3つの効果は，前述したように，一，二，三層系に関してのみ導かれた結論であり，一般的な多層系砂柱に関しても言えるかどうかはいまだ明らかにされていない。ここでは，押えフィルタに関するこれら3つの効果が，一般的な層状堆積の砂柱に対しても言えるかどうかについて順に考察する。以下では，砂柱の限界時（限界状態）について考える。

(1) **限界点の降下**　いま，$1\leqq s<t\leqq n$（点 s は点 t より下の点）であり，砂柱が，$p=p_{sc}$ のとき点 s

注1) p_{tc} の意味は，後述する潜在限界点に関する説明でより明らかとなる。

注2) 種々の p の値に対応して砂柱が限界となる点は，既報　で述べたように，砂柱の浸透破壊に対する限界曲線，及び，限界図を作図することによって容易に求められる。

で限界となり，かつ，$p=p_{tc}$ のとき点 t で限界となるとする。p_{tc} は(9)式で表され，p_{sc} は(9)式で $t=s$ とおくことによって次式のように表される。

$$p_{sc}=q_{sc}\gamma_w\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j}-\sum_{j=s}^{n}\gamma_j' l_j \qquad \cdots\cdots(9)'$$

次に，砂柱が点 t で限界となるときの点 s における残留鉛直有効垂直応力について考えると（(12)式で $m=s$ とおいて），次の関係式が得られる。

$$p_{tc}\geqq q_{tc}\gamma_w\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j}-\sum_{j=s}^{n}\gamma_j' l_j \qquad \cdots\cdots(13)$$

（等号は，点 s が点 t と同時に限界となるときに成立する）

また，同様にして，砂柱が点 s で限界となるときの点 t における残留鉛直有効垂直応力について考えると（(12)式で $t=s$，$m=t$ とおいて），次の関係式が得られる。

$$p_{sc}\geqq q_{sc}\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}-\sum_{j=t}^{n}\gamma_j' l_j \qquad \cdots\cdots(13)'$$

（等号は，点 t が点 s と同時に限界となるときに成立する）

(9)，(13)' 式から次式を得る。

$$p_{sc}-p_{tc}\geqq(q_{sc}-q_{tc})\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j} \qquad \cdots\cdots(14)$$

（等号は，点 s および点 t で同時に限界となるときに成立する）。

(9)'，(13)式から次式を得る。

$$p_{sc}-p_{tc}\leqq(q_{sc}-q_{tc})\gamma_w\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j} \qquad \cdots\cdots(15)$$

（等号は，点 s および点 t で同時に限界となるときに成立する）

(14)，(15)式から次式をうる。

$$(q_{sc}-q_{tc})\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}\leqq p_{sc}-p_{tc}\leqq(q_{sc}-q_{tc})\gamma_w\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j} \qquad \cdots\cdots(16)$$

（等号は，点 s および点 t で同時に限界となるときに成立する）

(16)式の外側の2項から次の関係式が得られる。

$$(q_{sc}-q_{tc})\gamma_w\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j}-(q_{sc}-q_{tc})\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}\geqq 0$$

$$\therefore\ (q_{sc}-q_{tc})\gamma_w\sum_{j=s}^{t-1}\frac{l_j}{k_j}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(17)$$

（等号は，点 s および点 t で同時に限界となるときに成立する）

$l_j>0$，$k_j>0$（$j=1$，2，……，n），及び，$1\leqq s<t\leqq n$ より明らかに $\gamma_w\sum_{j=s}^{t-1}\frac{l_j}{k_j}>0$ であるので，(17)式から次の関係式をうる。

$$q_{sc}-q_{tc}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(18)$$

（等号は，点 s および点 t で同時に限界となるときに成立する）

したがって，p の値が変化してゆくときに砂柱が限界となりうる点[10]を点 s，点 t（$1\leqq s<t\leqq n$）とすると，(16)，(18)式から次の関係式をうる。

$q_{sc}\geqq q_{tc}$ のとき：$p_{sc}\geqq p_{tc}$ ……(19)

（複号同順；等号は，点 s および点 t で同時に限界となるときに成立する）

または，

$q_{sc}=q_{tc}$ のとき：$p_{sc}=p_{tc}$
（点 s と点 t で同時に限界となる）
$q_{sc}>q_{tc}$ のとき：$p_{sc}>p_{tc}$
（点 s と点 t で同時に限界とならない） ……(19)'

点 s は点 t より下方の境界点であるので，(19)式または(19)' 式は，上方の点 t を限界とするのに必要な p（$=p_{tc}$）よりも，それよりも下方の点 s を限界とするのに必要な p（$=p_{sc}$）の方が大きいことを示している。換言すれば，有効上載圧 p を大きくするほど，限界点は点 t から点 s へと，すなわち，下方へ移動すると言える。

（証明終り）

限界点の降下に関する証明はこのようになされるが，ここで，「有効上載圧 p の増加により限界点がどのように降下してゆくか」，また，「それに対応して，q，h の値がどのように変化してゆくか」について詳しく考察することは意義があると考えられる。したがって，以下では，p の増加による，q，h の変化のし方，及び，限界点の降下の様子について詳しい考察を行う。

ある多層系砂柱を考えたとき，押えフィルタの有効上載圧 p を0から増加させてゆくとき，境界点は，すべて限界となる可能性を潜在的に持っているとは限らず，その可能性を潜在的に持っている場合と持っていない場合がある[10]。また，ある範囲の p の値に対して限界時に限界となる可能性を潜在的に持っている境界点でも異なる範囲の p の値に対して限界とならない場合がある[10]。p（$\geqq 0$）のある値に対して限界となる可能性がある境界点を「潜在限界点」[10]と呼ぶことにする。潜在限界点を砂柱の下から上方へ順に点1[注)]，点 f，……，点 s，点 t，点 u，……，点 w（$1<f<\cdots\cdots<s<t<u<\cdots\cdots<w\leqq n$）とすると，(19)式を拡張した次の式が成り立つ。

注) p が0から増加してゆくとき，砂柱は最終的に最下端（点1）で限界となる[10]。

$$p_{1c} \geqq p_{fc} \geqq \cdots\cdots \geqq p_{sc} \geqq p_{tc} \geqq p_{uc} \geqq \cdots\cdots \geqq p_{wc} \geqq 0$$

（等号は，左右の項に関係する境界点で同時に限界となるときに成立する）[注1]　……(20)

上述の方法と同様にして，流量流速 q について考えると，(7)，(9)，(11)式から，

$$\frac{p_{sc}-p_{tc}}{\gamma_w \sum_{j=s}^{n} \frac{l_j}{k_j}} \leqq q_{sc}-q_{tc} \leqq \frac{p_{sc}-p_{tc}}{\gamma_w \sum_{j=t}^{n} \frac{l_j}{k_j}} \quad \cdots\cdots(21)$$

