インデックス集合の役割 : 位相の導入

入谷, 純

(Citation)
国民経済雑誌,186(2):17-27

(Issue Date)
2002-08

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00339352

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00339352

インデックス集合の役割
——位相の導入——

入　谷　　純

一般均衡理論では個人のインデックス集合はほとんど役割を与えられてこなかった。これに対して，メカニズムデザインにおけるタイプそして最適課税における所得獲得能力は，コンパクトな集合に属し，個人のインデックスを表わす。しかも個人の属性（選好等）と対応すると想定される。本稿では，個人のインデックスの集合を扱いやすい形式で構成する方法を与え，そこに位相や測度の構造を導入する。この作業は選好の変化を伴う動学体系の基礎となる。

キーワード　インデックス集合，タイプの集合，位相と測度

1　序

一般均衡理論において個人のインデックス集合は番号以外の機能を果たしていない。極言をすれば必要とされていないのである。有限人経済においても（Debreu (1959) 参照），無限人経済(large economy)においてもそのとおりである(Aumann (1964), Hildenbrand (1974) 参照)。実際，無限経済では通常次のようである。構成員のインデックスの集合を A とする。財の数を ℓ 種類，$\mathbb{U}$ を可能な選好と初期保有との組からなる集合とする時，写像

$$\phi : A \to \mathbb{U}$$

によって $\phi(a) = (\preceq_a, \omega_a)$ のように個人 a と彼の属性（$\preceq_a, \omega_a$）が対応する（Hildenbrand (1974), Klein-Thompson (1984) 参照）。ここで，$\preceq_a$ は選好，ω_a は初期保有である[1]。また，$\omega_a \in \mathbb{R}^\ell_+$ である。さらに，測度空間（$\mathscr{A}, \mu, A$）が定義され，個人は A 上に分布していると想定される。このような設定だけから見ると，インデックス集合 A は表面上本質的な役割を演じているように見えるかもしれない。しかし，必ずしもそうではない。実は $\mathbb{U}$ 自体を個人のインデックス集合とみることが可能である。$\xi \in \mathbb{U}$ に対して，$\xi \overset{\mathrm{def}}{=} (\preceq_\xi, \omega_\xi)$ と表記すれば，「個人 ξ の属性が（u_ξ, ω_ξ）である」と理解できる。これは，$\mathbb{U}$ が個人のインデックスの集合の役割を演じているということである。また，$\mathbb{U}$ 上の測度空間（$\mathscr{U}, \eta, \mathbb{U}$）が定義されていれば，これによって個人の分布を表現できる[2]。つまり，インデックス集合 A には必ずしも積極的な役割は与えられていないのである。

次に，動学化という視点からインデックス集合の役割を見てみよう。動学の基本的な装置は資本の蓄積であることは論を俟たない。構成員の選好は動学においては，重要ではあるが二次的な役割しか与えられていない。つまり経済学において現在取り扱われている動学では，個人の選好は時間を通じて変わらない，あるいは現時点の選好に将来の選好が取り込まれていると想定されることが多い。しかし，個人の選好も通時的に変化するであろう。つまり，個人 a はある時点 t で u_a^t の選好を，$t+1$ 時点で u_a^{t+1} の選好に変化することを記述する必要がある。選好の時間変化が予め与えられていると想定することもできよう。しかし，どの選好が将来のいかなる選好に結びつくかを個人が知っているかどうかは疑問である。「存在はしているが個人には知りようがない選好の時間的変化経路」を想定すれば，「予想できない変化」とか「気が変わる」を選好の時間的経路において描くことができる。Hicks (1946) では予想されえない変化が「不均衡」を発生させる，それを含む経済を描くことが動学を書くことの本質であると考えられている。この意味で，選好の変化の時間的変化の経路は確かに存在しているが，個人には知られていないと想定することは重要である。

