



線形時間不変系としての流域応答の推定

畑, 武志

(Citation)

神戸大学農学部研究報告, 9(1/2):91-95

(Issue Date)

1971

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/00227179>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00227179>



線形時間不変系としての流域応答の推定

畑 武 志*

(昭和46年1月9日受理)

Evaluation of Watershed Response as a Linear Time-Invariant System

Takeshi HATA

I. 緒 言

定量化される動的現象についてその変動特性をとらえるためには二つの方法が考えられる。第一は当該現象にかかわる過程を忠実に追跡しながら、系を構成する各要素の働きを明らかにすることによってその現象を総合的に説明しようとするものであり、第二は問題となる変量とそれの影響因子である変量群とに注目し、ある仮定のもとに変量間の相関を解析して系の内部構造をそれによって類推しようとするものである。ここでは後者の立場から、農業上の水利、および排水計画に際して必要な計画地点の流量、その中でも特に人的操作の少ない山地流域からの流出量の変動を扱う手法について考えた。ただし、線形、時間不変とみなし得る系については、これと同様な取り扱いができるから、以下の記述では一般性をもたせて書いている。

II. 線形、時間不変系

流域への流入水（降水）はシャ断、浸入、浸透、浸出地表滞留流下、あるいは蒸発散等各種の量的選別を受け、河川へ流出してくる。しかし、流入、流出の関係についていえば流域は有効な流入水に対する一個の波形変換系とみることができる。流出に関する単位図法的研究は流域を結局このような系とみなして、その中で起る各種の複雑な事象を系の応答関数である（瞬間）単位図に包含させようとするものである。このような系における流入、流出関係は、系内で量的損失がない場合は、一般に次の方程式で表わされる。

$$q(t) = \int_{-\infty}^t r(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

ここに、 $r(\tau)$ 、 $q(t)$ はそれぞれ τ および t 時の流入、流出量であり、 $u(t-\tau)$ はいわゆる単位インパルス応答¹⁾である。

(1)式では系の特性が経時的に不変であるとみなし、

* 農業土木学研究室

したがって $u(t-\tau)$ は t 、 τ の差のみで決まり、系によって定まったものと考えている。しかし、流域の特性変化は現実のものであり、厳密には u として t 、 τ いずれにも従属するものを²⁾、あるいはさらに、系の非線形性そのものを定式化することが重要であるが、この研究ではそれらの前段としての時間不変系に関する問題点の解決をはかりたい。

このような系における最適な $u(t)$ の抽出について、最近では BETSON らの gamma 関数による方法³⁾、HUDLOW らの PEARSON III 型関数による方法⁴⁾ など EDSON⁵⁾ の流れをくむ研究がある。この種の方法は少ないパラメータによって系の応答を表現する点で、各系の特性比較が容易に行なえる利点がある。一方、関数による表現である点に制約があり、各種の系に一般的に適用することは困難である。この外 FOURIER 級数によって表わす方法として、最近では OVERTON の研究⁶⁾ があり WIENER-HOFF の方程式にもとづく方法として高稗らの研究⁷⁾ があるが、誤差の最小化によって最適な応答関数を求める方法は、水文学においては SNYDER^{8, 9)} に負うところが大きいといえる。SNYDER 以後 BENDER¹⁰⁾、NEWTON¹¹⁾ が同様な方法で応答関数に相当する単位図の決定を行っているが、すでに LAURENSEN も指摘¹²⁾ しているように、(1)式での $r(\tau)$ 、すなわち有効降水量の推定時に加わる人為誤差が最終結果に大きく響くことなど、問題が残されている。

III. 流域応答推定の一方法

解析の対象となる測定値はたとえそれが連続量であってもつまるところ離散的な値が問題になるから、(1)式を単位時間 Δt できざみ、不連続な形で与えると

$$Q_i = \sum_{j=-\infty}^i R_j U_{i-j+1} \quad (2)$$

で表わされる。 R 、 Q 、および U は (1) と同じくそれぞれ流入、流出量、および単位インパルス応答（以下、単

位図と呼ぶ)であり、それぞれ単位時間平均量で表わしているが、単位時間おきの瞬間値をとる場合は上式Uのサフィックスはi-jとなる。

(2)式では、過去のすべての流入量を考慮することになるが、実際にはそれは不可能であるから、適当な解析期間をとり、それより以前の流入量の影響を取り除かなければならない。解析期間を長期にとれば一般に過去の流入の影響が小さくなるが、それが難しい場合は流入、流出の連続的な測定値を図表化することによってその系における概略の対応関係を調べる必要がある。そこで流域における流入、流出関係をみると、かなり以前にあった流入(降水)の影響量は指数関数的に小さくなる傾向がみられる。¹³⁾したがって、降水終了後適当な時間を経た時期を解析期間の始めとし、その時の流出量を Q_0 とすれば、次式

