波動方程式解析上の問題点 : Klein-Gordon Equation

大内, 徹

(Citation)
神戸大学都市安全研究センター研究報告,11:17-34

(Issue Date)
2007-03

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/00518507

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/00518507

神戸大学都市安全研究センター
研究報告，第11号，平成19年３月

波動方程式解析上の問題点－Klein-Gordon Equation－

On the Solution of Wave Equations –Klein-Gordon Equation–

大内　徹[1)]

概要：波動方程式の解には与えられた境界条件のもとでの斉次系の自由振動解と非斉次系の強制振動解がある。波動方程式の解析方法にも斉次系と非斉次系を基にした２つの異なる方法がある。通常の波動方程式系ではこの違いは明確ではないが Klein-Gordon 系ではこの違いが現れる。斉次系と非斉次系の方程式は異なる物理的メカニズムを表現している。現実の現象に対しては両方の解を考慮する必要がある。地震の震源過程の研究でもこの問題は重要で震源から発生する強制解のみを扱うと予想外の artifact を見る可能性がある。

キーワード：斉次・非斉次方程式、自由振動解、強制振動解、応力波、弱解

１．はじめに

波動方程式を解く方法には主に２つある。１つは現在最も一般的になっているデルタ関数を用いてグリーン関数を構成する方法(以下 DG 法)である。もう１つは時間に関してラプラス変換行いその一般解から解を求める Sommerfeld(1917)等の方法(Stratton,1941; S 法)である。弾性論では前者がポテンシャル法、後者がベッセル関数法に対応している。前論文で(大内,2005a, 論文１; 2005b, 論文 2)で両者の扱う物理的メカニズムは異なること、前者は非斉次方程式の特殊解を求めるもので多くの場合で斉次方程式解が含まれていない等の問題点のあることを示してきた。

重要なのは2つの方法の違いである。今まで2つの方法の間には漠然と双対的な対応関係が考えられてきた。現実にもラプラス・ポアソン方程式系とヘルムホルツ系では斉次系と非斉次系の解が似ていることためか両者の違いは余り認識されていないようだ。ところが変数(変位やポテンシャル)に比例する項を含む Klein-Gordon（KG）系になると違いが現れる。この方程式は不均質媒質中の波動伝播を表現するもので多くの分野で用いられている。この系に対しては多くの研究があり、一般の教科書にそのグリーン関数が載せられている。この系に対する解はそれに入射波を重ね合わせて求められる。これに対して Deutch and Low (1993)は S 法によりガウス関数型の波に対する初期条件問題として詳細な検討を行い Evanescent 波の発生や遮断帯のトンネル現象等を明らかにしている。DG 法による変調した波の伝播解とは対照的である。

この問題に関して重要なのは非斉次方程式の解だけでなく斉次方程式の解の役割である。グリーン関数を構成する際のこの解の重要性は普通の教科書(田辺・中村,1981 参照)にも明確にされている。弾性論でも波動方程式を解く際には非斉次方程式の特殊解だけでなく斉次方程式の解もあわせて考える必要があることは Love の教科書(1944)にも明記されている。しかし、今までともするとこの斉次方程式の解がともすれば見過ごされるようなきらいがあったように思える。

２つの方法の違いは外系（外界）からの作用を外力項として与えるのか内系の初期・境界(変形と応力)条件として考えるのか問題でもある。斉次系の自由振動解（以下自由解と略す）として表すのか非斉次系の強制振

動解（強制解）として表すのかの問題でもある。両者のメカニズムが異なることは簡単な弦の単振動で理解される。自由振動と外力の作用下で生じる強制振動があるが物理的メカニズムは全く異なる。両者を結びつける現象が共振である。波動系の場合従来両者の関係が余り考慮されてきていないのではないだろうか。現実の地震現象等では両者が混在している。具体的にはこれは大地震で震動（自由振動が卓越していると考えられる）が続いている際に次の地震（新たな強制振動）が発生する状況を考えれば良い。

こうした問題が現れるのが KG 方程式である。この KG 方程式の場合を検討することにより波動方程式系における以上の問題も明確にすることができると考えられる。KG 方程式も波動方程式系に含まれて扱われることも多いが、本論では波動方程式（時間項のあるものと無いものを含めて）と KG 方程式は区別して扱うことにする。

このことは地震学でも抱える大変に重要な問題でもある。本論ではこうした問題を整理し検討することにする。また、本論では具体的には弦の振動（弾性振動ではない）と弾性棒を伝わる波動を想定し主として 1 次元系を対象とした議論とする。

２．波動方程式の解

まず 1 次元系の波動方程式で外力 $f(x,t)$ が作用している場合の解について見てみることにする(片山・古谷,1970 参照)。この場合変位 u に対する波動方程式は次のようになる。

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-f(x,t) \tag{2-1}$$

c は速度。初期条件

$$u(x,0)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0}=0 \tag{2-2}$$

に対する解は

$$u(x,t)=\int_0^t w(x,\tau)d\tau \tag{2-3}$$

で与えられる。この $w(x,t)$は

$$c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{2-4}$$

で

$$w(x,\tau)=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=\tau}=f(x,\tau) \tag{2-5}$$

を満たす解である。これはこの系のその時点での変形によるものではなく外系からの作用によるものである。外力の効果が初期条件として表現されている。興味深いのは (2-4) 式の意味するところである。これは後述する弾性応力波の伝播を示す式と解釈することができる。w は変位と応力による変数である。

さらに一般に初期条件として

$$\begin{aligned}&u(x,0)=p(x)\\&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0}=q(x)\end{aligned} \tag{2-6}$$

を与えた場合の解は $x > ct$ で

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0 d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\xi,\tau) + \frac{1}{2c}\int_0\int_{x-ct}^{x+ct} d\xi q(\xi,\tau) + \frac{1}{2}[p(x-ct)+p(x+ct)] \tag{2-7}$$

となる。p(x)と q(x)はそれぞれ初期条件を表す関数。変位速度の初期値（時間微分）と外力が同様なかたちで現れていること、外力の効果は加算されて効いていることがわかる。(2-7)で $\tau = 0$ とし q(x) がデルタ関数の場合には変位速度（時間微分）の初期値と外力の同等性を示すことになる。図 1 に初期条件として連続な p(x) とデルタ関数的衝撃 q(x) を与えた場合の波動伝播例を示す。

3．初期値、境界条件、外力

偏微分方程式のなかで波動方程式には時間という非常に特別な要因が入ってくる。その解を考えるには力源（源泉）と境界条件だけでなく初期条件が重要であるが、初期条件は時間に関する境界条件と考えてよいだろう。変位速度の初期条件として変位と変位速度を考える。初期条件として進行している波を考えるか静止状態を考えるかにより状況が異なる。x の正の方向に進行している場合初期値は

$$u(x,0) = p(x) \tag{3-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = q(x) = -\frac{\partial p}{\partial x} + s(x) \tag{3-2}$$

と表される。s(x) は p(x) の分布による応力からのずれを表す。静止状態から始まる場合 x 軸にそって両方向への進行波が生じる。

$$\begin{aligned} u(x,0) &= p(x) = \frac{1}{2}p(x)_+ + \frac{1}{2}p(x)_- \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial p_+}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial p_-}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{3-3}$$

