



三次元異方透水性地盤における浸透水の流れ : 透水係数テンソルとその主値及び主方向

田中, 勉
フェライト, アーノルド

(Citation)

神戸大学都市安全研究センター研究報告, 27:142-188

(Issue Date)

2023-03

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD01)

<https://doi.org/10.24546/0100482525>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100482525>



三次元異方透水性地盤における浸透水の流れ

ー透水係数テンソルとその主値及び主方向ー

Seepage flow through anisotropic permeable soil in three dimensions
ー Tensor of coefficients of permeability, principal value and direction of the tensor ー

田中 勉¹⁾

Tsutomu Tanaka

アーノルド フェライト²⁾

Arnold Verruijt

概要: 土は一般的に浸透流に関して異方透水性を有している。異方透水性を有する土に関して、等方透水性と仮定して設計したとすると、実際には、設計計算値よりも浸透流量が増大したり、地盤の浸透破壊に対する限界水頭差が低下したり、ダム堤体のすべりに対する安定性が低下することが知られている。一般的に、材料定数としての異方透水係数はテンソルである。浸透流に関わる地盤や土構造物の設計においては、土の異方透水性について調査し、それが水理学的・力学的性質に与える影響について調べる必要がある。そのためには、まず土の異方透水性とそれによる浸透流特性を正確に把握し、次にテンソルとしての透水係数の性質を明らかにする必要がある。ここでは、三次元異方透水性地盤の水の流れについて、対称テンソルとしての透水係数とその性質、点における透水係数テンソルの特性、透水係数テンソルの主値と主方向及び不変量、「構造的な透水性」と「それと数学的に等価な透水係数テンソル」の関係について考察する。

キーワード: 三次元異方透水性地盤, 浸透流, 透水係数テンソル, 主透水係数と主方向, 透水係数テンソルの不変量, 構造的な透水性とそれと数学的に等価な透水係数テンソル

1. 序論

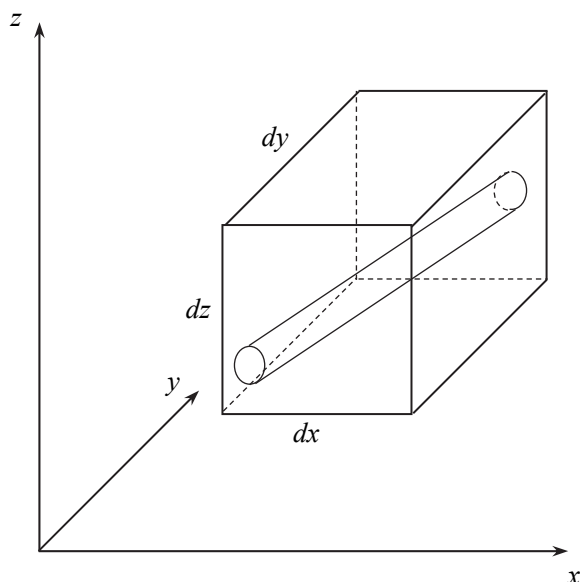
土は一般的に浸透流に関して異方透水性を有している。異方透水性を有する土に関して、等方透水性と仮定して設計したとすると、実際には、設計計算値よりも浸透流量が増大したり、地盤の浸透破壊に対する限界水頭差が低下したり、ダム堤体のすべりに対する安定性が低下することが知られている¹⁾²⁾。一般的に、材料定数としての異方透水係数はテンソルであることが知られて

いる。浸透流に関わる地盤や土構造物の設計においては、土の異方透水性について調査し、それが水理学的・力学的性質に与える影響について調べる必要がある。そのためには、まず、土の異方透水性とそれによる浸透流特性を正確に把握することが重要である。次に、地盤中の浸透流特性を正確に把握するためには、テンソルとしての透水係数の性質を明らかにする必要がある。

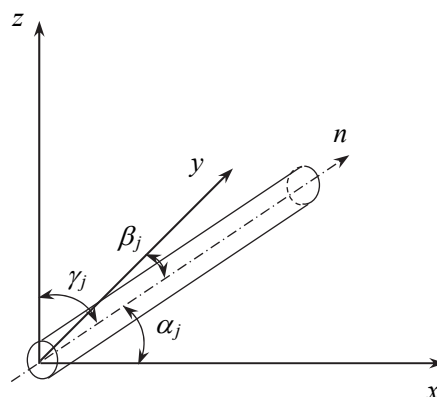
著者らはこれまで、二次元異方透水性地盤における浸透水の流れについて考察を行ってきた。しかし、「限られた範囲の掘削地盤」や「水利施設構造物の端部の地盤」において、三次元的な浸透流の集中が生じることがある。三次元浸透場が異方透水性を有する場合には、さらに浸透流の集中が大きくなり、地盤の安定性が著しく低下することがある。したがって、三次元異方透水性地盤における、浸透流特性について詳しく調べておく必要がある。

ここでは、三次元異方透水性地盤の水の流れについて、対称テンソルとしての透水係数とその性質、点における透水係数テンソルの特性(すなわち、透水係数テンソルの座標変換と透水係数成分の正方向の定義など)、透水係数テンソルの主値と主方向(すなわち、主透水係数とその方向)及び不変量、構造的に既定される節理面内の透水性(構造的な透水性)とそれと等価な数学的な透水係数テンソル(数学的な透水性)について議論する。本報文の内容の一部分、すなわち、対称テンソルとしての透水係数、透水係数テンソルの座標変換、透水係数テンソルの不変量などについては、すでに別の書籍等³⁾⁻⁶⁾で異なる形で述べられているが、著者らの一連の研究において、理論式の誘導過程等が必要であるので、あえて示すものである。

また、式の展開や例題・問題の解答作業に必要な「ベクトルの乗算」、理論展開の理解に役立つ「三次元透水係数テンソルに関する問題と解答例」、座標変換の理解に必要な「回転座標変換行列」について、付録として説明した。



(a) 管水路 j の概念図



(b) 管水路 j の方向

2. 対称テンソルとしての透水係数

2.1 三次元地盤内の管水路中の水流

三次元地盤内にある管水路中の水の流れを考える(Fig.2.1)。地盤内の単位の微小要素 $dx \times dy \times dz (=1 \times 1 \times 1)$ について考える。参考文献 7 の 2 で述べたように、管水路中の粘性流は、Hagen-Poiseuille の式で表され、

$$Q_n = \frac{\gamma_w}{8\mu} \pi a^4 \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

Fig.2.1 単位の微小要素 $dx \times dy \times dz (=1 \times 1 \times 1)$ 内の管水路 j

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma_w}{8\mu} \pi a^4 i_n \\
&= A i_n
\end{aligned} \tag{2.1}$$

となる⁷⁾⁸⁾。ここに、

$A = \frac{\gamma_w}{8\mu} \pi a^4$: 管水路に固有の定数

n : 流れの方向(流れの向きに正をとる)

Q_n : 流量

γ_w : 水の単位体積重量

μ : 水の粘性係数

Δl : 流れ方向に沿って測った距離

Δh : Δl の間の水頭損失

a : 管の半径

$i_n = \frac{\Delta h}{\Delta l}$: 流れ方向の動水勾配

である。(2.1)式から、管水路中の粘性流に関しては、流量が動水勾配に比例することがわかる。

まず、 x, y, z 方向の動水勾配 i_x, i_y, i_z がそれぞれ存在する場合について別々に考える。管の方向が、Fig.2.1 に示すように、 x, y, z 軸と $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ の角度を成す場合について考える。

(1) i_x のみが存在する場合 ($i_x \neq 0, i_y = 0, i_z = 0$)

i_x のみが存在するときの管方向(x と α_j の角度を成す方向)の動水勾配 i_{nj1} は、次のように表される。

$$i_{nj1} = \cos \alpha_j \cdot i_x$$

したがって、 i_{nj1} によって管方向に生じる流量 Q_{nj1} は、(2.1)式を用いて、

$$Q_{nj1} = A_j \cdot i_{nj1} = A_j \cos \alpha_j \cdot i_x \tag{2.2}$$

となる。ここに、 A_j は管水路 j に固有の定数を表す。 Q_{nj1} は、 x, y, z 方向の成分 $Q_{xj1}, Q_{yj1}, Q_{zj1}$ に分けることができ、

$$\left. \begin{aligned}
Q_{xj1} &= Q_{nj1} \cos \alpha_j = A_j \cos^2 \alpha_j \cdot i_x \\
Q_{yj1} &= Q_{nj1} \cos \beta_j = A_j \cos \alpha_j \cos \beta_j \cdot i_x \\
Q_{zj1} &= Q_{nj1} \cos \gamma_j = A_j \cos \alpha_j \cos \gamma_j \cdot i_x
\end{aligned} \right\} \tag{2.3}$$

となる。(2.3)式からわかるように、 i_x によって x 方向のみならず y 方向及び z 方向の流れが生じる。

(2) i_y のみが存在する場合 ($i_x = 0, i_y \neq 0, i_z = 0$)

前述(1)と同様に、 i_y のみが存在するときの管方向(y と β_j の角度を成す方向)の動水勾配 i_{nj2} は、次のように表される。

$$i_{nj2} = \cos \beta_j \cdot i_y$$

したがって、 i_{nj2} によって管方向に生じる流量 Q_{nj2} は、(2.1)式を用いて、

$$Q_{nj2} = A_j \cdot i_{nj2} = A_j \cos \beta_j \cdot i_y \tag{2.4}$$

となる。 Q_{nj2} は、 x, y, z 方向の成分 $Q_{xj2}, Q_{yj2}, Q_{zj2}$ に分けることができ、

$$\left. \begin{aligned} Q_{xj2} &= Q_{nj2} \cos \alpha_j = A_j \cos \beta_j \cos \alpha_j \cdot i_y \\ Q_{yj2} &= Q_{nj2} \cos \beta_j = A_j \cos^2 \beta_j \cdot i_y \\ Q_{zj2} &= Q_{nj2} \cos \gamma_j = A_j \cos \beta_j \cos \gamma_j \cdot i_y \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

となる。(2.5)式からわかるように、 i_y によって y 方向のみならず z 方向及び x 方向の流れが生じる。

(3) i_z のみが存在する場合 ($i_x = 0, i_y = 0, i_z \neq 0$)