$$Q_t = Q_0 e^{-k t} \quad (3)$$

で表わされる量を解析期間中の測定流出量から差し引くことによって前の降水の影響を除くことができる。

前期降水の影響を除いた流出量を新たに Q_i とすると

解析期間(n単位時間)に応じて、測定値から(2)式に従って次の方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ R_2 & R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ R_3 & R_2 & R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_n & R_{n-1} & R_{n-2} & \cdots & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

R_j として有効降水列(この場合の有効降水量 $\sum R_j$ は地下水流出分も含めた「全流出量」¹³⁾となる)をとればいわゆる単位図として、

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} U_{\ell} = 1 \quad (5)$$

の関係を満足する。

Uの値は最初の期間(一般の中小流域では2~3日位)は変化に富むと考えられるが、前期降水の影響を指数関数的減少とみなせるように、また他の一般の系についてもいえるようにある時間経過後は(3)式と同様な減少傾向をとるとみても大きな誤差は入らないと考えられる。

したがって、(4)式はm個($m \leq n$)の未知量Uをもった連立一次方程式となるから、これより測定値Qとその計算値 Q_c の平均2乗誤差が最小となるよう通常最小2乗法によって未知量Uの最確値を求めれば、この場合の最適な単位図を決定することができる。

有効流入列が既知の系については上述の方法で単位図を求めることができるが、流域におけるようにそれが未知であり、その推定に無視できない誤差を伴うような場合には次の方法が考えられる。

(4)式において有効流入列のかわりに測定流入列を R_j に代入する。(5)式の $\sum U_{\ell}$ を U_A とおくと

$$U_A = \sum_{\ell=1}^m U_{\ell} + U_m e^{-0.5k/k} \quad (6)$$

となるが、系の中で量的損失のある場合、上のように代入すると、 $0 < U_A < 1$ となり、この U_A 値が流出率に等しくなる。よって各 R_j 値にこの U_A を乗ずれば、それが最初の有効流入列 Re_j となる。しかし、この Re_j は未だ誤差を含むものであるから誤差修正項を ϵ_j として、 $Re_j' = Re_j + \epsilon_j$ とおき、(4)式と同様に今度は有効流入列を未知項、先に得られた単位図縦距列(U_j/U_A)を既知量として平均

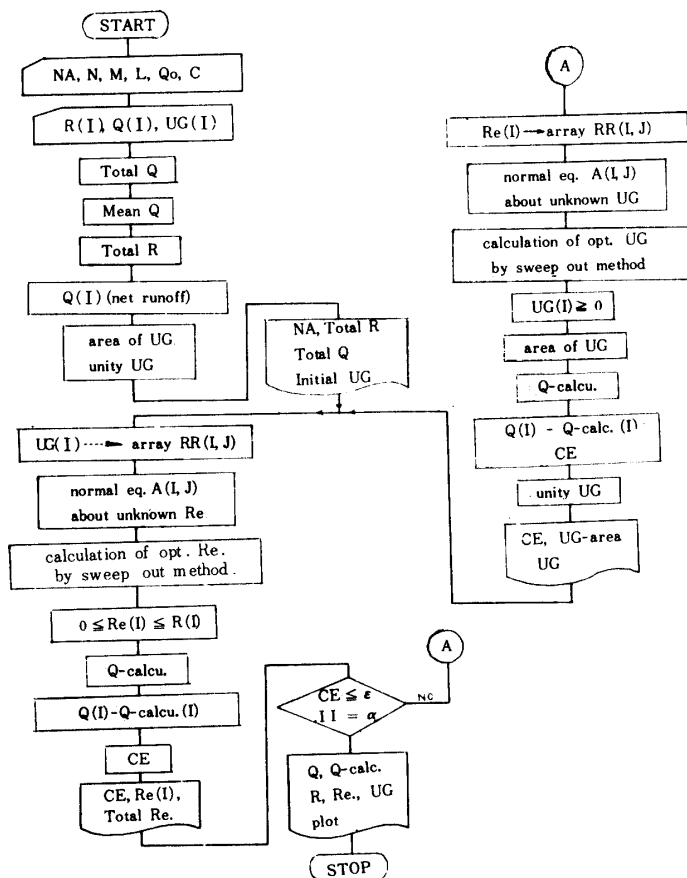


Fig. 1. Flow chart for deriving optimum unit-impulse response and series of effective inflow.