＋と－は x 軸に沿った進行方向を示す。

初期条件

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0}$$

が初期変位分布によらない場合 s(x) は外力項となる。

図 1 上に示したのは自由波（進行波）である。下図は強制波。ここで重要なことは斉次系の解（境界を考慮する場合は固有関数）を合成して進行波を表すことができることである。この問題については 5 節で述べる。

外系からの作用に対して必ず弾性（内系として）変形が対応しているのだろうか。勿論そうではない。そのための外力項なのである。外力を理解するために次の時間項を含まない釣り合いの式をみてみよう。

$$E\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho f = 0 \tag{3-4}$$

E はヤング率、ρ は単位長さあたりの密度。外系から作用が加わった場合を考えると第 1 項は弾性変形での対応を示す。第 2 項はそれで対応できない部分、従って外力項となる。線形弾性論の範疇では食い違いの分布やミクロな回転、撓み等の変形は表現できない。それを補完する意味で外力項が現れる。線形弾性論とマイクロポーラ理論における適合方程式の違いを見ればこの点が理解される。また重要なのは急激に加えられた衝撃のようなものに対しても弾性変形が直ちに対応できるというわけではない。したがってそのようなものがあれ

ば応力に不連続の発生することになる。それゆえ外力項に由来する強制波はこうした応力の不連続の伝播を示すということになる。

次に、時間項を入れてこの事情を見てみよう。それにはエネルギーをみるのがよい。(3-4) 式を変形すると

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{E}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\}=-\rho f(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3-5}$$

最初の項は単位長さあたりの弾性エネルギーの空間変化であり、自由波はこの項に相当する。第2項は運動エネルギーの時間変化、第3項は外系から加わったエネルギーを表している。このように最後の外力項は外系との相互作用を表しており、強制波のエネルギー源は外系に求められる。自由波のエネルギーは外力項がないので系の弾性エネルギーのみにより、それは初期状態による。このように自由解と強制解の違いは系のエネルギーでも理解される。自由波のエネルギーは事象（発生）前（$t<0$）には0、事象後（$t>0$）のそれは弾性系の自由変形によるもので ε。強制解では事象前（$t<0$）は弾性自由変形エネルギーのみで ε 。$t=0$ に外系からの作用 H が加わり、事象後（$t>0$）のエネルギーは合わせた $\varepsilon+H$ となる。事象前と事象後の概念については後節参照。

4．自由解と強制解

まず偏微分方程式の強制（振動）解・波と自由（振動）解・波の定義を改めてすることにする。斉次方程式の解（固有解）の重ね合わせ従って変位とその結果の応力としての初期・境界条件による斉次方程式解を自由解・波とし、外系からの作用（外力）による解を強制解・波と呼ぶことにする。具体的に表現すると、自由波は変位と応力が連続で変位速度と応力が平衡しているもの。強制波には応力に何らかの不連続がある。前者は外系とエネルギーの交換はせず弾性系としての内系のエネルギーは保存されるが後者は外系との相互作用により生じ、何等かの形でエネルギーのやりとりがある。自由波は定在波と呼ばれることもある。論文1では固有・自由波としたが、境界を特定しない議論も多いので本論文では自由波とする。

外系からの作用を外力（力源、源泉）とし、方程式の外力項として与えられ非斉次方程式の解として表現されるものと初期値や境界条件として斉次系の解を重ね合わせることにより表現されるものに分けて考える。後者は力源を持たない。

とはいえ時間と空間の広がりを考えると実際に外系からの作用をどのように外力項として設定するのかはそれほど明確ではない。そこで時間に関しては階段関数的に初期条件を与える。これはその段階で変位や応力を階段的に与えるのではなくて、$t=0$ に系の記述を開始するという意味である。その際空間に変形構造があればそれは自由波、初期変形はなくて（$u=0$）、その応力（変位の微分）が与えられた場合それは強制波になる。

自由解は系と境界における初期変位と応力の状態を表す条件により定まる。強制解は外系からの作用の状況を表す系内と境界における外力（力源）分布により決まる。この場合それらに相当する内系としての弾性変位は無い。具体的には初期変位速度の分布としてかあるいは外力項（力源）として与えられる。しかし、このことは数学的な原則上の話であり、現実問題としては一般に両者を別々に扱うことは容易ではないだろう。また、実際に観測された波はそれが自由波なのかあるいは力源からの強制波なのかを区別することも容易ではないだろう。それは自由解と強制解があいまって波動方程式解を構成するのであり、両者が互いに干渉しあっているからである。

5．自由波と強制波

進行波としての自由波

自由波は定在波（stationary waves）ともよばれることがあるが、斉次系の解（固有関数）を合成して進行波

を表すことができる。音源で発生し外に伝播していく波は最初は強制波として放射されるとされるのが普通であるが、自由波も進行波として存在する。佐藤 (1978) はこのことを強調し、ロンドンのセント・ポール寺院にある大ドームの壁を伝わるウイスパーリングギャラリー現象を正規モードの重ね合わせ波として説明した。

応力波

両者の違いを理解する上では応力波(竹山,1969 参照)の概念が役に立つ。一般に粘弾性棒に突然に圧力ないし張力を加える際に発生するもので、応力と変位速度の不連続、擾乱とそれに伴う変形が伝播する現象である。応力の不連続が発生し応力が波として伝播することになると、これが応力波に他ならない。非弾性的性質の関与するもので塑性応力波と弾性応力波等がある。強制波は粘性等の非弾性効果が陽には現れない場合として理解され、弾性応力波と考えられるものである。これに対して自由波は弾性変形とそれに伴う応力が平衡を保ちながら伝播するものである。後述するように伝播波は初期条件として与えられる。外力項は高速歪が負荷された場合に弾性体の変形がそれに対応しきれない場合に生じる弾性応力波として現れる。この応力波の伝播には何等かの非弾性（線形弾性以外の要因）効果が効いてくる。高次弾性やマイクロ構造等である。それらの媒介により応力波は伝播する。その簡単な場合に結果として外力項を含む弾性方程式が得られるのである。

応力の不連続という情報の伝播と考えても良い。情報とはそれを維持するメカニズムの保持ということになる。系に境界がない場合にはその情報がそのまま維持伝播される。応力が先で変形が結果として伴うものと変形とそれによる応力ということが考えられる。どちらが先か、同時のようにも考えられるが、そうではない。外系から加えられる作用の速さが重要でこの点を理解するためには事象前と事象後の概念が役に立つがそれについては後節で述べる。

自由エネルギー

弾性波動の発生と伝播を考えるときには、力学的側面だけではなく熱力学的考察が必要である。弾性体のダイナミクスは本来運動量、質量の保存則の他に熱力学的則面についても議論しなくてはならない。通常後の２者が省略され運動方程式のみで議論されることが多いが、熱力学的な考察を抜きに数式的な表面的形式をおうことになると本質を見失うおそれがある。自由波は基本的に内部エネルギーの問題で強制波は自由エネルギー（ヘルムホルツ）の問題ととらえるべきであろう。強制波は応力の変化による場の構造の変化とエントロピーの変化を伴うと考えることができる。この場合不連続（衝撃）が伝播するのでそこでの物質と運動の変化と不連続面でのエントロピーの流れを考慮する必要がある。