（等号は，点 s と点 t で同時に限界となるときに成立する）

となり，(20)式と類似の次の関係式をうる。

$$q_{1c} \geqq q_{fc} \geqq \cdots\cdots \geqq q_{sc} \geqq q_{tc} \geqq q_{uc} \geqq \cdots\cdots \geqq q_{wc} \geqq 0$$

（等号は，左右の項に関係する境界点で同時に限界となるときに成立する）　……(22)

水頭差 h に関しても，同様にして，(7)'，(10)，(11)式から，

$$\frac{p_{sc}-p_{tc}}{\gamma_w \sum_{j=s}^{n} \frac{l_j}{k_j}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k_j} \leqq h_{sc}-h_{tc} \leqq \frac{p_{sc}-p_{tc}}{\gamma_w \sum_{j=t}^{n} \frac{l_j}{k_j}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k_j} \quad \cdots\cdots(23)$$

（等号は，点 s と点 t で同時に限界となるときに成立する）

となり，(20)，(22)式と類似の次の関係式をうる。

$$h_{1c} \geqq h_{fc} \geqq \cdots\cdots \geqq h_{sc} \geqq h_{tc} \geqq h_{uc} \geqq \cdots\cdots \geqq h_{wc} \geqq 0$$

（等号は，左右の項に関係する境界点で同時に限界となるときに成立する）　……(24)

(9)，(10)式からわかるように，例えば点 t が限界となるときの p，q，及び，h の値 p_{tc}，q_{tc}，及び，h_{tc} は一対一対応している。したがって、砂柱の限界となる点（潜在限界点）を点 s，点 t（$1 \leqq s < t \leqq n$）とすると，(20)，(22)，(24)から，(19)，(19)' 式と同様の次の関係式をうる。

$p_{sc} \geqq p_{tc}$ のとき：$q_{sc} \geqq q_{tc}$，$h_{sc} \geqq h_{tc}$　…(25)

（複号同順；等号は，点 s と点 t で同時に限界となるときに成立する）

または，

$p_{sc} = p_{tc}$ のとき：$q_{sc} = q_{tc}$，$h_{sc} = h_{tc}$

（点 s と点 t で同時に限界となる）

$p_{sc} > p_{tc}$ のとき：$q_{sc} > q_{tc}$，$h_{sc} > h_{tc}$

（点 s と点 t で同時に限界とならない）　…(25)'

次に，(20)式における $p_{sc} \geqq p_{tc} \geqq p_{uc}$ について詳しく調べる。砂柱内のある点で限界となる p の値は，一般的にある幅をもっている[10]。例えば，点 t で限界となる p の値 p_{tc} は，一般的に，[注2]

$$p_{tc\,\max} \geqq p_{tc} \geqq p_{tc\,\min} \quad \cdots\cdots(26)$$

となる。ここに，

$p_{tc\,\max}$，$p_{tc\,\min}$：境界点 t で限界となるときの p の値 p_{tc} の最大値，及び最小値

（以下では，同じような記法を断りなしに用いる）

である。また，(20)式において，

①等号は左右の項に関係する境界点で同時に限界となるときに成立し，また，

②砂柱内の 2 つ以上の境界点で同時に限界となるのは 1 つの p の値である[注3]

ので，$p_{sc} \geqq p_{tc} \geqq p_{uc}$ のより正確な表示は，次のようになる。

（点 s と点 t で同時に限界）　（点 t と点 u で同時に限界）

（点 s で限界）　（点 t で限界）

$$p_{sc\,\max} \geqq p_{sc} \geqq p_{sc\,\min} = p_{tc\,\max} \geqq p_{tc} \geqq p_{tc\,\min} =$$

（点 u で限界）

$$p_{uc\,\max} \geqq p_{uc} \geqq p_{uc\,\min} \quad \text{[注4]} \quad \cdots\cdots(27)$$

$p_{tc\,\min}$，$q_{tc\,\min}$ は，次のように求められる。まず，(9)式から次式をうる。

$$p_{tc\,\min} = q_{tc\,\min} \gamma_w \sum_{j=t}^{n} \frac{l_j}{k_j} - \sum_{j=t}^{n} \gamma_j' l_j \quad \cdots\cdots(28)$$

$$p_{uc\,\max} = q_{uc\,\max} \gamma_w \sum_{j=u}^{n} \frac{l_j}{k_j} - \sum_{j=u}^{n} \gamma_j' l_j \quad \cdots\cdots(29)$$

[注5]

$p_{tc\,\min}$，$q_{tc\,\min}$ は，$p_{tc\,\min} = p_{uc\,\max}$ $q_{tc\,\min} = q_{uc\,\max}$ の関係式と(28)，(29)式を用いて次のように求めることができる。

注1）たとえば，$p_{tc} \geqq p_{uc}$ の場合の等号は，点 t および点 u で同時に限界となるときに成立する。

注2）点 t で限界となる p の値が一つの値（すなわち，p_{tc} が幅をもたず一つの値）のとき，$p_{tc\,\max} = p_{tc} = p_{tc\,\min}$ となる。

注3）引用文献10で述べたように，砂柱の浸透破壊に対する限界曲線は仮想限界直線からminimum criterionを用いて求められるが，そこで考察した仮想限界直線の性質からこの事柄がいえる。

注4）(27)式において，$p_{tc\,\max} = p_{tc\,\min}$ の場合，p_{tc} は一つの値となり，$p_{sc\,\min} = p_{tc\,\max} = p_{tc} = p_{tc\,\min} = p_{uc\,\max}$ となる。このとき，点 s，点 t，及び，点 u で同時に限界となる。

注5）前述したように，p_{tc} と q_{tc} は一対一対応しており，(9)式が成立するので，$p_{tc\,\min}$ は $q_{tc\,\min}$ に対応している。したがって，$p_{tc\,\min} = p_{uc\,\max}$ は，$q_{tc\,\min} = q_{uc\,\max}$ に対応している。

$$p_{tc\ \min}=p_{uc\ \max}=\frac{\sum_{j=u}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=t}^{u-1}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\sum_{j=t}^{u-1}\gamma_j' l_j-\sum_{j=u}^{n}\gamma_j' l_j \quad \cdots\cdots(30)$$

$$q_{tc\ \min}=q_{uc\ \max}=\frac{\sum_{j=t}^{u-1}\gamma_j' l_j}{\gamma_w\sum_{j=t}^{u-1}\frac{l_j}{k_j}} \quad \cdots\cdots(31)$$

同様にして、$h_{tc\ \min}$ は，次のように求められる。まず，(10)式から次式をうる。

$$h_{tc\ \min}=\left(p_{tc\ \min}+\sum_{j=t}^{n}\gamma_j' l_j\right)\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}} \quad \cdots\cdots(32)$$

$$h_{uc\ \max}=\left(p_{uc\ \max}+\sum_{j=u}^{n}\gamma_j' l_j\right)\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=u}^{n}\frac{l_j}{k_j}} \quad \cdots\cdots(33)$$

