



超幾何と共形場再訪(超幾何学校講義録その 3=Lectures on Hypergeometric Functions vol. 3)

山田, 泰彦 [述]

渋谷, 元樹 [記]

信川, 喬彦 [記]

(Citation)

Rokko Lectures in Mathematics,27:1-33

(Issue Date)

2022

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCDOI)

<https://doi.org/10.24546/0100476887>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100476887>



超幾何と共形場再訪

山田泰彦 述

渋川元樹, 信川喬彦 記

2019.9.2-2019.9.3

1 はじめに

ここ (B301) から歩いて 2 秒くらいのところ (B308) に住んでるんですけど, 超幾何学校に最初からフルに参加させてもらうのは実は今回が初めてで, いろいろなルールがあるということを噂には聞いていたんだけど, 先ほどの講義で初めてそのルールの実態がわかったので, かなりルール破りの話になるかと思いますがご勘弁ください. それで最初に話のオチをしゃべっておきます. そうすると途中でどう脱線して何が起ころうとも, まあ大丈夫ということになるかと思いますが*1.

「超幾何学校」ということですので, おまじないに超幾何方程式とか書いたほうがいいかなと, 誰かが書いたほうがいいと思いますので書きますと

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0.$$

これが Gauss の Hypergeometric Equation (HGEq) というものですね. α, β, γ がパラメータ, x が微分方程式の独立変数です. これについては超幾何解という級数解が知られていて,

$$\text{級数解: } y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (1)_n} x^n$$

一番書きたかったのは

$$(\alpha)_n = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

で, 以下ではこういう記号を使います. こういう級数解があります.

一方で積分による解も, (級数と) 同じものとは限りませんが, あって,

$$\text{積分: } y = \int_C t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{\gamma-\beta-1} (t-x)^{-\alpha} dt.$$

(プロはこら辺の指数とかも覚えてたりするかもしれませんが, 私はアマチュアなのでみないと書けません) ... こんな式があることは皆さん知っていると思います. この積分路を適当にとると 2 つの独立解ができて, そのうちの 1 つがこういう級数で表示されると, そういうことになっているわけです.

*1 内容が雑な上に, 話し方も日本語が壊れていて講義の参加者と読者には大変申し訳ないのだが, これが講演者の実力なので仕方がない. にもかかわらず, 頑張って文字にしてくれた信川さん渋川さんに深く感謝します (講演者).

この拡張がいろいろあるわけですけど、その1つとして Dotsenko-Fateev (ロシアの物理学者ですけども、1984-5年ごろだったと思います) が考えたものが、次のようなものがあります。彼らは次のような積分を考えましたね。

$$\int_C \prod_{i=1}^m t_i^\alpha (t_i - 1)^\beta (t_i - x)^\gamma \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)^\delta dt_1 \cdots dt_m \quad (1)$$

上の α, β, γ とパラメータの取り方が違いますが、パラメータの名前はなんでもよくて、積分変数が m 個あります。この m 次元空間の適当なサイクルで積分してやったものがある種のいい微分方程式をみたすという話をします。彼らがやったのは m が 2 の場合、つまり 2 重積分の場合で、一般に $m + 1$ 階の微分方程式が出てくるんですけども (m が 1 のときが Gauss の場合です)。この α, β, γ と上の α, β, γ は同じとは限りませんが、まあとにかく拡張になっていると。で、彼らがやったのはとくに m が 2 の場合に 3 階の方程式を調べて解のモノドロミーとかを一生懸命調べたわけですよ。彼らはこういう話を共形場理論を応用するか、共形場理論へ応用するか、両方あると思いますけどそういうつもりでこういうことをやりました。

2 共形場理論への応用, 共形場理論からの応用

今回ここで話をするようになったのは、渋川さんがすすめてくださったわけですけども …… 渋川さんが宿題を出してくれまして、それを夏に 1 ヶ月くらいかけて解きましたというご報告です。渋川さんが次のような問題を出してくれました。 m が 2 の場合に次のような級数表示があります。これは渋川さんの結果ではなく既にわかっていたこと (だそう) です (Appendix 参照)。

$$\int_{[0,1]^2} \prod_{i=1}^2 x_i^{a-1-\frac{d}{2}} (1-zx_i)^{-b} (1-x_i)^{c-a-1-\frac{d}{2}} |x_1 - x_2|^d dx_1 dx_2 \quad (2)$$

$$= (\Gamma\text{-factor}) \sum_{i,j \geq 0} \frac{(a)_{i+j} (a - \frac{d}{2})_j (b)_{i+j} (b - \frac{d}{2})_j}{(c)_{i+j} (c - \frac{d}{2})_j} \frac{(\frac{d}{2} + 1)_i (d)_i}{(\frac{d}{2} + 1)_{i+j} i! j! (\frac{d}{2})_i} z^{i+2j}. \quad (3)$$

ちょっとパラメータを上手にずらしていますが、渋川さんのノートのそのままの記号で、ここでは x が積分変数で z が独立変数というわけです。渋川さんのノートだと差積に絶対値がついています。 Γ -factor も明示的に書いてくれていますがここでは細かいことは省略して、2 重級数で書いています。 a, b, c が対等に分子分母に出てくるようにパラメータを調節したのだと思います。こういう式が知られていると教科書にもあるそうなんですけど、これ (2) はもちろん Dotsenko-Fateev の積分 (1) なわけで、1 つの級数表示を与えるということになります。

渋川さんの問いは何かというと、

これはネクラソフ関数ですか？

というものです。聞かれた時すぐには答えられなかったんですけど、超幾何学校に間に合わせようと思って 1 週間前になってようやく答えが出ました。答えは

Yes

です。今回の目標は、まずこういう質問がどこから来たのかということを知ってもらったのが半分、もう半分はこの答えを知ってもらった、という 2 つがあります。この問いを理解するにはネクラソフ関数が何かという

のをわからないといけないんですけども、なかなかめんどくさい式なので書くだけでくたびれますけど、一度は書いたほうが良いと思うので元気のいいうちに書きます。

私は学生に

数学の新しいことを勉強するときにはまず数学辞典や教科書ではなくて百科事典的に勉強しなさい。ググって数学者以外がどう理解しているかをわかった上で数学の中身をわかるようにしなさい。

とそういう指導をしているんですけど、なのでネクラソフ関数とは何かというのを(すぐ後で数学的な式を書いて説明しますが、その前にまず)数学者以外の人(が)がどう理解しているかを掻い摘んで説明しておきますと、ゲージ理論に出てくる特別な関数で2002年にネクラソフという人が見つけたというものです。なので、ゲージ理論に出てきた特別な関数だと思ってください。それが百科事典、あるいは国語辞典的な理解です。そういう国語辞典的な理解のまま数学的な話に突入する人がけっこう多いんですけど、数学以外の人と話をするときにはそれでは通じませんので、そういうことを理解したうえで中身に入ったほうが良いと思います。

聴講者。渋川さんの問いのところで、「これは」といっているのは m が2のときをいっているのですか？

例えばそうです。

聴講者。 m が3以上の場合は Yes なんですか？

いい質問です。Yes です。もうちょっと正確にいうと、ネクラソフ関数を特殊化するとこれ(2),(3)になる、別の特殊化すると m が2や3や4や、もっといろんなものが出てきます。

聴講者。Dotsenko-Fateev 方程式は $m + 1$ 階でもパラメータの数は4個ですか？

はい、そうです。Dotsenko-Fateev の微分方程式はけっこうめんどくさい式なので、もしあとで元気があったら書きますけど、省略させてください。パラメータは a, b, c, d の4つで、それは最初に積分を書いたときの指数のところを指定していたパラメータです。

ネクラソフ関数というのとは何か、数学的な説明は2種類あります。1つは「インスタント解のモジュライ空間の Euler 数などの重要な量を同変積分で与えたもの」というのが高尚な定義なんですけど、それで中身がわかって計算できる人というのとはごくわずかしかないと思うので、ここではそういうふうにはいわないで、式を特殊関数として書いてしまいます。ネクラソフ関数といったときに2つのものを指す流儀があって、これから書くネクラソフの分配関数というものを書くための材料になる関数のことをネクラソフ関数と呼ぶこともあります。区別するためにここでは前者をインスタント分配関数と呼んでおきましょう。具体的に式を書きますけど、いくつかのパラメータに depend する無限級数です。ここでは、いろんなバージョンがあるんですが、

ゲージ群： $G = U(2)$ (2次のユニタリ群) $\rightarrow (a_1, a_2)$ (カルタン座標：差が重要)

物質場：基本表現(G の2次元表現)に属する物質場が4個 $\rightarrow (m_1, m_2, m_3, m_4)$ (質量)

\mathbb{R}^4 ：4次元空間上の理論 $\rightarrow (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (比が重要、収束させるため)

を考えます。そうするとこの場合にはパラメータが6個出てきます。ゲージ群のカルタンの座標を指定する2つのパラメータ (a_1, a_2) があります。それから基本表現が4個あってその質量パラメータ (m_1, m_2, m_3, m_4) に相当するものが4個あります。それから4次元空間でそのまま計算すると発散してしまうので、それを(正

則化) 収束させるためにネクラソフパラメータと呼ばれているパラメータ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ を2つ入れます. 以上, 全部で8個パラメータがありますが, このうち a_1, a_2 は本質的に差だけが重要で, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は本質的に比だけが重要です. なので実質は6個のパラメータを持っています. これから書く関数は6個のパラメータを持っている無限級数です;

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n z^n, \quad (4)$$

$$Z_n = \sum_{\substack{|\lambda^{(1)}|+|\lambda^{(2)}|=n \\ \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} \in \mathcal{P}}} W(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}).$$

ここで $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ は2つのヤング図形です(ちょうど先程の講義でヤング図形が出てきたのでサボれていいんですけども). 2個のヤング図形はゲージ群が $U(2)$ で考えていることに対応します. この Z_n は $\lambda^{(1)}$ と $\lambda^{(2)}$ の箱の総和が n になるようなヤング図形について足し算してください, というものです. この重み関数 $W(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ は次のような形をしています;

$$W(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = \frac{\prod_{i=1}^4 \{z_f(a_1, \lambda^{(1)}, m_i) z_f(a_2, \lambda^{(2)}, m_i)\}}{\prod_{i,j=1}^2 z_v(a_i, \lambda^{(i)}, a_j, \lambda^{(j)})}.$$

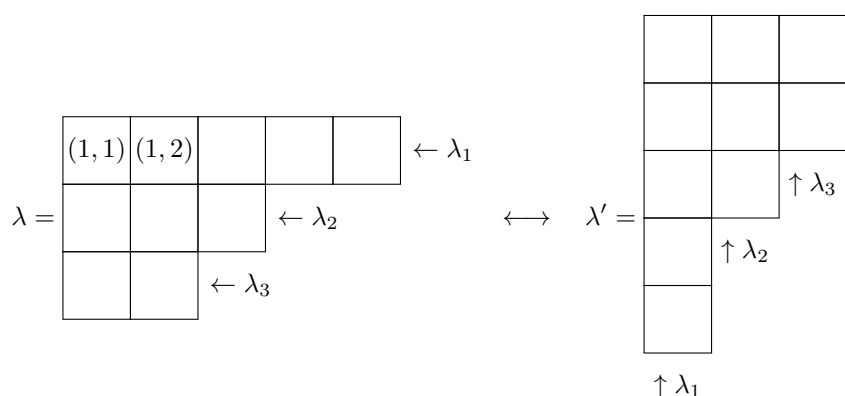
ここで出てきた分子, 分母の z_f, z_v はヤング図形の中の箱に関する積で定義される関数で

$$z_f(a, \lambda, m) = \prod_{(i,j) \in \lambda} h(a + m + \varepsilon_1(i-1) + \varepsilon_2(j-1)),$$

$$z_v(a, \lambda, b, \mu) = \prod_{(i,j) \in \lambda} h(e_{i,j}(a-b, \lambda, \mu)) \prod_{(i,j) \in \mu} h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - e_{i,j}(b-a, \mu, \lambda)),$$

$$e_{i,j}(a, \lambda, \mu) = a + \varepsilon_1(\lambda_j' - i + 1) - \varepsilon_2(\mu_i - j).$$

今は $h(x) = x$ ですが, 後で三角関数や楕円関数にしたいときがありますから, こう書いておきます. また λ' は λ の転置とします. たとえば $\lambda = (5, 3, 2)$ ならば $\lambda' = (3, 3, 2, 1, 1)$ です.



これらはヤング図形の言葉でいうと「腕の長さ (arm length)」とか「足の長さ (leg length)」とか呼んでもものですが, 今の場合は「 μ の中に入っている箱を λ で足の長さを測る」とかっていう, そういう奇妙なことをやったりしていますので, はみ出したりすると負になることもあります. 以上で全部書き終わりました.

