



# 経験尤度に基づく検定とt検定との検出力比較 : モンテ・カルロ実験による小標本特性

谷崎, 久志

---

(Citation)

国民経済雑誌, 186(3):53-64

(Issue Date)

2002-09

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCOI)

<https://doi.org/10.24546/00339478>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/00339478>



# 経験尤度に基づく検定と $t$ 検定との検出力比較： モンテ・カルロ実験による小標本特性

谷 崎 久 志

母集団の分布を仮定しない検定は、様々なものが考えられている。本稿では、その中の一つである経験尤度比検定を用いて、母平均の検定を行う。経験尤度比検定は大標本検定であるため、小標本では、サイズに歪みが生じる。このサイズ是正を行うためにも、様々な修正法が考案されている。ここでは、バートレット修正を用いて、サイズ是正を行うことにする。そして、本稿の目的は、モンテ・カルロ実験によって、 $t$  検定、経験尤度比検定、修正済み経験尤度比検定の検出力比較を行うことである。

キーワード 経験尤度,  $t$  検定, バートレット修正, 検出力

## 1 は じ め に

平均の検定を行う場合、通常、母集団に正規分布を仮定して、 $t$  検定を用いて、仮説検定が行われる。しかしながら、母集団が正規分布に従うかどうかは、本来は未知である。小標本で、母集団が正規分布でないにもかかわらず、 $t$  検定を当てはめると、正しい検定結果が得られない。大標本では、母集団の分布が何であろうと、平均と分散が存在しさえすれば、中心極限定理によって、標本平均の分布を正規分布に近似することができる。

ここでは、標本の分布を仮定せずに平均の検定を行うことを考える。分布に依存しない検定 (nonparametric test or distribution-free test) はこれまで数多く考案されてきた。ここでは、経験尤度 (empirical likelihood) に基づく検定方法を紹介し、 $t$  検定との検出力を比較する。これまでの研究としては、Thomas and Grunkemeier (1975) は、経験尤度比 (empirical likelihood ratio) というアイデアを用いて、信頼区間を作ることを試みた。Owen (1988) は、Thomas and Grunkemeier (1975) を拡張して、一変数の場合に平均や他の統計量に関して、経験尤度を用いることを提案した。さらに、Owen (1990) は、多変数に拡張して、経験尤度を用いて同時信頼区間を求めることを試みた。また、Owen (1991) は、経験尤度を用いて、線形回帰モデルでの検定問題を考えた。Qin and Lawless (1994) は、より一般的に、平均の検定も線形回帰モデルの検定もある特殊なケースであることを示した。その他にも、Hall (1990), Baggerly (1998), Lazar and Mykland (1998), Kitamura (1997, 2001), Kitamura

and Stutzer (1997) 等数多くの様々な研究がある。Owen (2001) がこの分野の最もよい参考書となるだろう。

本稿では、 $t$  検定、経験尤度に基づく検定、バートレット修正を行った経験尤度に基づく検定の 3 種類の検定方法を、モンテ・カルロ実験によって、検出力やサイズについて比較検討を行う。

## 2 経験尤度に基づく検定方法

本節では、Owen (2001) に沿って、経験尤度の考え方とそれに基づいた検定方法（特に、平均の検定）を簡単に紹介する。

まず、確率変数  $X$  を  $k \times 1$  ベクトルとする。 $X$  の分布関数の定義は、

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x),$$

である。

$n$  個の互いに独立な確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を考える。このとき、経験分布 (empirical distribution) は、

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x),$$

として得られる。ただし、

$$I(X_i \leq x) = \begin{cases} 1, & X \leq x \text{ のとき,} \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

とする。

分布関数  $F(x)$  の離散近似を考え、 $\text{Prob}(X_i = x_i) = p_i$  と近似する。このとき、 $X_1, X_2, \dots, X_n$  の同時密度関数、すなわち、尤度関数（特に、このときの尤度関数を nonparametric likelihood と呼ぶ）は、

$$L(F) \equiv \prod_{i=1}^n \text{Prob}(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n p_i,$$

と表される。一方、経験尤度 (empirical likelihood) は、 $x_1, x_2, \dots, x_n$  は無作為標本なのでそれぞれ同等の確率 ( $1/n$ ) で起こると考えて、

$$L(F_n) \equiv \prod_{i=1}^n \frac{1}{n},$$

となる。

さらに、経験尤度比 (empirical likelihood ratio) を、

$$R(F) \equiv \frac{L(F)}{L(F_n)},$$

のように定義する。 $L(F)$  と  $L(F_n)$  を代入することによって、経験尤度比は、

$$R(F) = \prod_{i=1}^n n p_i,$$

となる。

分布関数  $F(x)$  の離散近似によると、 $X$  の期待値は、

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \text{Prob}(X_i = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \mu,$$

と表される。 $\sum_{i=1}^n x_i p_i = \mu$  は、 $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) p_i = 0$  と書き直される。

