



土水連成弾塑性有限要素法と例題解析

吉田, 信之
西, 勝
富永, 清樹

(Citation)

神戸大学都市安全研究センター研究報告, 2:71-82

(Issue Date)

1998-03

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/00317462>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00317462>



土水連成弾塑性有限要素法と例題解析

Water-Soil Coupled Elasto-Plastic Finite Element Method and an Example Analysis

吉田信之¹⁾

Nobuyuki Yoshida

西 勝²⁾

Masaru Nishi

富永清樹³⁾

Seiki Tominaga

概要：本報では、土水連成弾塑性有限要素プログラムの定式化を行い限界状態モデルを導入したプログラムを作成した。例題解析によりプログラミングの妥当性を一部ではあるが検証した。

キーワード：土水連成、限界状態、有限要素法

1. 序論

地盤工学における実現象の解析においては、完全排水条件あるいは完全非排水条件を仮定して近似解を求める場合が多い。また、適切な変形強度定数を設定することにより十分満足のいく解が得られる。

他方、盛土や切土による地盤内の応力や変形、構造物基礎や盛土のような表面荷重による基礎地盤内の応力や変形の建設中及び建設後の変化を考える場合には、地盤の圧密あるいは膨潤現象も考慮する必要がある。このような解析では、通常、地盤を完全飽和と見なし土粒子挙動と間隙水挙動の相互作用を考慮した、いわゆる土水連成解析が行われる。なお、土水連成有限要素解析は、特に目新しい解析手法ではなく古くは Sandhu and Wilson (1969) までさかのぼることが出来る。

地盤材料の力学モデルのうち最初の弾塑性モデルは Drucker, Gibson and Henkel (1957) によるものである。それは、Drucker (1951) の塑性理論に基づき関連流動則に従った加工硬化塑性モデルであり、Coulomb の破壊規準と圧密降伏条件を規定するキャップ型降伏曲面を有する。その後、Roscoe, Schofield and Thurairajah (1963) は状態境界面及び限界状態の概念に基づいて粘土の圧密及びせん断挙動を統一的に記述できる最初の力学モデル、すなわち Cam-clay model (カムクレイモデル) を提案した。このモデルは指数型降伏曲面を一つだけ有するもので、その後 Burland (1965) はその降伏曲面の形状を楕円型にした Modified Cam-clay model (修正カムクレイモデル) を、さらに Roscoe and Burland (1968) は修正カムクレイモデルにせん断降伏曲面を付加した Revised Cam-clay model (改良カムクレイモデル) を提案している。いずれも関連流動則に従うモデルである。

ところで、畠・太田 (1968, 1969) は、Roscoe らとは全く別に、柴田 (1973) の粘土のダイレイタンシー式と Drucker (前出) の弾塑性理論に基づいてカムクレイモデルと等価なモデルを提案している。

本研究の目的は、土水連成問題を解くための基礎ツールとして弾塑性有限要素プログラムを作成しその妥当性を検証することである。

2. 土水連成弾塑性有限要素法

2. 1 定式化

有限要素法の定式化は、Lewis and Schrefler (1987) に従い、土粒子骨格を支配する平衡方程式に対しては仮想変位の原理を、また間隙流体の挙動を支配する連続式に対してはGalerkinの重み付き残差法を適用した。ここでは間隙流体を水とし、完全飽和状態を仮定している。以下に、その概略を述べる。

2. 1. 1 境界条件

まず、解析対象領域及び境界条件を定義しておく。解析対象領域の全境界面を S とし、変位 $\{u\}$ を規定する境界面を S_1 、表面力 $\{f\}$ を規定する境界面を S_2 、間隙水圧 p を規定する境界面を S_3 、間隙水の流速 q を規定する境界面を S_4 とする。特に、境界面 S_3 上で

$$p = \bar{p} \quad [1]$$

また、境界面 S_4 上で

$$q = \bar{q} = -\{n\}^T \frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla(p + \rho_w g h) \quad [2]$$

かつ $S = S_3 \cup S_4$ である。

2. 1. 2 間隙水の挙動

間隙水の流れは、ダルシー則に従うと仮定する。すなわち、

$$q = -\frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla(p + \rho_w g h) \quad [3]$$

ここで、 q = ダルシー浸透速度、 $[k]$ = 透水係数、 ρ_w = 間隙水の密度、 g = 重力加速度、 p = 間隙水圧、 h = 任意の基準面からの位置水頭である。

地盤が完全に飽和しており、かつ間隙水が非圧縮性であると仮定すると、[1]を用いて間隙水に関する連続条件は次式のように表される。

$$\nabla^T \left\{ -\frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla(p + \rho_w g h) \right\} + \{m\}^T \frac{\partial}{\partial t} \{\epsilon\} = 0 \quad [4]$$

ここで、 $\{m\}$ は等方成分のみ1それ以外0をとる単位行列で $\{m\}^T = \langle 1 \ 1 \ 0 \ 1 \rangle$ 、 $\{\epsilon\}$ はひずみである。