弱解

２つの解は数学的にも区別することができる。波動方程式の解を考えるとき、通常の連続解だけでなく微分可能ではない解、広義の解（弱解）も考える必要がある（例えば俣野・神保, 1996)。２種の波のうち強制波は数学的には波動方程式の弱解という考えることができる。これに対して自由波は不連続を含まない通常解、古典解と考えることができる。非斉次方程式は応力の不連続性を表す外力項を含むが、その解はデルタ関数とのの重畳積分として表される。この場合その微分に不連続が生じるが階段関数とその微分デルタ関数として処理されている。しかし、この不連続は物理的に考えると媒質の粒子速度

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

がある点で無限大ということになり、通常の意味での解として了解するわけにはいかない。この場合弱解とは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{C} u\left(c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)dxdt=0 \tag{5-1}$$

を満たす解をいう。ここで ϕ は滑らかなテスト関数と呼ばれるものである。要するに弱解である強制波は不連続性（ここでは応力の）が伝播する解であり、通常の連続的な自由解とは区別する必要がある。通常の自由解は初期条件も含めて

$$u(x,t)=p(x,t)$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{5-2}$$

である不連続性のない解と考えることができる。

波の変換と干渉

現象の進行とともに両者は干渉する。媒質に何らかの境界や不均質性が存在するとそこでの時間・空間発展効果により両者の変換・干渉が発生する。例えば、鐘や地球の自由振動にその例を見ることができる。外系からの作用、力源から発生した波のうち強制波は次第に自由波に変換していく。

弾性の異なる別の媒質との境界においてこの強制波は自由波に変換する。それは一般に別の層には力源がないとし、斉次系の解を考え、変位とその空間微分（歪、応力）の連続性が仮定されることによる。強制波（あるいは自由波との混在）とするのであれば、境界に力源有りとみなすことになり、変位の連続性は考えるがそれに対応する応力には何等かの不連続性を想定することになる。通常用いられる応力と変位の連続性の仮定は現実の過程を反映したものと考えられるがその物理的メカニズムは明確ではない。いずれにしても一般に何等かの境界や不均質性が存在すると入射した強制波から透過、反射自由波への変換が起こるということはいえるだろう。しかしその反対に自由波から強制波への変換過程があるのかについては興味ある問題であるが筆者には明確でない。散乱で点状の振動子の分布を仮定することはこのことに意味していると考えられる。

６．グリーン関数とデルタ関数

一般に非斉次方程式の与えられた境界条件を満足する解を得るためのグリーン関数は主要解を求め、斉次方程式の解を加えて境界条件を満たすようにして得られる。ここでは次のヘルムホルツ方程式の主要解(principal or fundamental solution) とグリーン関数について整理する。

$$\Delta u+\kappa^2 u=0 \tag{6-1}$$

Δはラプラシアン、κ は定数。(6-1) の球座標による解は一般に

$$ru=h(r) \tag{6-2}$$

である。h(r) は任意の関数。さらに形式的に

$$u=\frac{h_1(r)}{r}+\frac{h_2(r)}{r} \tag{6-3}$$

のようにh(r) を２つの項に分けて表現することができる。$h_1(r)/r$ は原点で特異性を持たない解で $h_2(r)/r$ は原点で特異性を持つ解である。この右辺第２項のように原点で特異性を持つものを主要解という。この場合方程式は

$$\Delta u+\kappa^2 u=\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{6-4}$$

と表される。この主要解を基に境界条件を満たすように次の非斉次方程式のグリーン関数が構成される。

$$\Delta u+\kappa^2 u=-f(r) \tag{6-5}$$

一般に境界条件を考えない単位の力源に対する解を主要解という。波動方程式の解に関する議論の多くがこれを基本になされているが、ここで注意しなければならないのは主要解は単位力源による、したがって非斉次系の解であるということである。ある境界条件を満足する非斉方程式の解を求めるのに有効な方法はこの主要解に斉次方程式の解を加え境界条件を満たすようにするものである。本論で強調したいのはこの斉次方程式解であり、とくに非斉次の境界条件を考える際に重要な役割を果たす。一般にグリーン

関数を構成するときに斉次方程式の主要解に斉次方程式の解を加えて与えられた境界条件を満たすようにすることは基本的な手段になっている。しかし、最近では地震学等の分野では波動方程式のこの解が余り考慮されてきていないのではないだろうか。

7．斉次・非斉次方程式と斉次・非斉次境界条件

ここで境界条件とは通常の3種、変位とその空間微分、それらの混合に対するものを意味する。問題は斉次方程式の非斉次境界（斉次・非斉次）問題と非斉次方程式の斉次境界（非斉次・斉次）問題および外力（力源）項ということになる。具体的に問題は波動方程式を解く場合斉次方程式を非斉次境界条件のもとで解くか、非斉次方程式を斉次境界条件のもとで解くかということになる。

偏微分方程式の解に関しては斉次・非斉次及び非斉次・斉次問題は同等であるとされている（例えば犬井,1957）。そして斉次・非斉次問題と非斉次・斉次問題の同等性が以上述べてきた2つの解法の同等性の根拠になっている。しかし非斉次方程式の解には斉次方程式の解で表される初期条件を満たす自由解が含まれていない。問題は従来の多くの議論でこの斉次方程式系の解が考慮されていないことであり、これが混乱の原因となっているようだ。

そこでこの問題について検討する。まず犬井(1957；11章)にしたがって次の2次元系非斉次方程式の境界条件問題を考える。

$$L[u]=\Delta u+h(x,y)u=-f(x,y) \tag{7-1}$$

Δ はラプラシアン、$f(x)$ は外力。まず、斉次方程式

$$L[u]=0 \tag{7-2}$$

の解でC上の非斉次の境界条件

$$u(x,y)=g(x,y), \quad (x,y)\in C$$

を満たすものを考える。次に領域D内で非斉次方程式

$$L[v]=-f(x,y) \tag{7-3}$$

を満たし、C上では斉次の境界条件を満たす解

$$v(x,y)=0, \qquad (x,y)\in C$$

を考えるとこの両者が同等であることが示される。

しかしこの議論は強制解に対するものであり自由解が含まれていない。それはこの議論が次の主要解（グリーン関数）

$$L[G(P,Q)]=-\delta(P,Q) \tag{7-4}$$

をもとにしているからである(犬井,1957;11章)。ここでPとQはD内の点。このことはこの議論が基本的に強制解を対象としていることになる。結局問題は系の内部に力源を考えるか境界に考えるかの問題ということになる。