こんなものがゲージ理論のモジュライ空間上の積分からどうして出てくるのかということを知りたい人は, Nakajima-Yoshioka (Instanton counting on blowup) とかをみるといいと思いますが, 吉岡さんは多分その

辺りにおられると思いますので演習の時間に連れてきて聞いてもらったら私も勉強したいと思います。ここではそういうことは使わずにこの式だけを見ます。定義したんですけど、じゃあ具体的に書き下してくださいというのはめんどくさいので、たいがい機械にやらせるのですが、大事なことは各項がきれいな factor で factorize されているものの和になっているということです。この式で大事なものは、係数が factorize されているんですけど、こういう重みで和をとっています。なので同じベキのところをそろえて係数を通分してしまうと悲惨なことになります。なので Dotsenko-Fateev の積分は 30 年も昔からあるわけですけど、級数表示を真面目に考えた人があんまりいなかった理由はこういうことです。

例えば「微分方程式がわかっているんだから係数を未定係数でつっこんで順番に係数を求めていけば級数表示なんてわかるだろう」と素朴には思うわけですけど、わかるんですけど解いていくと各項の係数は超幾何のようにきれいに factorize しないんですね、悲惨な式がだーっと出てきてとても收拾がつかないので、「級数表示はあんまり便利じゃないよね」というのであんまり扱ってなかったわけです。この式は、1 つの項にまとめようとしなくていくつもの項の和で書いているので、それぞれはきれいに factorize された形になるというのが嬉しいところです。factorize された形にきれいに書こうというのはある意味ではいつでもできるので、全部展開してしまえば monomial ですから factorize しています。それは全然面白くないですから、「そういうものをうまくまとめて少ない項でしかもきれいに factorize されているもので意味のある表示がありますか」、というものの 1 つの答えがこれ (4) なわけです。

一方で“ある理由”(AGT) から (3) は (4) に関係している(もちろん渋川さんもそういうことを知っていて質問されているわけですけども)、これもきれいに factorize されています。なので「これ (4) のある場合がこの級数 (3) になっているのか」というのが渋川さんの問いです。いろんな状況証拠からこうしたことが予想できるので、ここに書いた級数 (3) とこの級数 (4) は何か同じところ—Dotsenko-Fateev 積分とかその周辺—にいる似たような関数のはずなんだけど、関数として同じなのか？ またそうだと表示としても同じなのか？というのが渋川さんの質問でした。

というわけで問題は理解していただいたかと思います。この質問への答えは、同じ関数であって表示としても同じというのが結論です。例を 1 個みたほうがいいかと思います。

例 1. $n = 0, 1$ のとき、 Z_0, Z_1 を書き下しなさい。ただし $(a_1, a_2) = (a, -a)$ とする。

解.

$$Z_0 = W(\emptyset, \emptyset) = 1,$$

$$Z_1 = W(\square, \emptyset) + W(\emptyset, \square) = \frac{\prod_{i=1}^4 (-a + m_i)}{2a\varepsilon_1\varepsilon_2(-2a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)} - \frac{\prod_{i=1}^4 (a + m_i)}{2a\varepsilon_1\varepsilon_2(2a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

ここで考えているネクラソフの関数は 1 から始まる整級数になります。 a_1, a_2 は差だけが大事なので、 $(a_1, a_2) = (a, -a)$ とおいています。 $SU(2)$ でみていると思ってもらいたいと思います。今の場合 Z_1 は 2 つの項で書けていますが、「たった 2 つのかわいらしい式で書けている」と思って油断していると、これを展開して通分した式をみるととてもそれがこういうふうにとまとまるとは思えない。先ほどの級数も同じで z のベキごとに整理したものを開いちゃうと悲惨な式です。超幾何級数のときは各項が因数分解されていたのでそういう悩みはなかったんですけど、こういう場合は工夫しないと書けないと、さらにこの先やりたい人は計算機に計算してもらったほうが良いと思います。必要なら Mathematica ならプログラムがありますのでほしい人はいつか提供します。

こういうめんどくさい式がこの式 (3) に関係していると期待される理由を説明しましょう。ネクラソフ関数

Z が Dotsenko-Fateev の級数 (3) に関係すると期待される理由は物理で知られている AGT 対応 (2009) です。今回「これ (AGT) をタイトルに入れてください」と渋川さんに言われたんですけどこれをメインの主題にして話すわけではないので省きました*2。AGT 対応の国語辞典的な説明は

4 次元ゲージ理論と 2 次元共形場理論の間に対応があります

というものです。これはちょうど 10 年くらい前の 2009 年に Alday, Gaiotto, Tachikawa という 3 人の物理学者が発見しました。彼らによるとネクラソフの分配関数は、(2 次元共形場理論はいろいろあるんですが Virasoro 代数という無限次元代数を対称性に持つ) 共形場理論の、(一般に共形場理論は Riemann 面上で考えることができるんですけど) \mathbb{P}^1 上の 4 点関数に対応するということが提唱されました。10 年前には級数を比較するとどうもあっているらしいという実験的な予想だったんですけど、その後いろんな人が頑張って今では証明されています。その証明の細かいことをここで説明する時間も力量も私にはありませんので証明はしません。必要があったら文献などは後で紹介しますので自分で勉強されたらいいかと思います。1 つ、何も予備知識なしに計算だけで証明するという方法が、共形場理論の方法は使いますが、この後 30 分くらいしゃべった話を使うと読めるようになる論文が 1 つありますので、もし興味がある人はそれをよんでいただいたらいいかなと思います。

3 共形場理論の復習

共形場理論の知識をちょっと使いますから、共形場理論を一度も扱ったことがない人もいるかもしれないので復習というのも変ですけど、最初から聞いても十分わかるように復習します。共形場理論を国語辞典的にいうと何かというと、共形不変性を持つ 2 次元の場の量子論、1984 年に BPZ (Belavin-Polyakov-Zamolodchikov) という人たちによって一撃で完成された理論というふうについておけば国語辞典、百科事典的には間違いのない説明だと思います。今から中身の説明をします。共形場理論にもいろんなバージョンがあるんですけども、ここでやるのは一番基本的な Virasoro 代数の対称性を持っているものです。

先程の講義でちょうど Lie 環の説明がありましたので、いきなり交換関係を書いてそれで定義をしたことにします。

$$\text{Vir} : [L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}$$

ここで $L_n (n \in \mathbb{Z})$ は無限個の (生成) 元、 c は中心元で、以下では $c \in \mathbb{C}$ として扱うことにします。Virasoro 代数はこういう交換関係で定義される無限次元の Lie 代数ですが、こんなものがどこから出てきましたかという、(都合で $-$ をつけますけど) 1 変数の解析的なベクトル場 $l_n = -z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z}$ のなす Lie 代数に中心元を追加したものです。こういう解析的な座標変換、等角変換ともいいますが、等角変換の対称性を持っているような場の量子論というものを共形場理論と呼んでいます。つまり Virasoro 代数は共形変換の無限小変換を生成する生成子のなす代数で、「理論の中にこういう operator があって、いろんなものがこの operator とどうい交換関係を持っていますか」、ということで特定される理論が「Virasoro 代数を対称性に持つ共形場理論」という言葉の意味です。この代数 Vir の表現空間の上で理論を構成するわけですけども、Vir の表現 (空間) として $h, c \in \mathbb{C}$ で特定されているような表現 V_h, V_h^* を考えます (ただし、 c は固定されているのでいちいち書かない

*2 渋川追記：ちなみに渋川さんの提案したタイトルは 2 つあり、1 つはここで触れられている「超幾何と AGT」で、もう 1 つは「超幾何と共形場理論 - Die Neue These -」であったが、後者は「カッコよすぎる (?)」という理由でボツになった (「山田先生ならこれぐらいカッコよくなければダメだ」という意見は聞き入れていただけなかった)。

ことにしましょう). 表現論的には Verma 加群と呼ばれているものですが, 定義は平たく述べますと次のようなものです.

まず V_h は左 Vir 加群です. なので L_n は左から作用しています. 要は縦ベクトルの世界だと思ってください. 縦ベクトルのことを物理の方言ではケットベクトル $|h\rangle$ というもので表します. なのでここでもそれを使いますが, ケットベクトルを書いたら何か縦ベクトルだと思ってください. まず

$$\exists |h\rangle \in V_h \text{ s.t. } L_n |h\rangle = \begin{cases} 0 & (n > 0) \\ h|h\rangle & (n = 0) \end{cases}$$

とします. この $|h\rangle$ に L_n の添え字が正のものを作用させたら 0 ですから, 非自明な作用をさせようと思ったら負のものを掛けるしかないんですけど, 負のものは何をどういう順番でかけてもよろしい. そういうふうにかけたものの一次結合もってよろしい. そういうものの全体の空間が V_h です.

V_h^* というのはケットベクトル (縦ベクトル) と書いていたものをブラベクトル (横ベクトル), L_n と書いていたものを L_{-n} , 作用素の積は順番を逆にする (こういうものを anti-involution といいますけど);

$$|h\rangle \leftrightarrow \langle h|, \quad L_n \leftrightarrow L_{-n}, \quad AB \leftrightarrow -BA.$$

これで右加群を左加群に翻訳することができます. この積の意味ですけど, Lie 環に積なんかないんですけど, この元の非可換な多項式の空間で $[,]$ が交換関係になるように拡張したものを普遍包絡環といいますけど, その世界での行列のかけ算の意味です.

私は物理出身なので最初のころ何が困ったかということ, 普遍包絡環とかそういう言葉がわからないんですね. でもわからなくても計算はできるので, この講義でも計算主体に, 概念は後からついてくる, と. 証明はもっと後からついてくる, と. そういう流儀で話をさせてもらいます. 証明なんか後からついてくるというのは, 私の師匠の土屋先生にならった思想ですけど, 正しい態度だと思います. いや, その方が「正しい」じゃなく「楽しい」態度だと思います.

それで V_h はどういう構造をしているかということ, 無限次元の表現なんですけど実は有限次元表現の無限個の直和になっていて,

$$V_h = V_h(0) \oplus V_h(1) \oplus \dots \\ V_h(N) = \{ |v\rangle \in V_h \mid L_0 |v\rangle = (N + h) |v\rangle \}$$

となっています. $V_h(1), V_h(2), \dots$ のベクトルたちは L_0 の固有値がどんどん上がっていくのですが, 慣例で, この $|h\rangle$ のことを highest(最高) weight ベクトルと呼んでいます. 具体的には

$$V_h(0) = \mathbb{C} |h\rangle, \\ V_h(1) = \mathbb{C} L_{-1} |h\rangle, \\ V_h(2) = \mathbb{C} L_{-1}^2 |h\rangle \oplus \mathbb{C} L_{-2} |h\rangle, \\ V_h(3) = \mathbb{C} L_{-1}^3 |h\rangle \oplus \mathbb{C} L_{-2} L_{-1} |h\rangle \oplus \mathbb{C} L_{-3} |h\rangle, \\ \vdots$$

のようになっています. 一般に $V_h(N)$ は

$$\{ L_{-\lambda_1} L_{-\lambda_2} \dots L_{-\lambda_l} |h\rangle \mid \lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0), |\lambda| = N \}$$

が基底としてとれ, その次元は N の分割数であることがわかります.

演習 1. なぜか考えよ.

hint : L_n ($n > 0$) たちは L_0 との簡単な交換関係

$$[L_0, L_n] = -nL_n$$

があるので, L_0 の固有値が $N + h$ であることは簡単に計算できる. また $L_{-1}L_{-2}$ は $L_{-2}L_{-1}$ と違うものだが, そういうものはおつりが他の L , 今の場合には

$$L_{-1}L_{-2} = L_{-2}L_{-1} + L_{-3}$$

となって $L_{-2}L_{-1}$ と L_{-3} で書けているので base としてはいらない.

Virasoro 代数の表現でめんどくさいのは, 基底の取り方によって係数がガラガラ変わりますので, どうとでもきれいに書けません. そういう意味でちょっとめんどくさいですが, ともかくこういう空間です. 例えば, $V_h(2)$ に L_1 を作用させると $V_h(1)$ に上がって, $V_h(0)$ (highest weight ベクトル) に L_{-2} を作用させると $V_h(2)$ に落ちる. こんな感じの表現になっています.

Virasoro 代数で以下で考えたいのは, 共形場理論で主役になるプライマリ場 $\Phi_h(z)$ というものです. これは 2 つの複素数 $h, z \in \mathbb{C}$ でパラメトライズされる作用素で, L_n との交換関係

$$[L_n, \Phi_h(z)] = z^n \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h(n+1) \right) \Phi_h(z)$$

に従うものとして定義します. 以下, このプライマリ場を 2 つ持ってきて

$$\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$$

という量を考えます. $\Phi_h(z)$ は作用素ですから行列です. $|h\rangle$ は縦ベクトル, $\langle h|$ は横ベクトル, 行列をかけ算して縦ベクトルと横ベクトルではさんでますのであるスカラー関数ができます. これのことを, 作用素を 2 個かけているので 2 点関数と呼ぶ流儀もあるんだけど, 普通は 4 点関数と呼んでいます.

4 点関数と呼ばれている理由をちょっとだけ説明しておきますと, 正真正銘の 4 点関数と呼ばれるものが実はあって,

$$\langle \Phi_{h_4}(z_4) \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) \rangle$$

これは 4 個のパラメータ h_1, h_2, h_3, h_4 と \mathbb{P}^1 上の 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 に associate して決まるある関数ですけど, こういう関数を 4 個の点に $\langle L_0, L_{\pm 1} \rangle \cong \mathfrak{sl}_2$ が作用しているのです. この人たちは \mathfrak{sl}_2 の作用で不変ではないけどある種の共変性があります. なので, この 4 個の点を \mathfrak{sl}_2 の作用で $0, 1, \infty$ とか適当に調節しちゃうことができ本質的に 1 変数の関数なんです. $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$ もこの後すぐやりますが, スケール変換に対する変換性がありますので実質的には 1 変数の関数です. そういう意味で $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$ と $\langle \Phi_{h_4}(z_4) \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) \rangle$ は対応しているので, 見かけ上 $\langle h_4 |, |h_1 \rangle$ と $\Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2)$ は違うようですが対等な役割をしています. そういう意味で 4 点関数と呼んでいます.

演習 2. $\langle L_0, L_{\pm 1} \rangle \cong \mathfrak{sl}_2 \curvearrowright \langle \Phi_{h_4}(z_4) \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) \rangle$ を示せ.