$h_{tc\ \min}$は，$p_{tc\ \min}=p_{uc\ \max}$，$h_{tc\ \min}=h_{uc\ \max}$ 注1）の関係式と(32)，(33)式を用いて次のように求めることができる。

$$h_{tc\ \min}=h_{uc\ \max}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=t}^{u-1}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\sum_{j=t}^{u-1}\gamma_j' l_j \quad \cdots\cdots(34)$$

$p_{tc\ \max}$，$q_{tc\ \max}$，及び，$h_{tc\ \max}$は，(30)，(31)，及び，(34)式を用いて容易に次のように求めることができる 注2）。

$$p_{sc\ \min}=p_{tc\ \max}=\frac{\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=s}^{t-1}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\sum_{j=s}^{t-1}\gamma_j' l_j-\sum_{j=t}^{n}\gamma_j' l_j \quad \cdots\cdots(35)$$

$$q_{sc\ \min}=q_{tc\ \max}=\frac{\sum_{j=s}^{t-1}\gamma_j' l_j}{\gamma_w\sum_{j=s}^{t-1}\frac{l_j}{k_j}} \quad \cdots\cdots(36)$$

$$h_{sc\ \min}=h_{tc\ \max}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=s}^{t-1}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\sum_{j=s}^{t-1}\gamma_j' l_j \quad \cdots\cdots(37)$$

さて，(20)式のより正確な表示は，(27)式を拡張して，次のようになる。

$$\overbrace{p_{1c}}^{(点1)}\geqq\underbrace{p_{1c\ \min}}_{(点1と点f)}=\overbrace{p_{fc\ \max}\geqq p_{fc}\geqq p_{fc\ \min}}^{(点f)}=\cdots\cdots$$

$$\cdots=\overbrace{p_{sc\ \max}\geqq p_{sc}\geqq p_{sc\ \min}}^{(点s)}=\underbrace{p_{tc\ \max}\geqq p_{tc}\geqq p_{tc\ \min}}_{(点s と点t)}=\overbrace{p_{tc\ \max}\geqq p_{tc}\geqq p_{tc\ \min}}^{(点t)}=$$

$$\overbrace{p_{uc\ \max}\geqq p_{uc}\geqq p_{uc\ \min}}^{(点u)}=\cdots=\overbrace{p_{wc\ \max}\geqq p_{wc}\geqq p_{wc\ \min}}^{(点w)}\geqq 0 \quad \cdots\cdots(38)$$

(38)式の不等式の上部に示す( )内の点は，当該部分のpの値またはpの範囲に対して限界となる境界点を表す。

前述したように，p，q，及び，hは一対一対応しているので，q_c，h_c に関しても，(22)，(24)式のより正確な表示式として，(38)式と類似の次の式が得られる。

$$q_{1c}\geqq q_{1c\ \min}=q_{fc\ \max}\geqq q_{fc}\geqq q_{fc\ \min}=\cdots\cdots$$

$$\cdots=q_{sc\ \max}\geqq q_{sc}\geqq q_{sc\ \min}=q_{tc\ \max}\geqq q_{tc}\geqq q_{tc\ \min}=$$

$$q_{uc\ \max}\geqq q_{uc}\geqq q_{uc\ \min}=\cdots=q_{wc\ \max}\geqq q_{wc}\geqq q_{wc\ \min}\geqq 0 \quad \cdots\cdots(39)$$

$$h_{1c}\geqq h_{1c\ \min}=h_{fc\ \max}\geqq h_{fc}\geqq h_{fc\ \min}=\cdots\cdots$$

$$\cdots=h_{sc\ \max}\geqq h_{sc}\geqq h_{sc\ \min}=h_{tc\ \max}\geqq h_{tc}\geqq h_{tc\ \min}=$$

$$h_{uc\ \max}\geqq h_{uc}\geqq h_{uc\ \min}=\cdots=h_{wc\ \max}\geqq h_{wc}\geqq h_{wc\ \min}\geqq 0 \quad \cdots\cdots(40)$$

(39)，(40)式において，q_c，h_c の各値と限界となる点の関係は(38)式と同様である。

(38)式からわかるように，ある砂柱に関して限界となる点が砂柱の中間または最上層 注3）にあるとき，その砂柱に押えフィルタを載せることにより，pが大きくなるにつれて，限界点は，そこから下方に移動し最終的に（$p\geqq p_{1c\ \min}$ で）砂柱の最下端へ達する。(38)式においては，限界点は，pが増加するにつれて次のように移動する：点w→……→点u→点t→点s→……→点f→点1。

（説明終り）

(2) **限界水頭差の増大**　ここでは，Fig. 2 (2)－(c)に示すように，一般的に点tで限界となる場合を考える 注4）。いま，押えフィルタの有効上載圧が$p=p_{tc}$ であるとすると（$p_{tc\ \min}\leqq p_{tc}<p_{tc\ \max}$），それに対応する$h$の値$h_{tc}$は，(4)，(10)式から次のようになる。

注1）前述したように，p_{tc} と h_{tc}は一対一対応しとおり，(10)式が成立するので，$p_{tc\ \min}$ は $h_{tc\ \min}$ に対応している。したがって，$p_{tc\ \min}=p_{uc\ \max}$ は，$h_{tc\ \min}=h_{uc\ \max}$ に対応している。

注2）(30)，(31)，及び，(34)式において，$t=s$，$u=t$ とおけばよい。

注3）$p=0$のときに砂柱が点nで限界となる場合，その砂柱は最上層で限界となる（残留有効応力が0となる）[7]。

注4）限界時に2点以上の境界点で同時に限界となる場合，最も下の限界点について考えるものとする。したがって，その場合，最も下の限界点を点tと考える。

$$h_{tc}=(p_{tc}+\sum_{j=t}^{n}\gamma_j' l_j)\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}=q_{tc}\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}\cdots(41)$$

(41)式からわかるように，h_{tc}はp_{tc}に一対一対応しており，h_{tc}はp_{tc}に関して増加関数である。したがって，押えフィルタの有効上載圧p_{tc}が増加すれば，限界水頭差h_{tc}が増加することが予想されるが，ここでは，pの増分Δp（>0）に対して，限界水頭差h_cがどれだけ増すか，すなわち，増分Δh_cを求めることによってこれを証明する。ここで，Δpに対応する流量流速qの増分をΔqとする。