さて、間隙水について、連続条件（式[4]）が物体内で満足され、かつ境界面上で境界条件（式[2]）が満足されるためには、次式を満足する必要がある。

$$\begin{aligned} \int_V \{a\}^T \left[\nabla^T \left\{ -\frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla(p + \rho_w g h) \right\} + \{m\}^T \frac{\partial}{\partial t} \{\epsilon\} \right] dV \\ + \int_S \{b\}^T \left[-\{n\}^T \frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla(p + \rho_w g h) - \bar{q} \right] dS = 0 \end{aligned} \quad [5]$$

ここで、 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ は任意の関数である。グリーンの定理を適用すると、

$$\begin{aligned} \int_V \left[(\nabla\{a\})^T \frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla(p + \rho_w g h) + \{a\}^T \{m\}^T \frac{\partial}{\partial t} \{\epsilon\} \right] dV \\ - \int_S \{a\}^T \{n\}^T \frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla(p + \rho_w g h) dS \\ + \int_S \left[-\{b\}^T \{n\}^T \frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla(p + \rho_w g h) - \{b\}^T \bar{q} \right] dS = 0 \end{aligned} \quad [6]$$

となるが、 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ が任意の関数であるから $\{b\} = -\{a\}$ とすると、

$$\int_V \left[(\nabla\{a\})^T \frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla(p + \rho_w g h) + \{a\}^T \{m\}^T \frac{\partial}{\partial t} \{\epsilon\} \right] dV + \int_S \{a\}^T \bar{q} dS = 0 \quad [7]$$

2. 1. 3 土粒子骨格の挙動

土粒子骨格部の変形挙動は次式で定義される有効応力 $\{\sigma'\}$ に支配される。

$$\{\sigma\} = \{\sigma'\} + \{m\} p \quad [8]$$

ここで、 $\{\sigma\}$ は全応力、 p は間隙水圧である。

さて、有効応力と土粒子骨格部のひずみを関係付ける構成関係式は弾塑性構成マトリックス $[D]^{ep}$ を用いて増分形で次のように表される。

$$\{d\sigma'\} = [D]^{ep} \{d\epsilon\} \quad [9]$$

仮想変位の原理を適用すると、

$$\int_V \langle \delta \epsilon \rangle \{d\sigma'\} dV = \int_V \langle \delta u \rangle \{df_b\} dV + \int_S \langle \delta u \rangle \{df_t\} dS \quad [10]$$

ここで、 $\{\delta u\}$ は仮想変位、 $\{\delta \epsilon\}$ は仮想変位から導かれる仮想ひずみ、 $\{df_b\}$ は物体力増分、 $\{df_t\}$ は表面力増分である。[8]及び[9]を[10]に代入し整理すると、

$$\int_V \langle \delta \epsilon \rangle \{d\sigma'\} dV + \int_V \langle \delta \epsilon \rangle \{m\} dp dV = \int_V \langle \delta u \rangle \{df_b\} dV + \int_S \langle \delta u \rangle \{df_t\} dS \quad [11]$$

2. 1. 4 有限要素による離散化

要素内の任意点での変位 $\{u\}$ 及びひずみ $\{\epsilon\}$ は、節点変位 $\{u_m\}$ 及び形状関数 $[N_d]$ を用いて次式のように表される。

$$\{u\} = [N_d] \{u_m\} \quad [12]$$

$$\{\epsilon\} = [B_d] \{u_m\} \quad [13]$$

また、体積ひずみ ϵ_{vol} は

$$\epsilon_{vol} = u_{i,i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \{u\} = \frac{\partial}{\partial x_i} [N_d] \{u_m\} = \langle B_v \rangle \{u_m\} \quad [14]$$

一方、要素内の任意点での間隙水圧 p は節点間隙水圧 $\{p_m\}$ 及び形状関数 $\langle N_p \rangle$ を用いて次式のように表される。

$$p = \langle N_p \rangle \{p_m\} \quad \text{あるいは} \quad \{p\} = \{m\} \langle N_p \rangle \{p_m\} = [N_p] \{p_m\} \quad [15]$$

また、

$$p_{,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle N_p \rangle \{p_m\} = [B_p] \{p_m\} \quad [16]$$

これらを用いて、連続式[7]及び平衡式[11]を離散化する。

まず、式[7]に代入すると、

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \{a\})^T \frac{1}{\gamma_w} [k] [B_p] dV \{p_m\} + \int_V \{a\}^T \nabla^T \frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla \rho_w g h dV \\ + \int_V \{a\}^T \{m\}^T [B_d] dV \frac{\partial \{u_m\}}{\partial t} + \int_S \{a\}^T \bar{q} dS = 0 \end{aligned} \quad [17]$$

Galerkinの重み付き残差法では、任意関数 $\{a\}$ として形状関数をとる。したがって、

$$\begin{aligned} \int_V [B_p]^T \frac{1}{\gamma_w} [k] [B_p] dV \{p_m\} + \int_V [B_p]^T \frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla \rho_w g h dV \\ + \int_V \langle N_p \rangle^T \langle B_v \rangle dV \frac{\partial \{u_m\}}{\partial t} + \int_S \langle N_p \rangle^T \langle \bar{q}_m \rangle dS = 0 \end{aligned} \quad [18]$$