さらに，この時間的変化を $\mathbb{U}$ から $\mathbb{U}$ への写像として表現するという立場には，疑問がある。例えば，選好の変化を現在の選好で説明することができるだろうかというものである。つまり，時点 t で同一の属性を持っていた異なる個人が次の時点でも同一の属性を持つか，という疑問である。選好によるよりはむしろ，個人の年齢とか他の要因が，変化をきめると考えるのが自然である。ここに，個人のインデックス集合の役割が生じる。個人のインデックス集合 A は変化させる必要はないから，A から A への写像として個人のタイプの時間的変化が記述され，それが選好の時間的変化に帰結するということが適切であろう。つまり，個人のインデックス集合とは，個人の選好をきめるタイプからなる集合で，タイプと個人の属性の間には写像 ϕ という固定的な関係があり，一方，時間に応じてある時点にあるタイプの個人が次の時点にどのタイプになるかが写像 ψ によって与えられるという，二つの写像を想定すればよい。この二つの写像 ϕ,ψ のうちで ϕ は最適課税問題やメカニズムデザインではすでに考察されてきたものである。

$$
\begin{tikzcd}
\text{時点 } t & \text{時点 } t+1 & \text{時点 } t+2 \\
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[d, "\phi"] & \cdots \\
\mathbb{U} & \mathbb{U} & \mathbb{U} & \cdots
\end{tikzcd}
$$

上の図に示されるように，t 時点にタイプ a である個人は $t+1$ にはタイプ $\psi(a)$ の個人となり，彼の属性は $\phi\psi(a)$ となると想定するわけである。

無限人経済では効用の変化がある種の連続性や可測性を満たすように表現できることが望

ましい。本稿の目的は，そのような議論の基礎になる，個人のインデックス集合に位相あるいは測度を導入する手法を考察することにある。この議論は，経済の変動経路には何らかの規則的な性質を付与することに寄与するであろう。また巧妙に表現できれば，現象を観察する時には確率的な変化と見えるものに決定論的な連続性を付与できる可能性も生じる。さらには「同じような行動をしていた個人が時点が異なれば異なる行動をする」あるいは「気が変わる」という事態をも含めることができよう。

2 インデックス集合の位相構造と測度構造

2.1 インデックス集合

まず，これまでのインデックス集合に通常用いられている位相的な条件は，コンパクト距離空間であることがあげられる。その代表的な例として，最適課税論と無限人経済（Large Economy）がある。

最適課税論におけるインデックス集合は所得獲得能力の集合である（Mirrlees (1971)，入谷 (1986)）。能力の集合を，$A \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R}_+ | \underline{a} \leqq a \leqq \bar{a}\}$，$\underline{a} < \bar{a}$ としたとき，$a \in A$ の個人は単位時間に a だけの所得（あるいは財）を得ることができる。個人は所得獲得能力においてのみ異なり，同一の効用関数 $u(c, \ell)$ を有するとされる。ここで，c は消費量を，ℓ は余暇を表す。余暇の総量は予め1と与えられているとして，所得を y と表すならば，効用関数は $v(a, c, y) \overset{\text{def}}{=} u(c, 1-y/a)$ と書き換えられる。このようにしてタイプから属性への写像，

$$\phi : a \mapsto ((0, 0), v(a, c, y))$$

が与えられている。ここで，$(0, 0)$ は消費と所得の初期保有である。このとき，インデックス集合 A には自然な位相が与えられており，コンパクト距離空間となる。メカニズムデザインにおけるタイプの集合も最適課税の能力の集合とほぼ同じ設定で用いられている（MasColell A., M. D. Whinston, and J. Green, (1995) 23章参照）。

また，Hildenbrand-Aumann で採用されている無限人経済では個人の属性の集合 A から $\mathbb{U}$ への関数 ϕ があると想定される。A 自体に特別な考察がなされていることはないが，選好の集合 $\mathbb{U}$ に閉収束位相（closed convergence topology）を導入して，コンパクト距離空間とする（Hidenbrand (1974)，Klein-Thompson (1984) 参照）。ここでは，$\phi(A)$ 自体がインデックス集合に他ならない。時点を固定する場合には，写像 ϕ が与えられていることに疑問は発生しない。次の時点にも同じ ϕ が個人の属性を決めるかどうかは，集合 A に関する考察を必要とする。

さて，インデックス集合をどのように構築することが，多様な目的に沿うであろうか。われわれがインデックス集合に位相を入れようとする主たる動機は「動学」を記述するためである。そのような目的に応じた表現を提示する必要がある。われわれは人をいろいろな特性