Fig. 3は，pが$p=p_{tc}$から$p=p_{tc}+\Delta p$へ増加したときに，限界時における砂柱内の残留効応力分布がどのように変化するか，すなわち，pの増加（$p=p_{tc}\rightarrow p=p_{tc}+\Delta p$）に対応する限界点の移動の様子を示している。Fig. 3 (1)に示すように，$p=p_{tc}$のときに点tにあった限界点は，pの増分Δpに対して，一般的にFig. 3 (2)—(a), (b), (c)のような位置にくると考えられる。ここでは，(i)増分Δpに対して限界点が同じ位置（点t）の場合と，(ii)増分Δpに対して限界点が降下する場合に分けて説明する。

(i) 増分Δpに対して限界点が同じ位置（点t）の場合 (Fig. 3 (2)—(a), (b)) この場合，$p_{tc\,\min}<p_{tc}+\Delta p\leqq p_{tc\,\max}$であるので，(41)式から次式をうる。

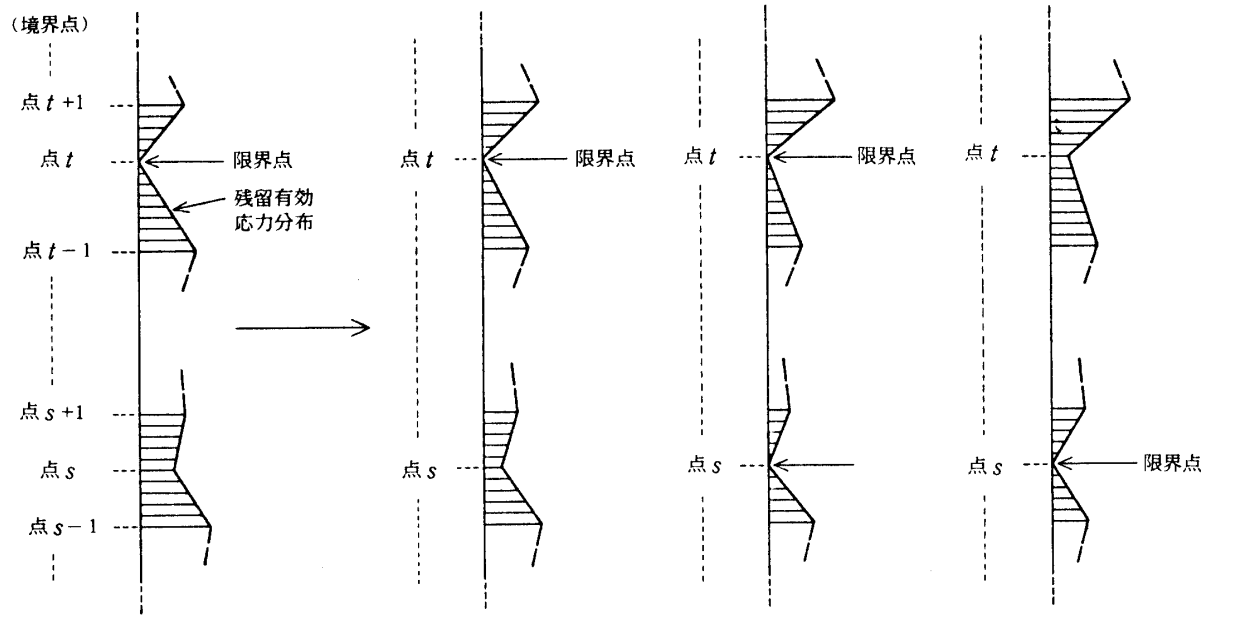
$$h_{tc}+\Delta h_c=(p_{tc}+\Delta p+\sum_{j=t}^{n}\gamma_j' l_j)\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}=(q_{tc}+\Delta q)\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}\quad\cdots\cdots(42)$$

したがって，Δh_cは，(41), (42)式から次のようになる。

$$\Delta h_c=\Delta p\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}=\Delta q\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}\quad(>0)\quad\cdots\cdots(43)$$

したがって，増分Δpに対して限界点が同じ位置の場合，(43)式から，押えフィルタの有効上載圧pが増加（$\Delta p>0$）すれば，限界水頭差が増加（$\Delta h_c>0$）することがわかる。

(ii) 増分Δpに対して限界点が降下する場合（Fig. 3 (2)—(c)) ここでは，Fig. 3 (2)—(c)に示すように，増分Δpに対して限界点が点tから点sへ降下する場合を考える。この場合，$p_{sc\,\min}<p_{tc}+\Delta p\leqq p_{sc\,\max}$であるので，(41)式で$h_{tc}=h_{tc}+\Delta h_c$，$p_{tc}=p_{tc}+\Delta p$，$q_{tc}$



(a) $p_{tc\,\min}<p_{tc}+\Delta p<p_{tc\,\max}$　(b) $p_{tc}+\Delta p=p_{tc\,\max}=p_{sc\,\min}$　(c) $p_{sc\,\min}<p_{tc}+\Delta p\leqq p_{sc\,\max}$

(1) $p=p_{tc}$のときの残留有効応力分布 ($p_{tc\,\min}\leqq p_{tc}<p_{tc\,\max}$)

(2) $p=p_{tc}+\Delta p$のときの残留有効応力分布

Fig. 3　pの増加に対応する限界点の移動（$p=p_{tc}$，及び，$p=p_{tc}+\Delta p$のときの残留有効応力分布）

$=q_{tc}+\Delta q$，及び$\sum_{j=t}^{n}$におけるtを$t=s$とおいて次式をうる。

$$h_{tc}+\Delta h_c=(p_{tc}+\Delta p+\sum_{j=s}^{n}\gamma_j' l_j)\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j}}=(q_{tc}+\Delta q)\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j} \quad \cdots\cdots(44)$$

またこの場合，$p_{tc}+\Delta p=p_{sc}$，$h_{tc}+\Delta h_c=h_{sc}$，及び，$q_{tc}+\Delta q=q_{sc}$とおくことができるので，Δh_cは，(4)式を用いて次のように表すことができる。

$$\Delta h_c=h_{sc}-h_{tc}=(q_{sc}-q_{tc})\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}=\Delta q\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j} \quad \cdots(45)$$

注1）

したがって，Δh_cは，(23)，(45)式から次のようになる。

$$0<\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\Delta p<\Delta h_c<\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\Delta p \quad \cdots\cdots(46)$$

したがって，増分Δpに対して限界点が降下する場合も，(46)式から，押えフィルタの有効上載圧pが増加（$\Delta p>0$）すれば，限界水頭差が増加（$\Delta h_c>0$）することがわかる。

Δh_cの値は，(45)，(41)，(44)式から次のようになる。

$$\begin{aligned}\Delta h_c&=h_{sc}-h_{tc}\\&=(h_{tc}+\Delta h_c)-h_{tc}\\&=(p_{tc}+\Delta p+\sum_{j=s}^{n}\gamma_j' l_j)\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\\&\quad-(p_{tc}+\sum_{j=t}^{n}\gamma_j' l_j)\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}} \quad \cdots\cdots(47)\end{aligned}$$

