



1次元および2次元フラクタル浸透場の数値モデルとその性質について

齋藤, 雅彦
川谷, 健

(Citation)

神戸大学都市安全研究センター研究報告, 6:193-201

(Issue Date)

2002-03

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/00317632>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00317632>



1次元および2次元フラクタル浸透場の 数値モデルとその性質について

Study on numerical model of 1-D and 2-D random fractal permeability field

齋藤 雅彦¹⁾
Masahiko Saito
川谷 健²⁾
Takeshi Kawatani

概要: 本報では, 確率的フラクタルモデルを用いて1次元および2次元の不均質浸透場の簡易生成法を示し, その性質について検討を加えた. この方法は, 広く知られているフラクタル図形の生成法と同様に, ある一定の単純な操作の繰り返しによって表現される. また, これによって生成される浸透場の基礎的性質(確率密度関数, パワースペクトル, 自己相関関数等)について考察した. その結果, 自然地盤から得られている浸透場の性質を適切に模擬し得ることが確認された.

キーワード: 地下水, 透水係数, 不均質, フラクタル

1. はじめに

近年, 重金属類あるいは有機塩素化合物等による地下水汚染が各地で報告されている. このような汚染による健康被害を回避するため, あるいは水資源保護の観点からも, 地下水の流れ場および地盤内の物質移動についての確に把握する手段が必要となる. その一つとして, 数値シミュレーションは, 現場観測とともに現在では不可欠なツールとなっている.

一方, 地盤内の流れや物質移動をシミュレーションの対象とする場合, そこで用いられる各種の地盤物性値は空間的にばらついているのに対し, 原位置試験や室内試験から事前に得られる情報は, 多くの場合平均値あるいは点情報に限られ, このことがシミュレーションの信頼性を向上させる上で大きな壁となっている.

このような問題に対して, 地盤の統計的性質や空間的な相関関係を用いて不均質地盤の空間分布モデルを構築し, これを用いて解析結果の信頼性を確率的に評価, あるいは物性値の空間分布を推定しようとする試みがなされている. ここで用いられる空間分布モデルは, 実測値から得られた共分散関数やパリオグラムを近似関数で表現したものであり, 指数型モデル, ガウス型モデル, 球形モデル, ベキ乗モデル等種々のものが提案されている¹⁾. しかしながら, これらの近似関数の適否については, 一般に実測値との適合性を基に判断されるのみで, その理論的背景は明確ではない.

これに対し, 著者ら^{2), 3)}は理論的考察に基づき, 確率的フラクタルモデルを用いて, 透水係数分布のパワースペクトル密度関数が f^{-5} 型となる空間分布モデルを提案した. これは広く知られているフラクタル図形の生成法と同様に, ある一定の単純な操作の繰り返しによって表現される. 本研究では, 1次元および2次元の不均質浸透場の簡易な発生方法を提示するとともに, これによって生成された浸透場の統計的性質について考察する.

2. 不均質浸透場の発生方法^{2), 3)}

(1) 1次元の場合

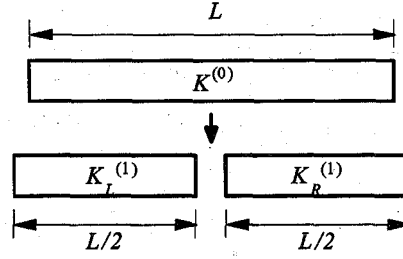


図-1 1次元浸透場の分割

図-1に示すように、長さ L 、平均透水係数 $K^{(0)}$ の1次元浸透場をその中央で2分割する場合について考える。ここで、分割後の透水係数をそれぞれ $K_L^{(1)}$ および $K_R^{(1)}$ とする。もし、この浸透場が不均質であるならば、 $K^{(0)}$ と $K_L^{(1)}$ および $K_R^{(1)}$ の関係は以下の不等式によって表される。

$$K_L^{(1)} < K^{(0)} < K_R^{(1)} \quad \text{or} \quad K_R^{(1)} < K^{(0)} < K_L^{(1)} \quad (1)$$