に応じて分類することが多い。たとえば，「甘党」，「辛党」というのがそうである。甘党を記号 s で表わし，辛党を d で書くとする。集合 $\{s,d\}$ のみで人のタイプを規定するのは，もちろん，乱暴である。それで，二記号列からなる集合 $\{(s,s),(s,d),(d,s),(d,d)\}$ で表わすならば，より精密な表現ができるであろう。二記号列よりも三記号列はより精密であろう。もっとも細かくして

$$\{(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots) \mid s_i \in \{s, d\}, i=1, 2, \ldots\}$$

を人のタイプとするならば，甘党，辛党に関する十分な多様性が考慮できるであろう。タイプが有限の記号列 $(s_1, \ldots, s_k)$ で十分であるという場合もあろう。「十分である」ということは，k 個の記号列の集合が選好の集合の中への1対1写像となることを意味する。その場合には任意の $(s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots)$ に対して最初の k 個の列 $(s_1, \ldots, s_k)$ が対応する選好をきめると考えればよい。従って，記号の可算無限列で考えることに問題はない。

上では，二種類の特性に応じて人のタイプを表現したが，特性の種類が2個である理由はない。人のタイプをきめる特性の数を n 個の異なる記号 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ であらわし，その集合を $T \stackrel{\text{def}}{=} \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ する。s_i は遺伝子の構成因子と考えることもできるし，気質の構成要因を表わすと考えることもできる。そこで，

$$\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{\infty} T$$

を個人のタイプの集合とする。$\tau \in \mathbb{T}$ とすれば，$\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots)$，$\tau_i \in T$，$i=1,2,\ldots$ であり，τ が個人の属性を決めると考える。それを写像

$$\phi : \mathbb{T} \to \mathrm{U}$$

で表現する。本稿の第一の目的は，$\mathbb{T}$ から $\mathbb{T}$ への写像 ψ の連続性あるいは可測性を議論できるように，$\mathbb{T}$ に自然な位相構造や測度構造を導入することである。この作業によって自然にボレル集合が定義できることになり，写像 ψ に連続性や可測性を考察することができる。

もし，$\mathbb{T}$ が測度空間となり，ψ を可測と仮定すると，経済の構成員は写像 $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ によって時間的にタイプを変えていく。したがって $\mathbb{T}$ を確率空間とすれば，経済の構成員の属性は，

$$\phi, (\phi \circ \psi), (\phi \circ \psi \circ \psi), \ldots$$

という確率過程と見ることもできる[3]。

上で定義された集合 $\mathbb{T}$ は一見すると，n 進展開された実数の区間 $[0,1]$ であるように見える。つまり，$r \in [0,1]$ にたいして

$$r = (x_1 - 1)\frac{1}{n} + (x_2 - 1)\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + (x_i - 1)\left(\frac{1}{n}\right)^i + \cdots \tag{1}$$

$$x_i \in \{1, \ldots, n\}, i=1, 2, \ldots \tag{2}$$

と展開したとする。このとき，$r \in [0,1]$ に，上のように n 進展開をして得られる自然数の列 $(x_1, x_2, \ldots)$ を利用して $(s_{x_1}, s_{x_2}, \ldots) \in \mathbb{T}$ を対応させると，実数の区間 $[0,1]$ と $\mathbb{T}$ とが一対一に対応しているように見えるからである。しかし，これは必ずしも正しくない。なぜなら，実数を n 進展開で表現した時，二通りの表現の仕方が可能である。たとえば，

$$
\begin{aligned}
&0 \times \frac{1}{n} + (n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^i + \cdots \\
&= 1 \times \frac{1}{n} + 0 \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + 0 \times \left(\frac{1}{n}\right)^i + \cdots
\end{aligned}
$$

である。一方，列 $(s_1, s_n, s_n, \ldots)$ と列 $(s_2, s_1, s_1, \ldots)$ は $\mathbb{T}$ では異なる要素である。実際，以下で考察される位相では，この二点は分離された点となる。

上の(1)で示された対応を

$$\eta : r \in [0, 1] \mapsto (s_{x_1}, s_{x_2}, \ldots) \in \mathbb{T}$$

と書く。ここで，r に小数として二通りの表現がある時はどちらか一方を選ぶと約束しておけば，η は $\mathbb{T}$ の中への一対一写像である。したがって，$\mathbb{T}$ は実数濃度以上である。