(i)，(ii)から，増分Δpによる限界点の降下の有無にかかわらず，押えフィルタの有効上載圧pが増加（$\Delta p>0$）すれば，限界水頭差が増加（$\Delta h_c>0$）することがわかる。　（証明終り）

(3) 限界時における砂層の安定性の増大　ここでは，一般的に点tで限界となる場合を考える注2）。いま，押えフィルタの有効上載圧が$p=p_{tc}$であるとすると（$p_{tc\,\min}\leqq p_{tc}<p_{tc\,\max}$），一般的な境界点$m$（$m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）における残留鉛直有効垂直応力$[\sigma_{z\,(点m)\,\mathrm{res.}}']_{tc}$は，(7)，(7)' 式のようになる。

ここでは，pの増分Δp（>0）に対して，一般的な境界点mにおける残留鉛直有効垂直応力がどれだけ増すか，すなわち，その増分$\Delta\sigma_{z\,(点m)\,\mathrm{res.}}'$を求める。ここで，$p$の増分$\Delta p$に対する限界水頭差$h_c$及び流量流速$q$の増分を，それぞれ，$\Delta h_c$及び$\Delta q$とする。ここでは，前述の(2)と同様な場合(i)，(ii)に分けて説明する。

(i)　増分Δpに対して限界点が同じ位置（点t）の場合（Fig. 3 (2)−(a),(b)）　この場合，$p_{tc\,\min}<p_{tc}+\Delta p\leqq p_{tc\,\max}$であるので，(7)，(7)' 式から次式をうる。

$$\begin{aligned}&[\sigma_{z\,(点m)\,\mathrm{res.}}']_{tc}+\Delta\sigma_{z\,(点m)\,\mathrm{res.}}'\\&=p_{tc}+\Delta p+\sum_{j=m}^{n}\gamma_j' l_j-(q_{tc}+\Delta q)\cdot\gamma_w\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j} \quad \cdots\cdots(48)\\&=p_{tc}+\Delta p+\sum_{j=m}^{n}\gamma_j' l_j-\frac{\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot(h_{tc}+\Delta h_c)\gamma_w \quad \cdots(48)'\end{aligned}$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

(7)，(48)式，及び，(7)'，(48)' 式から次式をうる。

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{z}'(点m)\mathrm{res.}&=\Delta p-\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}\cdot\gamma_w\cdot\Delta q\\&=\Delta p-\frac{\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\gamma_w\cdot\Delta h_c \quad \cdots\cdots(49)\end{aligned}$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

したがって，$\Delta\sigma_{z\,(点m)\,\mathrm{res.}}'$は，(49)，(43)式から次のようになる。

$$\Delta\sigma_{z\,(点m)\,\mathrm{res.}}'=\left(1-\frac{\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\right)\cdot\Delta p=\Delta q\cdot\gamma_w\left(\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}-\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}\right)$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \quad \cdots\cdots(50)$$

したがって，pの増分Δpに対して限界点が同じ位置（点t）の場合，残留鉛直有効垂直応力の増分$\Delta\sigma_{z\,(点m)\,\mathrm{res.}}'$は，(50)式から，境界点$m$と限界点$t$の相対的な位置関係によって，次のように分類される。

$$\left.\begin{aligned}&t<m\leqq n\text{の場合：}\Delta\sigma_{z\,(点m)\,\mathrm{res.}}'>0\\&\quad(\text{点}m\text{が限界点}t\text{より上方の場合})\\&m=t\text{の場合：}\Delta\sigma_{z\,(点m)\,\mathrm{res.}}'=0\\&\quad(\text{点}m\text{が限界点}t\text{の場合})\\&1\leqq m<t\text{の場合：}\Delta\sigma_{z\,(点m)\,\mathrm{res.}}'<0\\&\quad(\text{点}m\text{が限界点}t\text{より下方の場合})\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(51)$$

(51)式は，「pの増加につれて，限界点tより上方の境界点m（$t<m\leqq n$）における残留鉛直有効垂直応力は増大し，限界点tより下方の境界点m（$1\leqq m<t$）における残留鉛直有効垂直応力は減少する」ことを意味して

注1）ここでは，点sと点tで同時に限界となる場合を考えていないので，(23)式における等号は考えなくてもよい。

注2）限界時に2点以上の境界点で同時に限界となる場合，最も下の限界点について考えるものとする。したがって，その場合，最も下の限界点を点tと考える。

いる。

(ii) 増分Δpに対して限界点が降下する場合（Fig. 3 (2)—(c)）　ここでは，Fig. 3 (2)—(c)に示すように，増分Δpに対して限界点が点tから点sへ降下する場合を考える。この場合，$p_{sc\,\min} < p_{tc} + \Delta p \leqq p_{sc\,\max}$であるので，(7)，(7)' 式から次式をうる。

$$\left[\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.}\right]_{tc} + \Delta\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.} = p_{tc} + \Delta p + \sum_{j=m}^{n}\gamma_j' l_j - \gamma_w (q_{tc} + \Delta q)\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j} \quad \cdots\cdots(52)$$

$$= p_{tc} + \Delta p + \sum_{j=m}^{n}\gamma_j' l_j - \frac{\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}} \cdot (h_{tc} + \Delta h_c)\ \gamma_w \quad \cdots\cdots(52)'$$

$$(m = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

またこの場合，$p_{tc} + \Delta p = p_{sc}$，$h_{tc} + \Delta h_c = h_{sc}$，および，$q_{tc} + \Delta q = q_{sc}$とおくことができるので，$\Delta\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.}$は，(7)，(52)式，及び，(7)'，(52)' 式から次のようになる。

$$\Delta\sigma_z'(\text{点}m)\,\text{res.} = \Delta p - \gamma_w \{(q_{tc} + \Delta q) - q_{tc}\}\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}$$

$$= \Delta p - \gamma_w (q_{sc} - q_{tc})\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j} \quad \cdots\cdots(53)$$

$$= \Delta p - \frac{\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}} \cdot \gamma_w\{(h_{tc} + \Delta h_c) - h_{tc}\}$$

$$= \Delta p - \frac{\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}} \cdot (h_{sc} - h_{tc})\gamma_w \quad \cdots\ (53)'$$

$$(m = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

したがって，$\Delta\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.}$は，(53)，(21)式から次のようになる[注]。

$$\left(1 - \frac{\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\right)\cdot\Delta p < \Delta\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.} < \left(1 - \frac{\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\right)\cdot\Delta p$$

$$(m = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \quad \cdots\cdots\cdots(54)$$