このとき、 $\mu$  を与えたもとで、次の最大化問題を考えることができる。それは、

$$(i) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) p_i = 0,$$

$$(ii) \quad 0 \leq p_i \leq 1,$$

$$(iii) \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

の3つ制約のもとで、経験尤度比の対数

$$\sum_{i=1}^n \log(n p_i), \tag{1}$$

を、 $p_1, p_2, \dots, p_n$  について最大化するという最大化問題である。(i)～(iii)の制約付きで(1)を最大化するような  $p_1, p_2, \dots, p_n$  を求め、(1)に代入することによって、 $\mu$  を与えたもとの経験尤度比の最大値を得ることができる。具体的には、ラグランジェ関数

$$G = \sum_{i=1}^n \log(n p_i) - n \lambda' \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) p_i \right) + \gamma \left( \sum_{i=1}^n p_i - 1 \right),$$

を設定し、 $p_1, p_2, \dots, p_n, \lambda, \gamma$  について、それぞれ偏微分して、ゼロと置き、 $n+2$ 本の連立方程式を解けばよい。ただし、 $\lambda$  と  $\gamma$  をラグランジェ乗数とする。右辺第2項は、計算の簡単化のために、 $n$  を掛けることにする。対数経験尤度比  $\sum_{i=1}^n \log(n p_i)$  の関数形から、ただ一つの大局的最大値が存在することが分かる。

しかし、 $p_1, p_2, \dots, p_n, \lambda, \gamma$  の解が全部、陽関数の形で、求まるわけではないので、次のような方法で解を求めることになる。まず、 $p_i$  について、偏微分すると、

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = \frac{1}{p_i} - n \lambda' (x_i - \mu) + \gamma = 0,$$

を得る。両辺に  $p_i$  を掛けて、 $i$  について足し合わせると、

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} = n + \gamma = 0,$$

が得られる。 $\gamma = -n$ を代入し、 $\lambda'(x_i - \mu) = (x_i - \mu)'\lambda$ に注意して、 $p_i$ について整理すると、

$$p_i = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + (x_i - \mu)'\lambda} \quad (2)$$

を得る。このように、 $\lambda$ が与えられれば、 $p_i$ は明示的に決まる。

$\lambda$ を求めるためには、 $(x_i - \mu)$ を(2)式の両辺に掛けて、 $i$ について足し合わせて、

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{1 + (x_i - \mu)'\lambda} = 0, \quad (3)$$

を得る。 $\mu$ を与えたもとの、(3)式を満たす $\lambda$ を求めればよい。非線形方程式の解を求める方法はいくつか考えられるが、例えば、ニュートン法等の非線形最適化問題を解くことによっても、 $\lambda$ を得ることができる。すなわち、

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} + \left( \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)(x_i - \mu)'}{(1 + (x_i - \mu)'\lambda^{(i)})^2} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{1 + (x_i - \mu)'\lambda^{(i)}} \right),$$

のように、収束計算で $\lambda$ を求めることができる。計算上の注意点として、 $0 \leq p_i \leq 1$ という条件が必要となる。この条件は、(2)式から、 $1 + (x_i - \mu)'\lambda \geq 1/n$ と同値である。そのため、この $1 + (x_i - \mu)'\lambda \geq 1/n$ という条件を満たしながら、上に示した収束計算を行わなければならない。このようにして得られた $\lambda$ を(2)式に代入することによって、 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と $\mu$ を与えたもとの、 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ をすべて計算することができる。すなわち、(1)式に(2)式を代入して、 $p_i$ を消去すると、(i)~(iii)の制約付き対数経験尤度比  $\sum_{i=1}^n \log(np_i)$  は、

$$- \sum_{i=1}^n \log(1 + (x_i - \mu)'\lambda),$$

と書き直すことができる。ただし、 $\lambda$ は(3)式を満たすものとする。

仮説検定は、次のようにして、行えばよい。いま、 $H_0: \mu = \mu_0$ という帰無仮説を考える。実現値 $x_i$ を確率変数 $X_i$ で置き換える。このとき、帰無仮説 $H_0$ が正しいもとの、 $n$ が大きくなるにつれて、 $-2 \log R(F) = 2 \sum_{i=1}^n \log(1 + (X_i - \mu_0)'\lambda)$ は $\chi^2(k)$ 分布に分布収束することが知られている(例えば、Owen (2001)を参照せよ)。すなわち、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が正しいもとの、

$$2 \sum_{i=1}^n \log(1 + (X_i - \mu_0)'\lambda) \rightarrow \chi^2(k), \quad (4)$$

と表される。 $\chi^2_\alpha(k)$ を自由度 $k$ の $\chi^2$ 分布の上側 $100 \times \alpha$ パーセント点とする。このとき、 $2 \sum_{i=1}^n \log(1 + (x_i - \mu_0)'\lambda) > \chi^2_\alpha(k)$ であれば、 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却すればよい。

