Exact WKB analysis for eigenvalue problems of ordinary differential equations

紫垣, 孝洋

(Degree)
博士 (理学)

(Date of Degree)
2022-09-25

(Date of Publication)
2023-09-01

(Resource Type)
doctoral thesis

(Report Number)
甲第8427号

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100477853

(別紙様式 3)

論 文 内 容 の 要 旨

氏　　名　　　　　　　　紫垣　孝洋

専　　攻　　　　　　　　数学専攻

論文題目（外国語の場合は，その和訳を併記すること。）

Exact WKB analysis for eigenvalue problems of ordinary differential equations
(常微分方程式の固有値問題に対する完全 WKB 解析)

指導教員　　　　　高山 信毅

本博士論文では、常微分方程式の固有値問題の完全 WKB 解析について論じている。特に中間子の質量の数理モデルに現れる固有値問題の完全 WKB 解析と、Bender 氏, Fring 氏, Komijani 氏が提唱した、ある 1 階常微分方程式に対する非線形固有値問題の完全 WKB 解析について、それぞれ Part I と Part III で述べている。Part II ではこれらの研究の位置付けを明確にするため、完全 WKB 解析と固有値問題に関する概説を述べた。

量子物理学において、Schrödinger 方程式の Planck 定数に関する発散級数解（WKB 解）を、ある項で打ち切って近似すると物理的に有用な結果が得られることが知られていた（WKB 近似)。一方、WKB 解に Borel 総和法を用いて解析的な意味を与えて解析を行うのが完全 WKB 解析であり、提唱者の Voros 氏や青木貴史氏、河合隆裕氏、竹井義次氏らによって大きな進展を見せた。完全 WKB 解析において、Stokes 曲線は WKB 解が Borel 総和可能である領域（Stokes 領域）の境界となっており、その幾何的な状況を理解することは重要である。また隣接する Stokes 領域へ WKB 解の Borel 和を解析接続させた時の関係式、つまり WKB 解の接続公式についても研究が進められている。

完全 WKB 解析の固有値問題への応用に関しては、Delabaere 氏や Dillinger 氏、 Pham 氏が Ecalle 氏の "resurgent theory"を用いた研究を行い、さらに小池達也氏も WKB 解の接続公式を用いて固有値問題の研究を行った。彼らの研究により、完全 WKB 解析は固有値問題を扱う上で有用であることがわかる。Stokes 曲線の始点となる点(変わり点)の種類により、数種類の WKB 解の接続公式が知られているが、「ghost 点」と呼ばれる点の近くでの接続公式を固有値問題へと応用させた例はまだなく、Part I で扱った固有値問題はその一つの例となっている。

Part I では中間子の質量の数理モデルに現れる固有値問題の完全 WKB 解析について扱った。名古屋大学の酒井忠勝氏や京都大学の杉本茂樹氏の研究で現れる数理モデルにおいて、陽子と中間子の結合に関わる粒子である中間子の質量は、ある 2 階常微分方程式の境界条件下での固有値として表される。この固有値問題が複素数平面における接続問題と関係していることが分かり、適切にパラメータを導入すると Schrödinger 方程式の形へと変形され、完全 WKB 解析の問題として扱うことが可能となる。この際、元の問題と関連があるパラメータの偏角が 0 の場合は、変わり点どうしが結ばれる Stokes 曲線が存在するという状況が発生しており、既存の理論をそのまま用いることは難しい。そのため、偏角を動かして退化を解く必要がある。

Part I で得られた主な結果は、(0 を含まない) ある領域内の偏角をもつパラメータに対し、固有値の満たす方程式の主要部が、WKB 解の接続公式を用いて具体的に得られるというものである。Stokes 曲線は偏角が 0 に近づくにつれ複雑な形状を呈するため、WKB 解の接続係数自体は偏角が 0 に近づくにつれ複雑な形となる。しかしパラメータの偏角がこの領域にあるときは、パラメータの絶対値が大きい場合、特定の項が指数的に最も大きい項となる。この特定の項は、ghost 点を始点とする Stokes 曲線を越えて、WKB 解を解析接続させる際に現れる接続係数に由来する項である。このように完全 WKB 解析の手法によって得られた固有値は、(パラメータの偏角を動かした場合の) 固有値の数値計算の結果との比較を行うと、妥当な結果であることも観察される。