前述(1), (2)と同様にして、 i_z のみが存在するときの管方向(z と γ_j の角度を成す方向)の動水勾配 i_{nj3} は、次のように表される。

$$i_{nj3} = \cos \gamma_j \cdot i_z$$

したがって、 i_{nj3} によって管方向に生じる流量 Q_{nj3} は、(2.1)式を用いて、

$$Q_{nj3} = A_j \cdot i_{nj3} = A_j \cos \gamma_j \cdot i_z \quad (2.6)$$

となる。 Q_{nj3} は、 x, y, z 方向の成分 $Q_{xj3}, Q_{yj3}, Q_{zj3}$ に分けることができ、

$$\left. \begin{aligned} Q_{xj3} &= Q_{nj3} \cos \alpha_j = A_j \cos \gamma_j \cos \alpha_j \cdot i_z \\ Q_{yj3} &= Q_{nj3} \cos \beta_j = A_j \cos \gamma_j \cos \beta_j \cdot i_z \\ Q_{zj3} &= Q_{nj3} \cos \gamma_j = A_j \cos^2 \gamma_j \cdot i_z \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

となる。(2.7)式からわかるように、 i_z によって z 方向のみならず x 方向及び y 方向の流れが生じる。

(2.3), (2.5), (2.7)式から、前述したように、 i_x によって x 方向のみならず y 方向及び z 方向の流れが生じることがわかる。 i_y 及び i_z についても同様である。注目すべきことは、 Q_{yj1} の係数と Q_{xj2} の係数($A_j \cos \alpha_j \cos \beta_j$)、 Q_{zj2} の係数と Q_{yj3} の係数($A_j \cos \beta_j \cos \gamma_j$)、 Q_{xj3} の係数と Q_{zj1} の係数($A_j \cos \gamma_j \cos \alpha_j$)がそれぞれ等しいということである。

(4) i_x, i_y, i_z が同時に存在する場合 ($i_x \neq 0, i_y \neq 0, i_z \neq 0$)

次に、 i_x, i_y, i_z が同時に存在する場合について考える。 x, y, z 方向の流量 Q_{xj}, Q_{yj}, Q_{zj} は、それぞれ、 i_x, i_y, i_z による x 方向の流量 $Q_{xj1}, Q_{xj2}, Q_{xj3}$ 、 y 方向の流量 $Q_{yj1}, Q_{yj2}, Q_{yj3}$ 、及び、 z 方向の流量 $Q_{zj1}, Q_{zj2}, Q_{zj3}$ を足し合わせることによって得られ、(2.3), (2.5), (2.7)式から、

$$\begin{aligned} Q_{xj} &= Q_{xj1} + Q_{xj2} + Q_{xj3} = A_j \cos^2 \alpha_j \cdot i_x + A_j \cos \beta_j \cos \alpha_j \cdot i_y + A_j \cos \gamma_j \cos \alpha_j \cdot i_z \\ Q_{yj} &= Q_{yj1} + Q_{yj2} + Q_{yj3} = A_j \cos \alpha_j \cos \beta_j \cdot i_x + A_j \cos^2 \beta_j \cdot i_y + A_j \cos \gamma_j \cos \beta_j \cdot i_z \\ Q_{zj} &= Q_{zj1} + Q_{zj2} + Q_{zj3} = A_j \cos \alpha_j \cos \gamma_j \cdot i_x + A_j \cos \beta_j \cos \gamma_j \cdot i_y + A_j \cos^2 \gamma_j \cdot i_z \end{aligned}$$

となり、マトリックス表示すると、

$$\begin{Bmatrix} Q_{xj} \\ Q_{yj} \\ Q_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_j \cos^2 \alpha_j & A_j \cos \beta_j \cos \alpha_j & A_j \cos \gamma_j \cos \alpha_j \\ A_j \cos \alpha_j \cos \beta_j & A_j \cos^2 \beta_j & A_j \cos \gamma_j \cos \beta_j \\ A_j \cos \alpha_j \cos \gamma_j & A_j \cos \beta_j \cos \gamma_j & A_j \cos^2 \gamma_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = [D_j^m] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

となる。ここに、

$$[D_j'''] = \begin{bmatrix} A_j \cos^2 \alpha_j & A_j \cos \beta_j \cos \alpha_j & A_j \cos \gamma_j \cos \alpha_j \\ A_j \cos \alpha_j \cos \beta_j & A_j \cos^2 \beta_j & A_j \cos \gamma_j \cos \beta_j \\ A_j \cos \alpha_j \cos \gamma_j & A_j \cos \beta_j \cos \gamma_j & A_j \cos^2 \gamma_j \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

である。透水性を表すマトリックス $[D_j''']$ は対称となる。

2.2 三次元地盤内の浸透流

三次元地盤内のすべての水みちについて考える。 x, y, z 方向の流量 Q_x, Q_y, Q_z は要素内のすべての水みち $j=1, 2, \dots, N$ について考え足し合わせることによって得られる。ここでは、単位の微小要素 $dx \times dy \times dz$ ($=1 \times 1 \times 1$)を考えているので、 Q_x, Q_y, Q_z は、それぞれ、 x, y, z 方向の単位面積当たりの流量 q_x, q_y, q_z 、及び、 x, y, z 方向の流量流速 v_x, v_y, v_z と等しくなり、

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^N [D_j'''] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^N \begin{bmatrix} A_j \cos^2 \alpha_j & A_j \cos \beta_j \cos \alpha_j & A_j \cos \gamma_j \cos \alpha_j \\ A_j \cos \alpha_j \cos \beta_j & A_j \cos^2 \beta_j & A_j \cos \gamma_j \cos \beta_j \\ A_j \cos \alpha_j \cos \gamma_j & A_j \cos \beta_j \cos \gamma_j & A_j \cos^2 \gamma_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \alpha_j & \sum_{j=1}^N A_j \cos \beta_j \cos \alpha_j & \sum_{j=1}^N A_j \cos \gamma_j \cos \alpha_j \\ \sum_{j=1}^N A_j \cos \alpha_j \cos \beta_j & \sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \beta_j & \sum_{j=1}^N A_j \cos \gamma_j \cos \beta_j \\ \sum_{j=1}^N A_j \cos \alpha_j \cos \gamma_j & \sum_{j=1}^N A_j \cos \beta_j \cos \gamma_j & \sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \gamma_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \alpha_j \\ k_{yx} &= k_{xy} = \sum_{j=1}^N A_j \cos \beta_j \cdot \cos \alpha_j \\ k_{zx} &= k_{xz} = \sum_{j=1}^N A_j \cos \gamma_j \cdot \cos \alpha_j \\ k_{yy} &= \sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \beta_j \\ k_{zy} &= k_{yz} = \sum_{j=1}^N A_j \cos \gamma_j \cdot \cos \beta_j \\ k_{zz} &= \sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \gamma_j \end{aligned} \quad (2.11)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} & k_{zx} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{zy} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \\
&= [D] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。ここに、

$$[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} & k_{zx} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{zy} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

である。また、透水性を表すマトリックス $[D]$ は対称となる。このようにして、三次元地盤内の浸透流について、透水係数は二階のテンソルとなる。

実際的には、水みちは単に直線ではなく曲線であったり、入り組んでいたりするものと考えられる。その場合も微小領域について考えると上述の考え方が成り立ちマトリックス $[D]$ の対称性が成り立つものと考えられる。参考文献7の第2章で述べたように、一般的に、透水係数テンソルは対称であると考えられている⁴⁾。著者らも k_{ij} を対称テンソルであると考え以下の議論を進める。

異方透水性地盤の浸透流において注意すべきことは、(2.12)式からわかるように、一般的に i_x の存在によって x 方向の浸透流のみならず y, z 方向の浸透流が生じることである。 i_y 及び i_z についても同様である。ここで、たとえば i_x の存在によって y 方向の浸透流を生じさせる透水係数成分 k_{xy} を透水係数テンソルの誘導成分と呼ぶことにする。また、 $k_{xy} = k_{yx}$, $k_{yz} = k_{zy}$, $k_{zx} = k_{xz}$ である。

(2.11)式で表される透水係数テンソルの成分は、水みちの配置、すなわち、水みちの方向 α_j , β_j , γ_j と水みちの透水性を表す係数 A_j によって次に示すような値をとる。

(1) ランダム配置の水みちがある場合

水みちがランダムに配置されているとき、すなわち、水みちの方向 α_j , β_j , γ_j と透水性を表す係数 A_j がランダムであるとき、 $\cos \alpha_j$, $\cos \beta_j$, $\cos \gamma_j$ が本質的に同じものであることを考慮すると、

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N A_j \cos \alpha_j \cos \beta_j &= 0 \\
\sum_{j=1}^N A_j \cos \beta_j \cos \gamma_j &= 0 \\
\sum_{j=1}^N A_j \cos \gamma_j \cos \alpha_j &= 0 \\
\sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \alpha_j &= \sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \beta_j = \sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \gamma_j = k
\end{aligned}$$

となる。このとき、透水係数テンソル $[D]$ は、

$$[D] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

と表される。この場合、浸透領域は等方透水性地盤であり、透水係数はスカラー量となる。

(2) 特性の異なる3種類の水みちが直角座標系 x, y, z 軸方向にある場合

Fig.2.2(a)に示すように、特性の異なる3種類の水みちが直角座標系 x, y, z 軸方向に卓越して存在し、すなわち、水みちが $(\alpha_j = 0, \beta_j = \gamma_j = \pi/2)$, $(\alpha_j = \pi/2, \beta_j = 0, \gamma_j = \pi/2)$, 及び、 $(\alpha_j = \beta_j = \pi/2, \gamma_j = 0)$ の方向に卓越して存在し、 A_j の値が x, y, z 方向で本質的に異なるとき、

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos \alpha_j \cos \beta_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos \beta_j \cos \gamma_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos \gamma_j \cos \alpha_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \alpha_j = k_{xx}$$

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \beta_j = k_{yy}$$

$$\sum_{j=1}^N A_j \sin^2 \gamma_j = k_{zz}$$

となり、透水係数テンソル $[D]$ は、

$$[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

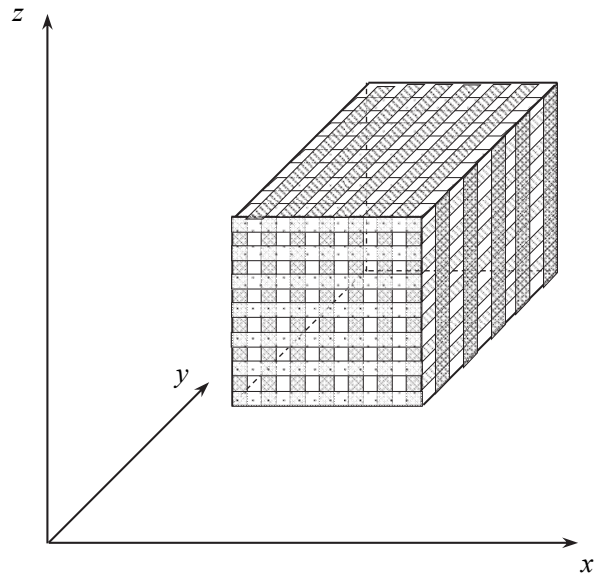


Fig.2.2(a) 特性の異なる3種類の水みちが直角座標系 x, y, z 軸方向にある場合 (Continue)