あるいは

$$[K_2]^T \frac{\partial \{u_m\}}{\partial t} + [K_3] \{p_m\} = -\{F_p\} \quad [19]$$

ここで、

$$[K_2] = \int_V \langle B_v \rangle^T \langle N_p \rangle dV$$

$$[K_3] = \int_V [B_p]^T \frac{1}{\gamma_w} [k] [B_p] dV$$

$$\{F_p\} = \int_V [B_p]^T \frac{1}{\gamma_w} [k] \nabla \rho_w g h dV + \int_S \langle N_p \rangle^T \langle N_p \rangle \{\bar{q}_m\} dS$$

式[19]を増分形で標記すると、

$$[K_2]^T \frac{\partial \{du_m\}}{\partial t} + [K_3] \{dp_m\} = -\{dF_p\} \quad [20]$$

次に、式[11]に代入すると、

$$\begin{aligned} \langle \delta u_m \rangle [\int_V [B_d]^T [D]^{\text{ep}} [B_d] dV \{du_m\} + \int_V [B_d]^T \{m\} \langle N_p \rangle dV \{dp_m\} \\ - \int_V [N_d]^T \{df_b\} dV - \int_S [N_d]^T \{df_t\} dS] = 0 \end{aligned} \quad [21]$$

任意の $\{u_m\}$ に対してこれが成り立つためには、[] 内が常にゼロでなければならない。したがって、

$$\begin{aligned} \int_V [B_d]^T [D]^{\text{ep}} [B_d] dV \{du_m\} + \int_V [B_v]^T \langle N_p \rangle dV \{dp_m\} \\ = \int_V [N_d]^T \{df_b\} dV + \int_S [N_d]^T \{df_t\} dS \end{aligned} \quad [22]$$

あるいは

$$[K_1] \{du_m\} + [K_2] \{dp_m\} = \{dF_d\} \quad [23]$$

ここで、

$$[K_1] = \int_V [B_d]^T [D]^{\text{ep}} [B_d] dV$$

$$[K_2] = \int_V [B_v]^T \langle N_p \rangle dV$$

$$\{dF_d\} = \int_V [N_d]^T \{df_b\} dV + \int_S [N_d]^T \{df_t\} dS$$

したがって、連続式[20]と平衡式[23]をまとめると、

$$\begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [K_2]^T \frac{d}{dt} & [K_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{du_m\} \\ \{dp_m\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{dF_d\} \\ \{dF_p\} \end{Bmatrix} \quad [24]$$

となる。

2. 1. 5 時間に関する離散化

式[24]を時間について離散化する。時間増分を Δt として次式の差分近似を適用する。

$$\int_t^{t+\Delta t} f(\tau) d\tau \approx \Delta t \{ \theta f(t + \Delta t) + (1 - \theta) f(t) \} \quad [25]$$

ここで、 θ は、 t から $t + \Delta t$ までの時間に変数 $f(t)$ がどのように変化するかを規定する係数であり、0 から 1 の任意の値を仮定することが出来る。ただ、無条件に安定な解を得るためには $\theta \geq 0.5$ を満たす必要がある (Booker and Small, 1975)。本研究では前進差分 ($\theta = 1.0$) を採用している。これを用いて、式[24]を離散化すると

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [K_2]^T & \theta \Delta t [K_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{du_m\} \\ \{dp_m\} \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} \\ &= \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [K_2]^T & -(1 - \theta) \Delta t [K_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{du_m\} \\ \{dp_m\} \end{Bmatrix}_t + \begin{Bmatrix} \{dF_d\} \\ \Delta t \{dF_p\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad [26]$$

が導かれる。

したがって、与えられた初期条件及び境界条件のもとで式[26]を解いていけば、各節点における変位と間隙水圧を求めることが出来る。

2. 2 限界状態モデル

本有限要素法では、力学モデルとして特に限界状態モデルを導入しており、ここでは限界状態モデルとしてカムクレイモデルを概述する。なお、詳細については以下の原論文を参照願いたい。

カムクレイモデルは Roscoe, Schofield and Thurairajah (1963) によって提案された弾塑性モデルであり、限界状態という概念とせん断中の消散エネルギーを考慮して土のせん断と圧密挙動を統一的に記述しようとするものである。このモデルは、正規圧密から軽過圧密状態の再構成粘土の三軸圧縮試験結果に基づいて誘導されたモデルであり、次のように定義した平均有効応力 p' と軸差応力 q 、それらに対応する体積ひずみ ϵ_v と軸差ひずみ ϵ_d を用いて記述される。

$$p' = \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{3} \quad [27^{-1}]$$

$$q = \sigma'_1 - \sigma'_3 \quad [27^{-2}]$$

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3 \quad \text{あるいは増分形で} \quad d\epsilon_v = d\epsilon_1 + 2d\epsilon_3 \quad [27^{-3}]$$

$$\epsilon_d = \frac{2}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3) \quad \text{あるいは増分形で} \quad d\epsilon_d = \frac{2}{3}(d\epsilon_1 - d\epsilon_3) \quad [27^{-4}]$$