具体的にヘルムホルツ方程式について解の様子を見てみることにする。以下の議論は田辺・中村(1981)参照。
3次元系の場合

$$\Delta u+\kappa^2 u=-f(x,y) \tag{7-5}$$

の無限遠の境界条件として $r \to \infty$ で 0 となる主要解は

$$\frac{e^{i\pi r}}{4\pi r},\quad \frac{e^{-i\pi r}}{4\pi r} \tag{7-6}$$

である。(7-5) 式の斉次方程式解としてはさらに非自明な解

$$\frac{\sin \kappa r}{r} \tag{7-7}$$

があり、この境界条件を満たす。これがこれまで述べてきた自由解に相当するがこれがあると解が大変に複雑になり議論がやっかいになる。地震学でよく用いるような無限遠で 0 という境界条件だけでは解の一意性が保証されなくなるからである。それでさらに放射条件 (Sommerfeld)

$$u(r) = 0(r^{-1}),\quad \frac{\partial u}{\partial r} - i\kappa u = 0(r^{-1-\varepsilon})\qquad \varepsilon > 0,\quad r \to \infty, \tag{7-8}$$

を加えこの解を落とすことが行われている。

境界が有限の場合は後述するように。非斉次解と斉次解が競合しないためにはκ^2が斉次系の固有値でないことが条件となる。簡単な 1 次元の弦の定常振動 ($x = 0 \sim a$) でこの辺の事情を見てみよう。ある振動数の 1 次元波動系を次の方程式 $L[u]$で表すとする。外力 $f(x,t)$ による強制振動は次式で表される。

$$L[u] = \frac{d^2u}{dx^2} - \kappa^2 u = -f(x) \tag{7-9}$$

境界条件は

$$u(0) = u(a) = 0$$

である。これに対して斉次方程式

$$L[v] = 0 \tag{7-10}$$

が同じ境界条件を満たす解 $v = v_0$ を持つためには

$$\int_0^a dx v_0(x) f(x) = 0 \tag{7-11}$$

条件が必要である。定常振動の場合解 v_0 は他ならぬ弦の固有・自由振動を表す解である。(7-11) 式は(7-9) 式による強制振動がこの系の固有・自由振動と無関係でなければならないことを示している。共振により解が不安定になることを避けるものである。

弦の強制振動と自由振動については一般の教科書によく述べられている(例えば犬井,1957)。強制振動は弦の各部に外部から力を加えて弦を振動させるもので自由振動とはそのメカニズムは全く異なる。その際に現れる共振現象は直感的にもわかりやすく、上述の議論も理解しやすい。問題は両者をともに考える必要があること、現実に対象とするある弦の振動がどちらの現象なのかということである。簡単な 1 次元の定常振動に限らず、自由振動解は以上述べてきた自由解に相当するのでこの問題は波動方程式を考えるときに大変重要な意味を持つことになる。また共振現象は実際の地震現象等でも大変に重要なものである。

斉次・非斉次、非斉次・斉次問題は結局、力源を系内あるいは境界に想定するかということになる。自由解は外系からの作用を受けない斉次系の解、強制解は外力としての力源 (源泉) を含む非斉次系の解であり物理的メカニズムが異なる。重要なことは 2 つの解の表現する物理的なメカニズムは異なるということであり、両方ともに考えなければならないということである。

8．事象前と事象後の概念

波動方程式系では以上のようなかなり面倒な問題に当面することになるがこうした点を理解していく上で

事象発生前後の区別、事象前と事象後の概念が有効である。特に地震現象のように時間と空間の広がりの効果がある現象に対してはそうで、事象（発生）前と事象後といった概念が必要になる。事象の発生する時間と空間構造の兼ね合いで現象は進行するからである。結果としてそうなると考えるのである。しかし従来の物理学ではこの違いは余り認識されていないようだ。

ここでいう「事象」とは内系と外系と相互作用の発生と考えてもよい。一般に対象とする系に対する外系からの作用が$t=0$に発生したとするとその効果は斉次方程式の自由解と非斉次条件を含む強制解として現れる。しかし、その違いは事象後（ $t=0+\varepsilon=0_+ > 0,\ \ \varepsilon(>0)\to 0$ ）に結果として初めて決まるのであり、事象前（$t<0$）に設定することは困難である。

こうした概念は弾性系に対する外系、外力の影響を理解するに役に立つ。具体的には応力が先か変位が先かによるわけで、それにより自由波と強制波の違いが理解しやすくなる。

今$t=0$ に外系から作用が加えられたとする。自由波の場合それは事象後$t=0_+$ に

$$
\begin{aligned}
&u(x,0_+)=p(x)\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|_{t=0_+}=-\frac{\partial p}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{8-1}
$$

という条件として表現される。強制波の場合$t=0$ で外力$q(x)$ が加わったとすると条件は

$$
\begin{aligned}
&u(x,0)=0\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0}=q(x)\neq\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|_{t=0}
\end{aligned}
\tag{8-2}
$$

と事象後の$t=0_+$ の

$$
\begin{aligned}
&u(x,0_+)=p'(x)\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0_+}=q(x)=-\frac{\partial p'}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{8-3}
$$

で与えられる。$p'(x)$ は外力に伴って生じた変形。

事象発生時$t=0$ の(8-2) 式から事象後 $t=0_+$ の(8-3) 式にいくまでの物理的メカニズムを考える必要がある。実はこれを保証するのが外系であり、何らかの非弾性的なものが関与してくることになる。したがって、強制波はこの過程の擾乱の伝播とも考えることができる。先に応力波と表現したのはこのことである。しかしこのような波動は境界等で一般の自由波に変換される。それは通常境界での条件は変位とその空間微分の連続性を与えるがそれは自由波の条件であるからである。

重要なのは斉次、非斉次に関わらず、波動方程式は事象後の状態を記述する式であるということである。最大の問題は外系からの作用が加わった段階、事象後の系の状態を、境界の設定も含めて力源の分布をどのように設定するのかということになる。現実にはこうした違いは事象前に設定できるものではなく事象後に初めて設定できるのである。

9．Klein-Goldon 方程式と分散性媒質中の波動伝播

分散性媒質中の波動の伝播は地震学のみならず物理学の各分野で大変に重要な問題であり、多くの研究がなされてきている。この問題は波動方程式の解法を検討する上でも興味あるものといえる。Sommerfeld や Brillouin (1960) による分散性誘電体中の電磁波伝播の解析法は、電磁波の場の方程式をラプラス変換し、調和振動波の入力の初期値問題として解を求めるというものである (Stratton,1941)。これは分散性媒質中を伝播する波を解析する有力な手段ともなっている。彼等は分散性を有する誘電体に時刻$t=0$ に正弦波が階段関数的

に入射する際の現象を研究し forerunner (precursor) の発生や群速度で伝播する信号波（signal arrival）等（図２）興味ある現象を解明した(Stratton, 1941)。その後 Garnet and McCumber (1970) はガウス型の波束を用いこの問題を調べた。forerunner（precursor）は現れないことガウス型の波束の形は比較的よく保たれ群速度で伝播すること、その速度は光速度を超える（波頭速度ではない）こともあることなどを示した。

Deutch and Low (1993) はガウス型の波束を用い不均質媒質中への波動の入射問題を調べた。彼らが用いたのは Wronscan を用いた係数変化法、S 法である。その結果について Jackson et al.(2001) に要約と解説がなされている。