AGT 予想が言っていたのは

$$\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle \text{ がネクラソフ関数だよ}$$

ということです。この世界にはパラメータは h_1, h_2, h_3, h_4 があって、そのほかに c と h の 6 個があるわけですが、実は $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$ だけで値は決まらずに、他に中間状態というものを指定しないとダメです。なので、その説明をしましょう。

以下、4 点関数をどうやって計算すればいいですかということを話しますが、そのためにはまず 3 点関数 $\langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle$ から考えます。

演習 3.

$$\langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle = (\text{定数}) z^\Delta, \quad \Delta = h_3 - h_1 - h_2. \quad (5)$$

hint : $[L_0, \Phi_{h_2}(z)] = \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) \Phi_{h_2}(z)$ を $\langle h_3 | h_1 \rangle$ ではさむ。つまり

$$\begin{aligned} \langle h_3 | [L_0, \Phi_{h_2}(z)] | h_1 \rangle &= \langle h_3 | (L_0 \Phi_{h_2}(z) - \Phi_{h_2}(z) L_0) | h_1 \rangle \\ &= \langle h_3 | L_0 \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle - \langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) L_0 | h_1 \rangle \\ &= (h_3 - h_1) \langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle \end{aligned}$$

となり、他方

$$\begin{aligned} \langle h_3 | [L_0, \Phi_{h_2}(z)] | h_1 \rangle &= \langle h_3 | \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle \\ &= \left(z \frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) \langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle \end{aligned}$$

なので、 $\langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle$ は微分方程式

$$\left(z \frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) \langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle = (h_3 - h_1) \langle h_3 | \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle$$

の解となる。

$\Phi_h(z)$ は L_n との交換関係しか定義していないので定数倍は決まりません。さらに $|v\rangle \in V_h$ と $\langle u| \in V_h^*$ に対して、3 点関数 $\langle u | \Phi_{h_2} | v \rangle$ は上記の定数を除いて一意に決まります。ここで $|v\rangle$ は h というパラメータを v に変えたという意味ではなくて、

$$|v\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} L_{-\lambda_1} \cdots L_{-\lambda_l} |h\rangle$$

という V_h の一般元を勝手に指定しているつもりです。ここらへんがブラケット記号で混乱を生む原因で、この v というのは h と同等のものと思わないでください (数ではありません)。 $\langle u|$ も同様に

$$\langle u| = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \langle h | L_{\lambda_1} \cdots L_{\lambda_l}$$

です。

演習 4. 3 点関数 $\langle u | \Phi_{h_2} | v \rangle$ は上記の定数を除いて一意に決まることを示せ。

hint : L_+ は交換関係で左へ、 L_- は右へ持っていくといずれは消えて、最後は (5) に帰着される。

こういう意味で 3 点関数というのはユニークに決まります。これが決まると、作用素の意味での

$$\Phi_{h_2}(z) : V_{h_1} \rightarrow V_{h_3} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

が generic には決まります. どういう意味かという, $\Phi_{h_2}(z)$ を V_{h_1} の highest weight ベクトルに作用させたときが大事なんですけど,

$$\Phi_{h_2}(z) |h_1\rangle = Cz^\Delta(1 + z\beta_1 L_{-1} + z^2(\beta_{1,1} L_{-1}^2 + \beta_2 L_{-2}) + \dots) |h_3\rangle \quad (C \text{ は定数})$$

というふうに決まっていきます. 送った先 (の係数) は V_{h_3} の元になってなさいといっているわけですから, V_{h_3} は $|h_3\rangle, L_{-1}|h_3\rangle, \dots$ ではられている世界なので上のように展開されるわけですが, それぞれの係数がこういう z のべきをもってなさいというのは L_0 の交換関係から決まっています. なので後は係数を決めればよいんですけど, この係数 $\beta_1, \beta_{1,1}, \beta_2, \dots$ は線形方程式を解いて決まります. 例えば $\Phi_{h_2}(z) |h_1\rangle$ に L_1 をかけて $\langle h_3|$ でお迎えに行ったら β_1 が拾われます. そのときの値はわかっていますからその 1 次方程式を解くと β_1 が決まります. 同様に $\beta_{1,1}$ や β_2 が知りたければ L_1^2 や L_2 をかけてやれば決まります. ただし, 毎回 1 次方程式を解かないといけないのでこれらの行列式が 0 だと解けません. それが generic (行列式が零でない) といった意味です.

演習 5. 次を示せ.

$$2h_3\beta_1 = h_3 - h_1 + h_2,$$

$$\text{hint : } 2h_3 = \langle h_3 | L_1 L_{-1} | h_3 \rangle.$$

$$\begin{pmatrix} 4h_3 + \frac{c}{2} & 6h_3 \\ 6h_3 & (2h_3 + 1)4h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_3 + 2h_2 - h_1 \\ (h_3 + h_2 - h_1 + 1)(h_3 + h_2 - h_1) \end{pmatrix},$$

$$\text{hint : } \begin{pmatrix} 4h_3 + \frac{c}{2} & 6h_3 \\ 6h_3 & (2h_3 + 1)4h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle h_3 | L_2 L_{-2} | h_3 \rangle & \langle h_3 | L_2 L_{-1}^2 | h_3 \rangle \\ \langle h_3 | L_1^2 L_{-2} | h_3 \rangle & \langle h_3 | L_1^2 L_{-1}^2 | h_3 \rangle \end{pmatrix}.$$

次数が 3 だったら base が 3 個ありますので, 3×3 の逆行列を解いて求まる, 一般には n の分割数なのですぐに巨大になって手ではできませんけど, 計算機に頑張ってもらえばレベル 10 くらいまではすぐにやってくれます. こころあたりの人力の計算で一番高いところをやっているのを見たことがあるのは 6 次くらいまでですね (自分ではやってません, やった人を見たことがあります). でも, 全部交換関係だけから計算できます. これでこの作用が決まると, $|h_1\rangle$ に $\Phi_{h_2}(z_2)$ をかけた段階でパラメータが h の空間の元ができたと思って, この人にまた $\Phi_{h_3}(z_3)$ を作用させて V_{h_4} の人ができたと思って, その人を V_{h_4} の双対 $V_{h_4}^*$ で迎えに行ったら関数が計算できる, ということです.

今の説明で何が良かったかという, 行列と行列をかけ算して縦ベクトルと横ベクトルでは自分で数を計算しているわけですけど, 普通の行列でもまずかけ算が定義できるとは限りませんよね. 今の場合はどういときに定義できるかとかいうことがあるんですけど, さらに普通の行列と違うのは一意的に決まってないということです. つまり $|h_1\rangle$ に $\Phi_{h_2}(z_2)$ をかけた段階

$$\Phi_{h_2}(z_2) |h_1\rangle \in V_h$$

で出てきた h というパラメータを決めて初めて計算できます. この h のことを中間状態といいます. 最初に用意した h_1, h_2, h_3, h_4 という 4 つのパラメータを指定するだけではこの 4 点関数というのは決まっています. 途中でどこを経由していきますかというパラメータ h をもう 1 つ決めて初めて決まります. この方面の文献を見てもらいますとよくこんな絵がかいてあります.

$$\begin{array}{ccccccc} & & h_3 & & h_2 & & \\ & & | & & | & & \\ h_4 & - & \bullet & -h- & \bullet & - & h_1 \end{array}$$

このようにして原理的には決定できるんですけど、さっきもいったように先のほうを計算しようとする n の分割数の逆行列を計算してやる必要があるので悲惨な式です。真面目にこれを計算しようと頑張ったのはほぼ世界に 1 人だけで、Zamolodchikov さんが以前に頑張って計算していたわけですが、他の人は「絶望的で計算できない」と。私もずっとそう思っていました。

ですが 2009 年に AGT という人たちが、書けるよ、ということを見つけたわけですが。たぶん無理じゃなくてちゃんと書けると信じて一生懸命頑張っていたのは Zamolodchikov だけだと思います。少なくとも私は土屋さんには「こんなのやっちゃいけない」と習いましたけど…。で、教訓は「先生のいうことは信じちゃいけません」ということですが(笑)。でも、頑張っていたからといってできたわけではないので…。実際、最初の数項を見てもらったらわかると思いますけど、かなり悲惨な式です。さらにいうと、2009 年に AGT がいったことはこれがネクラソフの関数でかけ、さらに「Painlevé の τ 関数にもなっています」という応用があって、それは Lisovsky という人たちによって AGT のちょっと後に示されました。ただし、その場合は $c = 1$ のときです。

「From Gauss to Painlevé」の preface を読むと、「Painlevé は 21 世紀の特殊関数を定義している」と予言してたんですけど、まさにその通りでその具体的な特殊関数はネクラソフ関数です。ネクラソフ関数は級数の形で書けます。今回お話しするのはそれが微分方程式をみたしているということが話の目的で、明日は微分方程式をつくって、それが最初に書いた渋川さんの言っていた級数のみならず Dotsenko-Fateev の微分方程式になっているということを説明したいと思います。

微分方程式がでてくる由来だけ説明しておきますと、微分方程式はいつでも成り立つのではなくて、generic でないときにでてきます。私が土屋さんに習ったのは「そうでないときが大事なんだ」と。「そうでないときは微分方程式が成り立っていいことがいろいろ起こって…」とそういうことでした。Painlevé でいうと特殊解を持っているようなときですね、そういうところがいろんなことができるというわけですが、特別な場合には微分方程式が成り立っていて、ある場合には Dotsenko-Fateev の微分方程式になるということになっています。

4 特異ベクトルと微分方程式

今日は、共形場理論からでてくる微分方程式の話半分ほどやって、その後でそれを使って AGT 対応がどのように証明されるか、証明といっても物理学者がやった証明なので“証明”ですけど、そういうことを説明したいと思います。昨日と同じように途中でどうせメロメロになるので、オチをちゃんと最初におきますけど q -analogue にいくと簡単にできると、そういうオチです。

まず、今日の前半は Virasoro 代数の表現からどうやって微分方程式がでてくるかという話をします。昨日の最後にチラッといいましたけど、微分方程式が出てくるのは generic でないところからでてきます。どういふところだったかという、Virasoro 代数の表現の weight が N だけあがったところから \mathbb{C} への自然なペアリング

$$\begin{array}{ccc} V_h^*(N) \times V_h(N) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\langle u, |v\rangle) & \longmapsto & \langle u|v \rangle \end{array}$$

があったわけですが、これを並べて作った行列 $K(N)$ を Kac 行列、その行列式 $d_N = \det(K(N))$ を Kac 行列式といいます。具体的には次の通りです。 $N = 1$

$$K(1) = d_1 = \langle h|L_1L_{-1}|h\rangle = \langle h|L_{-1}L_1 + 2L_0|h\rangle = 2\langle h|L_0|h\rangle = 2h.$$

$N = 2$

$$K(2) = \langle h | \begin{pmatrix} L_2 L_{-2} & L_2 L_{-1}^2 \\ L_1^2 L_{-2} & L_1^2 L_{-1}^2 \end{pmatrix} | h \rangle = \begin{pmatrix} 4h + \frac{c}{2} & 6h \\ 6h & (2h+1)4h \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \det(K(2)) = 2h(c - 10h + 2ch + 16h^2).$$

私は最近こんなのも「Mathematica」を使って計算しているので、板書で書くとメロメロになるわけですが、ともかくこんな感じです。 d_2 は h は 1 回くりだせませうけど後は因数分解できません。有理的に因子化しないので、 h についてどういう h で 0 になるかということが大事なんですけど、それを調べようと思うとルートを使って 2 次方程式を解かないといけません。私はルートは嫌いなので、2 次方程式を解かなくていいようにする方法がありまして、 $c = 13 - 6\left(t + \frac{1}{t}\right)$ とおくと有理的に $d_2 = 16(h - h_{1,1})(h - h_{2,1})(h - h_{1,2})$ と因数分解できます。ここで $h_{r,s} = \frac{1}{4t}((rt - s)^2 - (t - 1)^2)$ というものです。一般に次の公式が知られています。

定理 1 (Kac (1978), Feigin-Fuchs (1982)).

$$d_N = \text{const} \prod_{\substack{r,s \geq 1 \\ r,s \leq N}} (h - h_{r,s})^{P(N-rs)}, \quad P(n) \text{ は } n \text{ の分割数}$$

この結果があるのでこれ ($K(N)$ の行列式) のことを Kac 行列式と呼んでいます。Kac(1978) はアナウンスだけだったと思います。Publish した最初の証明は Feigin-Fuchs が 1982 年に出ています。

d_N は基底の取り方によるので const はどうでもいいです。例を書くとたとえば次のようになります。

例 2. $d_3 = (h - h_{1,1})^2 (h - h_{2,1})^1 (h - h_{1,2})^1 (h - h_{3,1})^1 (h - h_{1,3})^1$

これはどういう意味かという、この定理の系として d_N が 0 になるとき V_h は既約でないということを知っているわけですけど、

系 1. 表現 V_h は $h = h_{r,s}$ のとき可約になり、次のようなベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ (特異ベクトル) から生成される部分表現をもつ：

$$L_n |\chi_{r,s}\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad L_0 |\chi_{r,s}\rangle = rs |\chi_{r,s}\rangle.$$

こういう $|\chi_{r,s}\rangle$ があると、勝手なブラベクトルとペアリングをとったときにいずれ positive なものが左から攻めてきますので、消えちゃうわけですね。なのでこういう $|\chi_{r,s}\rangle$ があれば det が消えてしまうことが簡単にわかります。

逆に det が消えているときには非自明なカーネルベクトルがありますので、そのカーネルベクトルは特異ベクトルか、あるいは特異ベクトルに何かかけたものです。例えばレベル 3 のところで d_3 が 0 になるのはすでにレベル 1 のところで特異ベクトルができていて、それに L_{-1} をかけたり L_{-2} をかけたりしたものがペアリングをとって消えてしまっている、そういう状況も起こります。そういうものはレベル 1 のベクトルに L_{-1}, L_{-2} をどうかけるかで 2 次元分ありますので、それでベキに 2 がでてくるというわけですね。

ここで一般に最高 (highest) weight の表現の中やテンソル積の中で再び最高 weight になるベクトルを特異ベクトルといいます。昨日の齋藤先生の講義でも、行列の中で最高 weight ベクトルを探して、次元勘定してとかやりましたが、最高 weight ベクトルをつかまえるのは大事です。普通は Virasoro 代数の表現で最高 weight ベクトルに L_{-1} や L_{-2} をかけていったもの全体は既約で、positive なものをかけてやると戻ってこれて全体が Virasoro 代数でつながっている、既約表現になっていますけど、特別な状況の場合にはブラックホールみたいなものがあっていったんその中に入ってしまってもう戻ってこれない、そういう状況が起こります。

そういう不変な部分空間ができちゃう場合があって、それが可約ということですけど、「そういうのは行列式 d_N が 0 になる特別なときに起こる」というのがこの定理の主張です。

実際に知られている証明は、むしろ特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ を先につくって、この $|\chi_{r,s}\rangle$ が零点にこれだけの寄与をするからこういう \det が成り立ちますね、という証明でこちらのほうが普通です。最初に Feigin たちがやった証明も先に特異ベクトルを構成してしまって、これだけの零点があるはずであとは次数を勘定するとそれで全部だから、という証明で、論理的には上の系が定理で、定理が系という順番でそう説明することのほうが多いです。歴史的にはこのようになっています。最初に Kac がやった証明が何なのかは知りません。

聴講者. すみません. $|\chi_{r,s}\rangle$ あるいは r,s を決めて $h_{r,s}$ を考えるときに, r,s とは違う r',s' について $h_{r,s} = h_{r',s'}$ となるようなことはあるんですか?

あります. 1 つの表現が, c が最初から決まっていって h を決めたら決まるので c と h で決まるわけですけど, そのときに同じ h が 2 通りの整数でラベリングされることもあり得ます ($c = 13 + 6(t + 1/t)$ の t が有理数のとき). もともと BPZ がやった minimal モデルというのはこの場合で, 既約な quotient をとると一番小さな表現ができるんですね. そういう場合が minimal モデルと呼ばれているものです. これ ($|\chi_{r,s}\rangle$) は最も generic に起こり得る可約な場合を書いているわけです.