と表される。この場合、浸透領域は x, y, z 軸方向が主方向であり、 k_{xx}, k_{yy}, k_{zz} は主透水係数となる（第4章参照）。ここで、Fig.2.2(a) の図柄はイメージを表す。

(3) 特性の異なる2種類の水みちが直角座標系 x, y, z 軸から傾いた方向にある場合

Fig.2.2(b)に示すように、(2)で考えた特性の異なる3種類の水みちが直角座標系 x, y, z 軸方向から傾いた方向に卓越して存在し、 A_j の値がそれらの方向で本質的に異なるとき、

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos \alpha_j \cos \beta_j = k_{xy} = k_{yx}$$

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos \beta_j \cos \gamma_j = k_{yz} = k_{zy}$$

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos \gamma_j \cos \alpha_j = k_{zx} = k_{xz}$$

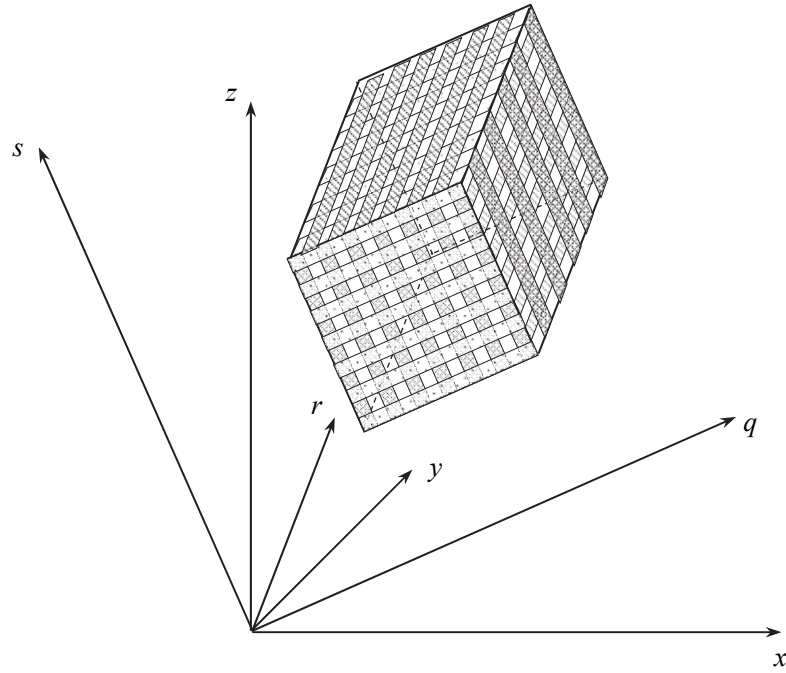


Fig.2.2(b) 特性の異なる3種類の水みちが直角座標系 x, y, z 軸から傾いた方向にある場合

(Continued)

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \alpha_j = k_{xx}$$

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \beta_j = k_{yy}$$

$$\sum_{j=1}^N A_j \cos^2 \gamma_j = k_{zz}$$

となり、透水係数テンソル $[D]$ は、

$$[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} & k_{zx} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{zy} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

と表される。この場合、浸透領域は異方透水性地盤であり、 x, y, z 軸方向は主方向ではない。

ここでの結論は、2.1 節の(2.9)式から、「基質の部分と一方向に卓越する水みちがある」場合を想定するだけでも、類推することができる。また、二次元地盤の場合の議論⁷⁾から、特性の異なる二種類の水みちがそれぞれ直交していなくても、(2)、(3)の考察は当てはまることが類推される(参考文献7の5.5節参照)。4.4節において同様に考察する。

3. 点における透水係数テンソル

3.1 透水係数テンソルの座標変換

異方透水性地盤の浸透流に関して、拡張されたダルシー則は右手系の直交座標 x, y, z において、(3.1)式のように表される⁹⁾。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} & k_{zx} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{zy} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = [D_{(xyz)}] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

ここに, $[D_{(xyz)}]$ は x, y, z 座標系における透水係数マトリックスを表す。ここで, 新たな右手系の直交座標系 q, r, s を考え, x, y, z に関する方向余弦マトリックスを $[A]$ とする。

$$[A] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

ここに,

$$l_1 = \cos(q, x), m_1 = \cos(q, y), n_1 = \cos(q, z)$$

$$l_2 = \cos(r, x), m_2 = \cos(r, y), n_2 = \cos(r, z)$$

$$l_3 = \cos(s, x), m_3 = \cos(s, y), n_3 = \cos(s, z)$$

である。ここで, 例えば, $\cos(q, x)$ は, q 軸方向単位ベクトルと x 軸方向単位ベクトルの間の方向余弦を表す。このとき, あるベクトル $\mathbf{a}$ の各座標系における成分を $\{a_x, a_y, a_z\}^T$, 及び, $\{a_q, a_r, a_s\}^T$ とすると, これらの値の間には次の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} a_q \\ a_r \\ a_s \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

また, $[A]$ の逆行列 $[A]^{-1}$, 転置行列 $[A]^T$ には次の関係が成り立つ。

$$[A]^{-1} = [A]^T = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

このとき, $[A]$ は正規直交行列と呼ばれる。

x, y, z 座標系における流量流速 $\{v_x, v_y, v_z\}^T$ はベクトルであり, q, r, s 座標系に変換すると,

$$\begin{Bmatrix} v_q \\ v_r \\ v_s \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

となる。同様にして, x, y, z 座標系における動水勾配 $\{i_x, i_y, i_z\}^T$ はベクトルであり, q, r, s 座標系に次のように変換することができ,

$$\begin{Bmatrix} i_q \\ i_r \\ i_s \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} i_q \\ i_r \\ i_s \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

の関係が成立する。(3.5), (3.1), (3.7)式から,

$$\begin{Bmatrix} v_q \\ v_r \\ v_s \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = [A] [D_{(xyz)}] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = [A] [D_{(xyz)}] [A]^{-1} \begin{Bmatrix} i_q \\ i_r \\ i_s \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

を得る。 q, r, s 座標系においても、 x, y, z 座標系と同様にして拡張されたダルシー則、

$$\begin{Bmatrix} v_q \\ v_r \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{qq} & k_{rq} & k_{sq} \\ k_{qr} & k_{rr} & k_{sr} \\ k_{qs} & k_{rs} & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_q \\ i_r \\ i_s \end{Bmatrix} = [D_{(qrs)}] \begin{Bmatrix} i_q \\ i_r \\ i_s \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

が成り立つものとする、(3.9), (3.8)式から、

$$[D_{(qrs)}] = [A] [D_{(xyz)}] [A]^{-1} \quad (3.10)$$

の関係式を得る。ここに、 $[D_{(qrs)}]$ は q, r, s 座標系における透水係数マトリックスを表す。座標変換式(3.10)の形から、三次元浸透流問題に関しても透水係数は二階のテンソルであることがわかる。

3.2 透水係数テンソル成分の正方向

一般的に考えると、透水係数はテンソルであるが、各成分の正の方向を便宜上 Fig.3.1 のように表すことにする。Fig.3.1 では、表示の都合上、 $(+x)$ 面、 $(+z)$ 面、及び、 $(-y)$ 面上のテンソル成分についてのみ表している。ここで、例えば、面の外向きの法線方向が x 軸の方向と一致するとき、その面を $(+x)$ 面と定義するものとする。透水係数の成分を k_{ij} ($i, j, k = x, y, z$) としたとき、最初のサフィックス i は関係する面の法線方向 (外向きを正とする) を表し、動水勾配が作用する方向を表すものとする。また、2 番目のサフィックス j は流れの方向を表すものとする。

例えば、対角成分 k_{xx} については $(+x)$ の面では外向きに立てた法線方向 $(+x)$ に単位動水勾配が作用したときに $(+x)$ 方向に生じる流量流速を表す。 $(-x)$ の面では外向きに立てた法線方向 $(-x)$ に単位動水勾配が作用したときに $(-x)$ 方向に生じる流量流速を表す。 k_{yy} 、及び、 k_{zz} についても同様である。

非対角成分 k_{xy} については、 $(+x)$ の面では外向きに立てた法線方向 $(+x)$ に単位動水勾配が作用したときに $(+y)$ 方向に誘起されて生じる流速である。 $(-x)$ 面では、外向きに立てた法線方向 $(-x)$ に単位動水勾配が作用したときに $(-y)$ 方向に誘起されて生じる流速である。 k_{yx} 、及び、 k_{yz} 、 k_{zy} 、 k_{zx} 、 k_{xz} についても同様である。

Fig.3.1 は三次元地盤における透水係数テンソル成分の正方向を表している。上述の規則をまとめると次のように言い表すことができる。

関係する面の法線方向外向きに単位動水勾配が作用したときに、その方向が座標軸の正方向と一致するときには座標軸の正方向に流れが生じる場合を透水係数テンソル成分の正方向とし、その方向が座標軸の負方向と一致するときには座標軸の負方向に流れが生じる場合を透水係数テンソル成分の正方向とする。この規則に従えば、矩形要素について、外向き法線が $(+)$ 軸方向の面に関係するすべての透水係数成分の正方向は座標軸の正の方向と一致し、外向き法線が $(-)$ 軸方向の面に関係するすべての透水係数成分の正方向は座標軸の負の方向と一致することになる。

透水係数の非対角成分 k_{xy} 、 k_{yx} 、 k_{yz} 、 k_{zy} 、 k_{zx} 、 k_{xz} は、便宜上連続体力学¹⁰⁾におけるせん断応力成分と同じように表している⁹⁾¹⁰⁾。これには物理的な意味はない。

3.3 第3章例題

ここでは、ある方向についての透水係数成分の求め方、及び、回転した座標系における透水係数テンソルの求め方に関する例題を取り上げる。付録2に示した他の例題も参照のこと。