また、 $K^{(0)}$ は $K_L^{(1)}$ および $K_R^{(1)}$ を用いて次式で定義される。

$$K^{(0)} = \frac{2K_L^{(1)}K_R^{(1)}}{K_L^{(1)} + K_R^{(1)}} \quad (2)$$

ここで、透水係数の空間変動を意味する確率変数 α を導入し、以下のように定義する。

$$\alpha = \frac{K_L^{(1)}}{K^{(0)}} \quad (3)$$

この確率変数 α を式(2)に代入すると、 $K^{(0)}$ と $K_R^{(1)}$ の関係は次式となる。

$$K_R^{(1)} = \frac{\alpha K^{(0)}}{2\alpha - 1} \quad (4)$$

したがって、 α の制約条件は以下ようになる。

$$\frac{1}{2} < \alpha \quad (5)$$

さらに、

$$K_m^{(1)} = \max(K_L^{(1)}, K_R^{(1)}), \quad K_n^{(1)} = \min(K_L^{(1)}, K_R^{(1)}) \quad (6)$$

および

$$\alpha_m = \frac{K_m^{(1)}}{K^{(0)}}, \quad \alpha_n = \frac{K_n^{(1)}}{K^{(0)}} \quad (7)$$

とすると, α_m および α_n の制約条件はそれぞれ

$$1 < \alpha_m, \quad \frac{1}{2} < \alpha_n = \frac{\alpha_m}{2\alpha_m - 1} < 1 \quad (8)$$

となり, α_m を与えることにより α_n も同時に定まる.

ここで, α_m の確率密度関数は, 明らかではないが, 本研究では, 次式に示す指数分布を仮定した.

$$p(\alpha_m) = \theta \exp\{-\theta(\alpha_m - 1)\} \quad (1 < \alpha_m) \quad (9)$$

ここに, $p(\alpha_m)$ は確率密度, θ は α_m のばらつきを支配するパラメータである.

以上の操作を N 回繰り返せば, 全体領域は 2^N 個の小領域に分割され, 透水係数の空間分布が決定される.

本モデルにおける相関性の制御は, 確率変数 α_m のばらつきを定めるパラメータ θ を各分割段階で変化させることによって可能である. 指数分布の性質は, θ が大きくなるほどばらつきが小さくなる. すなわち, 分割を進めていくにつれて θ を大きくしていけば, 最終段階での透水係数のばらつきは小さくなり, 相関性を高めることができる. 具体的には, i 回目の分割時のパラメータ $\theta^{(i)}$ に対して $i+1$ 回目のパラメータ $\theta^{(i+1)}$ を次式で定める.

$$\theta^{(i+1)} = \varepsilon \theta^{(i)} \quad (1 \leq i < N, \quad 0 < \varepsilon) \quad (10)$$

ここに, ε は定数であり, $0 < \varepsilon < 1$ とすると, 相関性は小さくなり, $1 < \varepsilon$ とすると相関性は大きくなる.

(2) 2次元の場合

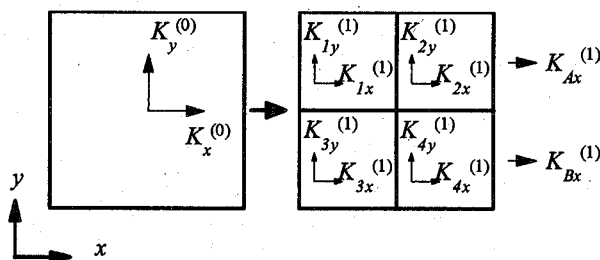


図-2 2次元浸透場の分割

2次元の場合も, 1次元の場合とほぼ同様の手続きによって表すことができる. 図-2に示すように, 正方形領域を4つの小領域に分割する場合を考える. x 方向について, $K_{Ax}^{(1)}, K_{Bx}^{(1)}$ および $K_x^{(0)}$ は $K_{1x}^{(1)} \dots K_{4x}^{(1)}$ を用いてそれぞれ以下のように定義される.

$$K_{Ax}^{(1)} = \frac{2K_{1x}^{(1)}K_{2x}^{(1)}}{K_{1x}^{(1)} + K_{2x}^{(1)}}, \quad K_{Bx}^{(1)} = \frac{2K_{3x}^{(1)}K_{4x}^{(1)}}{K_{3x}^{(1)} + K_{4x}^{(1)}}, \quad K_x^{(0)} = \frac{K_{Ax}^{(1)} + K_{Bx}^{(1)}}{2} \quad (11)$$