\mathfrak{sl}_3 でいうと f_1 と f_2 の方向とあって, それぞれの方向に何回もやると消えて, となっているとこれで有限次元表現ができるわけです. 今みているのはその 1 方向だけみたいなのをやっていて, Virasoro のときには最大 2 つ起こることがあり得て, それで最大です. それ以上起こることもあるんですけど, それ以上起こる場合にはその sub module の中にまた特異ベクトルがあって, という状況になって入れ子になってどんどん起こることはあります. いったん 2 つでてくると無限個でできます. そういうことは character を調べたりするときにやるんですけど, ここでは 1 つある場合だけを考えます.

例 3. $n = 1$ のとき $h_{1,1} = 0$, つまり最高重みベクトルは $|h_{1,1}\rangle = |0\rangle$ で, $|\chi\rangle = L_{-1}|h = 0\rangle$ が特異ベクトルになるしかありません. 実際 L_1 を $|\chi\rangle$ に当てると, 交換関係 $[L_1, L_{-1}] = 2L_0$ から

$$L_1|\chi\rangle = L_1L_{-1}|0\rangle = [L_1, L_{-1}]|0\rangle = 2L_0|0\rangle = 0$$

となって消えてしまいます. L_2 から先は weight の勘定からすべて 0 になります. なのでこの条件 (特異ベクトルの条件) が満たされています.

昨日話をした球面上の相関関数を考えるときには \mathfrak{sl}_2 で不変な状態で期待値をとって 4 点関数を定義すると言ったんですけど, そのときに使うベクトルは $|0\rangle$ および, それに双対な $\langle 0|$ です. positive なものはもちろん定義によって消えていますけど, L_0 と L_{-1} でも消えています. L_0 と $L_{\pm 1}$ が \mathfrak{sl}_2 を生成していますから, そういう意味でこの $|\chi\rangle$ は \mathfrak{sl}_2 で不変な状態を表しています. これで原点がどこにあるかというのに関係なしに, 原点側も無限遠点側もツルツルで, \mathfrak{sl}_2 でクルクル回せるような相関関数ができます.

$n = 2$ のとき これはもう少し非自明で, $h = 0$ の $|0\rangle$ はもちろん positive なものをもってくと 0 になります. そうではなくてレベル 2 で初めて特異ベクトルになる人がいて, $h = h_{2,1} = \frac{3t-2}{4}$ のとき, 特異ベクトルとして

$$|\chi_{2,1}\rangle = (L_{-1}^2 - tL_{-2})|h\rangle$$

がとれます.

演習 6. $L_1|\chi_{2,1}\rangle = L_2|\chi_{2,1}\rangle = 0$ を示せ.

実は $n = 2$ の場合には $(r, s) = (1, 2)$ にも特異ベクトルが出てきますが、一般に t を $\frac{1}{t}$ にして (r, s) を (s, r) にすると h の式は同じになります。このことを使うと $(1, 2)$ の特異ベクトルをつくりたいければ、先程の $|\chi_{2,1}\rangle$ で t を $\frac{1}{t}$ にすれば OK です。だから片方だけ書けば十分ですね。たとえば $n = 3$ の場合には $(r, s) = (3, 1), (1, 3)$ で

$$|\chi_{3,1}\rangle = (L_{-1}^3 - 4tL_{-2}L_{-1} + 2t(2t-1)L_{-3})|h_{3,1}\rangle.$$

$|\chi_{1,3}\rangle$ のほうは $|\chi_{3,1}\rangle$ で t を $\frac{1}{t}$ にするとできてきます。

$n = 4$ になると $(r, s) = (4, 1), (2, 2), (1, 4)$ の 3 通りがでてきます。 $(4, 1)$ の特異ベクトルと $(1, 4)$ の特異ベクトルは t を $\frac{1}{t}$ にするとお互いに移りあいます。 $(2, 2)$ の特異ベクトルは t を $\frac{1}{t}$ にすると自分自身に戻るような式になっています。

一般に positive なものをかけて消えてしまうという条件をチェックするには、 L_1 と L_2 についてチェックしておけば十分です。 L_1, L_2 で交換子をとると L_3 から先もどんどん生成されるので L_1 と L_2 について消えれば L_3 から先も消えることが必然的にできてきます。 L_1 と L_2 の一方だけ消すのであれば、係数を調整していつでも消せるので問題はないですけど、両方消そうとすると c と h の間に何か関係がないと成り立ちません。同様に一般に 2 つの整数でラベリングされるような特異ベクトルが Virasoro 代数の highest weight 表現の空間の中にズラズラとあります。

これからお話しするのは「そういったベクトルがあると微分方程式がでてきます」ということです。実際、考えている表現空間が特異ベクトルをもつような可約な状況になっている場合には、4 点関数 $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z) \Phi_{h_2}(w) | h_1 \rangle$ はある線形微分方程式に従います。 h はいろんなパラメータがあるんですけど、どれか 1 個が特別な状況に退化していれば微分方程式は成り立ちます。たとえば中間状態に相当するパラメータが退化していてもいいです。微分方程式が出てくる理由は簡単で、 $h_1 = h_{r,s}$ のときはその表現空間にレベルが rs の特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ がありますので、 L_n の n が正のものが攻めていくといずれお迎えが来て

$$\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z) \Phi_{h_2}(w) | \chi_{r,s} \rangle = 0$$

のようにゼロになります。他方、 $|\chi_{r,s}\rangle$ は

$$|\chi_{r,s}\rangle = (L_{-1} + cL_{-2}L_{-1} + \dots)|h_1\rangle$$

のように書けていて、 L_{-n} を交換関係で左側に寄せていきますと、primary 場と交換する度に微分作用素が出てきますので、結局 $N = rs$ 階の微分方程式が出てきます。ホモジニティからこの人たちはいずれ 1 変数の関数で書けていますので、この場合には常微分方程式になります。1 変数の常微分方程式で N 階でしかも Fuchs 型です。

ここらへんの計算をするときには、先程の齋藤先生のお話とも同じなんですけれども、動ける座標は全部動かせるようにしておいたほうが式はきれいに書けます。なので一番式をきれいに書こうと思ったら、4 点のうち 2 点は Riemann 球面の原点と無限遠点にいて、残りの 2 個が途中のどこかにいる状況で、さらにやりたければそのうちのどちらかを 1 に特殊化してしまつて $0, 1, \infty$ ともう 1 個と書くと 1 変数の常微分方程式になるんですけど、そうしないで 4 個の変数全部動かせるようにしておいて微分方程式を書くと、むしろそのほうが方程式そのものはきれいに書けます。そこらへんは悩みの種で、作用素が n 個と一般にたくさんある場合は 3 個くらい減らして不自由になるくらいなら n 個でやるんですけど、4 個のものが 1 個になるとなるとかなり悩みますよね。なのでどっちで書くかというのは微妙なんですけど、両方でできます。ここでは具体的な式はそれほど必要ではないので、こういう微分方程式があるということだけ了解していただければいいと思います。

聴講者. $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z) \Phi_{h_2}(w) | \chi_{r,s} \rangle$ に出てきた h_4 の値は何でもいいんですか?

なんでもいいです. $\langle h_4 |$ の条件は negative のものがあると消える, それだけです. それ以外の条件は使いません. h_4 の値がなんであるかというのは式の形によらないんですね*3. というのは ∞ にもっていつているのでこの座標では見えないということです. 対称的にやりたければ,

$$\langle 0 | \Phi_{h_4}(z_4) \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) | 0 \rangle$$

と書いておいたほうが気持ちがいいです. ここで $\langle 0 |, | 0 \rangle$ と書いた人は, さっき言った \mathfrak{sl}_2 の意味での, \mathbb{P}_1 でツルツルの状態を表します.

それ (ツルツルの $z = 0$ や $z = \infty$ の意味) 以外の 4 か所に operator がさしこんであって (=出来事が起こっている=マーキングがされている) という状況で Virasoro を作用させてやると, 何かが起こっている場所が動いたという形に書けますので, こっちのほうが便利なことも多いです. ここでやっているのは z_1 を原点に, z_4 を無限遠点に止めちゃいましょう, という形の計算でこれが $\langle h_4 | \Phi_{h_3}(z_3) \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$ です. さらに徹底してもう 1 個固定できるでしょ, \mathfrak{sl}_2 は 3 次元ですからね, というふうにもう 1 個を例えば 1 に fix すると 0, 1, ∞ が fix されて残りの 1 個がモジュライになるというふうにして 1 次元の常微分方程式に落とすこともできます. 4 変数の方程式に \mathfrak{sl}_2 の不変性が 3 次元分あるというふうに連立形でみることもできます. どちらでみるかは目的に応じていろいろです.

ここでは方程式は書かないで, 解を積分でつくるといふもののお話をしておきましょう. まずいきなり演習問題から.

演習 7. $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)^{\alpha_i \alpha_j}$ について次を示せ (もっと一般の指数 $\lambda_{i,j}$ の話は Aomoto ('87)).

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial z_i} \Delta = \sum_{j(\neq i)=1}^N \frac{\alpha_i \alpha_j}{z_i - z_j} \Delta$$

$$(2) \quad \frac{1}{2\alpha_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \Delta = \sum_{i=2}^N \left(\frac{h(\alpha_i)}{(z_1 - z_i)^2} + \frac{1}{z_1 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \Delta,$$

ただし, $h(\alpha) := h_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha \left(\alpha_1 - \frac{1}{2\alpha_1} \right)$.

(1) は対数微分をすればすぐにできます. 簡単な式なんですけど実は重要で, スカラーあるいは $U(1)$ の場合の KZ 方程式です. 行列にしたら本物の KZ 方程式になります.

(2) は, z_1 が一般の z_j でも書けますけど一般の j だと (和の添字で j を) 含むとか含まないとかめんどくさいので, $j = 1$ の場合だけを書きます. (2) は (1) をもう一回微分して部分分数分解してやればできます. こういうのは「Virasoro 代数の表現論をつかって微分方程式をたてて, それを Coulomb gas とかいわれる方法で解いて, etc.」というのが常套手段なんですけど, そこらへんの話は今までの表現論のことを全部すっかり忘れてしまって, この演習問題を 1 回解くと 30 分でわかる. そういう仕掛けになっていることを 3, 4 年前に発見しまして講義のときにも愛用しています. これは簡単で「儲け」の多い演習問題ですので是非やってみてください.

聴講者. (2) で α_1 と書いているのは?

*3 ただし係数は少し変わる.

今は, z_1 の方程式だけを書いています. なので α_1 だけが別格で, この人 ((2) 式) は α_1 によっています*4.

この (2) 式で大事なのは $h(\alpha_i)$ が 1 になるときで, そのときは

$$\left(\frac{h(\alpha_i)}{(z_1 - z_i)^2} + \frac{1}{z_1 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \Delta = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{1}{z_1 - z_i} \Delta \right)$$

なので, これは全微分でまとまって, その変数で積分した $\int_C \Delta dz_i$ も同じ微分方程式 (z_i の項なし) をみたします. 差積のベキが整数でなければ一般に多価関数ですので, 積分して 0 というためには「境界項がちゃんとキャンセルする」とかそういうことをやらないといけません. そういうときのためにひねりサイクルの理論とかがあるわけですが, そういううまいサイクルを見つけてやれば単なる差積だけでなく, 差積を積分したようなものから出てくる非自明な解が続々と得られます.

これは 1 回に限りません. $h(\alpha_i) = 1$ になっている変数が何個かあったら, その都度積分してやってやればいくらでも新しい解ができます. さらにいうと, $h(\alpha) = 1$ は 2 次方程式なので 1 つ $h(\beta) = 1$ を決めてやると, それに対して $h(-\frac{2}{\beta}) = 1$ です. なので $\alpha_i = \beta, -\frac{2}{\beta}$ に相当する変数 z_i を追加して積分するというのをやっても, 元の方程式を保ったまま新しい解がつかれます. 多価関数の多重積分で目が回るんですけど, 積分ができればそれで方程式の非自明な解がゾロゾロと出てきます. このような作用素を, 妙な名前ですけど歴史的な経緯から, スクリーニング作用素といいます. 差積の言葉でいえば重みが 1 になっている変数を追加して積分するというわけです. こうして得られる差積の積分

$$\int dt_1 \cdots dt_n \prod_{1 \leq i < j \leq m} (z_i - z_j)^{\alpha_i \alpha_j} \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (z_i - t_j)^{\alpha_i \beta} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)^{\beta^2}$$

は, もともと青本先生がやった話*5 の特別なバージョンですけど, 先ほどの表現論の言葉でいうと

$$\langle 0 | \Phi_{h_n}(z_n) \cdots \Phi_{h_1}(z_1) | 0 \rangle,$$

の解を与えています. どういう微分方程式かというと, Virasoro 代数の言葉で書けば次のようになります (この場合には変数が全部生きてるように書いたほうがわかりやすいと思います. また変数は 4 個である必要もなく何個あっても同じです).

$h_1 = h_{2,1}$ の場合:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 - tu(z_1) \right\} \psi(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad u(z_1) = \sum_{i=2}^n \left(\frac{h_i}{(z_1 - z_i)^2} + \frac{1}{z_1 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$$

特異ベクトル $|\chi_{2,1}\rangle = (L_{-1}^2 - tL_{-2})|h\rangle$ との対応は,

$$L_{-1}^2 \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2, \quad L_{-2} \leftrightarrow u(z_1)$$

です. ここに生き残っている変数は勝手な weight をもっていて積分されないで残っている変数です. 裏には weight が 1 で積分されて, ここにみえていない変数がいくらあってもかまいません. そういうものがこの方程式の解を与えています.

*4 $h(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha(\alpha_1 - \frac{1}{2\alpha_1})$ も α_1 を使って表示しているが, これは使いにくい. 普通は $h(\beta) = 1$ となる β を 1 つとって, $h(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha(\frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2})$ と表す. このとき, $h(\alpha) = 1$ となるのは $\alpha = \beta, -\frac{2}{\beta}$. 特異ベクトルに現れたパラメータ t は $t = \beta^2/2$.

*5 K. Aomoto, "Gauss-Manin connection of integral of difference product", J. Math. Soc. Japan 39 (2): (1987) 191-208.