さて、正規圧密粘土供試体をせん断していくと、ピーク強度を発揮した後に、体積変化がそれ以上生じず ($d\epsilon_v / d\epsilon_d = 0$)、また応力変化もなく ($dq / d\epsilon_d = 0$ 、 $dp' / d\epsilon_d = 0$) せん断ひずみのみが累積していくような定常流動状態、すなわち限界状態に達する。この状態では、軸差応力 q 、平均有効応力 p' 、間隙比 e の間に次式のような一義的な関係が成り立つ。

$$e = \Gamma - \lambda \ln p' \quad [28]$$

$$q = M p' \quad [29]$$

ここで、 Γ 、 λ 、 M は土質定数である。また、軸差応力-平均有効直応力-間隙比の三次元空間で曲線を形成する。 M は有効内部摩擦角 ϕ' を用いて次のように表される。

$$M = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} \quad (\text{三軸圧縮条件}) \quad [30]$$

$$M = \frac{6 \sin \phi'}{3 + \sin \phi'} \quad (\text{三軸伸張条件}) \quad [31]$$

カムクレイモデルでは、等方応力条件下で得られる正規圧密曲線、膨潤曲線 (あるいは再圧密曲線) は $e - \ln(p')$ 座標で直線近似され、それぞれ次式で表わされる。

$$e = N - \lambda \ln p' \quad \text{あるいは} \quad de = -\lambda \frac{dp'}{p'} \quad [32]$$

$$e = e_\kappa - \kappa \ln p' \quad \text{あるいは} \quad de^e = -\kappa \frac{dp'}{p'} \quad [33]$$

ここで、 N は土質定数であり $\ln(p') = 0$ のとき（すなわち $p' = 1$ のとき）の e の値である。また、 e_κ はある膨潤線（ κ -線と称する）についての $\ln(p') = 0$ （すなわち $p' = 1$ のとき）の間隙比である。また、[32][33] から、間隙比増分 de 、ひずみ増分 $d\varepsilon$ は

$$de^p = de - de^e = -(\lambda - \kappa) \frac{dp'}{p'} \quad [34]$$

$$d\varepsilon_v^e = -\frac{de^e}{1+e} = \frac{\kappa}{1+e} \frac{dp'}{p'} \quad [35]$$

$$d\varepsilon_v^p = -\frac{de^p}{1+e} = \frac{\lambda - \kappa}{1+e} \frac{dp'}{p'} \quad [36]$$

と表される。ここで、肩文字 e 、 p はそれぞれ弾性成分、塑性成分を意味し、また裾文字 v は体積成分を意味する。

2. 2. 1 降伏関数

カムクレイモデルでは関連流動則を仮定し、直交則から次式の関係

$$\frac{d\varepsilon_d^p}{d\varepsilon_v^p} = -\frac{dp'}{dq} \quad [37]$$

が得られる。

さて、ここで Taylor (1948) のストレス・ダイレイタンス関係を考え、せん断変形の摩擦項のみが仕事増分に寄与していると仮定すると、せん断変形中の消散エネルギー増分が次式のように導ける。ただし、弾性せん断ひずみ成分はゼロと仮定している（すなわち $d\varepsilon_d = d\varepsilon_d^p$ ）。

$$dW = p' d\varepsilon_v^p + q d\varepsilon_d^p = M p' d\varepsilon_d \quad [38]$$

この式を変形すると、塑性ひずみ増分比と有効応力比の関係

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} = M - \frac{q}{p'} \quad [39]$$

が得られる。さらに、式[37][39]から

$$\frac{dq}{dp'} = M - \frac{q}{p'} \quad [40]$$

が得られ、これを解くと降伏関数が次式のように求まる。

$$f_y = \frac{q}{M p'} + \ln \frac{p'}{p_0} = 0 \quad [41]$$

ここで、 p_0 は等方圧密時（ $q = 0$ ）の降伏応力、すなわち初期降伏応力である。この関数によって規定される降伏面は p' 軸に対して対称な曲面となる。

ところで、カムクレイでは硬化則として等方ひずみ硬化則を用いている。すなわち、

$$f_y(\sigma, \kappa) = f_y(\sigma) - K(\kappa) = 0 \quad [42]$$

$$d\kappa = |d\varepsilon_v^p| = \sqrt{d\varepsilon_v^p d\varepsilon_v^p}$$

これに適合条件式 $df_y = 0$ 及び[32][33]から得られる関係

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{1+e}{\lambda - \kappa} d\varepsilon_v^p \quad [43]$$

を導入すると、

$$\frac{dK}{d\kappa} = \frac{1+e}{\lambda-\kappa} \quad [44]$$

が得られる。したがって、降伏関数は

$$f_y = \frac{q}{M p'} + \ln \frac{p'}{p_0} - \frac{1+e}{\lambda-\kappa} \int d\kappa = 0 \quad [45]$$