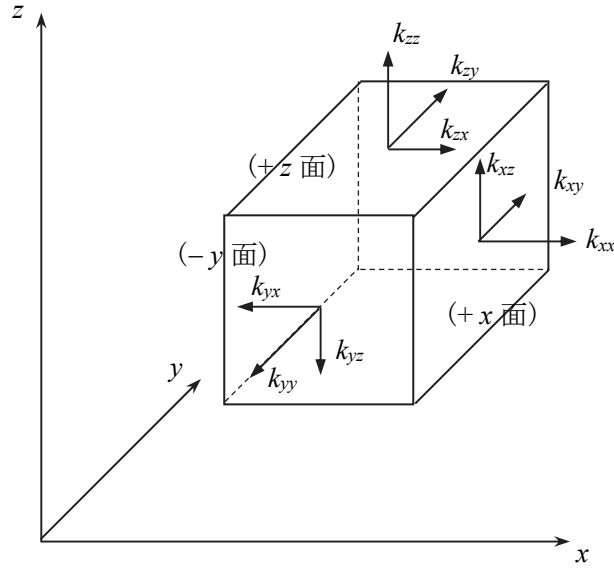


Fig.3.1 三次元透水係数テンソル成分の正方向

ここでは、主方向の向きの計算において、単位ベクトル $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ が右手系になるように(すなわち、 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ となるように)、ベクトル $\mathbf{e}_2$ の向きを調整している。

例題 3.1 ある方向についての透水係数成分の求め方

三次元 x, y, z 直角座標系における点 P の透水係数テンソルが、

$$[D] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{m/s}) \quad (3.11)$$

と与えられたとき、

$$\mathbf{e}_q = \frac{2}{3}\mathbf{e}_x - \frac{2}{3}\mathbf{e}_y + \frac{1}{3}\mathbf{e}_z \quad (3.12)$$

の方向の透水係数成分 k_{qq} を求めなさい。

<ヒント_例題 3.1_>

三次元座標系 x, y, z 及び q, r, s について考える。方向余弦行列を $[A]$ とおき、

$$\begin{Bmatrix} q \\ r \\ s \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

としたとき、

$$[D^{(qrs)}] = [A] [D^{(xyz)}] [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{e}_q\}^T \\ \{\mathbf{e}_r\}^T \\ \{\mathbf{e}_s\}^T \end{bmatrix} [D^{(xyz)}] \begin{bmatrix} \{\mathbf{e}_q\} & \{\mathbf{e}_r\} & \{\mathbf{e}_s\} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

または、透水係数成分 k_{ij} ($i, j = q, r, s$) に関して、

$$k_{ij} = D_{ij}^{(qrs)} = \{\mathbf{e}_i\}^T [D^{(xyz)}] \{\mathbf{e}_j\}, \quad (i, j = q, r, s) \quad (3.15)$$

と表される。ここに、 $\mathbf{e}_q, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s$ はそれぞれ q, r, s 座標の単位ベクトル：

$$\{\mathbf{e}_q\} = \begin{Bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \\ e_{z1} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{e}_r\} = \begin{Bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \\ e_{z2} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{e}_s\} = \begin{Bmatrix} e_{x3} \\ e_{y3} \\ e_{z3} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\{\mathbf{e}_q\}^T = \{e_{x1}, e_{y1}, e_{z1}\}$$

$$\{\mathbf{e}_r\}^T = \{e_{x2}, e_{y2}, e_{z2}\}$$

$$\{\mathbf{e}_s\}^T = \{e_{x3}, e_{y3}, e_{z3}\}$$

であり、 $[D^{(xyz)}], [D^{(qrs)}]$ はそれぞれ、 x, y, z 及び q, r, s 座標系に関する透水係数マトリックスである。

また、方向余弦行列 $[A]$ は正規直交行列であり、転置行列 $[A]^T$ 、及び、逆行列 $[A]^{-1}$ は等しい。

$$[A]^T = [A]^{-1} \quad (3.17)$$

<解答例_例題 3.1>

問題を再記し(単位(m/s)は省略して),

$$[D] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{e}_q = \frac{2}{3}\mathbf{e}_x - \frac{2}{3}\mathbf{e}_y + \frac{1}{3}\mathbf{e}_z \quad (3.19)$$

のときの k_{qq} の値を求める。ヒント((3.15)式)を用いて,

$$\begin{aligned} k_{qq} &= \left\{ \frac{2}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \right\} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \\ &= \frac{1}{9} \{2 \quad -2 \quad 1\} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \\ &= \frac{44}{9} \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (3.20)$$

例題 3.2 回転した座標系における透水係数テンソルの求め方

三次元 x, y, z 直角座標系における点 P の透水係数テンソルが,

$$[D_{(xyz)}] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{m/s}) \quad (3.21)$$

で与えられている。 x, y, z 座標系と方向余弦マトリックス:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

で関係づけられた q, r, s 座標系に関する透水係数テンソル $[D_{(qrs)}]$ を求めなさい。

<解答例_例題 3.2>

まず、方向余弦マトリックスの性質： $[A]^T = [A]^{-1}$ を用いて、

$$[A]^{-1} = [A]^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

と表される。したがって、 $[D_{(qrs)}]$ は、(3.10)式を用いて(単位(m/s)は省略して)、次ように計算される。

$$\begin{aligned} [D_{(qrs)}] &= [A] [D_{(xyz)}] [A]^{-1} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 44 & 14 & -8 \\ 14 & 65 & 4 \\ -8 & 4 & 35 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\ &= \begin{bmatrix} 4.88889 & 1.55556 & -0.88889 \\ 1.55556 & 7.22222 & 0.44444 \\ -0.88889 & 0.44444 & 3.88889 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (3.24)$$

4. 透水係数テンソルの主値と主方向、不変量、及び、構造上の透水性と数学的に等価な透水係数テンソル

ここでの議論は、線形代数における固有値問題に同等である。固有方程式(後掲の(4.3b)式参照)の解 λ は、固有値(主透水係数)と呼ばれ、その方向は固有ベクトル(主方向)で表される。また、座標系の取り方によって変わらない値は透水係数テンソルの不変量と呼ばれる。

4.1 主透水係数と主方向の求め方^{10) 11) 4)}

参考文献 7 の第 5 章 5.3 (2) で述べたように、数学的な透水係数テンソル $[D]$ が与えられたとき、主透水係数と主方向は流速ベクトル $\mathbf{v}$ が動水勾配ベクトル $\mathbf{i}$ と一致するという物理的な条件から導かれる。この条件は、

$$\mathbf{v} = [D] \mathbf{i} // \mathbf{i} \quad (4.1)$$

と表すことができる。透水係数テンソルの主値、すなわち主透水係数の大きさを λ とすると、(4.1)式は、

$$[D] \mathbf{i} = \lambda \mathbf{i} \quad (4.2)$$

と表すことができる。ここで、(4.1), (4.2)式は、それぞれ、参考文献 7 の第 5 章 5.3(2)における、(5.8), (5.9)式に同じである。三次元の場合について考えると、(4.2)式は、

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} & k_{zx} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{zy} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (4.3a)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} k_{xx} - \lambda & k_{yx} & k_{zx} \\ k_{xy} & k_{yy} - \lambda & k_{zy} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3b)$$

となる。

まず、透水係数テンソルの主値、すなわち主透水係数の値を求める方法について述べる。(4.3b)式において、動水勾配ベクトル $\{i_x \ i_y \ i_z\}^T$ が $\mathbf{0}$ ベクトル $\{0 \ 0 \ 0\}^T$ 以外の意味のある解をもつためには、

$$\begin{vmatrix} k_{xx} - \lambda & k_{yx} & k_{zx} \\ k_{xy} & k_{yy} - \lambda & k_{zy} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

を満たさなければならない。ここに、 $\{\dots\}^T$ は転置ベクトルを表す。(4.4)式は λ に関する三次方程式となり、3 つの解 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$) が得られる。最も大きい値 λ_1 が最大主透水係数 k_1 、中間の値 λ_2 が中間主透水係数 k_2 、最も小さい値 λ_3 が最小主透水係数 k_3 、すなわち、

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = \lambda_1 \\ k_2 = \lambda_2 \quad (\lambda_2 < \lambda_1) \\ k_3 = \lambda_3 \quad (\lambda_3 < \lambda_2) \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

となる。

次に、透水係数テンソルの主方向、すなわち主透水係数の方向を求める方法について述べる。(4.5)式の値を(4.3b)式に代入することにより、 λ の各値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応してそれぞれ、動水勾配ベクトル $\{i_{x1} \ i_{y1} \ i_{z1}\}^T, \{i_{x2} \ i_{y2} \ i_{z2}\}^T, \{i_{x3} \ i_{y3} \ i_{z3}\}^T$ が得られる。これら 3 つのベクトルを単位ベクトルに正規化したベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{i_{x1}^2 + i_{y1}^2 + i_{z1}^2}} \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{i_{x2}^2 + i_{y2}^2 + i_{z2}^2}} \begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{i_{x3}^2 + i_{y3}^2 + i_{z3}^2}} \begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{y3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix} \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

の方向が最大・最小主透水係数の方向、すなわち透水係数テンソルの主方向を表す。

(4.3b)式を $[D]$ の固有方程式と呼びその根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を固有値と呼ぶ。とくに、マトリックスの成分 k_{ij} が実数値で対称 ($k_{ij} = k_{ji}$)であるならば $[D]$ の固有値は実数となる。

4.2 例題－固有値の求め方－

ここでは、透水係数テンソルの主透水係数と主方向の値の求め方に関する例題を取り上げる。付録2に他の例題を示したので、参照のこと。また、ここでは、主方向の向きの計算において、単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が右手系になるように(すなわち $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ となるように)、まず、 $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_3$ の値を決定し、次に、ベクトル $\mathbf{e}_2$ の向きを調整している。

例題 4.1 透水係数テンソルの主透水係数と主方向の値の求め方

三次元 x, y, z 直角座標系における点 P の透水係数テンソルが、

$$[D] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{m/s}) \quad (4.7)$$

で与えられている。主透水係数の値と主方向を求めなさい。

<解答例_例題 4.1>

主方向は、流速ベクトル $\mathbf{v}$ が動水勾配ベクトル $\mathbf{i}$ と一致する方向であるという物理的な条件：

$$\mathbf{v} = [D] \mathbf{i} // \mathbf{i} \quad (4.1)$$

から求めることができる。主透水係数の大きさを λ とすると、(4.1)式は、

$$[D] \mathbf{i} = \lambda \mathbf{i} \quad (4.2)$$

すなわち、計算過程では、指数と単位($\times 10^{-4} \text{ m/s}$)を省略して、

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (4.8a)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 7-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.8b)$$