これは z_1 の 2 階の微分方程式のように書いていますが、 $u(z_1)$ の中に微分作用素が入っていますので多変数の偏微分方程式系で、先程の GKZ みたいにノーマライズしないで動ける変数は全部動けるようにして、微分方程式を書きやすくして書いている状況に対応します。これを 4 点関数の場合に \mathfrak{sl}_2 -不変性をつかって 1 変数の常微分方程式の形に書いてやると、それが普通 BPZ の方程式や Dotsenko-Fateev の微分方程式とか呼んでいるものになっていくわけです。この場合には 2 階なので Gauss に落ちます。3 階の場合が Dotsenko-Fateev になる場合です。

聴講者. $h_1 = h_{2,1}$ というのは、どのパラメータの特殊化?

$\langle h_n | \Phi_{h_{n-1}}(z_{n-1}) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle$ の h_1 , あるいは $\langle 0 | \Phi_{h_n}(z_n) \cdots \Phi_{h_1}(z_1) | 0 \rangle$ の h_1 です。一番簡単な例として、 $h_1 = 0$ で $|h_1\rangle = |0\rangle$ がレベル 1 の特異ベクトル $|\chi_{1,1}\rangle = L_1 |h_1\rangle$ を持つ場合を考えます。 $|\chi_{1,1}\rangle$ が特異ベクトルであることから

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h_n | \Phi_{h_{n-1}}(z_{n-1}) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) | \chi_{1,1} \rangle = \langle h_n | \Phi_{h_{n-1}}(z_{n-1}) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) L_1 | h_1 \rangle \\ &= - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial}{\partial z_i} \langle h_n | \Phi_{h_{n-1}}(z_{n-1}) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) | h_1 \rangle \end{aligned}$$

が成り立ちます。これはより対称的に $\psi = \langle 0 | \Phi_{h_n}(z_n) \cdots \Phi_{h_1}(z_1) | 0 \rangle$ で書けば、 $\frac{\partial}{\partial z_1} \psi = 0$ と $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \psi = 0$ を合わせたものと見なせます ($\frac{\partial}{\partial z_n}$ は $z_n = \infty$ では見えない)。前者 $\frac{\partial}{\partial z_1} \psi = 0$ が $\Phi_{h_1}(z_1)$ を $h_1 = 0$ に特殊した結果、後者は並進不変性 (\mathfrak{sl}_2 不変性の一部) です。 $h_1 = h_{2,1}$ の場合には、 $\langle h_n | \Phi_{h_{n-1}}(z_{n-1}) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) (L_{-1}^2 - tL_{-2}) | h_{2,1} \rangle = 0$ から微分方程式が出てくるわけですが、 L_{-1} を左に寄せて微分作用素に書き換えるのは不経済なので、 $|h_{2,1}\rangle$ が $z_1 = 0$ にあるという条件を緩めて、 L_{-1} を $\Phi_{h_{2,1}}(z_1)$ の z_1 微分として処理して、 L_{-2} だけを左に寄せて書いたのが先ほどの微分方程式 $\{\partial_{z_1}^2 - tu(z_1)\}\psi = 0$ です。

聴講者. $h = h_{2,1}$ の場合が 2 階の微分方程式とのことですが...、そこに出てきた $\psi(z_1, \dots, z_n)$ は n 点関数ですか?

n 点でかまいません (質問の解答の歯切れが悪いのは、表示によっては $(n-2)$ 点のようにも書けるから)。

聴講者. どういう風に書いた n 点関数ですか?

たとえば、これです

$$\psi(z_1, \dots, z_n) = \langle 0 | \Phi_{h_n}(z_n) \cdots \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) | 0 \rangle, \quad h_1 = h_{2,1}.$$

$h_{2,1}$ がどこにあるかで関数は変わりますが、満たす微分方程式は同じです。はじめに説明した $\langle h_n | \Phi_{h_2}(z_2) \Phi_{h_1}(z_1) | h_1 \rangle$ で $h_1 = h_{2,1}$ の場合は一番右端に持ってきて、 $z_1 = 0$ で考えています。

聴講者. つまりそれに出てくる h_1, \dots, h_n のどれかが $h_{2,1}$ だったら、その (2 階の) 微分方程式が成り立つんだけど、一番目の変数にあるとしたらそれになるというわけ?

はい。実は、どこにあっても満たす微分方程式は本質的に同じです。 h というパラメータが 1 つでもこの特殊値になっていればそれに対応する変数の微分について方程式が成り立ちます。それは差積の計算でも同じです。

$h = h_{3,1} = 2t - 1$ の場合には 3 階の微分方程式が成り立っているんですけど、この 3 階の場合が Dotsenko-Fateev になります。この場合の解も同様に積分で得られます。微分方程式も、特異ベクトルの係数

$((L_{-1}^3 + c_1 L_{-2} L_{-1} + c_2 L_{-3}) |h_{3,1}\rangle)$ の $c_1 = -4t, c_2 = 2t(2t - 1)$ がそのまま出てきて

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^3 + c_1 u(z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + c_2 u'(z_1) \right\} \psi(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad \left(' = \frac{\partial}{\partial z_1} \right).$$

が成り立ちます. 特異ベクトルの式は翻訳すればそのまま微分方程式を表しているというわけです.

一般に特異ベクトルの表式があれば, それをしかるべきルール^{*6}で読みかえてやると微分方程式が成り立ちます. 例えばすべての $\Phi_{h_i}(z_i)$ の weight が $h_i = h_{2,1}$ で, どの変数に関してもこの方程式が成り立つという状況を考えることも可能です. しかも「そういう状況で対称な解を求めてください」ということをやってやると, Jack 多項式の話になるということになります. 同様にレベル n にある特異ベクトル

$$|\chi_{r,s}\rangle = (L_{-1}^n + c_1 L_{-2} L_{-1}^{n-2} + \dots) |h_{r,s}\rangle$$

からは, 微分の leading term は L_{-1}^n から来る $\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^n$ になるので, n 階の微分方程式が出てきます. それに対応する解も同じようにしてつくれますがここではやりません.

聴講者. 先程の $\psi(z_1, \dots, z_n)$ を積分で書くと, さっきの意味の記号 Δ で, z_1, \dots, z_n の他に u_1, \dots, u_n を入れて, それで積分したものが...

それが解です. 積分変数はさっき書いた意味の, $h(\alpha_i)$ が 1 になっているようなものだったら何個入れてもかまいません. 普通 Jack 多項式とかをやるときには, 2 種類あるうちの一方だけ入れますが両方入れてもかまいません.

聴講者. このロジックは「差積のベキを部分積分したと思って得られる関係式が, ちょうど特異ベクトルを左側に移して作った微分方程式と同じものになります」ということですか?

そういうことです. つまり「今書いた方程式で消されるような差積の積分の理論があります」ということを言っていたわけです. それをどうやって証明するかというと, 一番素朴な方法は差積の式を書いておいて, この微分作用素をあてるんです. そうするとズラズラと式がでてくるんですけど, 積分したい変数のところはさっきと同じメカニズムで全微分にまとまります. そこは積分して落としてよろしいと, そういうからくりです. なのでそうやって証明するのであれば Virasoro 代数の表現論は, 方程式をつくるころまでは使いますけど, そこから先のスクリーニング作用素の理論とかは無くてもできます^{*7}.

5 AGT 対応との関係

AGT 対応の話にいきたいわけですが, これまでにわかったことは「Virasoro 代数の表現からできる 4 点関数, 一般に n 点関数は表現の weight に相当するパラメータが特殊なところでは微分方程式を満たす」ということです. 昨日言ったことは「相関関数を調べる手段はそれしかないんだから微分方程式の成り立たないところを考えても無駄だ」というふうに多くの方は思っていたということです. ですが「そうでないところ, generic なところもきれいな構造があるんだよ」ということが 10 年前にわかったわけです. そこで以下では「微分方程式の観点から AGT 対応はどのようにみえてくるか」という話をしたいと思います.

^{*6} $L_{-1} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z_1}, L_{-n} \rightarrow \frac{1}{(n-2)!} u^{(n-2)}(z_1), u(z_1) = \sum_{i=2}^n \left(\frac{h_i}{(z_1 - z_i)^2} + \frac{1}{z_1 - z_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$.

^{*7} 実際に微分作用素を当てなくても全微分のおつりの項の形が分かるのがスクリーニング作用素の効用.

今お話ししたような共形場理論の立場からの話やゲージ理論の背景の話而易しくまとめた文献に、瀧雅人, Alday-Gaiotto-Tachikawa 予想とその発展 (pdf) という日本語の良い解説が web に転がってますので、これがおすすめです。これは AGT 予想が出て 1 年後くらいに書かれたものなんですけど、非常によくまとまっています。

AGT 対応の話に入りたいんですけど、AGT 対応というのが何だったかという、その後いろいろな拡張があるんですけど一番オリジナルのやつは

$$\text{Vir の 4 点関数 } \langle h_4 | \Phi_{h_3}(1) \Phi_{h_2}(z) | h_1 \rangle,$$

変数は 1 個あればいいんですけど、これと

$$\text{ネクラソフの分配関数 } Z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n Z_n,$$

が、もともとそれぞれ 2 次元共形場理論と (4 次元) ゲージ理論からでてきた関数で、直接は関係ないんですけど、AGT がみつけたのはこの人たちが本質的に同じ人ですということをいったわけです。

Virasoro 側にはパラメータとして 4 個の共形次元のパラメータ h_1, h_2, h_3, h_4 とそれ以外にもう 1 つ、中間状態の weight を指定するパラメータ h_{int} があって、それ以外に c があって 6 個のパラメータがあります。一方、ネクラソフ側はパラメータは物質場の質量に相当する 4 個のパラメータ m_1, m_2, m_3, m_4 と、ゲージ場の真空期待値と呼んでいるパラメータ a_1, a_2 、これは本質的に差だけが重要なので 1 個分です。これと発散をおさえるために、正則化のために入れるテクニカルなパラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ があって、これは比だけが重要なので 1 個分、これで全部で 6 個分のパラメータですけど、「この 6 個ずつのパラメータにしかるべく対応をつけるとこれら 2 つの関数が一致する」というのが AGT 対応の主張です。それは 10 年くらい前に Alday-Gaiotto-Tachikawa という人たちによって発見されました。

パラメータの対応関係を書いておきますと、

$$\begin{aligned} h_i &= \frac{\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right)^2 - \mu_i}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (i = 1, 4, \text{int}) \\ h_i &= \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \mu_i)\mu_i}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (i = 2, 3) \\ m_2 &= \mu_2 \pm \mu_1, \quad m_4 = \mu_3 \pm \mu_4, \quad a = a_1 - a_2 = \mu_{\text{int}} \\ c &= 1 + 6 \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right)^2 \end{aligned}$$

です。 h_1, h_2, h_3, h_4 は対等なだけで、この構成だと外側の 2 人 h_1, h_4 と内側の 2 人 h_2, h_3 は性質が違います。そのことが反映して h の対応する式もちょっと変わっています。AGT 対応や AGT 予想や AGT 関係式といういろいろな呼ばれ方をしていますが、AGT 関係式と言っているのはこの翻訳ルールです。この翻訳ルールで読み直してやると、見た目も由来も全然違う式が一緒になるという発見です。どうしてそういう発見に至ったかということも、瀧さんの pdf に解説が書いてありますので興味がある方はご覧になるといいかと思います。

ただし、そのまんまほんとに一致するわけではなくて、こういうふうに AGT 対応で読みかえてやるとちょっとおつりがついて

$$\langle h_4 | \Phi_3(1) \Phi_2(z) | h_1 \rangle = Z^{\text{Nek}} (1 - z)^{-\frac{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}$$

となります。これは Euler 関係式 (2 つの超幾何関数がベキ積を 1 個つけておくと等しくなるみたいなもの) と微分方程式の立場から思ってもらえばいいと思います。こういうおまじないをつけてやると 2 つの級数が等しくなります。

例えば共形場理論の立場からだ、この量はがんばれば、全然因数分解もしない悲惨な有理式ですけど、いくらでもがんばって計算できます。その人に factor をかけて補正してやっとうまく分解してやると、それぞれがスパスパと因数分解して昨日書いたきれいな式になるという結果なわけです。この(おつりにつけた)factorのことを、これは $U(1)$ の KZ の解なので $U(1)$ 因子と呼びます。ゲージ理論的にいうと、4点関数は $SU(2)$ で計算してるんですけど、ネクラソフ関数は $U(2)$ で計算しているので $U(1)$ 分が余分にあります。その部分を補正しているのが $U(1)$ 因子であると解釈されています。

当時は AGT 予想といわれていましたけど、今では物理の意味では定理、数学的にもまっとうな数学の定理になっていると思います。いろんなレベルの証明があるんですが、昨日今日と説明した Virasoro 代数の表現論の計算みたいなことの延長で直接証明してしまう方法が1つ知られています。それが AGT 予想が出て3年後に出た Alba-Fateev-Litvinov-Tarnopolsky (arXiv:1012.1312) による証明です。これは Virasoro 代数の表現論だけからごりごり計算して証明するという一番ダイレクトな証明で、ここでは話の筋だけ紹介しておきます。

ものすごく symbolic に書いてしまいますけど、計算したいのは4点関数で、昨日計算したように

$$\langle h_4 | \Phi | h_1 \rangle = \sum_{I, J} \langle h_4 | \Phi | I \rangle (\langle I | J \rangle)^{-1} \langle J | \Phi | h_1 \rangle \quad (6)$$

と書けます。ここで $|I\rangle, \langle J|$ はそれぞれ V_h, V_h^* の基底です。3点関数を求めておいて逆行列をかけて、もう1回 operator をあてて期待値の計算としてやって計算できるわけです。3点関数は原理的に計算できて、逆行列は Kac 行列の逆行列です。彼らのアイデアは何かということ、この人(上式の行列成分)たちが計算しやすいようないい基底を求めましょうということです。一番いいのは直交系になっていると逆行列の計算が簡単です。残念ながら Virasoro 代数の表現空間の中にそんな都合のいい基底はないんですけど、彼らがやったのは $\text{Vir} \otimes \mathcal{A}$ の上でいい直交基底をつかってやって実行できるということです。ここで \mathcal{A} は Heisenberg 代数

$$\mathcal{A} := \langle a_n, a_{-n} (n \in \mathbb{Z}_{>0}) | [a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0} \rangle$$

です。ここは Virasoro 代数の表現ではないのでこう書くのはちょっとまずいんですけど、

$$(6) = \sum_I \langle h_4 | \Phi | I \rangle \frac{1}{W_I} \langle I | \Phi | h_1 \rangle$$

というふうになるわけですよ。 $|I\rangle, \langle J|$ は表現空間の基底なので、もし Virasoro 代数だけでやると(基底をラベルするのは) partition 1個です。ネクラソフ関数が入っているのは「2個の partition で展開しろ」と言っているんですけど、それをやってくれるのは \mathcal{A} です。 \mathcal{A} の表現も Vir の表現も partition でつくれますのでこの(右辺の) I は2つの partition の組です。

彼ら(AFLT)がやったのは、実際に表現空間の直交基底でペアリングがきれいに factor されるものをつかって、その因子がちょうどネクラソフの因子になっているというものを手をつくっちゃう。実際には $U(1)$ 因子の補正があるわけですが、ともかくそういう基底を induction で丁寧につくっていくわけです。 \mathcal{A} を入れている根拠は2つの partition でラベル付けられる以外にもう1つあって、 $U(1)$ 因子の説明にもなっているわけです。実際にはテンソル積の空間で Vir の operator 以外に \mathcal{A} の operator で、普通の exponential として書かれる vertex operator ですけど、そういうものを入れておきます。そうするとその人たちの相関関数は $U(1)$ の相関関数なので差積です。今の場合はちょうど $U(1)$ 因子を出してくれる、 \mathcal{A} の4点関数として出てきます。もともと $U(1)$ の因子を引っ張り出すための何か $U(1)$ をうまくいれてやらないといけないというのはみんな知っていて「そういうのをうまくいれてやれば計算ができるんじゃないか」と言って、ロシアの人たちががんばってつくったのがこの話です。これはモジュライ空間の難しい話を使わないで、コツコツと計算すればでてる証明です。

聴講者. Virasoro の \mathfrak{sl}_2 が入っているところを, 更に $U(1)$ を付け加えて, 定義し直したと思えばいいわけですか?