$2 \sum_{i=1}^n \log(1 + (X_i - \mu_0)'\lambda)$ は漸近的には $\chi^2(k)$ 分布に従うが、小標本では近似はあまりよくないことが分かっている。そのため、サイズ修正(size correction)を行う必要がある。様々なサイズ修正法が提案されているが、本稿では、バートレット修正(Bartlett correction)を

採用する。パートレット修正によると、

$$2 \sum_{i=1}^n \log(1 + (X_i - \mu_0)' \lambda) \sim \left(1 + \frac{a}{n}\right) \chi^2(k),$$

によって近似することになる（パートレット修正については、例えば、Owen (2001) を参照せよ）。ただし、

$$a = \frac{1}{2} \frac{m_4}{m_2^2} - \frac{1}{3} \frac{m_3^2}{m_2^3},$$

とする。 $m_j$  は平均  $E(X)$  の回りの  $j$  次の積率で、 $m_j = E((X - E(X))^j)$  として定義される。しかし、 $m_j$  は未知であるので、 $m_j$  をその推定値  $\hat{m}_j = (1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^j$  で置き換えて、

$$2 \sum_{i=1}^n \log(1 + (X_i - \mu_0)' \lambda) \sim \left(1 + \frac{\hat{a}}{n}\right) \chi^2(k) \quad (5)$$

によって近似して、検定が行われる。ただし、 $\hat{a}$  は  $a$  の推定値を表し、

$$\hat{a} = \frac{1}{2} \frac{\hat{m}_4}{\hat{m}_2^2} - \frac{1}{3} \frac{\hat{m}_3^2}{\hat{m}_2^3},$$

とする。

以上のように、分布に依存しない検定の中で、(4)式と(5)式による経験尤度に基づく検定方法、しかも、平均に関する検定方法を紹介した。平均だけでなく、より一般的な検定問題については、補足を参考にせよ。本稿では、次節で  $t$  検定、経験尤度に基づく検定、パートレット修正を行った経験尤度に基づく検定の3種類の平均の検定方法を、モンテ・カルロ実験によって、検出力やサイズについて比較を行う。

### 3 モンテ・カルロ実験による検出力比較

次のセットアップのもとで、経験尤度による検出力（パートレット修正を行ったものを行わないものの2つの検定の検出力）と  $t$  検定による検出力を計算する。

- (i) 母集団の分布は、標準正規分布、一様分布、 $\chi^2(1)$  分布、 $t(3)$  分布の4通りを考える。それぞれを、平均0、分散1に基準化する。これ以降、標準正規分布を(N)、一様分布を(U)、 $\chi^2(1)$  分布を(X)、 $t(3)$  分布を(T)とそれぞれ表記することにする。
- (ii) 標本数は  $n=15, 25, 50, 100, 200$  とする。小標本と大標本とを比較する。
- (iii) 帰無仮説  $H_0: \mu = \mu_0$ 、対立仮説  $H_1: \mu = \mu_1$  とする。ただし、 $\mu_0 = .0, \mu_1 = .0, -.1, -.2, -.4$  とする。
- (iv) 有意水準  $\alpha$  は .10, .05, .01 とする。
- (v) それぞれの有意水準について、10000回の実験を行い、それぞれの対立仮説を棄却する回数を求める。それを、10000で割って、棄却率（すなわち、検出力）を求める。

以上のようなセットアップで、モンテ・カルロ実験を行う。得られる結果は次のように予想される。

- (N) では、正規母集団が仮定されている。そのため、 $t$ 検定は、他のどの検定方法より、正しい検出力が得られるはずである。
- $\mu_1 = .0$  の場合、数値はサイズを表し、有意水準に一致する必要がある。しかし、本稿で紹介した経験尤度比検定は、大標本検定であるので、小標本ではサイズ ( $\mu_1 = .0$  の場合の検出力) に歪みが生じる。そのため、サイズ修正を行った修正済み経験尤度比検定は、小標本において経験尤度比検定よりサイズが是正されているはずである。
- 母集団がどの分布に従っていたとしても、経験尤度比検定、修正済み経験尤度比検定、 $t$ 検定はすべて、 $n$ が大きくなるにつれて、一致すべきである。この結果は中心極限定理から明らかである。

実際に、得られた結果は、表1に示される。 $\hat{p}$ を表中の数値としたとき、 $\hat{p}$ の標準誤差は  $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/10000}$  となり、大きくても  $\sqrt{.5(1-.5)/10000} = .005$  となる (10000回のモンテ・カルロ実験を行ったため、10000で割ることになる)。