ここで, x 方向について, 不均質性を表す確率変数 $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ を導入して,

$$\alpha_x = K_{1x}^{(1)}/K_x^{(0)}, \quad \beta_x = K_{4x}^{(1)}/K_x^{(0)}, \quad \gamma_x = K_{Ax}^{(1)}/K_x^{(0)} \quad (12)$$

とすると, $K_{2x}^{(1)}, K_{3x}^{(1)}$ は,

$$K_{2x}^{(1)} = \frac{\alpha_x \gamma_x}{2\alpha_x - \gamma_x} K_x^{(0)}, \quad K_{3x}^{(1)} = \frac{(2 - \gamma_x)\beta_x}{2\beta_x + \gamma_x - 2} K_x^{(0)} \quad (13)$$

となる。このとき、 γ_x の制約条件は、

$$0 < \gamma_x < 2 \quad (14)$$

また、 α_x, β_x の制約条件は、次式となる。

$$\alpha_x > \frac{\gamma_x}{2}, \quad \beta_x > \frac{2-\gamma_x}{2} \quad (15)$$

つぎに、

$$\alpha'_x = \frac{\alpha_x}{\gamma_x}, \quad \beta'_x = \frac{\beta_x}{2-\gamma_x}, \quad \gamma'_x = \frac{1}{\gamma_x} \quad (16)$$

とおくと、 α_x, β_x および γ_x が、それぞれ確率変数であることから、 α'_x, β'_x および γ'_x も確率変数となる。このとき、 $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ の制約条件は、

$$\alpha'_x > 0.5, \quad \beta'_x > 0.5, \quad \gamma'_x > 0.5 \quad (17)$$

となる。さらに、

$$\alpha'_{xm} \geq 1, \quad \beta'_{xm} \geq 1, \quad \gamma'_{xm} \geq 1 \quad (18)$$

ならびに、

$$0.5 < \alpha'_{xn} < 1, \quad 0.5 < \beta'_{xn} < 1, \quad 0.5 < \gamma'_{xn} < 1 \quad (19)$$

とすると、 α'_x, β'_x および γ'_x のとりうる値は、

$$\alpha'_x = \alpha'_{xm} \quad \text{or} \quad \alpha'_x = \alpha'_{xn} = \frac{\alpha'_{xm}}{2\alpha'_{xm} - 1} \quad (20)$$

$$\beta'_x = \beta'_{xm} \quad \text{or} \quad \beta'_x = \beta'_{xn} = \frac{\beta'_{xm}}{2\beta'_{xm} - 1} \quad (21)$$

$$\gamma'_x = \gamma'_{xm} \quad \text{or} \quad \gamma'_x = \gamma'_{xn} = \frac{\gamma'_{xm}}{2\gamma'_{xm} - 1} \quad (22)$$

となる。このようにして、式(18)を満たす $\alpha'_{xm}, \beta'_{xm}, \gamma'_{xm}$ から式(20)～式(22)により $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ が与えられると、式(16)より $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ が得られ、さらに式(12)および式(13)より、 $K_{1x}^{-1} \dots K_{4x}^{-1}$ が得られる。ここで、 $\alpha'_{xm}, \beta'_{xm}, \gamma'_{xm}$ の確率密度関数は、1次元の場合と同様に指数分布を仮定する。

以上の操作を N 回繰り返せば、領域は 4^N 個の要素に分割され、 x 方向の透水係数の空間分布が決定される。また、 y 方向については、 x 方向の透水係数と等しいと仮定する。

3. 頻度分布と分散

(1) 1次元モデル

図-3は、 $L=1.0$, $K^{(0)}=1.0$, $\theta^{(1)}=2.0$ として、繰り返し回数 $N=8$ 、相関性を規定するパラメータ ε をそれぞれ 1.0, 1.25, 1.5 とした場合の透水係数分布 (対数変換値: $Y=\log(K)$) を示す。図-4は、それぞれの頻度分布およびそれらと等しい平均値、分散を持つ対数正規分布曲線である。ここで頻度分布は確率密度に換算している。