となる。(4.8b)式が、 $\mathbf{i}^T = \{0 \ 0 \ 0\}^T$ 以外の解を持つためには、

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

でなければならない。すなわち、

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ = (7-\lambda)(5-\lambda)(4-\lambda) - 4(5-\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= (5-\lambda)(8-\lambda)(3-\lambda) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

となり, 固有値 λ は,

$$\lambda = 8, 5, 3 \quad (\times 10^{-4} \text{ m/s}) \tag{4.11}$$

と求めることができる。それぞれ, 主透水係数 k_1, k_2, k_3 とおくことができる。

$$\lambda_1 = k_1 = 8 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_2 = k_2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_3 = k_3 = 3 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

正規化した固有値ベクトルは, 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対して, それぞれ, 次のように求めることができる。

(i) $\lambda_1 = k_1 = 8 \quad (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

(4.8b)式より,

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} = 0 \tag{4.12a}$$

$$\therefore \begin{cases} -i_{x1} - 2i_{z1} = 0 \\ -3i_{y1} = 0 \\ -2i_{x1} - 4i_{z1} = 0 \end{cases} \tag{4.12b}$$

となる。方向単位ベクトル i_{x1}, i_{y1}, i_{z1} として,

$$\begin{cases} i_{x1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ i_{y1} = 0 \\ i_{z1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \tag{4.13}$$

を得る。

(ii) $\lambda_2 = k_2 = 5 \quad (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

(4.8b)式より,

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = 0 \tag{4.14a}$$

$$\therefore \begin{cases} 2i_{x2} - 2i_{z2} = 0 \\ -2i_{x2} - i_{z2} = 0 \end{cases} \tag{4.14b}$$

となる。方向単位ベクトル i_{x2}, i_{y2}, i_{z2} として,

$$\begin{cases} i_{x2} = 0 \\ i_{y2} = 1 \\ i_{z2} = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

を得る。

(iii) $\lambda_3 = k_3 = 3 \quad (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

(4.8b)式より,

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{y3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{y3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.16a)$$

$$\therefore \begin{cases} 4i_{x3} - 2i_{z3} = 0 \\ 2i_{y3} = 0 \\ -2i_{x3} + i_{z3} = 0 \end{cases} \quad (4.16b)$$

となる。方向単位ベクトル i_{x3}, i_{y3}, i_{z3} として、

$$\begin{cases} i_{x3} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ i_{y3} = 0 \\ i_{z3} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad (4.17)$$

を得る。

4.3 透水係数テンソルの不変量 ^{10) 11) 4)}

λ に関する三次方程式(4.4)が3つの解 k_1, k_2, k_3 をもつとすると、恒等的な関係式

$$\begin{vmatrix} k_{xx} - \lambda & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{xy} & k_{yy} - \lambda & k_{yz} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_3 - \lambda) \quad (4.18)$$

が成り立つ。(4.18)式は書き直すと、

$$\begin{aligned} & (k_{xx} - \lambda)(k_{yy} - \lambda)(k_{zz} - \lambda) + k_{xy} k_{yz} k_{zx} + k_{zy} k_{yx} k_{xz} \\ & \quad - k_{yz} k_{zy} (k_{xx} - \lambda) - k_{zx} k_{xz} (k_{yy} - \lambda) - k_{xy} k_{yx} (k_{zz} - \lambda) \\ & = (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_3 - \lambda) \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる。(4.19)式は λ に関する恒等式であるので、 λ^2 の係数、 λ の係数、及び、定数項をそれぞれ等値して、

$$III_1 = k_1 + k_2 + k_3 = k_{xx} + k_{yy} + k_{zz} \quad (4.20)$$

$$III_2 = k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1 = k_{xx} k_{yy} + k_{yy} k_{zz} + k_{zz} k_{xx} - k_{xy} k_{yx} - k_{yz} k_{zy} - k_{zx} k_{xz} \quad (4.21)$$

$$III_3 = k_1 k_2 k_3 = k_{xx} k_{yy} k_{zz} - k_{xx} k_{yz} k_{zy} - k_{yy} k_{zx} k_{xz} - k_{zz} k_{xy} k_{yx} + k_{xy} k_{yz} k_{zx} + k_{zy} k_{yx} k_{xz} \quad (4.22)$$

なる有用な関係式が得られる。(4.20), (4.21), (4.22)式で表される値 III_1, III_2, III_3 は座標系の取り方に関係しない値であり、透水係数テンソルの不変量と呼ばれる。

4.4 構造上の透水性と数学的に等価な透水係数テンソル

ここでは、構造上の節理面(透水性の面)が二つありそれらが直交していない場合、構造上の透水性とそれと数学的に等価な透水係数テンソルがどのような関係にあるかについて考える。ここでは、Figs.4.1(a), (b)に示すように、構造上の節理面(透水性の面)が二面ありそれらを $q-r$ 面、及び、 $r'-s'$ 面とし、これらの面が直交していない場合について考える。また、Fig.4.1(a) に示すように、 $x-z$ 座標系においては、節理面は線で表されている。ここで、 q と s' がなす角度を θ_0 とする。

第一番目の構造上の $q-r$ 節理面における q 方向(透水成分が k_{qq} で表される方向)に関係した新しい直角座標系 $q-r-s$ を考える。ここで、 $q-r-s$ 座標系は $x-y-z$ 座標系を y 軸まわりに反時計回りに(すなわち、 y 軸について右ねじが進む方向とは逆回りに) θ だけ回転した新しい座標系である (Fig.4.1(b)参照)。そして、 r 軸は $q-s$ 面に直交し、紙面奥行き方向(向こう向き)を正にとる。また、 r 方向の透水成分を k_{rr} とする。動水勾配 $\{i_x, i_y, i_z\}^T$ が作用したときに、 k_{qq} 、 k_{rr} と k_{qr} ($=k_{rq}$) によって引き起こされる流速 $\{v_x, v_y, v_z\}^T$ は、(3.8)～(3.10)式を参照して、次のようにして求めることができる。

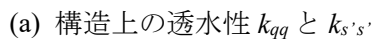


Fig.4.1 構造上の透水性の方向が直交しない場合

$$\begin{Bmatrix} v_q \\ v_r \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{qq} & k_{rq} & 0 \\ k_{qr} & k_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_q \\ i_r \\ i_s \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{qq} & k_{rq} & 0 \\ k_{qr} & k_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \\ \therefore \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{qq} & k_{rq} & 0 \\ k_{qr} & k_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_{qq} \cos^2 \theta & k_{rq} \cos \theta & k_{qq} \sin \theta \cos \theta \\ k_{qr} \cos \theta & k_{rr} & k_{qr} \sin \theta \\ k_{qq} \sin \theta \cos \theta & k_{rq} \sin \theta & k_{qq} \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

(4.24)式は、(2.8)式と本質的に同じ形をしている(正確には、(2.8)式において、 $\alpha_j = \theta$, $\beta_j = \pi/2$, $\gamma_j = \pi/2 - \theta$ とおいたものに等しい)。言い換えれば、(4.24)式は、任意の $\{i_x, i_y, i_z\}^T$ が作用したときに、節理面の透水性 k_{qq}, k_{rr} と $k_{qr} (= k_{rq})$ により、 x, y, z 方向に生じる流速を表している。

(2) $r'-s'$ 節理面における ($k_{r'r'}$, $k_{s's'}$ と $k_{r's'} (= k_{s'r'})$ による) 流れ

二つ目の構造上の $r'-s'$ 節理面における s' 方向(透水成分が $k_{s's'}$ で表される)に関係した座標軸 s' から時計回りに 90° の方向に q' の座標をとり、構造上の $r'-s'$ 節理面に関係する直交座標系 $q'-r'-s'$ を考える (Fig.4.1(b)参照)。ここに、 r' 軸は $q'-s'$ 面に直交し、紙面奥行き方向(向こう向き)を正にとる。また、 $r=r'=y$ であり、 r' 方向の透水性を $k_{r'r'}$ とする。また、 x 軸と q' 軸のなす角を θ' とする。ここで、 $\theta' = \theta_0 + \theta - \pi/2$ の関係がある。この場合、動水勾配 $\{i_x, i_y, i_z\}^T$ が作用したときに、 $k_{r'r'}$, $k_{s's'}$ と $k_{r's'} (= k_{s'r'})$ によって引き起こされる流速 $\{v_x, v_y, v_z\}^T$ は、前述の(1)と同様にして次のようにして求めることができる。

$$\begin{Bmatrix} v_{q'} \\ v_{r'} \\ v_{s'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r'r'} & k_{s'r'} \\ 0 & k_{r's'} & k_{s's'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{q'} \\ i_{r'} \\ i_{s'} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{bmatrix} \cos \theta' & 0 & \sin \theta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta' & 0 & \cos \theta' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r'r'} & k_{s'r'} \\ 0 & k_{r's'} & k_{s's'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta' & 0 & \sin \theta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta' & 0 & \cos \theta' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \\ \therefore \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta' & 0 & -\sin \theta' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta' & 0 & \cos \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{r'r'} & k_{s'r'} \\ 0 & k_{r's'} & k_{s's'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta' & 0 & \sin \theta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta' & 0 & \cos \theta' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_{s's'} \sin^2 \theta' & -k_{r's'} \sin \theta' & -k_{s's'} \sin \theta' \cos \theta' \\ -k_{s'r'} \sin \theta' & k_{r'r'} & k_{s'r'} \cos \theta' \\ -k_{s's'} \sin \theta' \cos \theta' & k_{r's'} \cos \theta' & k_{s's'} \cos^2 \theta' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

(4.26)式は、(1)と同様に、任意の $\{i_x, i_y, i_z\}^T$ が作用したときに、節理面の透水性 $k_{r'r'}$, $k_{s's'}$ と $k_{r's'} (= k_{s'r'})$ により、 x, y, z 方向に生じる流速を表している。

(3) $q-r$ 節理面における k_{qq} , k_{rr} と $k_{qr} (= k_{rq})$ による流れ, 及び, $r'-s'$ 節理面における $k_{r'r'}$, $k_{s's'}$ と $k_{r's'} (= k_{s'r'})$ による流れ