と表される。

修正カムクレイモデルでは、カムクレイモデルで定義したせん断変形中の消散エネルギー式[38]の代わりに、消散エネルギーを塑性体積ひずみ増分を含む形で次式のように定義する。

$$dw = p' d\epsilon_v^p + q d\epsilon_d^p = p' \sqrt{(d\epsilon_v^p)^2 + M^2 (d\epsilon_d^p)^2} \quad [46]$$

この場合、塑性ひずみ増分比と有効応力比の関係は

$$\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_d^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad [47]$$

となる。ここで、 η は応力比で $\eta = q/p'$ である。これに、直交則[2-8]を代入すると

$$\frac{dq}{dp'} + \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} = 0 \quad [48]$$

となり、これを解くと次式のような降伏関数が得られる。形状はカムクレイモデルと異なり楕円形である。

$$f_y = M^2 p'^2 - M^2 p_y p' + q^2 = 0 \quad \text{あるいは} \quad f_y = \frac{p'}{p_0} - \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} = 0 \quad [49]$$

2. 2. 2 パラメタ

カムクレイモデルを適用するために必要な土質定数は、圧縮指数 λ 、膨潤指数 κ 、限界状態線の勾配 M 、ポアソン比 ν 、先行圧密応力 p_y 、先行圧密時の間隙比 e_0 の計6個である。これらのパラメタは、通常の三軸圧縮試験及び等方圧密試験結果から次のようにして求めることが出来る。また、これらのパラメタから体積弾性係数 K とせん断弾性係数 G も計算できる。

1) λ と κ および p_y と e_0

等方圧密試験結果の $e - \ln p'$ 関係における圧縮線の傾き λ と膨潤線の傾き κ としてそれぞれ求められる。あるいは $e - \log_{10} p'$ でプロットした場合はその圧縮線の傾き C_c と膨潤線の傾き C_s から $\lambda = C_c / 2.303$ 及び $\kappa = C_s / 2.303$ として求められる。

なお、等方圧密試験と任意の k_0 圧密試験結果では λ 値が同じであることが経験的に知られていることから、一次元圧密試験結果の $e - \ln p'$ プロットから λ を求めることも出来る。ただし、この場合、一般に膨潤線の勾配は異なるため、 κ 値を λ の1/5から1/3の値に仮定する。

また、等方圧密試験結果から、先行圧密応力 p_y と先行圧密時の間隙比 e_0 が得られる。

2) M

三軸圧縮あるいは三軸伸張試験の限界状態での p' と q を $p' - q$ 座標にプロットして得られる直線の勾配として求まる。あるいは、三軸圧縮試験から得られた ϕ' から

$$M = 6 \sin \phi' / (3 - \sin \phi')$$

によって計算できる。

3) ν

排水三軸圧縮試験におけるせん断過程初期の弾性体積ひずみと弾性軸ひずみの関係から

$$\nu = (\epsilon_{vol} - \epsilon_{axial}) / (2 \epsilon_{axial})$$

で求まる。

4) K と G

ポアソン比 ν が得られると、平均有効有効 p' と e_0 の関数として

$$K = \frac{p' (1 + e_0)}{\kappa}, \quad G = K \frac{3(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$$

によって計算できる。

3. 例題解析

3. 1 一次元線形弾性圧密解析

3. 1. 1 問題定義と解析手順

不透水岩盤上に水平方向に無限に広がっている厚さ10mの等方線形弾性地盤の地表面に15kPaの一樣等分布荷重を短時間に載荷する場合を考える。

題意から一次元圧密問題と考えられる。そこで、図-1に示すように、解析領域は深さ10m、幅1mとし、二次の四辺形アイソパラメトリック要素10個を用いてモデル化した。表-1に地盤の物性を示す。境界条件は、変位に関しては側面で鉛直方向可動、水平方向固定とし、底面で完全固定とした。また、間隙水に関しては、側面及び底面で不透水とした。上端面は鉛直変位自由、排水自由である。

解析では、上端面に15kPaの一樣等分布荷重を微小時間で載荷し（非排水載荷）、引き続き所定の時間増分で載荷し変位及び間隙水圧の変化を求めていく。全時間 4×10^8 (s) ($T_v = 7.2$) まで計算することとし、時間増分は表-2に示すような大小の2種類を設定した。ケース1は全13ステップ、ケース2は全32ステップである。

以下では、過剰間隙水圧分布及び平均圧密度の経時変化を求め、テルツァーギの一次元圧密理論解 (Terzaghi, 1943) と比較した。

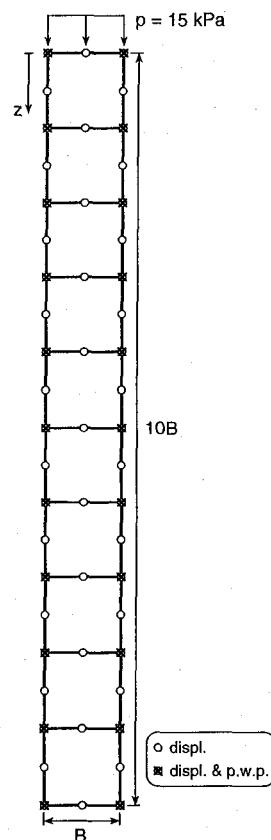


図-1 有限要素メッシュ (一次元圧密解析)