基本になる場の方程式は速度 $c = 1$ として

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - v(x)\psi = 0 \tag{9-1}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} v(x) &= 0 && x < 0 \\ v(x) &= m^2 && 0 < x < b \\ v(x) &= 0 && x > b \end{aligned} \tag{9-2}$$

である（図３）。$0 > x > b$ が不均質分散性の媒質（遮断帯, barrier）である。位相速度と群速度はそれぞれ

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{1}{\sqrt{1-(m/\omega)^2}} \\ V_g &= \sqrt{1-(m/\omega)^2} \end{aligned} \tag{9-3}$$

となるので $\omega_0 > m$ でないと波は伝播しない（遮断帯）。そこでキャリア周波数ω_0、ガウス関数型包絡線の波の不均質媒質への入射を考える。そこで

$$p(x) = e^{i\omega_0 x} e^{-((x-x_0)/\Delta x)^2} = e^{i\omega_0 x} P(x) \tag{9-4}$$

を初期条件として与える

$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= p(x) \\ \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \tag{9-5}$$

第 2 項は x 軸の正方向への進行波を想定していることになる。

ここでラプラス変換とその逆変換を考える。

$$\psi_\omega(x) = \int_0^\infty e^{i\omega t}\psi(x,t)dt \tag{9-6}$$

ただし Im $\omega > 0$ 。$t > 0$ に対して

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} d\omega e^{-i\omega t}\psi_\omega(x) \tag{9-7}$$

(9-1)から

$$\left(-\omega^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi_\omega = \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} - i\omega\psi(x,0) \tag{9-8}$$

これが基本の式となる。これを(9-2) 式の条件（図３）に従って解く。この際異なるポテンシャル境界で ψ とその一回偏微分の連続性を用いる。

その結果は

$$\psi(x,t) = -\frac{4}{m} e^{-bm} \left[i\omega_0 P(v) + P'(v) \right] e^{i\omega_0 v} \Big|_{v=x-t-b} \tag{9-9}$$

P(x) は周波数帯域が $|\omega| \ll \omega_0$ の波を運ぶので第 2 項は無視できる。したがってほぼ入射した波の複製が振幅を小さくした形で現れることになる（図 3)。遮断域を evanescent 波として透過している。また信号や系の特異性に由来する forerunner（図 2）のような現象は見られない。重要な点は Deutch and Low(1993)の解析は基本的に連続なガウス型の波束、自由波の入射を想定していることである。この結果については光や電磁波を用いた実験で確認されている(Jackson et al., 2001 参照)。また遮断帯のトンネル現象については松田(2001)が正弦波の階段入力の場合を数値実験で調べている。

一方、デルタ関数を用いた DG 法の場合遮断域で $t<0$ で 0 となるようなグリーン関数は

$$G(x,t) = \frac{1}{2} J_0\left(m\sqrt{t^2 - r^2}\right)\theta\left(t - |x|\right) \tag{9-10}$$

となる。J_0 はベッセル関数、θ は階段関数。したがって、入射波はこれにより変調された形の伝播波形として現れることになる。これが強制波であり、この際立ち上がりのはっきりしない forerunner がまず現れることになる。このような点は物理的条件は異なるものの前述の S 法による議論がいわば連続でスムーズな波の不均質域への入射を考えているのと対照的といえる。DG 法による記述法では基本的に強制波をもとにしており evanescent 波や、トンネル現象のようなものは表現することは容易ではないと思われる。evanescent 波はもともと物性（弾性率等）の異なる物質が接している際に生じる現象で波が直接媒質と相互作用せずそのまま透過する現象である。そもそも強制波的な概念では遮断帯のようなものは考えにくいのではないだろうか。

１０．解析方法と解

以上波動方程式の自由解と強制解について検討してきた。本節ではこの問題と解析方法との関係についてみてみることにする。斉次方程式の解を基にした方法は地震学の分野では、ベッセル関数法といわれているものに対応している(論文 1)。ベッセル関数法とは 3 次元の波動方程式を円筒座標や球座標系で解析するもので解をベッセル関数で表示し、それに様々な境界条件や初期条件を与えて解く方法のことである。これに対しポテンシャル法は外力の分布を想定しそれに対する変形場を求めるというものである。前者が S 法に対応していること、後者が DG 法に対応していることは容易に理解される。

こうした解析方法の違いは、従来漠然と対象とする現象は同じ、同じ物理過程の異なる側面からのアプローチと考えられてきた。しかし、実はそれらが表現している物理過程は異なる。そこで改めて現実の現象との関係が問われることになる。

地震現象のように時間と空間の発展のある現象ではそれをどのように表現していくのかといった大変に難しい問題があり、また何らかのかたちの時空間の不連続性を扱わなければならない。この問題は時間的、空間的不連続をどのように記述していくのかの姿勢の違いにもつながる。

数学的に S 法は階段関数と広義の積分の概念を用いている。特異点を除いて積分を定義する広義の積分（improper integral）やコーシーの主値といった概念が古くからある。この立場ではラプラス変換により時間に関する階段関数的な初期値の導入法により、系の時間と空間発展を関連させて解くことになる。これに対して DG 法はデルタ関数を用いてグリーン関数を構成する方法は基本的に外力項の時空分布により系のダイナミクスを表現するというものである。確かに外力の項を考えるときにはデルタ関数が有効であるが、単位衝撃に対する応答の連鎖という意味で基本的には系のダイナミクスの時間と空間発展を独立に扱うことになる。したがって DG 法では多くの場合 S 法の場合のような系の時間と空間発展の干渉効果が含まれていない。またこの方法では一般に両成分は複雑にカップリングしているので、自由解を考慮するとしても両効果を分離して取り扱うことは単純な場合を除き容易ではないだろう。すでに述べた事象前と事象後の概念は不連続点を直接ふれないでという意味で S 法的である。また、DG 法には階段関数の微分の分だけ不定性が残ることになる。

実際に境界の条件と力源・源泉の条件をどのように設定するのかは簡単な問題ではない。これは事象後に初めて決まるものであり、それにより方程式と系の条件が初めて確定する。したがってこの点でも斉次系の一般解をもとにし、外系からの作用を境界条件として与えるS法は有効であると考えられる。

DG法はむしろ系の強制解を主眼にした方法で、S法では境界条件を工夫することにより両方の効果を表現することができる。とはいえその境界条件を設定することは一般には容易でなくそのできる問題はかなり限定されてくると思われる。

１１．外系からの作用と外力の発生

外系からある弾性系に作用が加わった場合を考える。この外力の効果は非斉次系の外力項として現れるか斉次系の境界条件として現れる。また初期条件としても与えることができる。結果として弾性波動方程式として記述されるものの、これ以外に外系と弾性（内）系とのカップリング、この陽には現れない系に内在するメカニズムを考えなければならない。外系からの作用はまず変形の時間微分として効いてくる、それが空間微分、歪・応力といった弾性系の応答になるメカニズムである。具体的には

$$\frac{\partial u}{\partial t} \to -\frac{\partial u}{\partial x}$$

の変換過程の物理的メカニズムである。弾性系の固有・自由変形とその応力が外系からの作用と平衡している場合は自由波になる。この際応力に不連続が生じると何等かのかたちでその応力お不連続の伝播を考える必要がある。これが応力波である。この問題を考えていく上では自由エネルギー、弱解のような概念が役に立つだろう。この意味で強制波はむしろ弾性応力波と見るべきもので、初期、境界条件あるいは外力としてデルタ関数的に与えられて生じる。