したがって，pの増分Δpに対して限界点が降下する場合（点t→点s），残留鉛直有効垂直応力の増分$\Delta\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.}$は，(54)式から，境界点$m$と限界となる点$t$，$s$の相対的な位置関係によって，次のように分類される。

$$\left.\begin{array}{l} t \leqq m \leqq n\text{の場合：}\ \Delta\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.} > 0 \\ \quad (\text{点}m\text{が点}t\text{以上にある場合}) \\ s < m < t\text{の場合：}\ \Delta\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.} \gtreqless 0 \\ \quad (\text{点}m\text{が点}s\text{と点}t\text{の間にある場合}) \\ 1 \leqq m \leqq s\text{の場合：}\ \Delta\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.} < 0 \\ \quad (\text{点}m\text{が点}s\text{以下にある場合}) \end{array}\right\} \cdots\cdots(55)$$

$\Delta\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.}$の値は，(53)，(9)，(9)' 式から次のようになる。

$$\Delta\sigma_z'(\text{点}m)\ \text{res.} = \Delta p - (q_{sc} - q_{tc})\gamma_w\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}$$

$$= \Delta p - \{(q_{tc} + \Delta q) - q_{tc}\}\gamma_w\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}$$

$$= \Delta p - \left\{\frac{p_{tc} + \Delta p + \sum_{j=s}^{n}\gamma_j' l_j}{\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j}} - \frac{p_{tc} + \sum_{j=t}^{n}\gamma_j' l_j}{\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\right\}\cdot\sum_{j=m}^{n}\frac{l_j}{k_j}$$

$$(m = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \quad \cdots\cdots(56)$$

限界時の残留有効応力は，限界時における砂層の安定性に関係すると考えられる。すなわち，砂層内における限界時の残留有効応力が大きくなるほど，限界時における砂層の安定性が増大すると考えられる[5]。一般的な多層系砂柱の限界状態について考察すると，(51)，(55)式から，限界時における砂層の安定性に関して次の事柄が言える。前述の(1)と同じように，考えている多層系砂柱の潜在限界点を下から上方へ順に点1，点f，……，点s，点t，点u，……，点w（$1 < f < \cdots\cdots < s < t < u < \cdots\cdots < w \leqq n$）とする。そして，いま，押えフィルタの有効上載圧が$p = p_{tc}$であり，境界点tで限界となる場合を考える（Fig 3 (1)参照）。このとき，(51)式から，「押えフィルタの有効上載圧pが増加してゆくにつれて，限界点tより上の砂層中の残留有効応力が増大し，限界点より上の砂層の安定性が増大してゆく；一方，限界点より下の砂層中の残留有効応力は減少し，限界点より下の砂層の安定性は減少してゆく」ことがわかる（Fig. 3 (2)—(a)参照）。さらにpが増加し$p = p_{tc\,\max} = p_{sc\,\min}$になると，限界点$t$の下の最も近い潜在限界点$s$で点$t$と同時に限界となる（限界時の残留有効応力が0となる）（Fig. 3 (2)—(b)参照）。さらにまだpが増加しつづけると，この点sが限界点となり上述と同様の事柄が繰返される。そして，pの増加につれてさらに限界点が降下してゆき，$p = p_{1c\,\min}$で限界点は砂柱の最下端へ達する（前述の(1)参照）。このようにして，限界点が砂柱の最下点へ達すると，pがさらに増加しても（$p > p_{1c\,\min}$），これ以上限界点が降下することはなくなり，限界点は砂柱の最下点のみとなり（$\sigma_z'(\text{点}1)\ \text{res.} = 0$），最下点

注）ここでは，点sと点tで同時に限界となる場合を考えていないので，(21)式における等号は考えなくてもよい。

（点1）より上の境界点m（$m=2$，3，……，n）における残留鉛直有効垂直応力 $[\sigma_{z'(点m)\,\mathrm{res.}}]_{1c}$ が増大し，砂柱全体の安定性が増大する。　（証明終り）

Ⅳ．多層系砂柱を一層（均質）と仮定することの合・不合理性

Fig.1に示すような多層系砂柱（n層系（押えフィルタあり））を考える。この砂柱（押えフィルタを含まない）を一層（均質）と仮定[注]したときの限界の動水勾配I_cは，次のようになる[4]。

$$I_c=\frac{\gamma_{av'}}{\gamma_w}+\frac{p}{L\cdot\gamma_w}=\frac{1}{\gamma_w\sum_{j=1}^{n}l_j}\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_j'l_j+p\right)\qquad\cdots\cdots(57)$$

砂柱を一層（均質）と仮定したときの限界の動水勾配I_cを，理論的に正しい「砂柱全体としてみたときの限界の動水勾配」$\left(\frac{h}{L}\right)_c$と比較することによって，砂柱を一層（均質）と仮定することの合・不合理性を判定することができる[4]。ここでは，(i)限界時において砂柱が最下点で限界とならない場合と，(ii)限界時において砂柱が最下点で限界となる場合に分けて考察する。

(i)　限界時において砂柱が最下点で限界とならない場合

限界時において砂柱が最下点で限界とならない場合（すなわち，砂柱が最下点以外で限界となる場合），例えば，$p=p_{tc}$ のとき点t で限界となるとすると（$t\neq1$，$2\leqq t\leqq n$），砂柱全体として見たときの限界の動水勾配 $\left(\frac{h}{L}\right)_{tc}$ は，(10)式を用いて次のようになる。

$$\left(\frac{h}{L}\right)_{tc}=\frac{h_{tc}}{\sum_{j=1}^{n}l_j}=\frac{p+\sum_{j=t}^{n}\gamma_j'l_j}{\gamma_w\sum_{j=1}^{n}l_j\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}\qquad(p=p_{tc})\qquad\cdots\cdots(58)$$

したがって，(57)，(58)式から，次式をうる。

$$\left(\frac{h}{L}\right)_{tc}-I_c=\frac{1}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}l_j\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\left\{p\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}-\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}\right)+\sum_{j=t}^{n}\gamma_j'l_j\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j'l_j\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}\right\}\qquad\cdots\cdots(59)$$

さて，ここでは，限界時において砂柱が最下点で限界とならない場合（すなわち，砂柱の最下点（点1）における残留鉛直有効垂直応力が$[\sigma_{z'(点1)\mathrm{res.}}]_{tc}>0$である場合）を考えているので，(7)式から次の関係式が得られる。

$$[\sigma_{z'(点1)\mathrm{res.}}]_{tc}=p+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j'l_j-q_{tc}\gamma_w\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}>0$$

$$\therefore\ q_{tc}\gamma_w\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}<p+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j'l_j\qquad(p=p_{tc})\qquad\cdots\cdots(60)$$

(60)式は，(9)式を用いて，次のように書き換えられる。

$$\frac{p+\sum_{j=t}^{n}\gamma_j'l_j}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\gamma_w\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}<p+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j'l_j$$

$$\therefore\ p\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}-\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}\right)+\sum_{j=t}^{n}\gamma_j'l_j\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j'l_j\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}<0\qquad(p=p_{tc})\qquad\cdots\cdots(61)$$