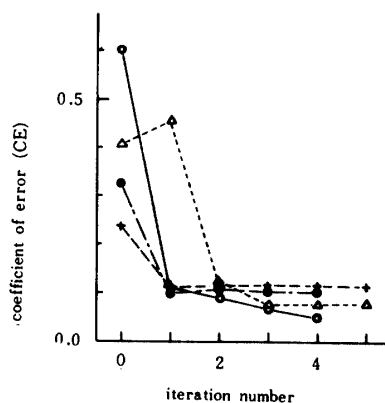


Fig. 2. Recession states of coefficient of error by iteration.

2乗誤差を最小化するように解き、 ϵ_j すなわち Re_j の最確値を求める。その次には(4)式の通りに上で得られた Re_j を既知、 U_j を未知量としてその場合の最適な U_j 値を求める。以下同様に反復修正を重ね、計算流出量が測定値と十分一致するまで繰り返すことにより、この系における単位図を決定する。

誤差の評価については、変動係数に相応する次の値

$$CE = \sqrt{(Q - Q_c)^2 / n} / \bar{Q} \quad (7)$$

をとることにした。ただし、 Q 、 Q_c 、 $\bar{Q}$ 、および n はそれぞれ測定流出量、その計算値、平均流出量、および測定値の個数である。

系の単位図の概形があらかじめ推定できる場合は上述の算定順序を逆にし、まず既知量として U_j の概略値を(4)式の正方向に配置し、有効流入列 Re_j を求め、上と同様に反復修正を行うことができる。Fig. 1に示したフローチャートはこの場合のものであり、単位図の概略値(UG(I))を流入、流出データとともに最初に計算機に与えるようにしている。計算の終了は(7)式のCE値および反復回数IIの判定によって行った。その他制限条件として $0 \leq Re_j \leq R_j$ 、また $U_j \geq 0$ を加味しているが、これは流域における流入、流出関係についてのものであり、蒸発散等の負の効果は損失水量として考慮した結果である。測定データがふえ、また、 m が大きくなると、かなり大容量の計算機を必要とするが、計算の主要部分は連立一次方程式を解くことであり、これについてはライブラリーも豊富であるから大きな問題はないといえる。

IV. 試験流域への適用

前節で提示した方法の有効性を確かめるため試験流域

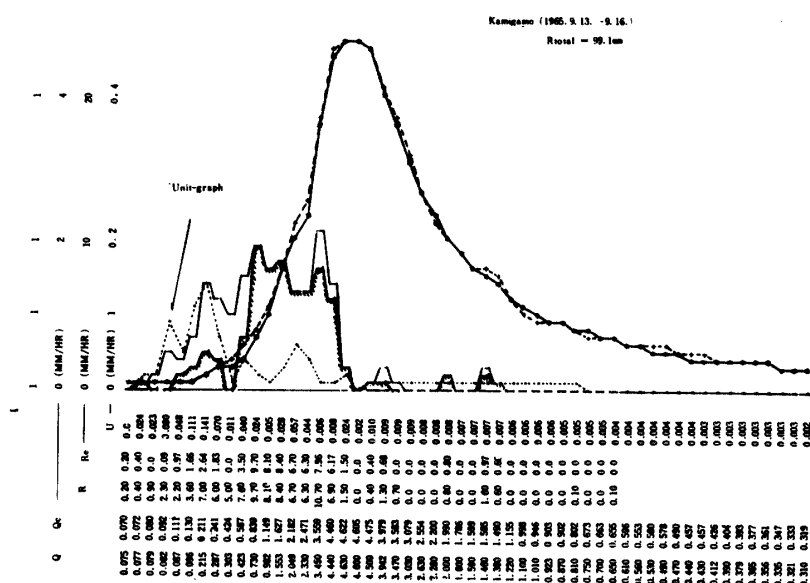


Fig. 3. Example of analysis (hourly routing).