自由波は初期あるいは境界条件の変位を斉次方程式の解の組み合わせとして、時間的に階段関数的に与えられたものから発生する。具体的に自由波の発生条件は

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|_{t=0}$$

で表される。これに対して強制波の発生条件は

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} \neq \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|_{t=0}$$

となるがこの不連続を補うために外力 f が必要になる。

発生した強制波は媒質の不均質性や他の媒質との境界で自由波へ変化することが考えられる。それは境界における強制波から自由波への変換するのは境界が応力の不連続を吸収するようなメカニズムがあるためと考えられる。数学的には一般に他の媒質との境界ではその媒質中には力源を考えず、そこでの変位と応力の連続性を考えるのが普通なのでこのことを想定していることになる。

１２．議論

波動方程式の非斉次系と斉次系は物理的には異なるメカニズムを表現しているという認識が重要であろう。２つの方法は同じ現象に対するアプローチの違いというわけでもない。全体的に現実の過程を記述していく上で物理的議論と数学的定義の問題が区別されず混在している状況といえる。従来の議論はともすれば数学的な議論が優先されるきらいがあったのではないだろうか。確かにデルタ関数とグリーン関数を用いたアプローチは数学的に相反性や表現定理が成り立つので対象を記述していく上では大変に便利である。それで多くの場合DG法での議論が多くそれに終始してきたような感もある。結果、外力項に駆動されるかたちの非斉次型の波動方程式と強制解が優先され、ともすれば自由解の介入をきらう傾向があったのではないだろうか。

自由波と強制波は質の異なる波で後者は外系との相互作用を想定しており、いわば外系に対して座標軸を設

定したかたちになっている。したがって理論的には相反性のようなものが成り立つ。波の発生と消滅が一意的に決まっているのである。それに対して前者ではそのような性質が必ずしも成り立つということはない。

弾性体の動的振る舞いは基本的に力学的な釣り合いに関する運動方程式、熱力学的保存則と質量の保存則で記述されるべきものである(ブランド,1973)。線形の波動方程式で表されるといっても、それはたいていの場合高次変形の効果を省略している。熱力学的関係については通常議論の枠組みからはずすことが多く、断熱系か定温系の議論に限定されることが多い。しかし、波動速度が断熱系と定温系で異なることはよく知られている。それは波の質が熱力学的、高次変形の効果を考えた場合違うということである。このことは逆にいえば高次変形や熱的効果にその違いが現れているのではないかとも考えられる。

自由波と強制波の質が違う以上原理的には区別がつくはずである。外力項で表される応力の不連続は通常の線形の弾性歪とは異なりそれとは独立である。しかし弾性変形とは独立な非弾性効果であるにしてもそれとはカップリングしていなくてはならない。そのカップリングには線形の歪では表現できない高次の変形が関連していることが考えられる。具体的には高次の歪成分やマイクロポーラ論のマイクロ回転成分等である。これらは高次の変形成分あるいはマイクロ構造を反映しているので強制波発生・伝播上の構造の特殊性を反映すると考えられるからである。一般に両者の区別を付けることは容易ではないだろうが期待されるのは地震動の歪や回転成分の直接測定である(Ouchi, 2003)。特に近年急速に関心を集めている回転地震計による回転成分の直接観測や高調波成分の観測も期待される。こうした観測により場合によっては観測でも両者の区別の付く可能性もあるのではないかと考えられる。

震源過程

現実の音源（震源）付近では両者が混在している。また強制波の有する特殊性、系の構造上の情報は伝播過程の境界、不均質性よる散乱等で容易に消失し、自由波に転換していくことが予想される。これは震源では強制波だけでなく相当自由波が発生すると考えられることから震源から離れた遠方で観測される地震波のかなりの部分が自由波と言えるのではないだろうか。さらに伝播途上の他の媒質との境界での自由波への変換が予想される。応力の不連続の伝播とそれに伴う弾性変形の伝播では境界や不均質構造によりその不連続は吸収され、次第に自由波に転化していくのではないか。むしろ遠方では場合によっては自由波が卓越するのではないかとも考えられる。問題は観測された波を全て強制波とみなしその特性を震源域に想定した外力の分布に帰着させることである。そうすることにより予想もしないような artifact を見る可能性がある。

従来の震源過程の研究は DG 法でなされていることが多いので、こうした観点から慎重な見直しが必要になるのではないだろうか。実際に観測するのは震源域に想定した仮想力源からの直接の震動ではなく、断層運動によって起こされた媒質の変形応答とそれに伴う波動である。力源は外系から孤立したものではなく境界のある様々な構造を有する弾性媒質に生じる。力源自体発生した波動の影響を受け何等かの反作用を含むものであり、震源域の力源から生じた地震波を孤立したかたちで直接観測するわけではない。様々な構造を有する不均質な媒質中を伝播して初めて観測されるのである。

簡単な震源モデルでこの点の具体的な事情をみてみることにする。DG 法では点震源の分布を、S 法では球震源のようなものを想定する。点震源、球震源ともにダブルカップル型の力源の震源からは遠方でもダブルカップル型の初動分布パターンが得られる。シングルカップル型の球状震源に対しては Scholte and Ritsema (1962) が周期解を Hirasawa (1964) が非周期解を求めている。それによると周期型の場合球の半径に比して波長が十分大きい場合には遠方で観測される S 波の放射パターンはシングルカップル型ではなくダブルカップル型との中間の性質を示す。非周期型の場合 S 波の放射パターンはダブルカップル型のものに近い。図 4 はシングルカップル型の球状震源とダブルカップル型点震源の例である。両者に対して遠方で観測される地震波初動の放射パターンは類似したものになり、観測で区別することは容易ではないだろう。これは球状震源の場合震源の反対側から回りこんでくる回折波の効果が生じそれによるものと考えられる。こうした問題は従来余り考慮されていないのではないだろうか。

静的問題

本論では時間項を含む動的な問題を議論してきたが静的な問題でも事情は同じである(論文 1)。古くから半無限弾性体に外系から加えられた作用に対する応答問題がある。これにも以上述べてきたような、外力の分布を想定して場の応力の釣り合いを考える方法と自由変形による釣り合いを考える方法がある。前者は外系からの作用は別として、エネルギーを考えると弾性変形エネルギーだけでなく、外力を保証する外系の何らかの非弾性エネルギーを考える必要がある。後者はあくまでも弾性変形エネルギーだけを考えればよい。ここでも重要なのは両者の基本的にメカニズムが異なることである。

現実に観測される地殻の変動がどちらの性質のものかこうした観点から見直す必要がある。従来この分野でも DG 法による外力の分布として変動を理解することが一般的になっているがここでもやはり自由変形の効果も考慮する必要があるだろう。