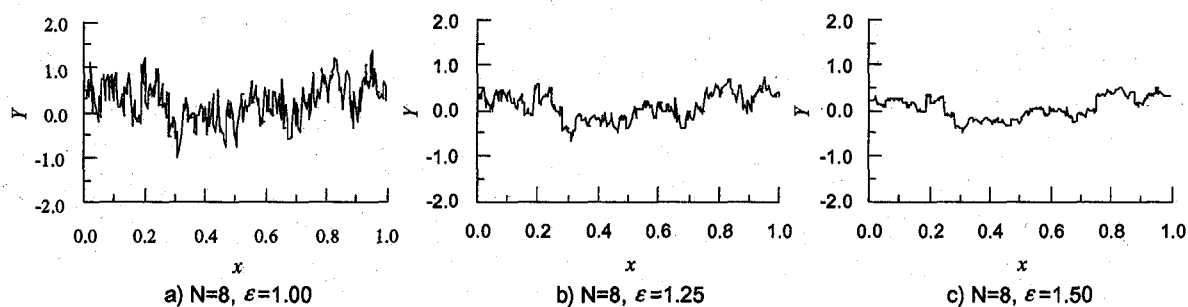


図-3 透水係数分布 (1次元)

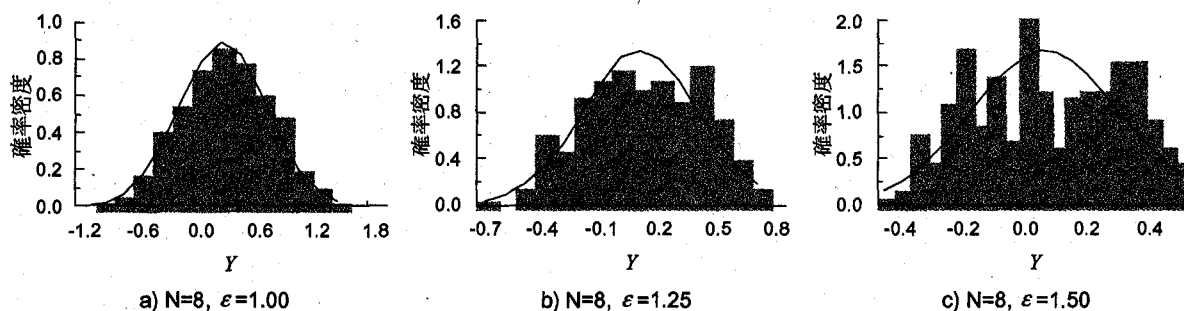


図-4 頻度分布

ここで、 $\varepsilon=1.0$ とした場合は、ほぼ頻度分布は対数正規分布にしたがっているのに対し、 ε が大きくなるにつれて対数正規分布からのずれが大きくなることがわかる。これは、確率変数 α_k の分布が分割ステップごとに異なるためである。一方、透水係数の頻度分布が、ほぼ対数正規分布に従うことは多くの既往の研究により明らかにされており⁴⁾、このことから判断すると、本モデルにおける ε の上限は1.3程度と考えられる。

図-5は、分割回数 N と分散の関係を表す。ここで分散は異なる乱数系列を用いて透水係数分布を100回生成し、そのアンサンブル平均を用いている。

分散は、 $\varepsilon=1.0$ とした場合のみ分割回数 N に比例することがわかる。一方、その他の場合は一定値に漸近している。すなわち、分散は分割長さに無関係となる。たとえば、実際にサンプリングによって透水係数を求める場合、サンプルサイズが小さくなるほど標本分散が大きくなる現象が見られる⁵⁾。本モデルにおいては、 $\varepsilon=1.0$ の場合に、このような性質が表現されていることがわかる。

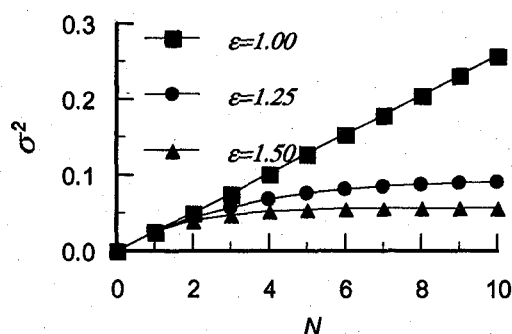


図-5 分割回数と分散の関係

(2) 2次元モデル

図-6は、 $K_x^{(0)}=1.0$ 、 $\theta_{axm}^{(1)}=\theta_{bxm}^{(1)}=1.25$ 、 $\theta_{gxm}^{(1)}=2.50$ 、相関性を規定するパラメータを $\varepsilon=1.0$ として、分割回数をそれぞれ $N=4$ 、 $N=5$ 、 $N=6$ とした場合の透水係数分布の一例を示している。また、図-7はそれぞれの透水係数の頻度分布を示している。ここで透水係数は1次元の場合と同様に対数変換値を用いており、頻度分布は確率密度に変換している。