そうです. Virasoro 代数の立場からいうと Virasoro 代数というのは KdV operator の量子化によってでてくるもので, そう思うとこれは 2 階の微分作用素を \mathfrak{sl}_2 でゲージ固定して 1 階の分はでてこないように無理やりつくっているんです. そうしちゃっているんで自由がきかなくて AGT みたいな構造がみえないのもう 1 回復活してやる, $U(1)$ の部分と Virasoro の部分をうまく混ぜ合わせてやるときれいに書けますよと, そういうふうに理解してもいいんだと思います. 無理やり \mathfrak{sl}_2 (trace part = 0) としないで trace part にも活躍してもらおうというわけです. とにかくそういう証明がありますので, ここまでの話を辛抱して聞いていただいた方にはこれが一番おすすめの証明です. 私がちゃんとフォローした AGT の証明はこれしか知りません (ただし後の坂井さんのコメントによれば一部に不完全なところがあるらしいので, 実は“証明”)*8.

こういうことをやると共形場理論とネクラソフ関数に似たような構造がでてくるといことがわかるんですけど, 「渋川さんが私に教えてくれた公式がネクラソフ関数 Z^{Nek} から出てくるものと同じである」ということが最初に紹介した渋川さんの質問の答えだったんですけども, このことの説明を最後にやって終わりにしたいと思います. そのために大事になるアイデアが 2 つあって, 1 つは truncation と呼ばれている現象, もう 1 つは q 化して考えるというものです.

まず truncation のほうから説明しますね. Virasoro 側では特別なパラメータのときには微分方程式がでてくるとい話をさっきまで一生懸命やってきました. 一方, ネクラソフ側では対応する事情はどうなっているかという, Young 図形の truncation が起こるといことがわかります. それはどういう事情かという, h を特殊化するというのはゲージ理論側でいうと質量のパラメータ m を特殊化することに対応します. 質量に相当するパラメータはネクラソフの級数の因子の factor にできました. そこででてきたパラメータは

$$z_f(a, m, \lambda) = \prod_{(i,j) \in \lambda} (a + m + \varepsilon_1(i-1) + \varepsilon_2(j-1))$$

というものでした. このときにもし $a + m = -(r-1)\varepsilon_1 - (s-1)\varepsilon_2$ になっていると, ある box のところで $(a + m + \varepsilon_1(i-1) + \varepsilon_2(j-1))$ が消えてしまいます. なのでこれから, $a + m = -(r-1)\varepsilon_1 - (s-1)\varepsilon_2$ なら λ は (r, s) を box に含めないということが起こります. 例を述べましょう.

$(r, s) = (1, 1)$ のとき

×			...
			...

↪ $\lambda = \emptyset$ しかありません.

$(r, s) = (3, 1)$ のとき

				...
				...
×				

↪ $\lambda =$

 横 2 列しかありません

一般に $(r, s) = (2, 2)$ のように中のほうにある場合は hook の Young 図形だけに制限されるということになります.

実は渋川さんが書いている級数はちょうどこの $(1, 1)$ と $(3, 1)$ の場合になっていて, パラメータを 2 つ特殊化します. 1 つのパラメータを $(r, s) = (1, 1)$ になるようにとって, 2 つある Young 図形のうちの 1 つを \emptyset に

*8 後述の坂井コメントのやり取りの脚注でも繰り返し述べるが, この間違いは Albion-Rains-Warnaar arXiv:2001.05637 により解決されたと思われる.

固定しちゃいます. もう1つの Young 図形は $(r, s) = (3, 1)$ で truncate した Young 図形を走ります. そうすると上の例で述べたように縦2段の Young 図形に関する足し算という形になります. 渋川さんの話, つまり

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \leftarrow i+j \text{ 個}$$

$$\leftarrow i \text{ 個}$$

という状況だと, 対応する級数は何か i, j に依存する $A_{i,j}$ があって

$$Z^{\text{Nek}} = \sum_{i,j \geq 0} A_{i,j} z^{2i+j}$$

という級数になるわけですね. なので最初に書いた級数のネクラソフ側での対応物は AGT の対応関係で翻訳して読みかえてやるとたしかにこの状況になっていて, 最初は2つの Young 図形に対する無限和で巨大な和だったんですけど, その中の一部分が取り出されてかわいらしい級数になる.

さらに $(3, 1)$ の代わりに $(2, 1)$ の場合は Young 図形は横1列だけです. ということは1列の普通の級数になってそれは Gauss の超幾何になる場合です. そうなれば予想されるように「Dotsenko-Fateev で3重積分の場合だったら深さが3個になって…」というようにズラズラと対応がつくわけです. 例えば, 途中が制限されて hook みたいになる場合は $(r, s) = (2, 2)$ のときの微分方程式で2種類のスクリーニングチャージ (スクリーニング作用素) を入れたような解に相当するネクラソフ級数が hook のものからでてくるということになります. なのでパラメータの対応と truncation の構造をみると, 共形場理論側で微分方程式をみたく場合というのがゲージ理論側では truncate する場合というのにちょうど対応しているということがわかります. 一般の場合には truncate しないように, 共形場理論側でいうとスクリーニング作用素を山ほど入れて, -無限階の微分方程式が成り立つというのは何も成り立たないのと同じですから-, それで一般の場合がおぼろげながらも見えてくるという仕組みになっています.

さらにちゃんという次のようになります.

$$a_2 = -a_1$$

$$m_4 = -a_1 \rightarrow m_4 + a_1 = 0 \rightarrow \lambda^{(1)} = \emptyset$$

$$m_3 = a_1 - 2\varepsilon_1 \rightarrow a_2 + m_3 = 2\varepsilon_1 \rightarrow \lambda^{(2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{m_1 - a_1}{\varepsilon_2}, \frac{m_2 - a_1}{\varepsilon_2}, \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2a_1}{\varepsilon_2}, -2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)$$

というふうにとってやるとぴったり一致する, つまり DF_3 の級数 $= Z^{\text{Nek}}$ がわかります.

これを直接証明はしてませんが, generic なときに一致するという証明がありますので, 特殊化したときに同じ級数の構造になっていて, z^{10} くらいまで計算機で確かめましたけどぴったり合っていますので, 物理的には立派な証明, 数学的にもいろんな状況証拠を照らし合わせればちゃんとした証明になっていると思います. そういうことをいろいろ使わないで「このことだけで証明できませんか」というのもあると思いますが, そういう手段が1つあります. それは q 化するというもので, これだと直接証明ができます.

アイデアだけ言っておきます. まず q 化すると, 考える級数の見た目はほとんど同じです. factorial のところを q -factorial $(a)_i = (1-a)(1-qa) \cdots (1-q^{i-1}a) = \frac{(a)_\infty}{(q^i a)_\infty}$ にするだけです. ただし, おまじないが1つ必要で (d^{2j} の因子),

$$\sum_{i,j \geq 0} \frac{(a)_{i+j} \left(\frac{a}{d}\right)_j (b)_{i+j} \left(\frac{b}{d}\right)_j (dq)_i (d^2)_i}{(c)_{i+j} \left(\frac{c}{d}\right)_j (dq)_{i+j} (q)_j (q)_i (d)_i} z^{2i+j} d^{2j}, \quad (7)$$

としてやるとこれは q -DF₂ に相当する方程式をみたくします。この対応する方程式を具体的に明示的に最初に書いたのは Mimachi ('94) だったと思います。 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の q -KZ 方程式で 2 点関数 (見方によれば 4 点関数) を考えますが、そのスピンの 2 つ下がったところの方程式です。スピンの 1 つ下がったところは q 超幾何です。スピンの 2 つ下がったところは 3×3 の行列ができます。それを単独高階で書いた式が q -DF₂ です。

q 化した理由は、まずこの人 (7) はそのまま積分に読めます。つまりこの和はそのまま Jackson 積分なので積分に読みかえることができます。ちょっと 4, 5 行計算すると、

$$(7) = \int \prod_{i=1}^2 \frac{(ct_i, dqt_i)_\infty}{(at_i, bt_i)_\infty} \prod_{i \neq j} \frac{\left(\frac{t_i}{t_j}\right)_\infty}{\left(\frac{dt_i}{t_j}\right)_\infty} \prod_{i=1}^2 t_i^{\alpha_0} \frac{dqt_i}{t_i}, \quad (q^{\alpha_0} = zd) \quad (8)$$

という Jackson 積分の形に書くことができます。級数の形を積分の形に翻訳するとパラメータの関係がいろいろずれてくるんですけど、この Jackson 積分の場合にはパラメータが、分子と分母はひっくりかえりますが、そのことを除いてほぼそのままできて、しかも級数そのものよりも対称性がみやすい形でできてきます。これは Mimachi ('94) で計算されている Jackson 積分と全く同じで、ただしちょっと違うのは三町さんが計算しているのは c などのパラメータが q -shift するときの方程式を計算していますが、今計算しているのは α_0 がずれるときです。ですが、なんかの duality があって同じ方程式になっているんだろうと思います。なのでこの級数 (7) はこういう積分 (8) です。一方でこの積分を留数で計算してやるとそのままネクラソフ関数になります、というふうに証明することができます。これは演習問題ということにします。以上で終わりたいと思います。

聴講者. q を経由して AGT そのものを証明することはできるんですか?

一般の場合もこういうふうな積分の式を書いておいて、それを留数計算するとネクラソフの式になる、一方でちょっと別の変換をして計算してやると conformal block の式になるというふうにして証明できます。そういうことをやった Aganagic et al. (arXiv:1309.1687) という論文があります。 q の場合はほとんどなんの計算もいらないうです。使うのはテータ関数や擬定数に関する知識を少し使う程度で、あとはこの因子を開かないでこれとこれがキャンセルするといった形式的な計算だけでできてしまいます。

聴講者. それは q でやっているんですか?

q でやっています。 q でないとそういうことができないんです*9。

聴講者. 先ほどの「Alba-Fateev の論文が違うんじゃないか」というのを名古屋の柳田さんに教わったんですけど、当時名古屋にいた大久保 (勇輔) くんが修士論文で「計算すると違うんじゃないか」というのを書いていて、「Jack 多項式で展開すると合わなくて、ちょっとズラすと数値的には合うんだけど今度は証明ができない」ということを言っていて気になりました。

もしかしたら穴があるかもしれないですね。いっていることは正しいと思うんだけど、証明は正しくできていない可能性はあります。そういう意味では Alba-Fateev の証明*10やこの q の場合の arXiv:1309.1687 などの証明は物理的な“証明”です。

聴講者. Dotsenko-Fateev っていう時には、4 点関数のどういう特異ベクトルに対するものを言うんですか?

*9 厳密な意味で $q \rightarrow 1$ の極限が取れるのかは怪しい。

*10 この Alba-Fateev-Litvinov-Tarnopolsky の証明の間違いは 2020 年になって Albion-Rains-Warnaar arXiv:2001.05637 により解決されたと思われる。

なんでもいいんですか？

ももとの渋川さんのものは (3,1) に相当するものです。

聴講者. 普通, Dotsenko-Fateev っていう時には, (3,1) のものを言う？

そうですね. Gauss のその次の奴で 3 階になる場合です. この方程式を Dotsenko-Fateev の方程式と呼んでいますが, 歴史的にはあまり正しくなくて, その方程式は BPZ がすでに書いているんです. それの積分表示を与えてモノドロミーの解析をしたというのが Dotsenko-Fateev の仕事です.

聴講者. 変数を増やすには $(n, 1)$ でとるんですか？

そうです. 積分変数を増やしていくのは $(n, 1)$ の n をどんどん増やしていく場合です.

聴講者. パラメータはそのままでもいいんですか？

ほぼ同じだと思います.

聴講者. AGT 対応というときには, 今は Virasoro の 4 点関数とネクラソフの場合だけど, 両方の symmetric な variation はあるんですか？

あります. 今はゲージ理論側では $U(2)$ で共形場理論側では Virasoro 代数だったんですけど, ゲージ理論側のランクを上げて $U(n)$ にすると共形場理論側では \mathcal{W}_n が対応するというのを AGT-W 対応と呼んでいます. それを提唱したのは Wyllard という人で, イニシャルが一緒になってよかったんですけど... つまり, \mathcal{W}_n 代数がでてくるというのを W から始まる人がいいだしたということです.

聴講者. ももとの AGT は Virasoro の場合ですか？

元々は $SU(2)$ で, Virasoro の場合です.