(59)，(61)式から次の関係式が得られる。

$$\left(\frac{h}{L}\right)_{tc}<I_c\qquad\cdots\cdots(62)$$

(62)式からわかるように，限界時において砂柱が最下点で限界とならない場合（すなわち，砂柱の中間，または，最上層で限界となる場合），その砂柱は一層（均質）と仮定したときの限界水頭差より小さな水頭差で限界状態となる。したがって，この場合，その砂柱を一層（均質）と仮定するのは限界水頭差の点からみて不合理である。

(ii)　限界時において砂柱が最下点で限界となる場合

限界時において砂柱が最下点（点1）で限界となる場合，砂柱全体としてみたときの限界の動水勾配 $\left(\frac{h}{L}\right)_{1c}$ は，(10)式を用いて次のようになる。

$$\left(\frac{h}{L}\right)_{1c}=\frac{h_{1c}}{\sum_{j=1}^{n}l_j}=\frac{p+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j'l_j}{\gamma_w\sum_{j=1}^{n}l_j\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}=\frac{p+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j'l_j}{\gamma_w\sum_{j=1}^{n}l_j}\qquad(p=p_{1c})\qquad\cdots\cdots(63)$$

(57)，(63)式から，次の関係式が得られる。

$$\left(\frac{h}{L}\right)_{1c}=I_c\qquad\cdots\cdots(64)$$

(64)式からわかるように，限界時において砂柱が最下点で限界となる場合，砂柱は一層（均質）と仮定したときの限界水頭差と同じ水頭差で限界状態となる。したがって，この場合，その砂柱を一層（均質）と仮定するのは限界水頭差の値に関して問題はない。

(i)，(ii)の説明を逆にたどれば，その逆も説明できる。したがって，一般的に，層状堆積の砂柱を考えた場合，

注）引用文献4で述べたと同じように，「層状堆積の砂柱（押えフィルタを含まない）を，その平均水中単位体積重量に等しい水中単位体積重量をもつ，一層（均質）系砂柱であると仮定すること」を，「層状堆積の砂柱を一層（均質）と仮定すること」と簡潔に表現する。

「限界時において砂柱が最下点で限界となるか否か」と「その砂柱を一層（均質）と仮定することが限界水頭差の点から見て合理的であるか否か」の間には一対一対応の関係があることがわかる。

（証明終り）

V．まとめ

一次元上昇浸透流による砂柱の破壊に関して，理論的に考察を行った。ここでは，一般的な多層系砂柱（n層系（押えフィルタあり））の浸透破壊問題に関して，とくに，押えフィルタの効果，及び，砂柱を一層（均質）と仮定することの合・不合理性について詳しく考察を行い，次のような結論を得た。

(1)　押えフィルタの3つの効果

(i)限界点の降下　ある多層系砂柱の潜在限界点を砂柱の下から上方へ順に点1，点f，……，点s，点t，点u，……，点w（$1<f<\cdots\cdots<s<t<u<\cdots\cdots<w\leqq n$）とすると，これらの潜在限界点で限界となるときの$p$の値に関する関係式は次のようになる。

$$\overbrace{\overbrace{p_{1c}\geqq p_{1c\,\min}}^{(\text{点}1)}=\overbrace{p_{fc\,\max}\geqq p_{fc}\geqq p_{fc\,\min}}^{(\text{点}1\text{と点}f)\,(\text{点}f)}=\cdots\cdots}$$

$$\cdots=\overbrace{\overbrace{p_{sc\,\max}\geqq p_{sc}\geqq p_{sc\,\min}}^{(\text{点}s)}=\overbrace{p_{tc\,\max}\geqq p_{tc}\geqq p_{tc\,\min}}^{(\text{点}s\text{と点}t)\,(\text{点}t)}=\overbrace{p_{uc\,\max}\geqq p_{uc}\geqq p_{uc\,\min}}^{(\text{点}t\text{と点}u)\,(\text{点}u)}=\cdots=\overbrace{p_{wc\,\max}\geqq p_{wc}\geqq p_{wc\,\min}}^{(\text{点}w)}\geqq 0$$

ここに，たとえば，p_{tc}は境界点tで限界となるpの値であり，$p_{tc\,\min}$，及び，$p_{tc\,\max}$は，p_{tc}の最小値，及び，最大値である。また，上式の上部に示す( )内の点は，当該部分のpの値またはpの範囲に対して限界となる境界点を表す。q，hに関しても，この式と類似の(39)式，及び，(40)式が成り立つ。この式は，上方の点を限界とするのに必要なpの値よりも，それよりも下方の点を限界とするのに必要なpの値の方が大きいことを意味している。すなわち，ある砂柱に関して限界となる点が砂柱の中間または最上層にあるとき，その砂柱に押えフィルタを載せることにより，pが大きくなるにつれて，限界点は，そこから下方に移動し最終的に（$p\geqq p_{1c\,\min}$で）砂柱の最下端へ達することを意味している。また，この場合，pの増加につれて限界点は次のように上から下方へ順に移動することがわかる：点w→……→点u→点t→点s→……→点f→点1。

(ii)　限界水頭差の増大　一般的に$p=p_{tc}$のとき$h=h_{tc}$で点tにおいて限界となる場合を考える。この場合，押えフィルタの有効上載圧がΔp（>0）だけ増加したときの限界水頭差h_{tc}の増分Δh_cは次のようになる。

①増分Δpに対して限界点が同じ位置（点t）の場合：

$$\Delta h_c=\Delta p\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\quad(>0)$$

②増分Δpに対して限界点が降下する場合（ここでは，一般的に限界点が点tから点sへ降下する場合（$1\leqq s<t\leqq n$）を考える）：

$$0<\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=s}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\Delta p<\Delta h_c<\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{k_j}}{\gamma_w\sum_{j=t}^{n}\frac{l_j}{k_j}}\cdot\Delta p$$

また，Δh_cの値は，(47)式で与えられる。

このようにして，①，②から，次の事柄が言える。増分Δpによる限界点の降下の有無にかかわらず，押えフィルタの有効上載圧pが増加（$\Delta p>0$）すれば，限界水頭差が増加（$\Delta h_c>0$）する。

(iii)　限界時における砂層の安定性の増大　一般的に，$p=p_{tc}$のとき$h=h_{tc}$で点tにおいて限界となる場合を考える。この場合，押えフィルタの有効上載圧がΔp（>0）だけ増加したときの境界点mにおける残留鉛直有効垂直応力の増分$\Delta\sigma_z'_{(\text{点}m)\,\text{res.}}$は次のようになる。

①増分Δpに対して限界点が同じ位置（点t）の場合：$\Delta\sigma_z'_{(\text{点}m)\,\text{res.}}$は，(50)式で与えられ，その値は境界点$m$と限界点$t$の相対的な位置関係によって次のように分類される。