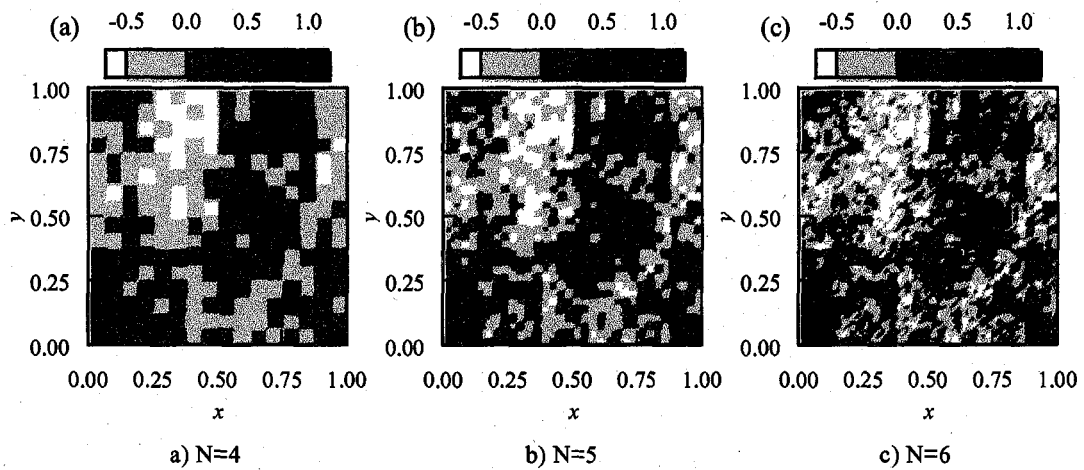


図-6 透水係数分布 (2次元)

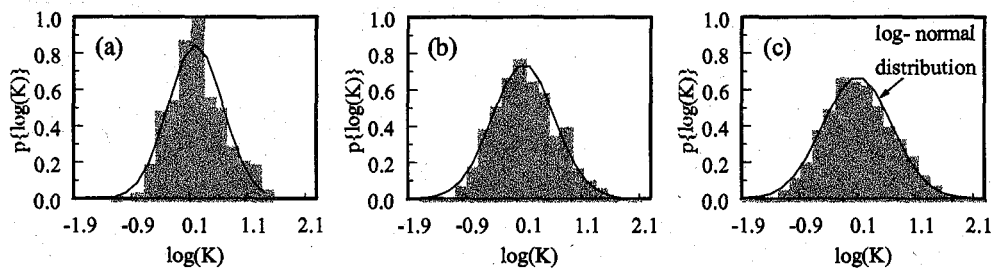


図-7 頻度分布

図-7より, 1次元の場合と同様に頻度分布は対数正規分布となっていることがわかる。また, 分割回数 N が大きくなるほど分散が大きくなっていることがわかる。図-8は, 図-5と同様に分割回数 N と分散の関係を示している。これも1次元の場合と同様に分散は分割回数に比例することがわかる。

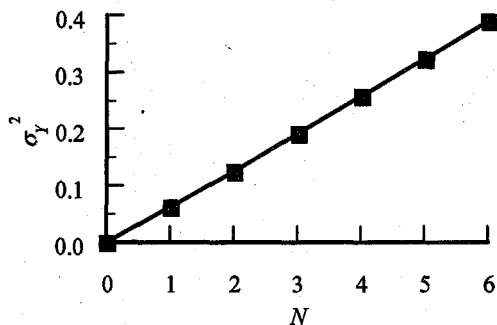


図-8 分割回数と分散の関係 (2次元モデル)