聴講者. AGT-W の場合で truncation したものを考えると, どういう超幾何が出てくるんですか？

ここ (a, b, c) あたりの因子) を増やした奴かな？

聴講者. 一般超幾何みたいな奴ですか？

うん. こっち (a, b, c) あたりの因子) を増やして, さらに t_i/t_j に関する因子も色々な種類の奴が出てくる. たとえば KZ なんかがあったら, $SU(N)$ なら, weight が $N-1$ 種類あって, ルートも同じだけあるんですけど, それに相当する数だけの種類のスクリーニング作用素が出てきます. そういうものを自由にに入れていいので一般超幾何 ${}_{n+1}F_n$ や ${}_{n+1}\varphi_n$ が出てきます. ただしそれは簡単な場合で, 一般にはそれだけでは収まらないわけです.

聴講者. さっきの AGT の Virasoro の場合でいいんですけど, 今やった理論は特異ベクトルに対応して微分方程式のある場合は積分を経由してこういうことができるんだけど, 微分方程式をみたさない generic なときでも AGT 対応というのがあるわけですよね. そのときは微分方程式にあたるものはみえないんですか？

みえないです*11.

聴講者。「式としても同じでしょ」というしかないんですか?

はい。微分方程式の階数があがっていくと必要になってくる項の個数が増えてくるんですけど、生き残っている項そのものは簡単な有理関数で、制限する前とする後の対応関係はそのままみてとれるのでどんどん大きくなっていった極限の姿は変な極限をとる必要はなくて、よく知っているものが増えていだけなんです。そういう意味で極限の姿は容易に想像がついて、それを書いているのがネクラソフの関数ということになっているので、形式的には積分変数の個数が無限になった極限で、もとの AGT が復活するというふうに思うわけですけど、それには難しい極限をとる必要はなくて、下の方で知っている、よくわかっているものがどんどん増えていくというからくりです。

聴講者。ネクラソフ側で2つの partitions λ と μ を m 行と n 行で切ったとしますよね。そうすると有限な積分になるわけですけど、それも Virasoro 側では何らかの特異ベクトルに対応すると思ってもいいわけですか?

たとえば Young 図形に二重の制限条件をかけて長方形に制限した場合を考えると、 $c = 1$ にすると、これに対応するのは terminate する超幾何とか、その行列式とかで書けていて、Painlevé の我々のよく知っている特殊解に落ちてくるとか、そういう構造になっています。 $c \neq 1$ のときは、直交多項式の理論からは外れますので、行列式にはならないけれども、こういう長方形が活躍するという状況になっています*12。なので色々な特殊関数を、色々な制限によって拾いだせるような特殊関数の親玉になっているのがネクラソフ関数だというわけです。

聴講者。任意の (r, s) に対する微分方程式なんてのは書き下せたりしてるんですか?

Virasoro の特異ベクトルを書けば書けますよね。あるいは青本さんの理論によれば、書けることになってる。

聴講者。存在することはわかる?

青本さんの論文にはその微分方程式を計算するアルゴリズムも書いてあるので、計算機に乗せれば方程式は出てきます。

聴講者。その場合は積分表示もわかっている?

そうです。一番最後までわからなかったのが級数表示だったんですけど、それはネクラソフが与えていましたということです。

聴講者。さっき ((8) の下あたり) その α_0 の差分という話をされたと思うんですけど、それが方程式ということですか?

*11 非線形方程式ならある。

*12 これでは「特異ベクトルに対応するのか?」という質問の答えになっていないが、行数や列数を制限する条件は特異ベクトルの出現に対応するので、質問の答えは Yes.

(次の式を見せながら) これです.

$$\begin{aligned} & q(z-1)(z-q)(dz-q)\{-(a+b)dqz+(c+dq)\}y\left(\frac{z}{q}\right) \\ & +d^{-1}q(z-1)\{d^3qz^3(a+b)(a^2d+ab+b^2d)+A_1z+A_2z^2-(c+dq)(c^2+cd^2q+d^2q^2)\}y(z) \\ & +(abdz-c)\{-d^2q^2z^3(a+b)(a^2+abd+b^2)+B_1z+B_2z^2+(c+dq)(c^2+cq+d^2q^2)\}y(qz) \\ & +d(abdz-c)(abqz-c)(abdqz-c)\{(a+b)dz-(c+dq)\}y(q^2z)=0. \end{aligned}$$

ただし A_1, A_2, B_1, B_2 は z によらない定数.

聴講者. なるほど. 三町さんのヤツは c とかの差分ですよ.

はい. で, 実験してみるとですね三町さんが作った方程式 (b, c -shift の方程式) は 3 成分の連立系なんですけども, 1 番目の component のスカラー方程式を比べると, この表示になっています. それは元の方程式 (α_0 -shift の方程式) とパラメータがズレただけです. だから級数の方もパラメータをズラせば一致するだろうと...

聴講者. 自分 (伊藤雅彦), 両方書き下した式を持ってるのですけれども...

是非, 比べてみてください.

聴講者. 入れ替えると大体同じ式になるんですけど, 微妙にピッタリじゃなかったんです.

はい, 適当にゲージ変換する「おまじない」は必要だったと思います.

聴講者. そうです, そうです.

こっち (α_0 のこと) を動かす方程式は余りやってないよね.

聴講者. ああ, そうですね*13.

付録 A 超幾何と共形場再訪 -外伝- (by 渋川元樹)

参考までに, 「本伝」の山田先生のお話に出てきた渋川さんサイドの物語を「外伝」として少し述べておきます. 詳しくは“どっかの教科書” [VK] Chapter 3 他を参照. ただし中には“どっかの教科書”に書いてないこともあります. また察しの良い方ならばお気づきだと思いますが, この超幾何学校報告集に同じく収録されている金子穰一先生のレクチャーノート [金子] とも色々に関係があり, 参考になると思います.

以下, 特に断らない限り変数に出てくる $z, w \in \mathbb{C}$ は $|z|, |w| < 1$ と仮定します. 最初に一変数の登場人物を振り返っておきます. まず当たり前ですが基本的なベキ函数 (monomial)

$$\Phi_n(z) := z^n.$$

また $n!$ ですが, これは z^n を n 階微分して得られる Taylor 展開の係数の正規化定数とみなせ, 下降ベキ

$$P_n^{\text{ip}}(z) := \begin{cases} z(z-1)\cdots(z-n+1) & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

*13 その後, 伊藤さんをお願いして, そのあたりの結果を論文にまとめてもらいました. 伊藤さんありがとうございました. 興味のある方はそちら [Ito arXiv:1910.08393] も是非参照してください.

の特殊値

$$P_n^{\text{ip}}(n) := n(n-1)\cdots(n-n+1) = n!$$

に他なりません. そこでこの $n!$ で正規化した z^n を

$$\Psi_n(z) := \frac{z^n}{n!}$$

としておきます. それから次の 2 種類の二項級数

$$\begin{aligned} {}_1F_0\left(\begin{matrix} \alpha \\ \end{matrix}; z\right) &:= \sum_{n \geq 0} (\alpha)_n \Psi_n(z), \\ {}_1\mathcal{F}_0\left(\begin{matrix} \alpha \\ \end{matrix}; z; w\right) &:= \sum_{n \geq 0} (\alpha)_n \Psi_n(z) \Phi_n(w) = \sum_{n \geq 0} (\alpha)_n \Phi_n(z) \Psi_n(w) \end{aligned}$$

を考えます. もちろん今の場合は二項定理

$${}_1F_0\left(\begin{matrix} \alpha \\ \end{matrix}; z\right) = (1-z)^{-\alpha} \quad (9)$$

及び

$${}_1\mathcal{F}_0\left(\begin{matrix} \alpha \\ \end{matrix}; z; w\right) = {}_1F_0\left(\begin{matrix} \alpha \\ \end{matrix}; zw\right) \quad (10)$$

が成り立つことから

$${}_1\mathcal{F}_0\left(\begin{matrix} \alpha \\ \end{matrix}; z; w\right) = (1-zw)^{-\alpha}$$

となります. なので ${}_1\mathcal{F}_0$ と ${}_1F_0$ を分けて導入する必要はありませんが, 多変数では (9) は成り立ちますが, (10) は一般には成立しないので, 一変数の段階で既にこれらに別々の記号を与えておきます.

この記号を用いると Gauss の超幾何級数は

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; z\right) := \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \Psi_n(z),$$

その積分表示

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; z\right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} {}_1\mathcal{F}_0\left(\begin{matrix} \beta \\ \end{matrix}; x; t\right) dt$$

となることに注意しておきましょう.

これを多変数化します. r を正の整数, α, d を複素数として

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(r)} &:= \mathcal{P} = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0\}, \\ \delta^{(r)} &:= \delta = (r-1, r-2, \dots, 2, 1, 0) \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

とします. また分割 μ, λ についての支配的順序 (dominant order) を

$$\begin{aligned} \mu \geq \lambda &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 \geq \lambda_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2 \\ \vdots \\ \mu_1 + \dots + \mu_{n-1} \geq \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \\ |\mu| := \mu_1 + \dots + \mu_n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n =: |\lambda| \end{cases}, \\ \mu > \lambda &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu \geq \lambda \\ \mu \neq \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

で定め、更に分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し、単項型対称多項式 $m_\lambda^{(r)}(\mathbf{z})$ を

$$m_\lambda^{(r)}(\mathbf{z}) := \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_{r,\lambda}} z_1^{\nu_1} \cdots z_r^{\nu_r},$$

$$\mathfrak{S}_{r,\lambda} := \{\sigma \cdot \lambda := (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_{\sigma^{-1}(r)}) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_r\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^{(r)}$$

により定義します。

任意の分割 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathcal{P}$ と複素数の r 組 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ について、ベキ函数の多変数類似にあたる **Jack 多項式 (Jack polynomials)** $P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})$ を以下の 2 条件を満たす $|\mathbf{m}|$ 次斉次多項式として定義します。

$$(1) \left(\sum_{j=1}^r z_j^2 \partial_{z_j}^2 + d \sum_{1 \leq j \neq l \leq r} \frac{z_j^2}{z_j - z_l} \partial_{z_j} \right) P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) \sum_{j=1}^r m_j (m_j - 1 - d(r - j)),$$

$$(2) P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = m_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) + \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{m}} c_{\mathbf{m}\mathbf{k}} m_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}).$$

また下降ベキの多変数化にあたる **補間 Jack 多項式 (interpolation Jack polynomials)** $P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})$ を次の 2 条件で定義します。

$$(1)^{\text{ip}} P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = 0, \quad \text{unless } \mathbf{k} \subset \mathbf{m} \in \mathcal{P}$$

$$(2)^{\text{ip}} P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) + (\text{lower terms}).$$

いずれも上記の条件で存在し、一意に定義されることが知られていますが、便宜上次のように正規化したものを考えます。

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{1}; \frac{d}{2})},$$

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2})} = \frac{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{1}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2})} \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}).$$

これが一変数で導入した Φ, Ψ の多変数類似にあたるものです。更にここで用いた正規化定数は明示的に書けません。実際 [M] (10.20), [Ko] (4.8) より

$$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right) = \prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \frac{j - 1 + \frac{d}{2}(r - i + 1)}{m_i - j + \frac{d}{2}(m'_j - i + 1)}$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\left(\frac{d}{2}(j - i + 1)\right)_{m_i - m_j}}{\left(\frac{d}{2}(j - i)\right)_{m_i - m_j}}. \quad (11)$$

ただし、 m'_j は分割 \mathbf{m} の転置の成分です。また [Ko] の (7.4), (7.5) より

$$P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = \prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \left(m_i - j + 1 + \frac{d}{2}(m'_j - i) \right)$$

$$= \prod_{j=1}^r \left(\frac{d}{2}(r - j) + 1 \right) \prod_{m_j} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\left(\frac{d}{2}(j - i - 1) + 1\right)_{m_i - m_j}}{\left(\frac{d}{2}(j - i) + 1\right)_{m_i - m_j}}. \quad (12)$$

ちなみに Jack 多項式はその normalization またパラメータに応じて色々な notations があり、混乱することがあります。代表的なものを以下に表にしてまとめておきましょう。順に簡単に解説すると、「Faraut-Korányi」は $\mathbf{z} = \mathbf{1}$ で 1 に正規化した一番わかりやすいもので、とりあえず迷ったらこれを選択する (読み替える) のが無難です。「Stanley」は対称関数のノルムについての正規化をする流儀で、組合せ論や対称群の表現論 (Schur 多項式) における扱いと相性の良い流儀です。「Macdonald」は上で定義した original(?) の Jack 多項式で、Jack 多項式 P_λ を単項型対称多項式 $m_\lambda^{(r)}(\mathbf{z})$ で展開したときの支配的順序についての leading term が 1 になるように正規化する流儀です。量子可積分系、あるいは Jack 多項式の q, t 変形に当たる Macdonald 多項式 ([M] もしくは本報告集収録の野海先生のレクチャーノート [野海] も参照) もこの流儀で扱われることが多いので、現在ではこの流儀が一番標準的かもしれません。「Kaneko」はここで解説する多変数特殊関数の文脈でよく見かける流儀で、この界限ではよく出てきます。「Shibukawa?」は「Kaneko」の亜種で $|\mathbf{m}|!$ 倍の違いしかありませんが、正規化定数の由来が補間 Jack の正規化定数になっています。元々は Faraut-Korányi [FK] において

$$(\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) :=) d_{\mathbf{m}} \frac{1}{\binom{n}{r}_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$$

と書かれていたもので、対称錐上の調和解析における spherical Taylor 展開の正規化定数 (Fischer ノルム) に由来するものです。

	notation	special value at $\mathbf{z} = \mathbf{1}$
Faraut-Korányi	$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$	1 ([FK])
Stanley	$J_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{z})$	$\left(\frac{2}{d}\right)^{ \mathbf{m} } \prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \left(j - 1 + \frac{d}{2}(r - i + 1)\right)$ ([S] Thm. 5.4)
Macdonald	$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right)$	$\prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \frac{j - 1 + \frac{d}{2}(r - i + 1)}{m_i - j + \frac{d}{2}(m'_j - i + 1)}$ ([M] VI (10.20))
Kaneko	$C_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{z})$	$ \mathbf{m} ! \prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \frac{(j - 1 + \frac{d}{2}(r - i + 1))}{(m_i - j + \frac{d}{2}(m'_j - i + 1))(m_i - j + 1 + \frac{d}{2}(m'_j - i))}$ ([Ka] (18))
Shibukawa?	$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$	$\prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \frac{(j - 1 + \frac{d}{2}(r - i + 1))}{(m_i - j + \frac{d}{2}(m'_j - i + 1))(m_i - j + 1 + \frac{d}{2}(m'_j - i))}$