散乱

以上の問題は勿論地震波等の散乱過程でも重要である。KG 方程式は不均質媒質系の波動伝播を議論する上で一般的に用いられており、地震学の方面でも不均質媒質中の波動伝播等で現れる。この系に対する従来の研究の多くは DG 法によるもので、グリーン関数が用いられている。この場合不均質媒質中の変調された強制波の伝播解が得られる。この場合媒質のある時点ある点にデルタ関数的波が始まるとする。これに対して Deutch and Low(1993)の研究は連続な波束（自由波）の不均質媒質への入射をとり扱っており、時空間の連続性を考えている。問題の設定は必ずしも同じではないが両方の解に見られる対照的な点は大変興味深い。波が突然伝播媒質の中から発生することはないことを考えると物理的には連続的に扱う方が現実的なように思える。また、evanescent 波の発生やトンネル現象は DG 法で記述するのは容易でないようにも思える。

同じ線形の波動方程式で表されるといっても、断熱過程、等温過程でも、また自由波、応力波でもその物理的メカニズムは異なる。多くの場合グリーン関数を構成する際主要解と斉次系の解を組み合わせて与えられた境界条件を満足するように解を構成することが一般に行われている。しかしこれは数学的な原則の話であって、物理的観点からはするとその内容は異なる。このことは波動系の解のユニーク性にも関してくることが考えられる。従来ともすれば数学的議論にかたよりがちであったのではないだろうか。今後は物理的な条件もあわせて考慮しく必要があるだろう。あくまでも現実の観測と対比して検討していくべきであろう。

本論で以上議論してきたことはすべて 1 変数の場合で、ごく単純な場合である。より次元の高い場合の事情はもっと複雑になるであろうが、基本的な点では共通していると考えている。また現実の弾性系は伸縮と回転の 2 つの変形モードが競合する系なのでさらに大変に複雑な状況になっている。弾性波動場のダイナミクスは従来考えられてきた以上に大変複雑で多彩であり、複雑系の最たるものといってよいだろう。

近年散乱・回折現象については大変多くの報告がなされている。この他 forerunner、evanescent 波やトンネル効果は地震現象にとっても非常に重要であると考えられるが以上の問題ともあわせて今後の課題としていきたい。

１３．まとめ

本論で議論してきたように非斉次系と斉次系の波動方程式は物理的には異なるメカニズムを表現している。弾性系で系内及び境界に力源のない場合の解、自由解と力源のある場合の強制解とはその性質が異なる。非斉次方程式に基づく外力分布を想定した DG 法は対象とする弾性系の強制解を主眼とした解析法である。現実には与えられた条件のもとで両方の解を求める必要がある。KG 方程式を用いた Deutch and Low(1993)の結果はこのことを示している。地震波を解析して震源過程を研究する上でもこの問題は重要である。断層の反対側から回り込んでくるような回折波を考えなければならない。観測波形の特性を単純に震源域に想定した外力の分布に帰着させると予想外の artifact を見る可能性がある。

文献

Brillouin, L., Wave propagation and group velocity, Academic Press, pp154, 1960.

ブランド, D.R., 非線形動的弾性学, 大橋義夫・神谷紀生訳, 培風館, pp102,1973.

Deutch, J.M., and Low, F.E., Barrier penetration and superluminal velocity, Ann.Phys., 228,184-202, 1993.

Garnet,C.G.B., and McCumber,D.E., Propagation of a Gaussian light pulse through an anomalous dispersion medium, Phys.Rev.A, 1, 305-313,1970.

Hirasawa,T., Elastic wave from a spherical source: aperiodic solutions for Scholtes model, Bull. Seismo.Soc.Amer. 54, 897-908,1964.

Honda,H., The generation of seimic waves, Dom.Obs.Pub.Ottawa, 24,329-334,1960.

犬井鉄郎, 偏微分方程式とその応用, 応用数学講座, コロナ社, pp.366,1957.

Jackson,A.D., Lande,A. and Lautrup,B., Apparent superluminal behavior in wave propagation, Phys.Rev.A, 64, 044101,2001.

片山龍成・古谷嘉志, 物理数学, 槇書店, pp273, 1970.

Love,A,E,H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, Cambridge University Press, New York, 1934.

松田卓也, "超高速"はみかけ倒し？, パリティ, 16,11-16,2001.

俣野博・神保道夫, 熱・波動と微分方程式, 岩波書店, pp241,1996.

Ouchi,T., Generation and propagation of the fourth wave –influence of preexisting stress on elastic waves-, Report of research center for urban safety and security, No.8, 165-181, 2003.

大内徹, 半無限弾性系における変形・波動現象（1）－ポテンシャル法と Bessel 関数法－, 神戸大学都市安全研究センター研究報告書, 9,143-151, 2005.

大内徹, 半無限弾性系における変形・波動現象（2）－波動現象の時空間非可逆性と Green 関数－, 神戸大学都市安全研究センター研究報告書, 9,143-151, 2005.

佐藤泰夫, 弾性波動論, 岩波書店, pp454,1978.

Scholte,J.G.J., and Ritsema,A.R., Generation of earthquakes by a volume source with moment, Bull. Seismo.Soc.Amer., 52,747-765,1962.

竹山壽夫, 初等塑性力学, 丸善, pp342,1969.

田辺行人・中村宏樹, 偏微分方程式と境界値問題, 東京大学出版会, pp219,1981.

篠崎寿夫・若林敏雄・木村正雄, 工学者のための偏微分方程式とグリーン関数, 現代工学社, pp260, 1987.

Stratton, J.A., Electromagnetic theory, pp615, 1941.