4. パワースペクトルと自己相関関数

(1) パワースペクトル

図-9は, $\varepsilon=1.0$ および $\varepsilon=1.5$ とした場合の2次元モデルにおけるパワースペクトル (アンサンブル平均) を示している。この図より, パワースペクトルは以下の式で近似できると考えられる。

$$S(|f|) \propto |f|^{-\zeta} \quad (23)$$

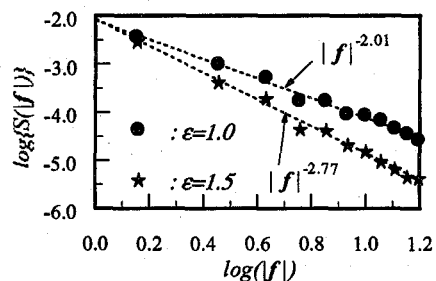


図-9 パワースペクトル

ここに, f は空間周波数ベクトル, ζ は ε と関連する定数である。

(2) 自己相関関数

2次元モデルにおける自己相関関数は、セミバリオグラムを用いて以下のように表すことができる。

$$\rho(r) = 1 - \frac{1}{2\sigma_Y^2} \langle \{Y(p+r) - Y(p)\}^2 \rangle = 1 - \frac{\gamma(r)}{\sigma_Y^2} \quad (24)$$

ここに、 $\rho(r)$ は自己相関関数、 p は位置ベクトル、 r は2点の位置ベクトルの差、 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す記号、 $\gamma(r)$ はセミバリオグラムである。

図-10は、 $\varepsilon=1.0$ とした場合の自己相関関数の平面分布および $r_x>0, r_y=0$ における断面図である。また、断面図においては、得られた曲線を指数関数で近似したものも表示している。これより、本モデルの自己相関関数は片対数紙上でほぼ直線分布となっていることがわかる。

また、指数関数で近似した場合の積分特性距離は、対象領域の一辺の大きさ(=1)の0.1倍となっている。この結果は、実測から得られている知見とも合致している^{6), 7)}。

加えて、図-10(b)における指数関数近似から、nugget effect (金塊効果)が認められる。一般に nugget effect はサンプリング調査の際に、そのサンプリング間隔が大きすぎることや、測定時の偶然誤差に起因するものと考えられているが、この結果は、nugget effect が地盤構造に起因することもあり得ることを示唆している。

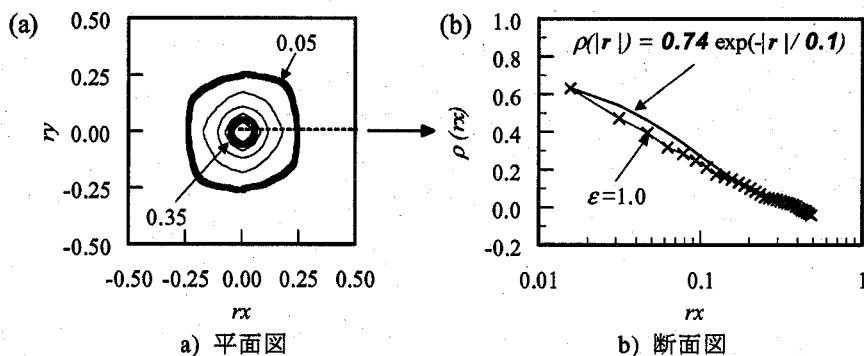


図-10 自己相関関数(2次元)

図-11は、式(23)において $\zeta=2.0$ としてFFTにより生成された対象領域の大きさが異なる浸透場、図-12はそれらの自己相関関数である。これらの結果より、自己相関関数の指数関数近似における積分特性距離は、領域分割の繰り返しの生成する場合と同様に対象領域の0.1倍程度となることがわかる。また、図-10(b)と比較すると、FFTによって生成された場合(図-12)では、nugget effect が小さくなっており、生成方法の違いはこの点に反映されていることがわかる。

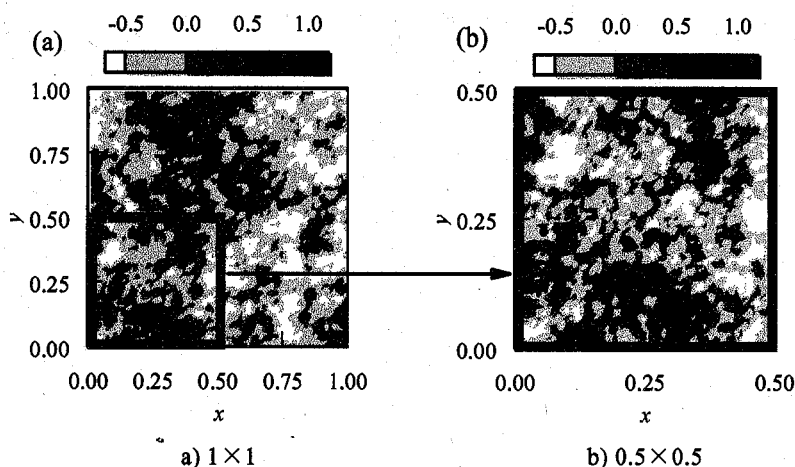


図-11 透水係数分布の一例 (FFTによって生成)