得られた結果は、次のように要約される。

- $p$ を真のサイズ、 $\hat{p}$ を経験的サイズ (すなわち、表1の数値) とする。このとき、帰無仮説  $H_0: p = \alpha$  が正しいもとで、中心極限定理から、漸近的に、 $(\hat{p} - \alpha) / \sqrt{\alpha(1-\alpha)/10000} \sim N(0, 1)$  となる。表1の  $\mu_1 = .0$  のケースの右肩に付けた \*\*\* は有意水準1%、\*\* は有意水準5%、\* は有意水準10%の両側検定で、真のサイズは有意水準と異なることそれぞれを示す。すなわち、 $\mu_1 = .0$  の数値については、右肩に何も付いていないケースが望ましいと言える (この場合は、正しいサイズを表していると言えるので)。 $t$ 検定について、(N) はどの場合 ( $\alpha = .10, .05, .01$  と  $n = 15, 20, 25, 50, 100, 200$  の場合) にも正しいサイズを示し、 $t$ 検定は正しい検定であると言える。正規母集団の場合、 $t$ 検定は一様最強検定であるので、これは当然の結果である。(U) も正しいサイズを示していると言えるが、(X) と (T) については特に  $n$  が小さいとき、 $t$ 検定は正しい検定とはなっていないことが分かる (経験的サイズは統計的に有意水準と異なるという結果が得られている)。すなわち、 $t$ 検定については、(N) は正しいサイズと検出力を与えるが、母集団が (U), (X), (T) の場合はサイズが過大評価される場合も過小評価される場合もある。
- また、 $n$  が小さいとき、経験尤度比による検定方法では、母集団のどの分布についてもサイズに歪み (size distortion) が生じ、サイズも検出力も過大評価されている。例えば、 $n = 15, 20, 25$  で (N) の場合、経験尤度比検定と  $t$ 検定を比べると、経験尤度比検定の方がサイズだけでなく検出力も大きく推定されている。しかし、 $n$  が大きくなると (例えば、 $n = 200$  のとき)、経験尤度比検定も、 $t$ 検定と同様に、正しいサイズを示すことが分かる。

表 1：経験尤度比に基づく検定と  $t$  検定の検出力比較

| $n$ | $\mu_1 \backslash \alpha$ | 経験尤度比検定<br>(4)式 |          |          | 修正済み<br>経験尤度比検定<br>(5)式 |          |          | $t$ 検定   |          |          |          |
|-----|---------------------------|-----------------|----------|----------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|     |                           | .10             | .05      | .01      | .10                     | .05      | .01      | .10      | .05      | .01      |          |
| 15  | (N)                       | .0              | .1299*** | .0770*** | .0271***                | .1172*** | .0672*** | .0227*** | .1001    | .0492    | .0093    |
|     |                           | -.1             | .1553    | .0958    | .0353                   | .1405    | .0828    | .0293    | .1198    | .0619    | .0148    |
|     |                           | -.2             | .2319    | .1512    | .0633                   | .2122    | .1353    | .0563    | .1867    | .1079    | .0300    |
|     |                           | -.4             | .4876    | .3754    | .2003                   | .4668    | .3481    | .1788    | .4345    | .3041    | .1124    |
|     | (U)                       | .0              | .1101*** | .0607*** | .0172***                | .0996    | .0529    | .0149*** | .0969    | .0485    | .0110    |
|     |                           | -.1             | .1363    | .0785    | .0250                   | .1227    | .0692    | .0211    | .1170    | .0636    | .0158    |
|     |                           | -.2             | .2096    | .1316    | .0467                   | .1955    | .1178    | .0390    | .1775    | .1015    | .0287    |
|     |                           | -.4             | .4804    | .3582    | .1641                   | .4558    | .3374    | .1452    | .4075    | .2780    | .0984    |
|     | (X)                       | .0              | .1815*** | .1248*** | .0617***                | .1648*** | .1113*** | .0551*** | .1642*** | .1190*** | .0657*** |
|     |                           | -.1             | .2275    | .1659    | .0934                   | .2099    | .1525    | .0840    | .2421    | .1860    | .1119    |
|     |                           | -.2             | .3030    | .2347    | .1407                   | .2839    | .2156    | .1293    | .3358    | .2723    | .1686    |
|     |                           | -.4             | .4761    | .3861    | .2550                   | .4533    | .3631    | .2341    | .5450    | .4610    | .3171    |
|     | (T)                       | .0              | .1575*** | .0992*** | .0372***                | .1403*** | .0862*** | .0308*** | .0878*** | .0403*** | .0068*** |
|     |                           | -.1             | .2018    | .1318    | .0569                   | .1802    | .1165    | .0468    | .1299    | .0634    | .0111    |
|     |                           | -.2             | .3116    | .2312    | .1144                   | .2870    | .2084    | .1001    | .2405    | .1434    | .0391    |
|     |                           | -.4             | .5881    | .4912    | .3278                   | .5623    | .4609    | .3001    | .5465    | .4195    | .1998    |
| 20  | (N)                       | .0              | .1166*** | .0660*** | .0215***                | .1064**  | .0591*** | .0190*** | .0966    | .0479    | .0096    |
|     |                           | -.1             | .1517    | .0913    | .0288                   | .1394    | .0829    | .0252    | .1283    | .0671    | .0143    |
|     |                           | -.2             | .2535    | .1643    | .0625                   | .2384    | .1501    | .0541    | .2229    | .1305    | .0368    |
|     |                           | -.4             | .5782    | .4564    | .2410                   | .5557    | .4314    | .2177    | .5391    | .3983    | .1696    |
|     | (U)                       | .0              | .1045    | .0540*   | .0132***                | .0975    | .0482    | .0113    | .0943*   | .0490    | .0112    |
|     |                           | -.1             | .1373    | .0761    | .0191                   | .1291    | .0685    | .0175    | .1220    | .0659    | .0159    |
|     |                           | -.2             | .2343    | .1472    | .0471                   | .2231    | .1362    | .0416    | .2081    | .1223    | .0350    |
|     |                           | -.4             | .5712    | .4440    | .2237                   | .5579    | .4285    | .2048    | .5140    | .3736    | .1504    |
|     | (X)                       | .0              | .1662*** | .1097*** | .0481***                | .1535*** | .0991*** | .0429*** | .1519*** | .1086*** | .0581*** |
|     |                           | -.1             | .2179    | .1565    | .0823                   | .2011    | .1450    | .0747    | .2402    | .1832    | .1087    |
|     |                           | -.2             | .3117    | .2387    | .1371                   | .2960    | .2217    | .1253    | .3506    | .2839    | .1760    |
|     |                           | -.4             | .5270    | .4286    | .2819                   | .5042    | .4087    | .2610    | .5921    | .5078    | .3564    |
|     | (T)                       | .0              | .1455*** | .0867*** | .0302***                | .1308*** | .0737*** | .0240*** | .0895*** | .0408*** | .0066*** |
|     |                           | -.1             | .1981    | .1303    | .0525                   | .1813    | .1160    | .0433    | .1417    | .0754    | .0173    |
|     |                           | -.2             | .3348    | .2452    | .1209                   | .3136    | .2248    | .1065    | .2807    | .1789    | .0553    |
|     |                           | -.4             | .6591    | .5626    | .3811                   | .6363    | .5358    | .3520    | .6395    | .5188    | .2807    |