表 1 Jack 多項式の正規化と表記

この中で「Stanley」だけがやや仲間外れで

$$J_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{z}) = \left(\frac{2}{d}\right)^{|\mathbf{m}|} \prod_{(i,j) \in \mathbf{m}} \left(m_i - j + \frac{d}{2}(m'_j - i + 1)\right) P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) \quad ([M] \text{ VI (10.22)})$$

となっていますが、この「Stanley」以外をまとめて書くと

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = d_{\mathbf{m}} \frac{1}{\binom{n}{r}_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \frac{1}{P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right)} P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{|\mathbf{m}|!} C_{\mathbf{m}}^{\left(\frac{2}{d}\right)}(\mathbf{z})$$

となります。

これらはいずれも難しい函数ですが、以下のような比較的綺麗に書ける例も知られています。

例 4. $r = 2$ の場合 任意の分割 $\mathbf{m} = (m_1, m_2) \in \mathcal{P}$ と複素数の対 $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ について,

$$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = z_1^{m_1} z_2^{m_2} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m_1 + m_2, \frac{d}{2} \\ 1 - m_1 + m_2 - \frac{d}{2} \end{matrix}; \frac{z_2}{z_1}\right),$$

$$P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = (-1)^{m_1+m_2} (-z_1)_{m_2} (-z_2)_{m_1} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -m_1 + m_2, \frac{d}{2}, -m_1 + 1 - \frac{d}{2} + z_1 \\ 1 - m_1 + m_2 - \frac{d}{2}, -m_1 + 1 + z_2 \end{matrix}; 1\right).$$

更に

$$P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{1}; \frac{d}{2}\right) = \frac{(d)_{m_1-m_2}}{\left(\frac{d}{2}\right)_{m_1-m_2}}, \quad P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = \frac{\left(\frac{d}{2} + 1\right)_{m_1} m_2! (m_1 - m_2)!}{\left(\frac{d}{2} + 1\right)_{m_1-m_2}},$$

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)_{m_1-m_2}}{(d)_{m_1-m_2}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m_1 + m_2, \frac{d}{2} \\ 1 - m_1 + m_2 - \frac{d}{2} \end{matrix}; \frac{z_2}{z_1}\right),$$

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \frac{\left(\frac{d}{2} + 1\right)_{m_1-m_2}}{\left(\frac{d}{2} + 1\right)_{m_1} (m_1 - m_2)! m_2!} z_1^{m_1} z_2^{m_2} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m_1 + m_2, \frac{d}{2} \\ 1 - m_1 + m_2 - \frac{d}{2} \end{matrix}; \frac{z_2}{z_1}\right).$$

$d = 2$ の場合 任意の分割 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathcal{P}$ と複素数の r 組 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ について,

$$P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; 1) = s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) := \frac{\det\left(z_i^{m_j+r-j}\right)_{1 \leq i, j \leq r}}{\Delta(\mathbf{z})},$$

$$P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{z}; 1) = \frac{\det\left(P_{m_j+r-j}^{\text{ip}}(z_i + r - i)\right)_{1 \leq i, j \leq r}}{\Delta(\mathbf{z})},$$

$$\Delta(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j).$$

ここで $s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})$ はよく知られた Schur 関数, $P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{z}; 1)$ は shifted Schur 多項式である. 更に

$$P_{\mathbf{m}}(\mathbf{1}; 1) = s_{\mathbf{m}}(\mathbf{1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(j - i + 1)_{m_i - m_j}}{(j - i)_{m_i - m_j}},$$

$$P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; 1\right) = \prod_{j=1}^r (r - j + 1)_{m_j} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(j - i)_{m_i - m_j}}{(j - i + 1)_{m_i - m_j}},$$

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(2)}(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(j - i)_{m_i - m_j}}{(j - i + 1)_{m_i - m_j}} s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}),$$

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(2)}(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^r \frac{1}{(r - j + 1)_{m_j}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(j - i + 1)_{m_i - m_j}}{(j - i)_{m_i - m_j}} s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}),$$

$$\Psi_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{w}) = \frac{1}{(r)_{\mathbf{n}}} s_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) s_{\mathbf{n}}(\mathbf{w}).$$

次に上昇ベキの多変数類似

$$(\alpha)_{\mathbf{n}} := \prod_{j=1}^r \left(\alpha - \frac{d}{2}(j - 1)\right)_{n_j}$$

を用いて, 二項級数の多変数化

$${}_1F_0^{(d)}\left(\alpha; \mathbf{z}\right) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{P}} (\alpha)_{\mathbf{n}} \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}),$$

$${}_1\mathcal{F}_0^{(d)}\left(\alpha; \mathbf{z}; \mathbf{w}\right) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{P}} (\alpha)_{\mathbf{n}} \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{w}) = \sum_{n \geq 0} (\alpha)_{\mathbf{n}} \Phi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}) \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{w})$$

を考えます. このとき二項定理 (9) の多変数類似にあたる

$${}_1F_0^{(d)}\left(\alpha; \mathbf{z}\right) = \prod_{j=1}^r (1 - z_j)^{-\alpha}$$

は成立しますが (右辺は d に寄らない), たとえば (10) の多変数類似にあたるようなものは一般には成立せず, どちらか片方の変数が全て等しい場合にのみ

$${}_1\mathcal{F}_0^{(d)}\left(\alpha; (z, \dots, z); \mathbf{w}\right) = {}_1F_0^{(d)}\left(\alpha; z\mathbf{w}\right) = \prod_{j=1}^r (1 - zw_j)^{-\alpha} \quad (13)$$

が成立します. ただし, $\alpha = \frac{rd}{2}$ のときには

$${}_1\mathcal{F}_0^{(d)}\left(\frac{rd}{2}; \mathbf{z}; \mathbf{w}\right) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{P}} \binom{rd}{2}_{\mathbf{n}} \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{w}) = \prod_{i,j=1}^r (1 - z_i w_j)^{-\frac{d}{2}}$$

となることが知られています (Jack 多項式の Cauchy 型再生核公式).

更に Gauss の超幾何 ${}_2F_1$ の多変数類似として

$${}_2F_1^{(d)}\left(\alpha, \beta; \gamma; \mathbf{z}\right) := \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{P}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{n}} (\beta)_{\mathbf{n}}}{(\gamma)_{\mathbf{n}}} \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z})$$

を導入します. 先の二項級数と併せて, やはり比較的綺麗に書ける例を挙げてみると次のようになります.

例 5. $r = 2$ の場合 複素数の対 $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ について,

$$\begin{aligned} {}_1\mathcal{F}_0^{(d)}\left(\alpha; \mathbf{z}; \mathbf{w}\right) &= (1 - z_1 w_1)^{-\alpha} (1 - z_2 w_2)^{-\alpha} {}_2F_1\left(\frac{d}{2}, \alpha; -\frac{(z_1 - z_2)(w_1 - w_2)}{(1 - z_1 w_1)(1 - z_2 w_2)}\right), \\ {}_2F_1^{(d)}\left(\alpha, \beta; \gamma; \mathbf{z}\right) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F_4\left(\alpha; \beta; \gamma - \frac{d}{2}, \alpha + \beta - \gamma + 1; z_1 z_2, (1 - z_1)(1 - z_2)\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} [(1 - z_1)(1 - z_2)]^{\gamma - \alpha - \beta} \\ &\quad \cdot F_4\left(\gamma - \alpha; \gamma - \beta; \gamma - \frac{d}{2}, \gamma - \alpha - \beta + 1; z_1 z_2, (1 - z_1)(1 - z_2)\right). \end{aligned}$$

ただし, F_4 は Appell の超幾何関数

$$F_4(a; b; c, c'; x, y) := \sum_{m, n \geq 0} \frac{(a)_{m+n} (b)_{m+n}}{(c)_m (c')_n m! n!} x^m y^n.$$

$d = 2$ の場合 複素数の r 組 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ について,

$$\begin{aligned} {}_1\mathcal{F}_0^{(2)}\left(\alpha; \mathbf{z}; \mathbf{w}\right) &= \prod_{j=1}^r \frac{(r-j)!}{(\alpha - r + 1)_{r-j}} \frac{\det((1 - z_i w_j)^{-\alpha + r - 1})_{1 \leq i, j \leq r}}{\Delta(\mathbf{z}) \Delta(\mathbf{w})}, \\ {}_2F_1^{(2)}\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; \mathbf{z}\right) &= \prod_{j=1}^r \frac{(c - j - r + 2)_{r-1}}{(b - r + 1)_{r-j} (c - a - r + 1)_{r-j}} \\ &\quad \cdot \frac{r!}{\Delta(\mathbf{z})} \det\left({}_2F_1\left(\begin{matrix} a - i + 1, b - r + 1 \\ c - i - r + 2 \end{matrix}; z_j\right)\right)_{i, j=1, \dots, r}. \end{aligned}$$

ここで $s_{\mathbf{m}}(\mathbf{z})$ はよく知られた Schur 多項式, $P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{z}; 1)$ は shifted Schur 多項式である.

この積分表示は、一変数の時の類似で次のようになります。

$$\begin{aligned}
{}_2F_1^{(d)}\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; \mathbf{z}\right) &= \frac{\Gamma^{(d)}(\gamma)}{\Gamma^{(d)}(\alpha)\Gamma^{(d)}(\gamma-\alpha)} \\
&\cdot \int_{[0,1]^r} \prod_{j=1}^r t_j^{\alpha-1-\frac{d}{2}(r-1)} (1-t_j)^{\gamma-\alpha-1-\frac{d}{2}(r-1)} {}_1F_0^{(d)}\left(\begin{matrix} \beta \\ \mathbf{z}; \mathbf{t} \end{matrix}\right) \prod_{1 \leq i \neq j \leq r} |t_i - t_j|^d dt_1 \cdots dt_r,
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\Gamma^{(d)}(\alpha) := (2\pi)^{\frac{dr(r-1)}{4}} \prod_{j=1}^r \Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}(j-1)\right)$$

を持ちます。

Dotsenko-Fateev あるいは AGT との関連で大事なのは

$$z = z_1 = \cdots = z_r, \quad z = (z, \dots, z)$$

の場合です。このときは (13) より積分表示 (14) は

$$\begin{aligned}
{}_2F_1^{(d)}\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; z\right) &= \frac{\Gamma^{(d)}(\gamma)}{\Gamma^{(d)}(\alpha)\Gamma^{(d)}(\gamma-\alpha)} \\
&\cdot \int_{[0,1]^r} \prod_{j=1}^r t_j^{\alpha-1-\frac{d}{2}(r-1)} (1-t_j)^{\gamma-\alpha-1-\frac{d}{2}(r-1)} (1-zt_j)^{-\beta} \prod_{1 \leq i \neq j \leq r} |t_i - t_j|^d dt_1 \cdots dt_r.
\end{aligned}$$

右辺の積分は明らかに Dotsenko-Fateev ですが、左辺の和の方は Jack 多項式が

$$\Phi_{\mathbf{n}}^{(d)}(z) = z^{n_1 + \cdots + n_r}$$

のように monomial に退化することから

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1^{(d)}\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; z\right) \\
&= \sum_{0 \leq n_r \leq \cdots \leq n_1} \prod_{j=1}^r \frac{(\alpha - \frac{d}{2}(j-1))_{n_j} (\beta - \frac{d}{2}(j-1))_{n_j}}{(\frac{d}{2}(r-j)+1)_{n_j} (\gamma - \frac{d}{2}(j-1))_{n_j}} \\
&\cdot \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(\frac{d}{2}(j-i+1))_{n_i-n_j} (\frac{d}{2}(j-i)+1)_{n_i-n_j}}{(\frac{d}{2}(j-i))_{n_i-n_j} (\frac{d}{2}(j-i-1)+1)_{n_i-n_j}} z^{n_1 + \cdots + n_r} \\
&= \sum_{0 \leq m_1, \dots, m_r} \prod_{j=1}^r \frac{(\alpha - \frac{d}{2}(j-1))_{\sum_{k=1}^{r+1-j} m_{r-k+1}} (\beta - \frac{d}{2}(j-1))_{\sum_{k=1}^{r+1-j} m_{r-k+1}}}{(\frac{d}{2}(r-j)+1)_{\sum_{k=1}^{r+1-j} m_{r-k+1}} (\gamma - \frac{d}{2}(j-1))_{\sum_{k=1}^{r+1-j} m_{r-k+1}}} \\
&\cdot \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{(\frac{d}{2}(j-i+1))_{\sum_{k=j+1}^i m_k} (\frac{d}{2}(j-i)+1)_{\sum_{k=j+1}^i m_k}}{(\frac{d}{2}(j-i))_{\sum_{k=j+1}^i m_k} (\frac{d}{2}(j-i-1)+1)_{\sum_{k=j+1}^i m_k}} z^{1m_1 + 2m_2 + \cdots + rm_r}
\end{aligned}$$

を得ます*14。

ここで $r=2$ としたものが、「本伝」の冒頭で山田先生がおっしゃっていたものです。

以上で述べたのはいずれも 1 つの分割でラベル付けられた多変数超幾何の話でしたが、

*14 これはネクラソフ関数の truncation と合致すると思われる。これについては、 q 版も含め、Nobukawa-Shibkawa-Yamada で研究中です。

Nekrasov 関数はこうした昔から知られていた多変数超幾何の 2 つの分割の組への自然な拡張になっているというのが「本伝」のメインテーマの 1 つなのでした (超幾何の歴史が, また 1 ページ...).

参考文献

- [FK] J. Faraut and A. Korányi : *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, (1994).
- [Ka] J. Kaneko : *Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **24** (1993), 1086–1110.
- [金子] 金子讓一述, 渋川元樹記 : セルバーグ積分, 超幾何系, 組合せ論零点定理, 本報告集収録.
- [Ko] T. H. Koornwinder : *Okounkov's BC-type interpolation Macdonald polynomials and their $q = 1$ limit*, Sémin. Lothar. Combin, **72** (2014/15), 27pp.
- [M] I. G., Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, (1995).
- [野海] 野海正俊述, 渋川元樹-宮永愛子記 : *Macdonald 多項式 -アフィン Hecke 環からのアプローチ-*, 本報告集収録.
- [S] R. Stanley : *Some combinatorial properties of Jack symmetric functions*, Adv. Math., **77-1** (1989) 76–115.
- [VK] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk: *Representation of Lie Groups and Special Functions -Recent Advances-*, Kluwer Academic Publishers, (1995).