$q-r$ 節理面における k_{qq} , k_{rr} と $k_{qr} (= k_{rq})$ による流れ, 及び, $r'-s'$ 節理面における $k_{r'r'}$, $k_{s's'}$ と $k_{r's'} (= k_{s'r'})$ による流れは, (4.24), (4.26)式を重ね合わせることによって得られ次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{qq} \cos^2 \theta + k_{s's'} \sin^2 \theta' & k_{rq} \cos \theta - k_{r's'} \sin \theta' & k_{qq} \sin \theta \cos \theta - k_{s's'} \sin \theta' \cos \theta' \\ k_{qr} \cos \theta - k_{s'r'} \sin \theta' & k_{rr} + k_{r'r'} & k_{qr} \sin \theta + k_{s'r'} \cos \theta' \\ k_{qq} \sin \theta \cos \theta - k_{s's'} \sin \theta' \cos \theta' & k_{rq} \sin \theta + k_{r's'} \cos \theta' & k_{qq} \sin^2 \theta + k_{s's'} \cos^2 \theta' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

(4.27)式からわかるように, 構造上の節理面(透水性の面)が二つありそれらが直交していない場合にも, それと数学的に等価な透水係数テンソルが存在し対称となる。

(4) 数学的に等価な透水係数テンソルの主値と主方向

「 $q-r$ 節理面における k_{qq} , k_{rr} と $k_{qr} (= k_{rq})$ による流れ, 及び, $r'-s'$ 節理面における $k_{r'r'}$, $k_{s's'}$ と $k_{r's'} (= k_{s'r'})$ による流れ」と「それらと数学的に等価な地盤の透水係数テンソル k_{ij} ($i, j = x, y, z$)」は, (4.27)式から, $x-y-z$ 座標系において,

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} & k_{zx} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{zy} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{qq} \cos^2 \theta + k_{s's'} \sin^2 \theta' & k_{rq} \cos \theta - k_{r's'} \sin \theta' & k_{qq} \sin \theta \cos \theta - k_{s's'} \sin \theta' \cos \theta' \\ k_{qr} \cos \theta - k_{s'r'} \sin \theta' & k_{rr} + k_{r'r'} & k_{qr} \sin \theta + k_{s'r'} \cos \theta' \\ k_{qq} \sin \theta \cos \theta - k_{s's'} \sin \theta' \cos \theta' & k_{rq} \sin \theta + k_{r's'} \cos \theta' & k_{qq} \sin^2 \theta + k_{s's'} \cos^2 \theta' \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

と表すことができる。 $\theta' = \theta_0 + \theta - \pi/2$ を(4.28)式に代入して整理すると,

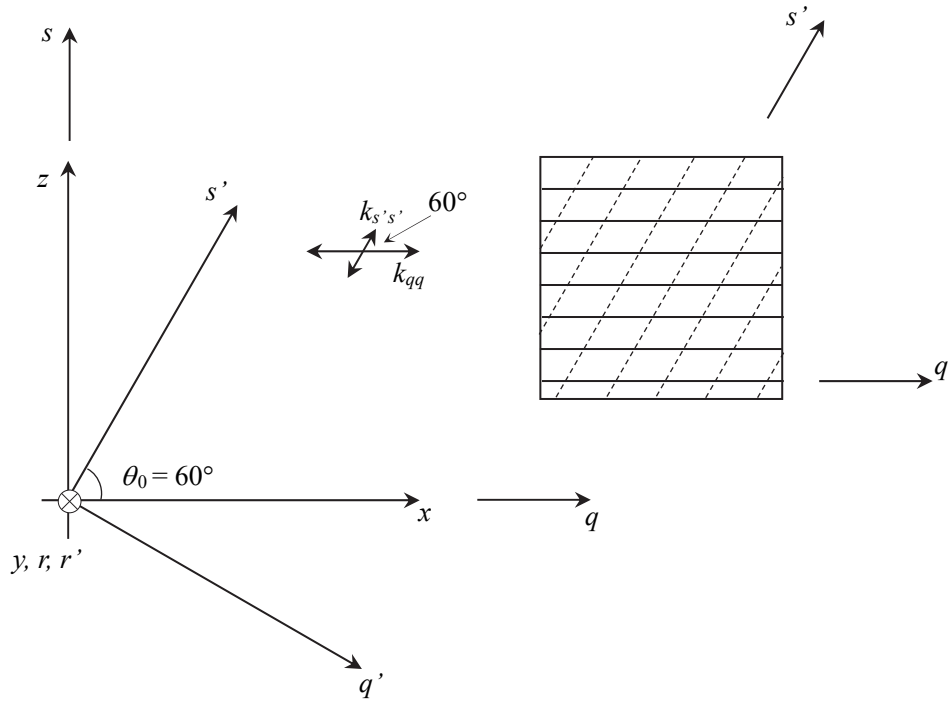
$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} & k_{zx} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{zy} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{qq} \cos^2 \theta + k_{s's'} \cos^2 (\theta_0 + \theta) & k_{rq} \cos \theta + k_{r's'} \cos (\theta_0 + \theta) & k_{qq} \sin \theta \cos \theta + k_{s's'} \sin (\theta_0 + \theta) \cos (\theta_0 + \theta) \\ k_{qr} \cos \theta + k_{s'r'} \cos (\theta_0 + \theta) & k_{rr} + k_{r'r'} & k_{qr} \sin \theta + k_{s'r'} \sin (\theta_0 + \theta) \\ k_{qq} \sin \theta \cos \theta + k_{s's'} \sin (\theta_0 + \theta) \cos (\theta_0 + \theta) & k_{rq} \sin \theta + k_{r's'} \sin (\theta_0 + \theta) & k_{qq} \sin^2 \theta + k_{s's'} \sin^2 (\theta_0 + \theta) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

となる。数学的に等価な透水係数テンソル((4.29)式)の主値及び主方向は, それぞれ三つあるが, 次の例題 4.2 に示すように, $x-z$ 座標系において, 構造上の物理的な節理面(透水性の面)の方向 θ (q 方向), 及び, θ' (s' 方向)と一致しないことがわかる。

[例題 4.2]

< Problem >

$\theta = 0^\circ$, $\theta_0 = 60^\circ$ の場合について考える。ここで, $k_{qq} = 1.0 \times 10^{-4}$ cm/s, $k_{rr} = k_{r'r'} = 0.25 \times 10^{-4}$ cm/s, $k_{s's'} = 0.5 \times 10^{-4}$ cm/s, $k_{qr} = k_{rq} = 0$, $k_{r's'} = k_{s'r'} = 0$ とする (Fig.Ex.4.1 (a))。この場合, 「 $q-r$ 節理面の透水性 k_{qq} , k_{rr} と $k_{qr} (= k_{rq})$ による流れ, 及び, $r'-s'$ 節理面の透水性 $k_{r'r'}$, $k_{s's'}$ と $k_{r's'} (= k_{s'r'})$ による流れ」, 及び, 「それらと数学的に等価な透水係数テンソル」を求め, 主透水係数の値と方向を求めなさい。



(a) 構造上の透水性一座標軸 $q'-s'$ と $x-z$ の関係－
(紙面に垂直方向の透水性 $k_{rr}, k_{r'r'}$ は $k_{rr} = k_{r'r'}$ とする)

Fig.Ex.4.1 構造上の透水性とそれと数学的に等価な透水係数テンソル (Continue)

< Answer >

(4.29)式に与えられた条件を代入すると,

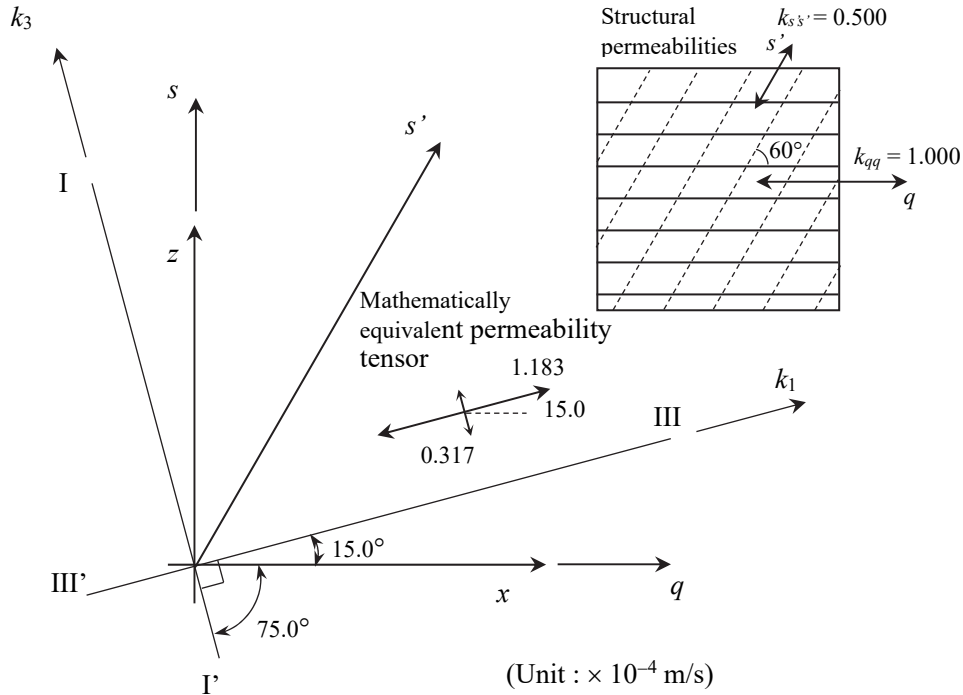
$$\begin{aligned}
 [D] &= \begin{bmatrix} k_{qq} \cos^2 \theta + k_{s's'}, \cos^2(\theta_0 + \theta) & k_{rq} \cos \theta + k_{r's'}, \cos(\theta_0 + \theta) \\ k_{qr} \cos \theta + k_{s'r'}, \cos(\theta_0 + \theta) & k_{rr} + k_{r'r'} \\ k_{qq} \sin \theta \cos \theta + k_{s's'}, \sin(\theta_0 + \theta) \cos(\theta_0 + \theta) & k_{rq} \sin \theta + k_{r's'}, \sin(\theta_0 + \theta) \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} k_{qq} \sin \theta \cos \theta + k_{s's'}, \sin(\theta_0 + \theta) \cos(\theta_0 + \theta) \\ k_{qr} \sin \theta + k_{s'r'}, \sin(\theta_0 + \theta) \\ k_{qq} \sin^2 \theta + k_{s's'}, \sin^2(\theta_0 + \theta) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1.0 + 0.5 \times \frac{1}{4} & 0 & 0.5 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0.5 \times \frac{3}{4} \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\
 &= \begin{bmatrix} 1.125 & 0 & 0.21651 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.21651 & 0 & 0.375 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