表 1 : 経験尤度比に基づく検定と  $t$  検定の検出力比較——< 続き >——

| n  | $\mu_1 \backslash \alpha$ | 経験尤度比検定<br>(4)式 |          |          | 修正済み<br>経験尤度比検定<br>(5)式 |          |          | t検定      |          |          |          |
|----|---------------------------|-----------------|----------|----------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|    |                           | .10             | .05      | .01      | .10                     | .05      | .01      | .10      | .05      | .01      |          |
| 25 | (N)                       | .0              | .1142*** | .0618*** | .0175***                | .1064**  | .0564*** | .0138*** | .0981    | .0481    | .0095    |
|    |                           | -.1             | .1560    | .0913    | .0271                   | .1460    | .0830    | .0233    | .1384    | .0737    | .0176    |
|    |                           | -.2             | .2799    | .1863    | .0709                   | .2680    | .1718    | .0621    | .2572    | .1587    | .0476    |
|    |                           | -.4             | .6449    | .5228    | .2971                   | .6302    | .5040    | .2753    | .6188    | .4861    | .2401    |
|    | (U)                       | .0              | .1034    | .0516    | .0117*                  | .0960    | .0483    | .0102    | .0967    | .0479    | .0099    |
|    |                           | -.1             | .1477    | .0801    | .0211                   | .1387    | .0741    | .0178    | .1334    | .0723    | .0169    |
|    |                           | -.2             | .2672    | .1735    | .0562                   | .2573    | .1647    | .0519    | .2431    | .1520    | .0453    |
|    |                           | -.4             | .6500    | .5257    | .2895                   | .6386    | .5123    | .2733    | .6011    | .4620    | .2162    |
|    | (X)                       | .0              | .1535*** | .0950*** | .0335***                | .1390*** | .0854*** | .0304*** | .1459*** | .0993*** | .0484*** |
|    |                           | -.1             | .2198    | .1531    | .0742                   | .2067    | .1406    | .0659    | .2489    | .1905    | .1068    |
|    |                           | -.2             | .3248    | .2504    | .1356                   | .3096    | .2332    | .1234    | .3727    | .3032    | .1916    |
|    |                           | -.4             | .5722    | .4681    | .3072                   | .5501    | .4482    | .2878    | .6388    | .5557    | .3984    |
|    | (T)                       | .0              | .1430*** | .0819*** | .0262***                | .1274*** | .0710*** | .0207*** | .0908*** | .0411*** | .0066*** |
|    |                           | -.1             | .2047    | .1354    | .0512                   | .1901    | .1214    | .0440    | .1556    | .0865    | .0179    |
|    |                           | -.2             | .3554    | .2680    | .1335                   | .3368    | .2489    | .1196    | .3170    | .2115    | .0721    |
|    |                           | -.4             | .7133    | .6191    | .4270                   | .6938    | .5949    | .3979    | .7106    | .6033    | .3622    |
| 50 | (N)                       | .0              | .1035    | .0518    | .0111                   | .0992    | .0485    | .0097    | .0952    | .0470    | .0094    |
|    |                           | -.1             | .1873    | .1092    | .0307                   | .1807    | .1027    | .0293    | .1765    | .1022    | .0265    |
|    |                           | -.2             | .4147    | .2945    | .1222                   | .4060    | .2826    | .1147    | .4031    | .2815    | .1083    |
|    |                           | -.4             | .8790    | .8041    | .5927                   | .8747    | .7973    | .5789    | .8743    | .7941    | .5687    |
|    | (U)                       | .0              | .1047    | .0530    | .0112                   | .1024    | .0515    | .0104    | .1015    | .0511    | .0110    |
|    |                           | -.1             | .1859    | .1110    | .0310                   | .1817    | .1075    | .0292    | .1767    | .1043    | .0282    |
|    |                           | -.2             | .4117    | .2955    | .1237                   | .4060    | .2897    | .1197    | .3923    | .2755    | .1077    |
|    |                           | -.4             | .8911    | .8187    | .6118                   | .8885    | .8144    | .6015    | .8745    | .7907    | .5498    |
|    | (X)                       | .0              | .1273*** | .0707*** | .0206***                | .1192*** | .0637*** | .0189*** | .1258*** | .0803*** | .0304*** |
|    |                           | -.1             | .2213    | .1455    | .0601                   | .2106    | .1361    | .0556    | .2690    | .1985    | .1055    |
|    |                           | -.2             | .3964    | .3003    | .1471                   | .3825    | .2857    | .1376    | .4696    | .3813    | .2394    |
|    |                           | -.4             | .7576    | .6546    | .4355                   | .7425    | .6352    | .4143    | .8216    | .7507    | .5932    |
|    | (T)                       | .0              | .1310*** | .0730*** | .0182***                | .1202*** | .0653*** | .0147*** | .0989    | .0484    | .0066*** |
|    |                           | -.1             | .2283    | .1492    | .0588                   | .2153    | .1395    | .0529    | .1993    | .1231    | .0348    |
|    |                           | -.2             | .4822    | .3744    | .1925                   | .4662    | .3563    | .1776    | .4720    | .3540    | .1580    |
|    |                           | -.4             | .8656    | .8019    | .6365                   | .8551    | .7896    | .6118    | .8893    | .8311    | .6647    |