Schrödinger 方程式は線形の常微分方程式である。一方、Schrödinger 方程式の解の対数微分が満たす方程式(Riccati 方程式)は 1 階の非線形常微分方程式であるため、Schrödinger 方程式の研究を通じて Riccati 方程式の完全 WKB 解析の研究も進んだと考えることもできる。さらに 2 階の非線形常微分方程式である Painlevé 方程式に関しても、Schrödinger 方程式のモノドロミー保存変形を記述するという立場から研究が行われ、たとえば青木貴史氏、河合隆裕氏、竹井義次氏の Painlevé 方程式に関する研究が知られている。Part III では、非線形方程式の完全 WKB 解析を固有値問題へ応用するための新たな試みとして得られた結果を紹介した。

Part III では Bender 氏, Fring 氏, Komijani 氏の提唱した、ある 1 階非線形の固有値問題に対する完全 WKB 解析を通して得られた結果を紹介した。Bender 氏らの研究した問題では、解の無限遠での特定の挙動によって境界条件が定義され、この境界条件のもとで解が一意的に定まることを用いて、解の初期値を固有値として扱った。彼らはこの固有値の漸近的な挙動を求めることに成功した。

もとの方程式を適切に変換して得られた方程式に対して、いわゆる 0-parameter 解と呼ばれる解が定義され、線形の場合と同じように Stokes 曲線が定義される。彼らの結果の別証明を完全 WKB 解析により与えるという目標のための第一歩として、以下の二つが得られた。

(1) 0-parameter 解は、ある領域において Borel 総和可能である。

(2) 境界条件を満たす解は、完全 WKB 解析の議論により、0-parameter 解の Borel 和を用いて表される。

以下、本博士論文の構成について述べる。

Introduction では、各 Part で展開される内容について簡単に述べた。

Part I は Section I.1 から Section I.9 および Section I.A、Section I.B で構成される。この

うち、Section I.1 から Section I.A までは、Funkcialaj Ekvacioj にて 2022 年 4 月に採択された論文 "Exact WKB analysis of eigenvalue problems for an ordinary differential equation arising from the mathematical model of mesons" の内容である。Section I.1 では original の問題や Part I で扱う内容の概説を行った。Section I.2 では original の問題にパラメータを導入し、完全 WKB 解析の問題としてどのように扱うかを説明した。Section I.3 では WKB 解や Stokes 曲線など、完全 WKB 解析における基本的で重要な用語の定義を行った。Section I.4 では主定理を述べた。Section I.5 ではこの Part で扱う方程式の Stokes 曲線が、パラメータの偏角を動かすとどのように変化するかを述べた。Stokes 曲線がどのように解析接続の経路と交わるかが、WKB 解の解析接続を求める際に重要となる。Section I.6 では、主結果を導出するために必要な、WKB 解の解析接続の公式について紹介した。Section I.7 では、特定の偏角の場合に、経路に沿って WKB 解の解析接続がどのように計算されるかを具体的に説明した。Section I.8 では主結果を証明した。Section I.9 では主結果に関する注意を述べた。Section I.A では主結果と数値計算の結果との比較を行った。Section I.B は博士論文のために付記した章で、original の問題の物理的背景について概説を行った。

Part II は Section II.1 と Section II.2 で構成される。Section II.1 では完全 WKB 解析と固有値問題についての歴史を概説し、Part I や Part III で述べた研究の位置付けについて明確にした。Section II.2 では WKB 解の接続公式がどのように固有値問題に応用されるか、また Stokes 曲線がどのように重要な役割を担っているか、基本的な例を通して説明を行った。

Part III は Section III.1 から Section III.5 で構成される。Part III の内容は非線形固有値問題に対する試論的なものであり、2019 年に発行された RIMS 講究録別冊 **B75** に掲載(177 ページから 201 ページまで)の論文 "Toward exact WKB analysis of nonlinear eigenvalue problems" の要約である。Section III.1 では Bender 氏, Fring 氏, Komijani 氏が研究した固有値問題と、Part III において述べられる完全 WKB 解析を通じて得られた結果に関する概説が書かれている。Section III.2 では Bender 氏, Fring 氏, Komijani 氏が提唱したある 1 階方程式の非線形固有値問題の解説を行なった。Section III.3 ではその問題を完全 WKB 解析の問題として捉え直し、非線形の場合の完全 WKB 解析における基本的で重要な対象である変わり点や Stokes 曲線、0-parameter 解などの定義を行なった。Section III.4 では Part III の主結果として、ある領域における 0-parameter 解の Borel 総和可能性、つまり解析的な意味づけができることを保証する定理を紹介した。Section III.5 では諸注意として、0-parameter 解の Borel 和によって境界条件を満たす解が表されることを紹介した。