逆に，任意の $\tau = (s_{x_1}, s_{x_2}, \ldots) \in \mathbb{T}, x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，

$$\eta' : \tau \mapsto (x_1 - 1)\frac{1}{n+1} + (x_2 - 1)\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \cdots + (x_i - 1)\left(\frac{1}{n+1}\right)^i + \cdots$$

を定義すれば，η' は $\mathbb{T}$ から $[0,1]$ の中への一対一写像である。これは，$\mathbb{T}$ の濃度は実数の区間 $[0,1]$ より小さいことを示している。これから，次の定理を得る。

定理 1　集合 $\mathbb{T}$ は実数の区間 $[0,1]$ と等濃である。

2.2 位相の導入

$\mathbb{T}$ の各点 $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \ldots)$ にたいして

$$
\begin{aligned}
O_m(\bar{\tau}) &\overset{\mathrm{def}}{=} \{\tau \in \mathbb{T} \mid \tau_i = \bar{\tau}_i, i = 1, 2, \ldots, m\} \\
\mathbb{O}(\bar{\tau}) &\overset{\mathrm{def}}{=} \{O_m(\tau) \mid m \in \mathbb{N}\} \\
\mathbf{B} &\overset{\mathrm{def}}{=} \{B \mid \exists \bar{\tau} \in \mathbb{T} \text{ such that } B \in \mathbb{O}(\bar{\tau})\}
\end{aligned}
$$

を定義する。また，T の要素の有限列 $t = (t_1, \ldots, t_k), t_i \in T,\ i = 1, 2, \ldots, k$ に対しても $m \leqq k$ のとき，$O_m(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\tau \in \mathbb{T} \mid \tau_i = t_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$ と表記する。これは記号の乱用であるが，有限列に対しては t を，無限列には τ を用いるという特徴を与える事によって違いは明らかであろう。

次の定理により，ある位相が存在して $\mathbb{O}(\bar{\tau})$ は点 $\bar{\tau}$ の基本近傍系を与えることが判る。

補助定理 1　集合族 $\mathbb{B}$ は集合 $\mathbb{T}$ におけるある位相 $\mathcal{T}$ の基底である。

［証明］ U, V を $\mathbb{B}$ の任意の要素とする。定義により，$\mathcal{T}$ の中に τ^1, τ^2 そして，ある自然数 m_1, m_2 が存在して，

$$U = O_{m_1}(\tau^1),\ V = O_{m_2}(\tau^2)$$

である。$\bar{\tau} \in V \cap U$ とすれば，$\tau_i^1 = \bar{\tau}_i, i=1,2,\ldots,m_1$ かつ $\tau_i^2 = \bar{\tau}_i$, $i=1,2,\ldots,m_2$ である。そこで，$W \overset{\mathrm{def}}{=} O_{\max(m_1,m_2)}(\bar{\tau})$ とすれば，$\bar{\tau} \in W \subset U \cap V$ かつ $W \in \mathbb{B}$ である。ここで，どのような集合の族が位相を持ちうるかを示す次の定理を用いる。それは，

A family $\mathcal{B}$ of sets is a base for some topology for the set $X = \cup\{B | B \in \mathcal{B}\}$ if and only if for every two members U and V of $\mathcal{B}$ and each point x in $U \cap V$ there is W in $\mathcal{B}$ such that $x \in W$ and $W \subset U \cap V$. (Kelly (1955, p. 47, Theorem 11))

である。これによって $\mathbb{T}$ 上にある位相 $\mathcal{T}$ が存在して $\mathbb{B}$ がその基底である。∎

補助定理 2　$(\mathbb{T}, \mathcal{T})$ は可算基を持つハウスドルフ位相空間である。

［証明］ 基底 $\mathbb{B}$ が可算であることは $\cup_{i=1}^{\infty} \{(t_1, t_2, \ldots, t_i) | t_j \in T, j=1,\ldots i\}$ が $\mathbb{B}$ と等濃であり，前者が可算であることから明らかである。$\mathbb{T}$ の相異なる二要素 τ^1, τ^2 について $\tau^1 \neq \tau^2$ とする。ある番号 k が存在して，$\tau_k^1 \neq \tau_k^2$ である。$O_k(\tau^1)$，$O_k(\tau^2)$ は $\mathbb{B}$ の要素であり，$\tau^i \in O_k(\tau^i)$ かつ，$O_k(\tau^1) \cap O_k(\tau^2) = \emptyset$ である。よって $\mathcal{T}$ はハウスドルフ位相である。∎