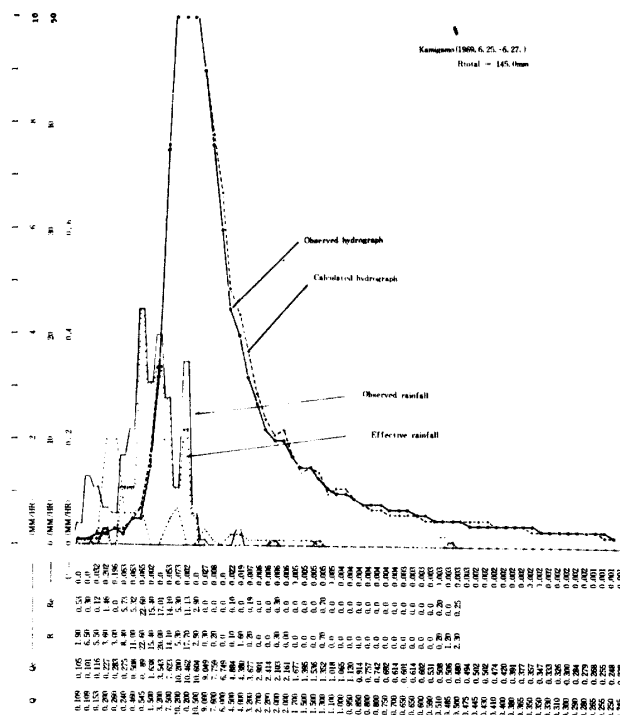


Fig. 4. Example of analysis (hourly routing).

での降水および流出測定値に適用した。資料は京大上質茂試験地内に設定された試験流域(流域面積4.39ha)のものである。測定方法および流域特性等については富士岡らの研究¹⁴⁾に詳しい。

Figs. 3~5に解析結果の一部を示したが、Figs. 3および4は時間単位の測定値についてであり、Fig. 5は日単位の解析例で、この場合の単位図は1966年3~9月の

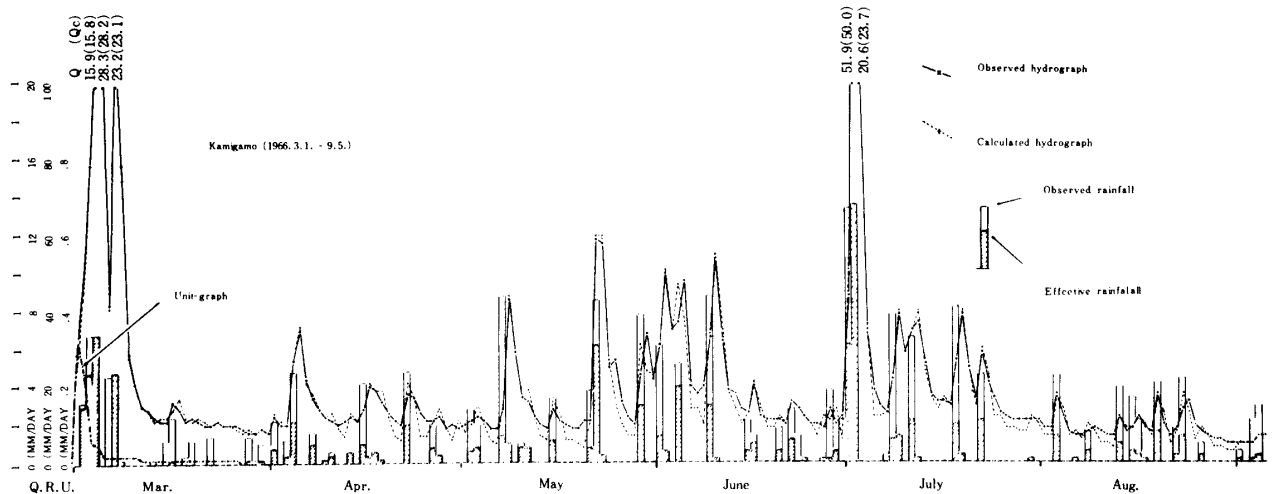


Fig. 5. Example of analysis (daily routing).

半年間の平均流域応答を表わす。前者については初期値として測定降水量 (R_j) を与え、 $m=20$ とした。また、後者は初期値として単位図縦距 (U_j) を与える方法を取り、 $m=5$ とした例である。

小流域の場合時間単位でもそうであるが、日単位の解析では1日間隔内での降水の強度分布によって日単位流出量は変化するから、ここで得られる単位図は確定的なものでなく、解析期間内の降水に対する流域の「平均的な」応答を表わすものとなる。また、日単位の解析では m 値を大きくすると得られる単位図は降水波形の影響を受け、その物理的意味が薄くなる場合があり、この点ではWIENER-HOPF 式による統計的な方法でも同様な危険性をもつことが考えられる。

計算誤差について (7) 式の CE 値を調べると、Fig. 2 に示したように反復回数2~3回ではほぼ所望の値に下がり、測定値に一致してくる傾向をもっている。 CE 値は0.1程度が望ましいが、降水および流出の測定値の誤差を考慮すると0.2程度で実用的には支障がないといえる。なお、ここでの計算には京大大型計算機センターのFACOM 230-60を利用した。