(別紙 1)　　　　　　　　　　　　論文審査の結果の要旨

氏名	紫垣 孝洋		
論文題目	Exact WKB analysis for eigenvalue problems of ordinary differential equations (常微分方程式の固有値問題に対する完全 WKB 解析)		
審査委員	区分	職名	氏名
	主査	教授	高山 信毅
	副査	教授	福山 克司
	副査	教授	山田 泰彦
	副査	准教授	檜垣 充朗
	副査	教授(同志社大学)	竹井 義次

要旨

本博士論文は常微分方程式の固有値問題への完全 WKB 解析の応用を論じている. Part I では中間子の質量についての酒井忠勝氏および杉本茂樹氏の数理モデルに現れる固有値問題を完全 WKB 解析で考察している. 常微分方程式の固有値問題を完全 WKB 解析を応用して解析するさまざまな手法が提案されてきているが, 紫垣氏は新たな手法を提案し上記のモデルの解析が可能となった. Part II は常微分方程式の固有値問題への完全 WKB 解析の応用に関する既存研究の概説である. Part III では, Bender 氏, Fring 氏, Komijani 氏が提唱したある 1 階常微分方程式に対する非線形固有値問題の完全 WKB 解析を試み, 0 パラメータ解と呼ばれる形式解の Borel 総和可能性を示した.

完全 WKB 解析は, 常微分方程式の局所解の解析接続を具体的に与える接続問題を解くのに非常に有効な手法である. 完全 WKB 解析を用いれば, スペクトルパラメータを含む常微分方程式の接続係数を決定し, その接続係数に条件を課すことにより固有値を決定できることが期待できる. 実際小池氏は, 2000 年代にさまざまな常微分方程式の固有値問題を完全 WKB 解析を用いて解析した. しかしながら Part I で考察している常微分方程式の係数は $(1+z)^{-4/3}$ といった分岐点をもつ多価関数であり, 変数変換により有理関数係数に変換した後も 5 個の特異点を持つ常微分方程式となって接続係数の決定は従来の手法では容易ではない. 特に WKB 解析で重要な役割を果たす Stokes 曲線, つまり WKB 解が Borel 総和可能となる領域の境界の形状が, Part I で考察している常微分方程式の場合はとりわけ複雑である. また Part I の常微分方程式については, Stokes 曲線の始点である変わり点の中に小池氏により発見された ghost 点と呼ばれる点が現れ, こうした

氏名	紫垣 孝洋

ghost 点を含む常微分方程式の固有値問題はこれまで解析されてこなかった．紫垣氏はこうした問題点を解決する指針を与え，大きなパラメータ η の偏角が $-\pi/4$ 以上 $-c_R\pi$ (c_R は 1/4 より小さいある正数) 以下の時に接続係数の具体形を計算し，η に関する指数関数的に微小な項を除いた固有値の主要部を特徴づけることに成功した．具体的には，固有値の主要部は永年方程式 $1/\Gamma(\kappa+3/4)\Gamma(\kappa+1/4)=0$ により特徴づけられる (κ は固有値を含むパラメータ)．なお η の偏角を 0 に近づけると Stokes 曲線の形状はさらに複雑となり，偏角 0 では様々な種類の退化が一斉に生じるという現象が観察される．この観察から偏角 0 の近傍での解析はより困難となることが予想され，この小偏角の場合の問題は未解決である．

Part III では，Bender 氏らの研究した問題を完全 WKB 解析の立場から再考察することを試みた．Bender 氏らは無限遠での特定の境界条件のもとである 1 階非線形方程式を考察し，この境界条件の下で解が一意的に定まることを踏まえて対応する解の初期値を固有値と呼び，この固有値の漸近的な挙動を求めた．この方程式を完全 WKB 解析的な枠組に収まるよう適切に変換して得られた方程式については，いわゆる 0 パラメータ解と呼ばれる解が定義され，線形方程式の場合と同じように Stokes 曲線が定義される．固有値の漸近挙動の公式の別証明を完全 WKB 解析により与えるという目標のための第一歩として，紫垣氏は以下の二つの結果を得た．(1) 0 パラメータ解は，ある領域において Borel 総和可能である．(2) 境界条件を満たす解は，完全 WKB 解析の議論により 0 パラメータ解の Borel 和を用いて表される．この結果を元にして，非線形固有値問題に対しても完全 WKB 解析が有効であることを将来示すことができると期待される．

本研究は常微分方程式の固有値問題を完全 WKB 解析を応用して解析するための新しい手法を提案しており，固有値問題と完全 WKB 解析について重要な知見を得たものとして価値ある業績であると認める．よって，学位申請者の紫垣 孝洋は，博士 (理学) の学位を得る資格があると認める．

- 特記事項
- 特許登録数 0 件
- 発表論文数 2 件