表 1：経験尤度比に基づく検定と  $t$  検定の検出力比較——〈続き〉——

| $n$ | $\mu_1 \backslash \alpha$ | 経験尤度比検定<br>(4)式 |          |          | 修正済み<br>経験尤度比検定<br>(5)式 |          |          | $t$ 検定   |          |          |          |
|-----|---------------------------|-----------------|----------|----------|-------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|     |                           | .10             | .05      | .01      | .10                     | .05      | .01      | .10      | .05      | .01      |          |
| 100 | (N)                       | .0              | .0989    | .0514    | .0114                   | .0967    | .0504    | .0109    | .0964    | .0493    | .0102    |
|     |                           | -.1             | .2676    | .1739    | .0571                   | .2637    | .1711    | .0549    | .2637    | .1683    | .0536    |
|     |                           | -.2             | .6488    | .5199    | .2814                   | .6439    | .5145    | .2745    | .6442    | .5133    | .2738    |
|     |                           | -.4             | .9899    | .9781    | .9156                   | .9898    | .9775    | .9124    | .9896    | .9777    | .9126    |
|     | (U)                       | .0              | .0989    | .0503    | .0098                   | .0975    | .0492    | .0097    | .0972    | .0494    | .0099    |
|     |                           | -.1             | .2624    | .1664    | .0551                   | .2600    | .1639    | .0538    | .2573    | .1617    | .0521    |
|     |                           | -.2             | .6413    | .5156    | .2836                   | .6385    | .5115    | .2786    | .6292    | .5009    | .2621    |
|     |                           | -.4             | .9923    | .9815    | .9287                   | .9921    | .9811    | .9276    | .9907    | .9787    | .9131    |
|     | (X)                       | .0              | .1171*** | .0581*** | .0153***                | .1119*** | .0552**  | .0144*** | .1145*** | .0654*** | .0230*** |
|     |                           | -.1             | .2710    | .1791    | .0696                   | .2624    | .1716    | .0647    | .3239    | .2445    | .1269    |
|     |                           | -.2             | .5631    | .4390    | .2333                   | .5524    | .4302    | .2232    | .6352    | .5376    | .3576    |
|     |                           | -.4             | .9405    | .8872    | .7170                   | .9357    | .8792    | .6995    | .9636    | .9348    | .8437    |
|     | (T)                       | .0              | .1172*** | .0630*** | .0153***                | .1097*** | .0585*** | .0128*** | .1007    | .0452**  | .0072*** |
|     |                           | -.1             | .2991    | .2051    | .0791                   | .2883    | .1957    | .0737    | .2884    | .1914    | .0630    |
|     |                           | -.2             | .6654    | .5509    | .3359                   | .6537    | .5364    | .3201    | .6798    | .5653    | .3355    |
|     |                           | -.4             | .9658    | .9432    | .8554                   | .9626    | .9366    | .8456    | .9784    | .9638    | .9111    |
| 200 | (N)                       | .0              | .1050*   | .0533    | .0101                   | .1038    | .0527    | .0099    | .1035    | .0524    | .0096    |
|     |                           | -.1             | .4246    | .3048    | .1284                   | .4222    | .3020    | .1264    | .4227    | .3005    | .1252    |
|     |                           | -.2             | .8847    | .8107    | .5982                   | .8835    | .8088    | .5948    | .8832    | .8094    | .5943    |
|     |                           | -.4             | .9999    | .9997    | .9985                   | .9999    | .9997    | .9984    | .9999    | .9997    | .9984    |
|     | (U)                       | .0              | .1045    | .0520    | .0118*                  | .1038    | .0515    | .0113    | .1035    | .0515    | .0118*   |
|     |                           | -.1             | .4121    | .2932    | .1239                   | .4113    | .2918    | .1223    | .4082    | .2877    | .1187    |
|     |                           | -.2             | .8819    | .8113    | .6048                   | .8813    | .8105    | .6033    | .8775    | .8054    | .5904    |
|     |                           | -.4             | 1.000    | 1.000    | .9993                   | 1.000    | 1.000    | .9992    | 1.000    | 1.000    | .9990    |
|     | (X)                       | .0              | .0986    | .0526    | .0122**                 | .0952    | .0510    | .0116    | .1004    | .0553**  | .0166*** |
|     |                           | -.1             | .3831    | .2650    | .1048                   | .3764    | .2598    | .1012    | .4369    | .3395    | .1792    |
|     |                           | -.2             | .8053    | .6972    | .4484                   | .8003    | .6893    | .4386    | .8488    | .7687    | .5909    |
|     |                           | -.4             | .9977    | .9952    | .9644                   | .9976    | .9949    | .9620    | .9986    | .9976    | .9888    |
|     | (T)                       | .0              | .1159*** | .0594*** | .0128***                | .1100*** | .0551**  | .0110    | .1004    | .0495    | .0080**  |
|     |                           | -.1             | .4504    | .3303    | .1535                   | .4399    | .3210    | .1442    | .4493    | .3313    | .1432    |
|     |                           | -.2             | .8679    | .7999    | .6118                   | .8633    | .7919    | .5994    | .8864    | .8245    | .6502    |
|     |                           | -.4             | .9928    | .9885    | .9685                   | .9922    | .9871    | .9645    | .9969    | .9945    | .9874    |