補助定理 3　$(\mathbb{T}, \mathcal{T})$ は正則位相空間である。

［証明］ $\bar{\tau} \in \mathbb{T}$ かつ k を任意の自然数とする。まず，開集合 $O_k(\bar{\tau})$ の補集合 $O_k(\bar{\tau})^c$ は

$$O_k(\bar{\tau})^c = \cup_{I \in P_0(\{1,2,\ldots,k\})} \{\tau \in \mathbb{T} | \tau_i \neq \bar{\tau}_i \text{ for all } i \in I\} \qquad (3)$$

となることを示そう。ここで，$\mathcal{P}_0(S)$ は集合 S の冪集合 $\mathcal{P}(S)$ から空集合を取り除いたものである。(3)の右辺が左辺の部分集合であることは明らかであるから，逆の包含関係を示す。$\tilde{\tau} \in O_k(\bar{\tau})^c$ とする。いま，$I \overset{\mathrm{def}}{=} \{j \in \{1,2,\ldots,k\} | \tilde{\tau}_j \neq \bar{\tau}_j\}$ と定義する。$I = \emptyset$ であれば，$\tilde{\tau} \in O_k(\bar{\tau})$ であるから，$I \neq \emptyset$ でなければならない。よって，$\tilde{\tau} \in \{\tau \in \mathbb{T} | \tau_i \neq \bar{\tau}_i \text{ for } i \in I\}$ となる。これは(3)の左辺が右辺に含まれることを意味する。

(3)の右辺の一つの項を取り上げる。それは自然数の非空な集合 $I \subset \{1,2,\ldots,k\}$ が存在して

$$Q \overset{\mathrm{def}}{=} \{\tau \in \mathbb{T} | \tau_i \neq \bar{\tau}_i \text{ for } i \in I\}$$

と表される。いま，I は自然数の有限個の集合であるから，最大値が存在する。それを m とする。

$$J \overset{\mathrm{def}}{=} \{t \in T^m | t_i \in T \wedge t_i \neq \bar{\tau}_i \text{ if } i \in I\}$$

とすれば，J は有限集合で $Q=\cup_{t\in J}O_m(t)$ となる。したがって，Q は開集合である。(3)の右辺を見ると $O_k(\bar{\tau})^c$ は開集合でなければならない。これによって，$O_k(\bar{\tau})$ は開集合であり，同時に閉集合となる。これは $\bar{\tau}$ に閉集合の基本近傍近傍系が存在することを意味する。したがって，$\mathcal{T}$ は正則位相である。▮

ここで，次のことに注意をしておきたい。補助定理3の証明より位相空間 $(\mathbb{T},\mathcal{T})$ のすべての開集合が同時に閉集合であるように見えるが，それが示されているわけではない。なぜなら，O を $\mathcal{T}$ の任意の開集合とする。基底の部分集合 $S\subset\mathbf{B}$ が存在して，$O=\cup_{G\in S}G$ となる。補助定理で中で，各 $G\in S$ は開集合かつ閉集合である。したがって，右辺は任意個の閉集合の和であるが，任意個の閉集合の和は必ずしも閉集合ではない。つまり，O が閉集合と示されているわけではない。

さらに，定理1，補助定理1を見ると，$\mathbb{T}$ の位相 $\mathcal{T}$ は離散位相でない。なぜなら，もし離散位相であれば，定理1から可算基を持つことが不可能であるからである。

以上の結果を定理としてまとめておこう。

定理2　$(\mathbb{T},\mathcal{T})$ は $\mathbf{B}$ を可算基にもつ（したがって，第二可算公理を満たす）ハウスドルフ正則位相空間である。

位相空間 $(\mathbb{T},\mathcal{T})$ は定理2によって十分取り扱いやすい性質を有していることが示された。次の目的は，位相空間 $(\mathbb{T},\mathcal{T})$ がコンパクト距離空間であることを示すことである。