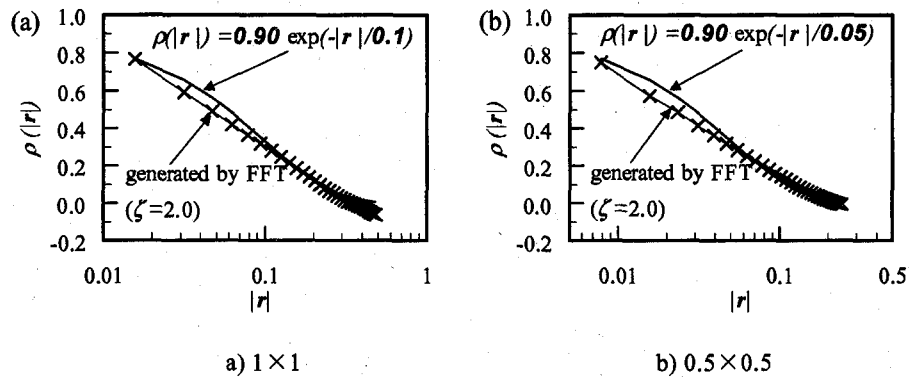


図-1 2 自己相関関数(FFTによって生成)

6. おわりに

本研究により、得られた結果を以下にまとめる。

- 1) ここで述べた生成方法によって不均質浸透場を生成する場合、透水係数の頻度分布は、相関性を規定するパラメータ ε が 1 に近い場合には対数正規分布となる。またその上限値は 1.3 程度と考えられる。
- 2) $\varepsilon=1.0$ の場合、分散は分割回数 N に比例する。
- 3) パワースペクトルは $f^{-\zeta}$ に比例し、 ζ は ε によって変化する。
- 4) 自己相関関数を指数関数で近似した場合の積分特性距離は、解析対象領域の大きさと関係し、その 0.1 倍程度となる。
- 5) 分割の繰り返しによる生成方法と、パワースペクトルから FFT によって生成する方法の違いは、nugget effect の大きさに反映される。

参考文献

- 1) de Marsily, G.: *Quantitative Hydrogeology*, Academic Press Inc., 1986.
- 2) 齋藤雅彦, 川谷健: 透水係数の空間分布に関する理論的考察, 土木学会論文集, No.645/Ⅲ-50, pp.103-114, 2000.
- 3) 齋藤雅彦, 川谷健: 透水係数の空間分布モデルの適用性に関する一考察, 土木学会論文集, No.694/Ⅲ-57, pp.245-258, 2001.
- 4) Freeze, R. A.: A stochastic-conceptual analysis of onedimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media, *Water Resour. Res.*, Vol.11, No.5, pp.725-741, 1975.
- 5) 太田猛彦, 片桐真: 大型透水試験機による森林土壌の透水係数の測定 (I), 日本林学会誌, Vol.74, pp.373-382, 1992.
- 6) Gelhar, L. W.: *Stochastic Subsurface Hydrology*, Prentice-Hall, New Jersey, USA., 1993.
- 7) Di Federico, V. & Neuman, S. P.: Scaling of random fields by means of truncated power variograms and associated spectra, *Wat. Resour. Res.* 33(5), 1075-1085, 1997.

著者: 1) 齋藤雅彦, 都市安全研究センター, 助手; 2) 川谷 健, 都市安全研究センター, 教授

STUDY ON NUMERICAL MODEL OF 1-D AND 2-D RANDOM FRACTAL PERMEABILITY FIELD

Masahiko Saito
Takeshi Kawatani

Abstract

A simple method for generation of 1-D and 2-D fractal permeability fields is presented. The method is based on theoretical consideration of spatial variations of permeability. The method is characterized by the repetition of the same procedure similar to the process of generating other fractal figures. Then, the statistical properties (e.g., probability density function, spectral density, autocorrelation function) of random fractal field generated by this method are examined. Although this model is quite simple, it can reproduce quite correctly the features that were obtained from field observations.