- 小標本のとき( $n$ が小さいとき), 経験尤度比検定におけるサイズの歪み(size distortion)を是正するために, パートレット修正を行った。しかし, ある程度の改善は見られたが, サイズの歪みはなくなっていないことが確認される(表1の修正済み経験的尤度比検定を見よ)。例えば,  $(N)$ ,  $n=15$ ,  $\mu_1=.0$ ,  $\alpha=.10$ について, (4)式によると.1299が得られたが, (5)式では.1157となり, サイズの是正が確認される。 $\alpha=.05, .01$ については, (4)式は.0770, .0271であり, (5)式は.0659, .0226で, サイズは改善されてはいるものの, 実用的ではないと言えるだろう。
- $n$ が大きいつきは, 経験尤度比検定, 修正済み経験尤度比検定,  $t$ 検定共に, 理論通りに, 有意水準に等しい正しいサイズを得る傾向にある。すなわち,  $\mu_1=.0$ で $n=200$ の場合は, 右肩の印が付いていないものが増えている。検出力については,  $n=200$ の場合を比べると,  $\mu_1$ の値にかかわらず, どちらの検出力も同じ様な値になっている。したがって, 両者の検定は, 同等の検出力をもたらすと言えるであろう。

#### 4 お わ り に

本稿では, 平均の検定を経験尤度を用いて行った。平均の検定を行う場合, 通常, 正規母集団を仮定する必要がある。母集団を正規分布と仮定したとき, 検定統計量は $t$ 分布に従う。このように,  $t$ 検定を用いるためには, 正規母集団を仮定しなければならない。しかし, 一般に, 母集団の分布は未知であるため, 正規分布の仮定は現実的な仮定とは必ずしも言えない。本稿では, 母集団に分布の仮定を置かず, 平均の検定を行うことを試みた。

大標本の場合は, 中心極限定理から, 母集団に平均と分散が存在しさえすれば, 標本平均は正規分布で近似できることが分かっている。そのため, 正規分布を用いて, 母集団の平均の検定を行うことができる。すなわち,  $t$ 分布の漸近分布は正規分布なので,  $t$ 検定を用いると, どの母集団に対しても, 平均の検定を行うことができる。