まず，次のウリゾーンの定理

Urysohn's Metrization Theorem: *A regular T_1-space whose topology has a countable base is homeomorphic to a subpace of the cube Q^ω and is hence metrizable.* (see Kelly (1955, Theorem 16, page 125))

を念頭において，補助定理2とハウスドルフ性が T_1 性を意味することから[4]，$\mathbb{T}$ は距離空間である。また，可算基を持つ位相空間は，定義的に第二可算公理を満たし，したがって，リンデレーフ空間（Lindelöf space）空間となる[5]。さらに，ティコノフの補助定理

Tychonoff's Lemma: *Each regular Lindelöf space is normal.* (see Kelley (1995, Lemma 1, page 113))

を用いる。$(\mathbb{T},\mathcal{T})$ は正規位相空間であり，かつ，リンデレーフ空間である。この性質とコンパクト性の関係は，次の補助定理で与えられる。

Lemma: *If X is a Lindelöf space and every sequence in X has a cluster point, then X is compact.* (Kelley [1, Lemma 4, p. 137])

上の補助定理に従って，$(\mathbb{T},\mathcal{T})$ のコンパクト性を示そう。τ^ν, $\nu=1,2,\ldots$ を $\mathbb{T}$ の列とする。いま，

$$N_i^1 \overset{\text{def}}{=} \{\nu \in \mathbb{N} \mid \tau_1^\nu = s_i\},\ i=1,2,\ldots,n^6$$

とする。$N_1^1, N_2^1, \ldots, N_n^1$ のうち少なくとも一つが無限個の ν を含まなければならない。それを $N_{i_1}^1$ とし，$\tau_1^* \overset{\text{def}}{=} s_{i_1}$ と定義する。さらに，

$$N_i^2 \overset{\text{def}}{=} \{\nu \in N_{i_1}^1 \mid \tau_2^\nu = s_i\},\ i=1,2,\ldots,n$$

とする。この中に ν を無限個含むものが少なくとも一つ存在する。それを $N_{i_2}^2$ とし，$\tau_2^* \overset{\text{def}}{=} s_{i_2}$ と定義する。この手続きを繰り返すと，

$$N_{i_1}^1 \supset N_{i_2}^2 \supset N_{i_3}^3 \supset \ldots,\ \text{かつ}\ \tau^* \overset{\text{def}}{=} (\tau_1^*, \tau_2^*, \ldots) \in \mathbb{T}$$

が得られ，かつ定義される。τ^* の任意の近傍 $O_n(\tau^*)$ に対して，任意の $\nu \in N_{i_n}^n$ について $\tau^\nu \in O_n(\tau^*)$ が成立する。これは，τ^* が列 $\tau^\nu, \nu=1,2,\ldots$ の集積点であることを意味している。上にあげた補助定理によって $(\mathbb{T}, \mathcal{T})$ はコンパクト集合である。

以上の結果をまとめて定理として述べておこう。

定理 3 $(\mathbb{T}, \mathcal{T})$ はコンパクト距離空間である。

2.3 測度の導入

前節によって $\mathbb{T}$ の位相の基底は

$$\mathbb{B} = \{O_n(\tau) \mid \tau \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{N}\}$$

である。$\mathbb{B}$ には次の興味深い性質がある。

補助定理 4 集合 $\mathbb{B}$ の二つの要素 E, F について $E \cap F \neq \emptyset$ であれば，$E \subset F$ または $F \subset E$ のどちらかである。また，$E \setminus F$ は有限個の互いに共通部分を持たない $\mathbb{B}$ の要素の和集合となるか，あるいは空集合となるか，のどちらかである。

[証明] E_1, E_2 を $\mathbb{B}$ の要素とする。ある整数 n, m と $\mathbb{T}$ の要素 τ^1, τ^2 が存在して，

$$E_1 = O_n(\tau^1),\ E_2 = O_m(\tau^2)$$

とできる。一般性を失うことなく $n \geqq m$ と仮定する。$E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ の場合を考察する。$\tau \in E_1 \cap E_2$ を満たす τ が存在する。したがって，

$$\tau_k^1 = \tau_k,\ k=1,2,\ldots,n,\ \text{かつ}\ \tau_k = \tau_k^2,\ k=1,2,\ldots,m$$