となる。参考文献 7 を参照して、または、4.1, 4.2 節を参照して計算すると、最大主透水係数の値

k_1 と方向 $\{i_{x1}, i_{y1}, i_{z1}\}^T$, 中間主透水係数の値 k_2 と方向 $\{i_{x2}, i_{y2}, i_{z2}\}^T$, 及び, 最小主透水係数の値 k_3 と方向 $\{i_{x3}, i_{y3}, i_{z3}\}^T$ が次のように得られる。

＜数学的に等価な透水係数テンソル—主透水係数と主方向—＞

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 1.18301 \times 10^{-4} \text{ cm/s}, \quad \{i_{x1}, i_{y1}, i_{z1}\}^T = \{0.96593, 0.0, 0.25882\}^T \\ k_2 &= 0.50000 \times 10^{-4} \text{ cm/s}, \quad \{i_{x2}, i_{y2}, i_{z2}\}^T = \{0.0, 1.0, 0.0\}^T \\ k_3 &= 0.31699 \times 10^{-4} \text{ cm/s}, \quad \{i_{x3}, i_{y3}, i_{z3}\}^T = \{-0.25882, 0.0, 0.96593\}^T \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$



(b) 数学的に等価な透水係数テンソル—主値と主方向—

Fig.Ex.4.1 構造上の透水性, 及び, それと数学的に等価な透水係数テンソル (Continued)

このようにして, 例題 4.2 の場合, 中間主透水係数 k_2 の値は, $k_2 = 0.50 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$ となり, その方向は $y = (r = r')$ 軸と一致する。また, $x-z$ 座標系に関して, 問題の地盤と数学的に等価な透水係数テンソルをみると, Fig.Ex.4.1(b)に示すように, 最大主透水係数の方向は x 軸より反時計回りに $\beta (= 15^\circ)$ (または z 軸より時計回りに $\alpha (= 75^\circ)$) となる。すなわち, 構造上の透水性の方向は, x 軸より反時計回りに, $\theta = 0^\circ$ と 60° であるのに対して, 数学的に等価な透水係数テンソルの主方向は, x 軸より反時計回りに, $\beta = 15^\circ$ (最大主透水係数の方向) と $\beta + 90^\circ = 105^\circ$ (最小主透水係数の方向) となる。このようにして, 一般的に構造上の節理面(透水性の面, すなわち, 物理的な透水性の方向)とそれと数学的に等価な透水係数テンソルの主方向は一致しないこと, また, 数学的に等価な透水係数テンソルは対称であり主方向は直交することが確かめられる。

(4) 4.4 節まとめ

構造上の節理面(透水性の面)が二つあり, それらが直交しないとき, その地盤について, 「構造

上の透水性(k_{qq} , k_{rr} と $k_{qr}(=k_{rq})$), 及び, $k_{r'r'}$, $k_{s's'}$ と $k_{r's'}(=k_{s'r'})$)」及び「数学的に等価な透水係数テンソル((4.29)式)」が定義できる。この数学的に等価な透水係数テンソルは対称となり, 4.1, 4.2 節で述べたと同じように, 誘導成分(非対角成分)が 0 となる方向(主方向)が三つあり直交することがわかる。また, この透水係数の主方向は構造上の節理面(物理的な透水性の方向)とは一般的に一致しない。

5. 結論

土は一般的に浸透流に関して異方性を有している。異方透水性は地盤の浸透流及び浸透破壊特性に大きな影響を及ぼすことが知られている。したがって, 異方透水性地盤における浸透流の基本的性質を明らかにするためには, 透水係数の数学的性質を明らかにしなければならない。

ここでは, 三次元異方透水性地盤の水の流れについて, 対称テンソルとしての透水係数とその性質, 点における透水係数テンソルの特性(すなわち, 透水係数テンソルの座標変換と透水係数成分の正方向の定義など)について議論した。そして, 透水係数テンソルの主値と主方向(すなわち, 主透水係数とその方向)及び不変量, 構造上の透水性とそれと数学的に等価な透水係数テンソルについて考察し, 次の結論を得た。

- (1) 管水路中, または, 水みち中の水の流れに関する議論から, 地盤の透水係数成分が対称テンソルであることを示した。
- (2) 透水係数テンソルの成分は, 水みちの分布(または配置パターン)と関係することを明らかにした。
- (3) 透水係数テンソル成分の正方向を定義し, 点における透水係数テンソルの特性(すなわち, 透水係数テンソルの座標変換と透水係数成分の正方向の定義など)について議論した。
- (4) 透水係数テンソルの主値と主方向(すなわち, 主透水係数とその方向)及び不変量について示した。
- (5) 構造上の節理面(透水性の面)が二つあり, それらが直交しないとき, その地盤について「構造上の物理的な透水性」と「数学的に等価な透水係数テンソル」が定義できることを示した。そして, 数学的に等価な透水係数テンソルは, 一般的に対称であり, 誘導成分(非対角成分)が 0 となる方向(主方向)が三つあり直交すること, 数学的に等価な透水係数テンソルの主方向は構造上の物理的な透水性の方向とは一般的に一致しないことを示した。

また, 式の展開や例題・問題の解答作業に必要な「ベクトルの乗算」, 理論展開の理解に役立つ「三次元透水係数テンソルに関する問題と解答例」, 座標変換の理解に必要な「回転座標変換行列」について, とくに付録として補充的に説明した。

付録 1 ベクトルの乗算

付録 2 三次元透水係数テンソルに関する問題と解答例

付録 3 回転座標変換行列

参考文献

- 1) 田中 勉 (2016): 地盤の異方透水性とその発現メカニズム, 神戸大学都市安全研究センター研究報告, 第 20 号, pp.239-261.

- 2) 田中 勉, 野々村圭造, 富樫理恵, 宇野千佳子 (2017): 土の異方透水性が浸透流特性と浸透破壊及びすべり安定性に及ぼす影響, 神戸大学都市安全研究センター研究報告, 第 21 号, pp.289-298, 平成 29 年 3 月.
- 3) Harr, M. E. (1962): Groundwater and Seepage, McGraw Hill, pp.26-35.
- 4) Bear, J.(1972): Dynamics of Fluids in Porous Media, Elsevier.
- 5) Verruijt, A. (1982): Theory of Groundwater Flow, 2nd ed., Macmillan.
- 6) Bear, J. and Verruijt, A. (1987): Modeling Groundwater Flow and Pollution (Theory and Applications of Transport in Porous Media No.2), Springer.
- 7) 田中 勉, Arnold Verruijt (2018): 異方透水性地盤における浸透水の流れ ―透水係数テンソルとモール円―, 神戸大学都市安全研究センター研究報告, 第 22 号, pp.140-162, 平成 30 年 3 月 31 日.
- 8) Lamb, H. (1932): Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge University Press.
- 9) Derski, W. et al. (1989): Rock and Soil Mechanics, Elsevier.
- 10) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (1979): Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill (1st ed. 1934).
- 11) Atkinson, J.H. & Bransby, P.L. (1978): The Mechanics of Soils, McGraw-Hill, London.

著者

- 1) 田中 勉, 神戸大学名誉教授
- 2) アーノルド フェライト, デルフト工科大学, オランダ, 名誉教授

付録1 ベクトルの乗算

ここでは、ベクトルの三種類の乗算（スカラー倍、スカラー積（内積）、及び、ベクトル積（外積））を取りあげ、それらの計算方法を示しておく。

A1.1 三種類のベクトル乗算の計算手順

(1) ベクトルのスカラー倍

$s\mathbf{a}$ … ベクトルのスカラー倍 $s\mathbf{a}$ に関して、その大きさは、ベクトル $\mathbf{a}$ の大きさとスカラー s の大きさの絶対値の積、その向きは、 $s > 0$ のときベクトル $\mathbf{a}$ と同じ向き、 $s < 0$ のときベクトル $\mathbf{a}$ と反対向きとなる。

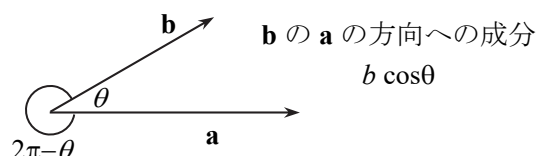
(2) スカラー積（内積）（Scalar product, dot product, inner product）

ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のスカラー積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の成す角を θ 、大きさをそれぞれ a, b とし、成分をそれぞれ $(a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z)$ とすると、次のように計算される。

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= ab \cos \theta = (ab \cos(2\pi - \theta)) \\ &= a(b \cos \theta) \\ &= b(a \cos \theta)\end{aligned}\quad (\text{A1.1})$$

$\theta = 0^\circ$ のとき $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は最大

$\theta = 90^\circ$ のとき $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$



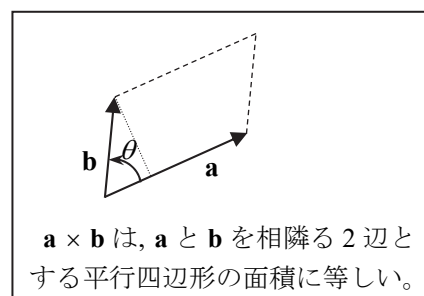
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \text{ (交換法則)} \quad (\text{A1.2})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\end{aligned}\quad (\text{A1.3})$$

$$\therefore \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (\text{A1.4})$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad (\text{A1.5})$$

ここに、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は x, y, z 座標軸の正方向の単位ベクトルである。



(3) ベクトル積（外積）（Vector product, cross product, outer product）

ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のベクトル積 $\mathbf{c} (= \mathbf{a} \times \mathbf{b})$:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (\text{A1.6})$$

について考える。

① $\mathbf{c}$ を幾何学的に表すと次のようになる。

$$\mathbf{c} \text{ の大きさ } c : c = ab \sin \theta \quad (\text{A1.7})$$

θ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角のうち小さい方の角をとる。

（平行移動させて始点同士を一致させる）

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \text{ のとき } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{A1.8})$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \text{ のとき } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \text{ は最大となる。} \quad (\text{A1.9})$$

$\mathbf{c}$ の向き：右手ルール（右ねじの法則、 $\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ へ回転したとき右ねじが進む方向）

◎ ベクトルを平行移動して、始点同士を一致させる。

◎ 右手の指（親指を除く 4 本）を $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ へ向かって小さい方の角を掃くように動かす。そのとき、伸ばした右手親指の向きが $\mathbf{c}$ の向きを表す。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \quad \text{ベクトル積では交換法則は成り立たない} \quad (\text{A1.10})$$