表-1 地盤の物性

弾性係数 E (kPa)	ポアソン比 ν	透水係数 k (m/s)	土の単位体積重量 γ_t (kN/m ³)	水の単位体積重量 γ_w (kN/m ³)
1500	0.25	1.0×10^{-8}	18	10

表-2 各ステップと時間増分

ケース1	Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	時間増分(s)	1	1×10^5	1×10^5	2×10^5	6×10^5	1×10^6	2×10^6	6×10^6	1×10^7	2×10^7
	Step	11	12	13							
	時間増分(s)	6×10^7	1×10^8	2×10^8							
ケース2	Step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	時間増分(s)	1	1×10^5	1×10^5	1×10^5	1×10^5	1×10^5	1×10^5	1×10^5	1×10^5	1×10^5
	Step	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	時間増分(s)	1×10^5	1×10^6	1×10^6	1×10^6	1×10^6	1×10^6	1×10^6	1×10^6	1×10^6	1×10^6
	Step	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	時間増分(s)	1×10^7	1×10^7	1×10^7	1×10^7	1×10^7	1×10^7	1×10^7	1×10^7	1×10^7	1×10^8
	Step	31	32								
	時間増分(s)	1×10^8	1×10^8								

3. 1. 2 解析結果と考察

図-2は、過剰間隙水圧分布の経時変化を比較したものである。図中の実曲線がテルツァーギの理論解、○がケース1、●がケース2の解析結果、また図中の数字は時間係数 T_v の値である。縦軸及び横軸は、それぞれ全層厚及び初期過剰間隙水圧で無次元化したものである。図から、解析で得られた過剰間隙水圧分布及びその経時変化は理論解と同様の傾向を示していることがわかる。また、時間増分が大きくステップ数の少ないケース1よりもケース2の方がより良い近似となっている。ケース2の場合でも時間係数が0.36以降で近似度が悪くなっているように見えるが、これはステップ21 ($T_v = 0.36$ に相当) からの時間増分の粗さの影響が出てきたものと考えられる。

図-3は、 $z/H = 0.611$ にある積分点での過剰間隙水圧の経時変化である。先の図と同様、実曲線が解析結果、○●がケース1及びケース2の解析結果である。ケース1、2ともに解析結果は理論解をうまく近似していることがわかる。近似度は時間増分の小さいケース2の方がよい。

図-4は、平均圧密度の経時変化である。ケース1、2とも解析解は理論解と同じ傾向を示しているが、平均圧密度が約63%以上で近似度が悪くなる傾向がある。これは、過剰間隙水圧分布の経時変化でも述べたように、あるステップ以降の時間増分の粗さの影響が出てきたものと考えられる。