が成立する。$\tau_k^1 = \tau_k^2, k=1,2,\ldots,m$ であるから，$E_1 \subset E_2$ を意味する。したがって，$n > m$ であれば，

$$J \overset{\text{def}}{=} \{t \in T^n \mid t_i = \tau_i^2 \text{ if } 1 \leqq i \leqq m,\ t_i \neq \tau_i^1 \text{ if } m+1 \leqq i \leqq n\}$$

とし，$m=n$ の場合には $J \overset{\text{def}}{=} \emptyset$ とすると，

$$E_2 \setminus E_1 = \cup_{t \in J} O_n(t),\ \text{かつ}\ (\bar{t}, \hat{t} \in J \text{ and } \bar{t} \neq \hat{t}) \Rightarrow O_n(\bar{t}) \cap O_n(\hat{t}) = \emptyset$$

が成立する。

したがって，$E_1 \setminus E_2, E_2 \setminus E_1$ は有限個の互いに共通部分を持たない $\mathbb{B}$ の要素の和集合となるか，あるいは空集合となるか，のどちらかである。▌

R を $\mathbb{B}$ から生成される加法族（ring）とする。この時，R は次の補助定理で与えられる。

補助定理 5　$\mathbb{B}$ から生成される加法族は

$$R=\{E \subset \mathbb{B} \mid E=\cup_{i\in\Lambda}E_i,\ \Lambda \text{ is a finite set, } E_i \in \mathbb{B}\}$$

である。

［証明］　集合 $\{E \subset \mathbb{B} \mid E=\cup_{i\in\Lambda}E_i,\ \Lambda \text{ is a finite set, } E_i \in \mathbb{B}\}$ を Z と書きあらわす。集合 Z が加法族 R の部分集合であるのは明らかである。したがって，Z が加法族であることを示せばよい。集合 Z の任意有限個の要素の和集合は，$\mathbb{B}$ の有限個の要素の和集合であるから，集合演算 "$\cup$" に関して Z は閉じている。また上の補助定理 4 によって，$\mathbb{B}$ の二つの要素 E, F について $E \setminus F$ は $\mathbb{B}$ の有限個の互いに共通部分を持たない集合の和集合となるか，あるいは空集合となるか，のどちらかである。したがって，集合 Z の二つの要素 E, F について $E \setminus F$ は $\mathbb{B}$ の有限個の要素の和集合となるか，空集合になるかのどちらかである。したがって，集合 Z は集合演算 "$\setminus$" に関して閉じている。▌

いま，$\mathbb{B}$ 上に加法的な非負値関数 μ が定義されているとする。さらに，E を R の任意の要素とする。補助定理 5 によって $\mathbb{B}$ に含まれる有限個の要素 $\{E_j, j=1,2,\dots,k\}$ の和集合である。補助定理 4 から $i \neq j$ なら $E_j \cap E_i = \emptyset$ と想定することができる。そこで，

$$\mu(E) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i)$$

と定義すれば，加法族 R 上に測度 μ が定義される。この定義が整合的であるかの検討は易しい。通常は極めて簡単に次のように示される。つまり，互いに共通部分を持たない二種類の族 $\{E_j, j=1,2,\dots,k\}$，そして $\{F_i, i=1,2,\dots,m\}$ が存在して $E=\cup E_j=\cup F_i$ が成立したとする。

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{j=1}^{\infty}E_j) &= \mu(\cup_{j=1}^{\infty}(E_j \cap E)) \\ &= \mu((\cup_{j=1}^{\infty}E_j) \cap (\cup_{i=1}^{\infty}F_i)) \\ &= \mu(\cup_{i=1}^{\infty}(F_i \cap E)) = \mu(\cup_{i=1}^{\infty}F_i)\end{aligned}$$