V. 摘 要

流入損失のある場合の線形、時間不変系について、測定流入列を初期値として与え、反復修正によって有効流入列とその系の単位インパルス応答 (単位図) を求める方法を示した。1個の関数で表現せず、最初の変化の激しい期間を離散的な数値で求め、後は指数関数を当てはめたから一般の複雑な応答特性をもつ系にも適用できると考えられる。単位図の概形があらかじめわかる場合には初期値としてそれを与え、有効流入列と正確な単位図を求めるため同様の反復修正を行うようにした。推定精

度の判定は (7) 式で行った。これらの計算方式をFig. 1に示している。

実験流域 (面積4.39ha) における降水量、および流出量の測定資料を上の方法で解析し、有用性を確かめた。降水、流出の系を時間不変とみなすことには困難があるが、長期間の降水に対する流域の平均的な応答としての単位図は特に利水の目的から重要であり、各種の流域について解析例をふやしてゆくことが必要であるといえる。

引用文献

- 1) 大泉・本多・野口：情報理論，オーム社，111，1962.
- 2) CHIU, C. and P. BITTLER: Linear Time-Varying Model of Rainfall-Runoff Relation, *Water Resources Res.*, **5**(2), 426-437, 1969.
- 3) BETSON, R.P. and R.F. GREEN: Analytically Derived Unit Graph and Runoff, *J. Hydraul. Div., A.S.C.E.*, **94**(6), 1489-1505, 1968.
- 4) HUDLOW, M.D. and R.A. CLARK: Hydrograph Synthesis by Digital Computer, *J. Hydraul. Div., A.S.C.E.*, **95**(3), 839-860, 1969.
- 5) EDSON, C.G.: Parameters for Relating Unit Hydrographs to Watershed Characteristics, *Trans., Amer. Geophys. U.*, **32**(4), 591-596, 1951.
- 6) OVERTON, D.E.: A Least-Squares Hydrograph Analysis of Complex Storms on Small Agricultural Watersheds, *Water Resources Res.*, **4**(5), 955-963, 1968.
- 7) 高程・池淵：長期間流出機構の情報理論的研究，京大防研年報，**12**(B)，273-293，1969.
- 8) SNYDER, W.M.: Hydrograph Analysis by the Method of Least Squares, *J. Hydraul. Div., A.*

- S.C.E.*, **81**, 793 (1-25), 1955.
- 9) SNYDER, W.M.: Some Possibilities for Multivariate Analysis in Hydrologic Studies, *J. Geophys. Res.*, **67**(2), 721-729, 1962.
- 10) BENDER, D.L. and J.A. ROBERSON: The Use of a Dimensionless Unit Hydrograph to Derive Unit Hydrographs for Some Pacific Northwest Basins, *J. Geophys. Res.*, **66**(2), 521-527, 1961.
- 11) NEWTON, D.W. and G.W. VINYARD: Computer - Determined Unit Hydrograph from Floods, *J. Hydraul. Div., A.S.C.E.* **93**(5), 219-235, 1967.
- 12) LAURENSEN, E.M. and T. O'DONNELL: Data Error Effects in Unit Hydrograph Derivation. *J. Hydraul. Div., A.S.C.E.*, **95**(6), 1899-1917, 1969.
- 13) 畑・富士岡: 河川流出の基底時間について, 農土論集, **34**, 17-21, 1970.
- 14) 富士岡・手島: 傾斜地の流出機構に関する基礎的研究 (IV), 農土研別冊, **4**, 19-23, 1962.

Summary

This paper deals with a method of how to get the series of effective inflow and the unit-impulse response (unit-graph) of linear time-invariant system which has inflow loss, taking the raw data about inflow as initial value and making necessary iteration. The response is not expressed by a function, but is represented by the discrete values during the early changeable period and after the period by an exponential function. Therefore it is able to apply the method to the system with complicated response. In case the rough unit-graph is assumed, the actual values and the series of effective inflow are obtained after iteration by taking the graph ordinates as initial values. The accuracy of the estimation of outflow is evaluated by equation 7. Figure 1 is the flow chart of above calculation.

The writer analyzes the data of rainfall and runoff in the experimental watershed (4.39 ha in area) by this method and finds it useful. It is difficult in a sense that the rainfall and runoff system is time-invariant, but especially for the purpose of water-utilization the unit-graph which shows the mean response of a watershed to rainfall for a long period of time is important. It is valuable to analyze the data in various areas.