以上のことから、本有限要素法を用いて圧密現象を解く場合、時間ステップ(時間増分)を適切に選ぶことによって十分実用に耐えうる解析結果が得られることがわかる。

3. 2 カム クレイ モデル による 圧密 非排水 三軸 圧縮試験

3. 2. 1 問題定義と解析手順

カムクレイモデルでの圧密非排水三軸圧縮試験のシミュレーション解析を行う。

解析は、単位長さの二次の四辺形アイソパラメトリック要素1個を用いて軸対称条件で行う。まず圧密圧力150kPaで等方圧密した後、非排水条件で要

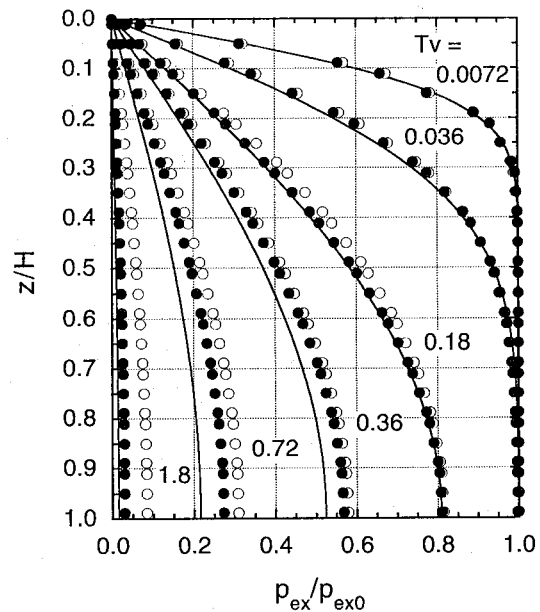


図-2 過剰間隙水圧分布の経時変化

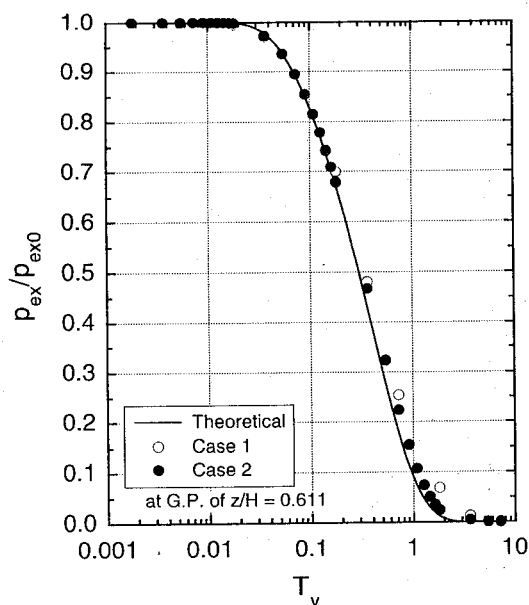


図-3 過剰間隙水圧の経時変化 ($z/H = 0.611$)

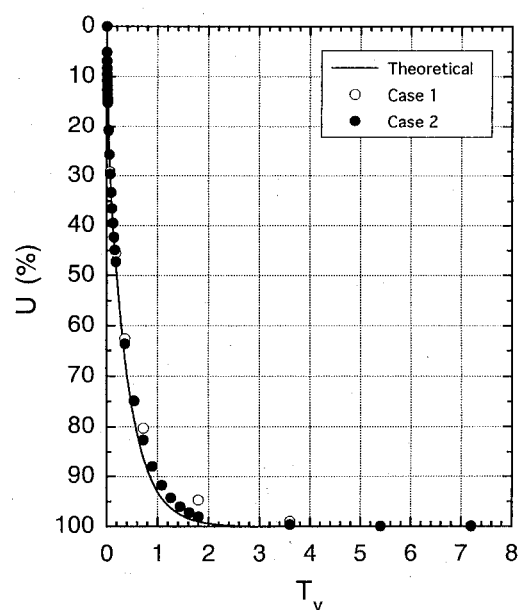


図-4 平均圧密度の経時変化

表-3 カムクレイモデルのパラメタ

λ	κ	ν	M	e_0	p_0 (kPa)
0.2	0.02	0.25	1.40	3.00	200

素上端面に鉛直下方向の変位を増分負荷していく。ひずみ増分は0.2%、0.02%、0.002%の3種類を設定した。カムクレイモデルのパラメタを表-3に示す。

3. 2. 2 解析結果と考察

図-5は、有効応力経路の解析結果と数値解の比較である。なお、ここで言う数値解とは、次式で表されるカムクレイモデルの弾塑性構成関係式

$$d\sigma_{ij} = (D_{ijkl}^e - D_{ijkl}^p) d\epsilon_{kl}$$

$$D_{ijkl}^p = - \frac{D_{ijkl}^e R_{kl} Q_{mn} D_{mnst}^e}{-\frac{\partial f_y}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial \epsilon_{ij}^p} R_{ii} + Q_{mn} D_{mnst}^e R_{st}}$$

$$Q_{ij} = \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f_y}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f_y}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$R_{ij} = \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f_q}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$h = - \frac{\partial f_y}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial \epsilon_{ij}^p} R_{ii} = Mp \left(\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \right) R_{ii}$$

を手計算し p' 及び q を求めたものである。

応力経路は、予想通りせん断とともにまず平均有効応力一定のまま軸差応力だけが增加し軸差応力 60kPa のところで初期降伏面に当たった後、限界状態線に向かって進んでいる。ひずみ増分が0.02%及び0.002%の場合のFEM解析結果と数値解はほとんど一致しているが、ひずみ増分が0.2%の場合には解析結果の近似度が低下し強度を過大評価していることがわかる。

図-6は、軸差応力-軸ひずみ関係の解析結果と数値解の比較である。先の図と同様、ひずみ増分が0.002%及び0.02%の場合のFEM解析結果と数値解はほとんど一致しているが、ひずみ増分がさらに大きくなると強度を過大評価している。