筆者：大内　徹、神戸大学都市安全研究センター、准教授

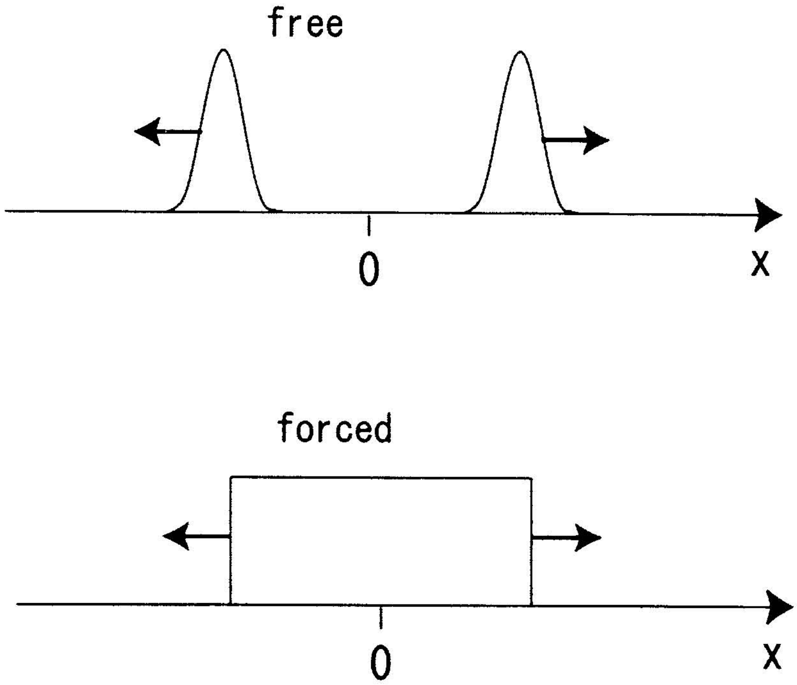

図１　上：原点で発生した不連続性のない自由波の伝播。
下：原点に加えた衝撃から発生した強制波の伝播例。

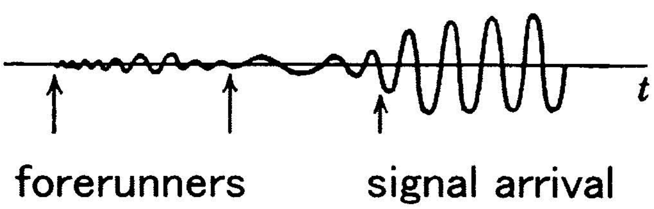

図2　分散性媒質中の電磁波の伝播。原点に正弦
波が入射した例。Burillouin(1960)より転載。

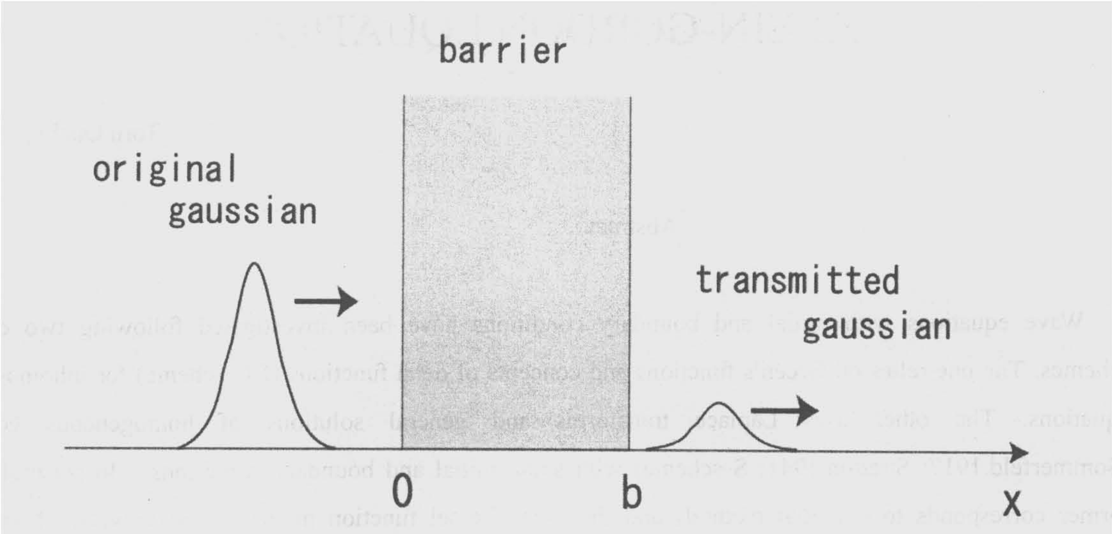

図3　Deutch and Low (1993) による波動のトンネル現象。ガウス型波束が遮断体 (barrier) へ入射し遮断体を evanescent 波として透過。

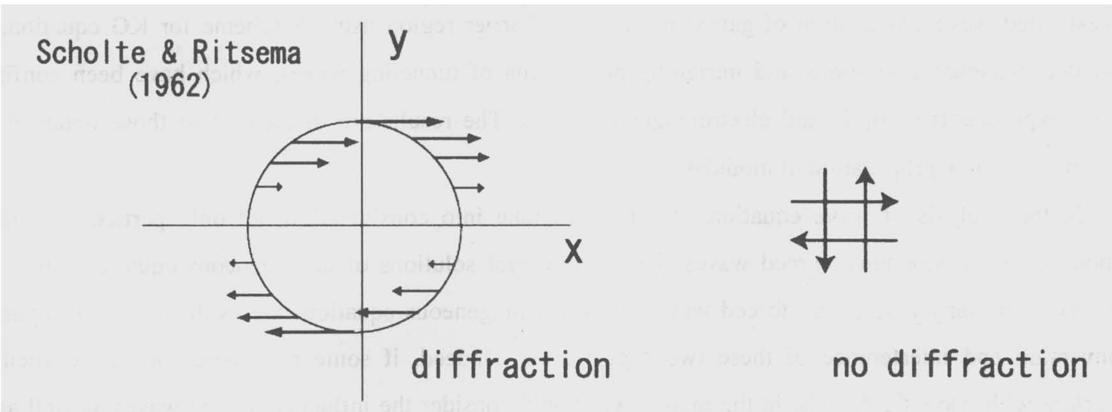

図4　球状シングルカップル型震源（右）と点状ダブルカップル型震源（左）。遠方での観測波形の押し引きパターンは球状震源からも点状の震源からのダブルカップル型に近い押し引きパターンを示す。球状震源での回折効果によりよるものと考えられる。

ON THE SOLUTION OF WAVE EQUATIONS - KLEIN-GORDON EQUATION -

Toru Ouchi

Abstract

Wave equations with initial and boundary conditions have been investigated following two different schemes. The one relies on Green's functions and concepts of delta functions (DG scheme) for inhomogeneous equations. The other uses Laplace transforms and general solutions of homogeneous equations (Sommerfeld,1917; Stratton,1941; S scheme) with some initial and boundary conditions. In seismology the former corresponds to potential methods and the latter Bessel function methods, respectively. In previous studies, we argued some problems concerning these two schemes and pointed out that in many cases of DG schemes only particular solutions (Love,1944) are investigated and general solution are not included, while in S schemes both solutions for homogeneous and inhomogeneous equations are considered. The importance of general solutions in constructing Green functions is emphasized in text books. Here, we call waves (solutions) obtained from inhomogeneous equations with sources or singularities forced waves and those of general solutions of homogeneous equations free waves.

In ordinary waves equations, solutions of homogeneous and inhomogeneous ones are similar and thus this problem has been little considered. However, in the Klein-Gordon (KG) equation that has a term proportional to the variable (displacement and potential), distinctions appear in solutions. Deutch and Low (1993) investigated wave propagation of gaussian through a barrier region using S scheme for KG equation. They revealed evanescent solutions and intriguing phenomena of tunneling waves, which have been confirmed in many experiments of optic and electromagnetic waves. The results are in contrast to those obtained by DG scheme that show propagation of modulated waves.

In the analysis of wave equations, we have to take into consideration not only particular solutions of inhomogeneous equations (forced waves) but also general solutions of homogeneous equations (free waves). However, in many cases, only forced waves from inhomogeneous equations are evaluated. Of importance is conversion and interference of these two type waves. Indeed, if some boundaries or heterogeneities that interfere with wave fields exist in the media, we should consider the influence of free waves as well as forced waves.

The results of Deutch and Low using KG equation show physical situations represented by homogeneous and inhomogeneous equations are different. In seismology, this problem is important, particularly, in earthquake source studies. If we study only situations of inhomogeneous systems and attributes features of observed waves to assumed distribution of body forces in the source area, we might introduce some artifacts and fail to understand actual source processes correctly.