が成立する。ここでは，補助定理 4 があるためにより簡明な状況が発生している。つまり，E_1 に対して，番号からなる集合 $I_1 \overset{\text{def}}{=} \{i \mid E_1 \cap F_i \neq \emptyset\}$ を定義する。$\#I_1 \geq 1$ は自明である。[7] $\#I_1 > 1$ とする。$\{F_i \mid i \in I_1\}$ は共通部分を持たない族であるから，補助定理 B の要素より $E_1=\cup_{i\in I_1}F_i$ が成立する。$\#I_1=1$ である場合は，$I_1=\{1\}$ として，$J_1 \overset{\text{def}}{=} \{j \mid E_j \cap F_1 \neq \emptyset\}$ とすれば，やはり $\#J_1 \geq 1$ である。$\#J_1=1$ ならば，$E_1=F_1$，$\#J_1>1$ ならば，$F_1=\cup_{j\in J_1}E_j$ となる。以上の議論は，各 E_j, F_i はそれぞれ $\{F_1,\dots,F_m\}$，$\{E_1,\dots,E_k\}$ の部分集合の和集合で表現

されることを意味している。したがって，加法族 R 上の測度 μ は矛盾なく定義されている。

次の定理によって，われわれは R 上の測度を可算加法族 $S(R)$ に拡張できる。

Theorem A. *If μ is a σ-finite measure on a ring R, then there is a unique measure $\bar{\mu}$ on the σ-ring $S(R)$ such that, for E in R, $\bar{\mu}(E)=\mu(E)$; the measure $\bar{\mu}$ is σ-finite.*[8] (Halmos (1950, page 54))

予め集合族 $\mathbf{B}$ に加法的集合関数 μ が与えられるとそれが，自然に可算加法族上の測度に拡張できるわけである。

注

1　集合 $\succ_a \subset X_a \times X_a$ を非反射性，非対称性，連続性を満たす $X_a \subset \mathbf{R}^\ell$ の厳密な選好とするとき，組 $(X_a, \succ)$ を $\mathbf{U}$ の第１要素とするのが通常の手続きである。ここで，$\precsim_a \in \mathrm{Proj}\,\mathbf{U}$ としているのは，$(X_a, \succ)$ と $\precsim_a$ の間に単射が存在するからである。

2　個人のインデックス集合 A が $\mathbf{U}$ とは独立に与えられている場合には，$\mathcal{U} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{P \subset \mathbf{U} \mid \phi^{-1}(P) \in \mathcal{A}\}$，$\nu(\mathcal{U}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mu(\phi^{-1}(P))$，$P \in \mathcal{U}$ として，測度空間 $(\mathcal{U}, \nu, \mathbf{U})$ が定義され，ν は $\mathcal{U}$ の上で構成員の分布を表す。

3　確率過程では実数，あるいはスカラーが値域とされることが多いが，ここでは，より一般的な測度空間を値域と想定している。

4　位相空間 $(X, \mathfrak{X})$ が T_1 分離公理を満たすとは，任意の $x \in X$ について $\{x\}$ が閉集合となることである。

5　位相空間 $(X, \mathfrak{X})$ がリンデレーフ空間であるとは，任意の開被覆が可算部分被覆を持つことである。

6　記号 $\mathbf{N}$ はすべての自然数の集合を表す。

7　集合 S にたいして $\#S$ は S の基数を表わす。

8　測度 μ が加法族 R において可算有限 σ-finite であるとは，任意の $E \in R$ について集合の族 $\{E_1, E_2, \ldots\}$ が R の中に存在して，$E \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ かつ $\mu(E_i) < \infty, \forall_i$ が成立することである。

参　考　文　献

Aumann, R. J., (1964) "Markets with continuum of traders," *Econometrica*, 32, 39-50.

Debreu G., (1959) *Theory of Value*, Yale University Press.

Halmos P. R., (1950) *Measure Theorey*, (Springer-Verlag).

Hicks J. R., (1946) *Value and Capital*, 2nd ed., (Oxford: Oxford University Press).

Hildenbrand W., (1974) *Core and Equilibria of a Large Economy*, second edition (Princeton University Press, Priceton).

入谷純 (1986)『課税の最適理論』東洋経済新報社。

Kelly J. L., (1955) *General Topology*, (Springer-Verlag).

Klein E., and A. C., Thompson, (1984) *Theory of Correpondences*, (Wiley, New York).

MasColell A., M. D. Whinston, and J. Green, (1995) *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.

Mirrlees, J. A., (1971) "An Exploration in the Theory of Optimal Income Taxation," *Review of Economic Studies*, 38, 175-208.