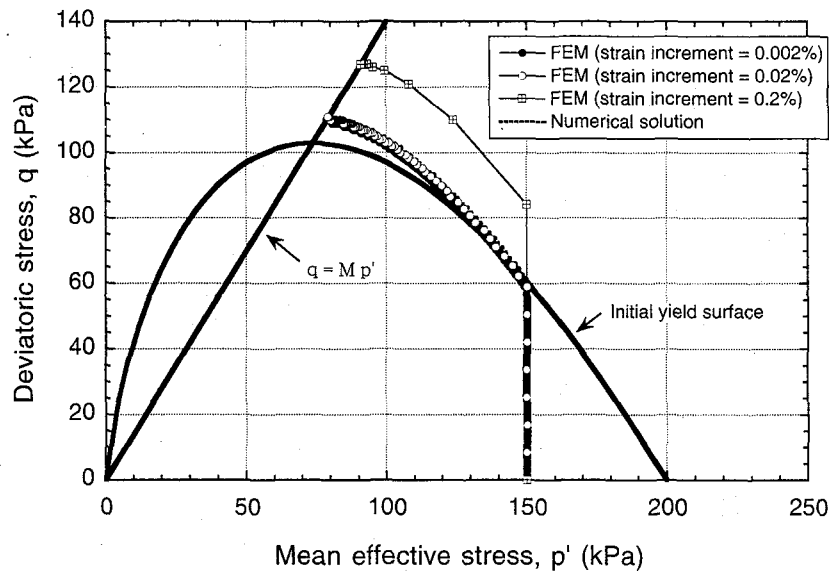


図-5 非排水三軸圧縮試験の有効応力経路

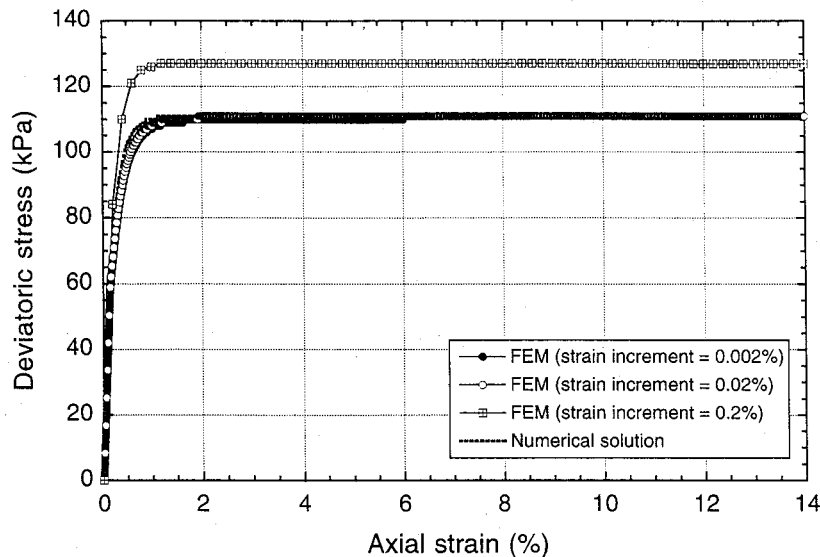


図-6 非排水三軸圧縮試験の軸差応力-軸ひずみ関係

以上のことから、ひずみ増分量を適当に設定すれば本有限要素法によってカムクレイモデルを表現できることがわかる。

4. 結論

本報告では、土水連成弾塑性有限要素プログラムの定式化を行い、力学モデルとして限界状態モデルを導入したプログラムを作成した。圧密及びカムクレイモデルの非排水三軸圧縮試験のシミュレーションの例題を解くことによってプログラミングの妥当性を一部ではあるが確認した。今後、実問題へ適用し、また種々の力学モデルや要素タイプを取り込み拡張して本解析法の適用可能領域を拡げていく予定である。

参考文献

- 柴田 徹 (1963) : 粘土のダイラタンシーについて、京大防災研究所年報、第6号、pp. 128-134.
- 畠昭治郎・太田秀樹 (1968) : 粘土の非排水せん断時の間隙水圧に関する一考察、土木学会論文集、第155号、pp. 18-24.
- 畠昭治郎・太田秀樹 (1969) : 正規圧密粘土の非排水せん断に伴う有効応力の変化特性について、土木学会論文報告集、第162号、pp. 21-29.
- Booker, J.R. and Small, J.C. (1975): An investigation of the stability of numerical solutions of Biot's equations of consolidation. Inter. Jour. Solids and Structures, Vol. 11, pp. 907-917.
- Burland, J.B. (1965): The yielding and dilation of clay. Correspondence, Geotechnique, No. 2, Vol. 15, pp. 211-214.
- Drucker, D.C. (1951): A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. 1st U.S. National Congr. Appl. Mech., ASME, pp. 487-491.
- Drucker, D.C., Gibson, R.E. and Henkel, D.J. (1957): Soil Mechanics and work-hardening theories of plasticity, ASCE Transactions, No. 2864, pp. 338-346.
- Lewis, R.W. and Schrefler, B.A. (1987): The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media. John Wiley & Sons, New York.
- Roscoe, K.H. and Burland, J.B. (1968): On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay, Engineering Plasticity, Cambridge University Press, pp. 535-609.
- Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Thurairajah, A. (1963): Yielding of clays in states wetter than critical, Geotechnique, No.3, Vol. 13, pp. 211-240.

Sandhu, R.S. and Wilson, E.L. (1969): Finite element analysis of flow of saturated porous elastic media. Jour. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 95, No. EM3, pp. 641-652.
Taylor, D.W. (1948): Fundamentals of Soil Mechanics. John wiley & Sons, New York.
Terzaghi, K. (1943): Theoretical Soil Mechanics. John wiley & Sons, New York.

著者：1) 吉田信之、神戸大学都市安全研究センター、助教授；2) 西 勝、神戸大学都市安全研究センター、教授；3) 富永清樹、元神戸大学建設学科学学生