$t<m\leqq n$の場合：$\Delta\sigma'_{z\,(\text{点}m)\,\text{res.}}>0$

（点mが限界点tより上方の場合）

$m=t$の場合：$\Delta\sigma'_{z\,(\text{点}m)\,\text{res.}}=0$

（点mが限界点tと一致する場合）

$1\leqq m<t$の場合：$\Delta\sigma'_{z\,(\text{点}m)\,\text{res.}}<0$

（点mが限界点tより下方の場合）

②増分Δpに対して限界点が降下する場合（ここでは，一般的に限界点が点tから点sへ降下する場合（$1\leqq s<t\leqq n$）を考える）：$\Delta\sigma'_{z\,(\text{点}m)\,\text{res.}}$は，(53)，(54)式で与えられ，その値は境界点mと限界となる点t，sの相対的な位置関係によって，次のように分類される。

$t\leqq m\leqq n$の場合：$\Delta\sigma'_{z\,(\text{点}m)\,\text{res.}}>0$

（点mが点t以上にある場合）

$s<m<t$の場合：$\Delta\sigma'_{z\,(\text{点}m)\,\text{res.}}\gtrless 0$

（点mが点sと点tの間にある場合）

$1 \leqq m \leqq s$の場合：$\Delta \sigma'_{z(\text{点}m)\text{res.}} < 0$

（点mが点s以下にある場合）

このようにして，①，②から，(i)の結論を考慮して次の事柄が言える。押えフィルタの有効上載圧pが増加してゆくにつれて，限界点tより上の砂層中の残留有効応力が増大し，限界点より上の砂層の安定性が増大してゆく；一方，限界点より下の砂層中の残留有効応力は減少し，限界点より下の砂層の安定性は減少してゆく。さらにpが増加すると，限界点tの下の最も近い潜在限界点sで点tと同時に限界となる（$p = p_{tc\,\max} = p_{sc\,\min}$）。さらにまだ$p$が増加すると，この点$s$が限界点となり上述と同様の事柄が繰返される。そして，pの増加につれてさらに限界となる点が降下してゆき，$p = p_{1c\,\min}$で限界点は砂柱の最下端へ達する。このようにして，限界点が砂柱の最下端へ達すると，pがさらに増加しても（$p > p_{1c\,\min}$），これ以上限界点が降下することはなくなり，限界点は砂柱の最下点のみとなり（$\sigma'_{z(\text{点}1)\text{res.}} = 0$），最下点（点1）より上の境界点$m$（$m = 2, 3, \cdots\cdots, n$）における残留鉛直有効垂直応力$[\sigma'_{z(\text{点}m)\text{res.}}]_{1c}$が増大し，砂柱全体の安定性が増大する。

(2) 多層系砂柱を一層（均質）と仮定することの合・不合理性

ある多層系砂柱に関して，「その砂柱を一層（均質）と仮定したときの限界の動水勾配」I_cと，理論的に正しい「砂柱全体としてみたときの限界の動水勾配」$\left(\frac{h}{L}\right)_c$を比較すると次のようになる。

①限界時において砂柱が最下点で限界とならない場合（すなわち，砂柱の中間，または，最上層で限界となる場合）：　一般的に，点t（$\neq 1$，$2 \leqq t \leqq n$）で限界となる場合を考えると，

$$\left(\frac{h}{L}\right)_{tc} < I_c$$

の関係式が成り立ち，その砂柱は一層（均質）と仮定したときの限界水頭差より小さな水頭差で限界状態となる。したがって，この場合，その砂柱を一層（均質）と仮定するのは限界水頭差の点からみて不合理である。

②限界時において砂柱が最下点で限界となる場合：

$$\left(\frac{h}{L}\right)_{tc} = I_c$$

の関係が成り立ち，砂柱は一層（均質）と仮定したときの限界水頭差と同じ水頭差で限界状態となる。したがって，この場合，その砂柱を一層（均質）と仮定するのは限界水頭差の値に関して問題はない。

このようにして，①，②から，次の事柄が言える。一般的に，層状堆積の砂柱を考えた場合，

「限界時において砂柱が最下点で限界となるか否か」と「その砂柱を一層（均質）と仮定することが限界水頭差の点からみて合理的であるか否か」

の間には一対一対応の関係がある。

一連の研究（引用文献1～10，及び，本報）は，本来，締切り矢板背後の上昇浸透流による地盤の浸透破壊問題などを対象にしている。これらの問題は，実際的には，二次元的または三次元的な問題であり，一次元的に解決できるものではない。しかしながら，その地盤の浸透破壊性状，押えフィルタの効果などを二次元的または三次元的な取り扱いから考察することは非常に困難であると考えられる。したがって，この一連の研究では，まず，実際の地盤をモデル化した一次元浸透流，一次元応力状態の場について考察を行い，地盤の基本的な破壊性状，押えフィルタの効果などを明らかにした。

今後，これら一連の研究から得られた成果をふまえて，次のような事柄が明らかにされるべきであると考えられる。

(1) 二次元的または三次元的な地盤の浸透破壊問題

(2) 内部有効応力の観点からみた層状フィルタの効果的な設計法

(3) 砂粒子の移動と内部有効応力の関係

〔謝　辞〕　一次元上昇浸透流による砂柱の破壊に関する一連の理論的研究の最終報にあたり，これまでとりわけ，ご指導，ご鞭撻を賜った元京都大学総長沢田敏男博士，元神戸大学教授吉良八郎博士，神戸大学農学部尾崎叡司教授，京都大学農学部長谷川高士教授，三重大学農学部近藤　武教授，神戸大学農学部石田陽博助教授および，岡山大学農学部三野　徹教授に心から謝意を表する次第である。

引用文献

1）沢田敏男，長谷川高士，田中　勉：農業土木学会論文集**88**，pp. 45－50（1980）．

2）沢田敏男，長谷川高士，田中　勉：農業土木学会論文集**89**，pp. 48－54（1980）．

3）沢田敏男，長谷川高士，田中　勉：農業土木学会論文集**90**，pp. 63－73（1980）．

4）田中　勉，長谷川高士：農業土木学会論文集**95**，pp. 72－78（1981）．

5）田中　勉，長谷川高士：農業土木学会論文集96，pp. 36－40（1981）．

6）田中 勉，吉良八郎，長谷川高士：農業土木学会論文集**98**，pp. 58－67（1982）．
7）田中 勉：農業土木学会論文集**99**，pp.53－61(1982).
8）田中 勉：農業土木学会論文集 **100**，pp. 63－75（1982）.
9）Tanaka, T. , H. KIRA and T. HASEGAWA : *Soils and Foundations* **22**(3), pp. 92－108（1982）.
10）田中 勉：神戸大学農学部研究報告**17**(1), pp. 33－44（1986）.