本稿では, 母集団に正規分布, 一様分布,  $\chi^2$ 分布,  $t$ 分布を仮定して,  $t$ 検定, 経験尤度比検定, 修正済み経験尤度比検定を行い, サイズと検出力をそれぞれの分布について求めた。標本数 $n$ が大きいつき, 3つの検定は同じようなサイズや検出力となる結果を得た。しかし,  $n$ が小さいとき, 経験尤度比検定は, サイズの歪みが大きく, あまり実用的ではないという結果が得られた。そのため, パートレット修正によってサイズ修正を行ったが, 修正済み経験尤度比検定も, 確かに少しの改善は見られるが, まだサイズの歪みが見られた。この原因は, 大標本における結果を小標本に単に当てはめたために, サイズの歪みはなくならなかったと考えられる。したがって, ブートストラップ等の別の方法によって, 検定を行う度ごとにその都度, より適切な棄却域を求めることが, この経験尤度比検定にとっては, 望ましいと言えるであろう。

## 補足：一般化

2 節の最大化問題の制約条件 (i) について、 $E(X) = \mu$  が  $E(X - \mu) = 0$  と書き直され、これが条件 (i) の  $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) p_i = 0$  となるということを踏まえると、本稿でとりあげた平均の検定を一般化することができる。

$\theta$  をパラメータとし、 $\theta$  に関する推論を行う。 $X$  と  $\theta$  の既知の関数である  $g(X, \theta)$  を考える。このとき、

$$E(g(X, \theta)) = 0,$$

を満たしているものとする。これは、

$$(i)' \quad \sum_{i=1}^n g(x_i, \theta) p_i = 0,$$

として離散近似される。したがって、この場合の対数経験尤度比  $\sum_{i=1}^n \log(np_i)$  は、 $\theta$  を与えたもとで、(i)' に加えて、2 節の (ii), (iii) の 3 つの制約条件付きで最大化されることになる。この最大化問題を解くと、(2) と (3) 式では  $x_i - \mu$  を  $g(x_i, \theta)$  に、(4) と (5) 式では  $X_i - \mu_0$  を  $g(X_i, \theta_0)$  に (帰無仮説  $H_0: \theta = \theta_0$  に対応する)、それぞれ置き換えることによって、2 節で行った議論をそのまま当てめることができるということが分かる。このようにして、 $g(x_i, \theta)$  の関数形に応じて、一般的に  $\theta$  に関する推論を行うことができる。

一つの例としては、 $Z_i$  を  $1 \times k$  の説明変数 (しかも、確率変数でもよい)、 $\theta$  を  $k \times 1$  の回帰係数ベクトル、 $\varepsilon_i$  を誤差項 (スカラー) として、

$$X_i = Z_i \theta + \varepsilon_i,$$

という回帰式を考える。ただし、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  は平均ゼロの互いに独立な確率変数とする。この場合、最小自乗法によると、 $E(Z_i' \varepsilon_i) = 0$ 、すなわち、 $E(Z_i' (X_i - Z_i \theta)) = 0$  という仮定を必要とする。これは  $g(X_i, \theta) = Z_i' (X_i - Z_i \theta)$  と置くことによって、 $\theta$  に関する検定を行うことができるということの意味している。

## 参 考 文 献

- Baggerly, K. A., "Empirical Likelihood as a Goodness-of-Fit Measure," *Biometrika*, Vol. 85, No. 3, pp. 535-547.
- Hall, P., 1990, "Pseudo-Likelihood Theory for Empirical Likelihood," *Annals of Statistics*, Vol. 18, No. 1, pp. 121-140.
- Kitamura, Y., 1997, "Empirical Likelihood Methods with Weakly Dependent Processes," *Annals of Statistics*, Vol. 25, pp. 2084-2102.
- Kitamura, Y., 2001, "Asymptotic Optimality of Empirical Likelihood for Testing Moment Restrictions," *Econometrica*, Vol. 69, No. 6, pp. 1661-1672.
- Kitamura, Y. and Stutzer, M., 1997, "An Information-theoretic Alternative to Generalized Method of Moments Estimation," *Econometrica*, Vol. 65, pp. 861-874.
- Lazar, N. and Mykland, P. A., 1998, "An Evaluation of the Power and Conditional Properties of Empirical Likelihood," *Biometrika*, Vol. 85, No. 3, pp. 523-534.
- Owen, A. B., 1988, "Empirical Likelihood Ratio Confidence Intervals for a Single Functional," *Biometrika*, Vol. 75, pp. 237-249.

- Owen, A. B., 1990, "Empirical Likelihood Ratio Confidence Regions," *Annals of Statistics*, Vol. 18, No. 1, pp. 90-120.
- Owen, A. B., 1991, "Empirical Likelihood for Linear Models," *Annals of Statistics*, Vol. 19, No. 4, pp. 1725-1747.
- Owen, A. B., 2001, *Empirical Likelihood* (Monographs on Statistics and Applied Probability 92), Chapman & Hall/CRC.
- Qin, J. and Lawless, J., 1994, "Empirical Likelihood and General Estimating Equations," *Annals of Statistics*, Vol. 22, No. 1, pp. 300-325.
- Thomas, D. R. and Grunkemeier, G. L., 1975, "Confidence Interval Estimation of Survival Probabilities for Censored Data," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 70, pp. 865-871.