② $\mathbf{c}$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の成分で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}\end{aligned}\tag{A1.11}$$

分配法則

$$\because \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}\tag{A1.12}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}\tag{A1.13}$$

③ $\mathbf{c}$ を行列式を使って表すと次のようになる。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad \text{行列式 (Determinant)}\tag{A1.14a}$$

$$= \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\tag{A1.14b}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}\tag{A1.11}$$

A1.2 ベクトル積(外積) (Vector product, cross product, outer product) と行列式 (Determinant) の関係, または, ベクトル積を行列式で表す方法

以下に, 参考として, 「成分で表した式(A1.11)」から「行列式を使った式(A1.14a)」への誘導方法を示しておく。

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

付録2 三次元透水係数テンソルに関する問題と解答例

ここでは、主方向の向きの計算において、単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が右手系になるように(すなわち $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ となるように)、まず、 $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_3$ の値を決定し、次に、ベクトル $\mathbf{e}_2$ の向きを調整している。

問題 A2.1 ある方向についての透水係数成分の求め方

三次元 x, y, z 直角座標系における点 P の透水係数テンソルが、

$$[D] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25 & 2 & 8 \\ 2 & 34 & 10 \\ 8 & 10 & 31 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{m/s}) \quad (\text{A2.1})$$

と与えられたとき、 $\mathbf{e}_q = \frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_z$ の方向の透水係数成分 k_{qq} を求めなさい。

<ヒント_問題 A2.1>

三次元座標系 x, y, z 及び q, r, s について考える。方向余弦行列を $[A]$ とおき、

$$\begin{Bmatrix} q \\ r \\ s \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.2})$$

としたとき、

$$[D_{(qrs)}] = [A] [D_{(xyz)}] [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{e}_q\}^T \\ \{\mathbf{e}_r\}^T \\ \{\mathbf{e}_s\}^T \end{bmatrix} [D_{(xyz)}] \begin{bmatrix} \{\mathbf{e}_q\} & \{\mathbf{e}_r\} & \{\mathbf{e}_s\} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.3})$$

または、透水係数成分 $k_{ij} (i, j = q, r, s)$ に関して、

$$k_{ij} = D_{ij}^{(nrs)} = \{\mathbf{e}_i\}^T [D^{(xyz)}] \{\mathbf{e}_j\}, \quad (i, j = q, r, s) \quad (\text{A2.4})$$

と表される。ここに、 $\mathbf{e}_q, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s$ はそれぞれ q, r, s 座標の単位ベクトル：

$$\{\mathbf{e}_q\} = \begin{Bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \\ e_{z1} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{e}_r\} = \begin{Bmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \\ e_{z2} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{e}_s\} = \begin{Bmatrix} e_{x3} \\ e_{y3} \\ e_{z3} \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.5a})$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_q\}^T &= \{e_{x1}, e_{y1}, e_{z1}\} \\ \{\mathbf{e}_r\}^T &= \{e_{x2}, e_{y2}, e_{z2}\} \\ \{\mathbf{e}_s\}^T &= \{e_{x3}, e_{y3}, e_{z3}\} \end{aligned} \quad (\text{A2.5b})$$

である。ここで、 $[D^{(xyz)}], [D^{(qrs)}]$ はそれぞれ、 x, y, z 座標系及び q, r, s 座標系に関する透水係数マトリックスである。また、 $[D^{(xyz)}] = [D_{(xyz)}]$ などを意味し、上付き、下付きはそのときの表示の都合による。 $[D_{(xyz)}]$ は x, y, z 座標系における透水係数テンソルであることを表す。また、方向余弦行列 $[A]$ は正規直交行列であり、逆行列 $[A]^{-1}$ 、及び、転置行列 $[A]^T$ は等しい。

$$[A]^{-1} = [A]^T \quad (\text{A2.6})$$

<解答例_問題 A2.1>

問題を再記し, 単位 (m/s) は省略して,

$$[D] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25 & 2 & 8 \\ 2 & 34 & 10 \\ 8 & 10 & 31 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{A2.7})$$

$$\mathbf{e}_q = \frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_z \quad (\text{A2.8})$$

のときの k_{qq} の値を求める。<ヒント_問題 A2.1>を用いて,

$$\begin{aligned} k_{qq} &= \left\{ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25 & 2 & 8 \\ 2 & 34 & 10 \\ 8 & 10 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\ &= \frac{1}{36} \{1 \quad 1 \quad \sqrt{2}\} \begin{bmatrix} 25 & 2 & 8 \\ 2 & 34 & 10 \\ 8 & 10 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\ &= \frac{1}{36} (125 + 36\sqrt{2}) \times 10^{-4} \\ &= 4.8864 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (\text{A2.9})$$

と求められる。

問題 A2.2 回転した座標系における透水係数テンソルの求め方

三次元 x, y, z 直角座標系における点 P の透水係数テンソルが,

$$[D_{(xyz)}] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25 & 2 & 8 \\ 2 & 34 & 10 \\ 8 & 10 & 31 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{m/s}) \quad (\text{A2.10})$$

で与えられている。 x, y, z 座標系と方向余弦マトリックス:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.11a})$$

で関係づけられた q, r, s 座標系に関する透水係数テンソル $[D_{(qrs)}]$ を求めなさい。

<解答例_問題 A2. 2>

まず、方向余弦マトリックスの性質： $[A]^{-1}=[A]^T$ を用いて、

$$[A]^{-1}=[A]^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.11b})$$

と表される。したがって、 $[D_{(qrs)}]$ は、単位(m/s)を省略して、次ように計算される。

$$\begin{aligned} [D_{(qrs)}] &= [A] [D_{(xyz)}] [A]^{-1} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25 & 2 & 8 \\ 2 & 34 & 10 \\ 8 & 10 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\ &= \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 125+36\sqrt{2} & 4+9\sqrt{2} & -1 \\ 4+9\sqrt{2} & 10 & 4-9\sqrt{2} \\ -1 & 4-9\sqrt{2} & 125-36\sqrt{2} \end{bmatrix} \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (\text{A2.12})$$

もちろん、(A2.12)式の k_{qq} の値は、問題 A2.1 の k_{qq} の値 ((A2.9)式) と一致することがわかる。

問題 A2. 3 透水係数テンソルの主方向と主透水係数の値の求め方

三次元 x, y, z 直角座標系における点 P の透水係数テンソルが、

$$[D] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25 & 2 & 8 \\ 2 & 34 & 10 \\ 8 & 10 & 31 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{m/s}) \quad (\text{A2.13})$$

で与えられている。主透水係数の値と主方向を求めなさい。

<解答例_問題 A2. 3>

主方向は、流速ベクトル $\mathbf{v}$ が動水勾配ベクトル $\mathbf{i}$ と一致する方向であるという物理的な条件から、主透水係数の大きさを λ とすると、(A2.13)式と、

$$[D] \mathbf{i} = \lambda \mathbf{i} \quad \text{本文(4.2)}$$

から、計算過程では、指数と単位 ($\times 10^{-4}$ m/s) を省略して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25 & 2 & 8 \\ 2 & 34 & 10 \\ 8 & 10 & 31 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \\ \therefore \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25-9\lambda & 2 & 8 \\ 2 & 34-9\lambda & 10 \\ 8 & 10 & 31-9\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.14})$$

となる。動水勾配ベクトルが 0 ベクトル以外の意味のある解をもつためには、

$$\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 25-9\lambda & 2 & 8 \\ 2 & 34-9\lambda & 10 \\ 8 & 10 & 31-9\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A2.15})$$

を満たさなければならない。したがって、 λ の値は、

$$\begin{vmatrix} 25-9\lambda & 2 & 8 \\ 2 & 34-9\lambda & 10 \\ 8 & 10 & 31-9\lambda \end{vmatrix} \\
= (25-9\lambda)(34-9\lambda)(31-9\lambda) + 160 + 160 - 64(34-9\lambda) - 100(25-9\lambda) - 4(31-9\lambda) \\
= (5-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) \\
= 0$$
(A2.16)

$$\therefore \lambda = 5, 3, 2 \quad (\times 10^{-4} \text{ m/s}) \quad (\text{A2.17})$$

と求めることができる。最大、中間、及び、最小主透水係数を、 k_1, k_2 , 及び、 k_3 とすると、

$$\lambda_1 = k_1 = 5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_2 = k_2 = 3 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_3 = k_3 = 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

となる。次に、 $\lambda = 5, 3, 2 \quad (\times 10^{-4} \text{ m/s})$ に対応して、正規化した動水勾配ベクトルを求めると次のようになる。

(i) $\lambda_1 = k_1 = 5 \quad (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25-9\lambda & 2 & 8 \\ 2 & 34-9\lambda & 10 \\ 8 & 10 & 31-9\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -20 & 2 & 8 \\ 2 & -11 & 10 \\ 8 & 10 & -14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} = 0$$
(A2.18)

$$\therefore \begin{cases} -20i_{x1} + 2i_{y1} + 8i_{z1} = 0 \\ 2i_{x1} - 11i_{y1} + 10i_{z1} = 0 \\ 8i_{x1} + 10i_{y1} - 14i_{z1} = 0 \end{cases}$$
(A2.19)

$$\therefore \begin{cases} i_{x1} = \frac{1}{3} \\ i_{y1} = \frac{2}{3} \\ i_{z1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$
(A2.20)

(ii) $\lambda_2 = k_2 = 3 \quad (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25-9\lambda & 2 & 8 \\ 2 & 34-9\lambda & 10 \\ 8 & 10 & 31-9\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 2 & 7 & 10 \\ 8 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = 0$$
(A2.21)

$$\therefore \begin{cases} -2i_{x2} + 2i_{y2} + 8i_{z2} = 0 \\ 2i_{x2} + 7i_{y2} + 10i_{z2} = 0 \\ 8i_{x2} + 10i_{y2} + 4i_{z2} = 0 \end{cases}$$
(A2.22)

$$\therefore \begin{cases} i_{x2} = \frac{2}{3} \\ i_{y2} = -\frac{2}{3} \\ i_{z2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$
(A2.23)

(iii) $\lambda_3 = k_3 = 2$ ($\times 10^{-2}$ cm/s) のとき

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 25-9\lambda & 2 & 8 \\ 2 & 34-9\lambda & 10 \\ 8 & 10 & 31-9\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{y3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 2 & 16 & 10 \\ 8 & 10 & 13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{y3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{A2.24})$$

$$\therefore \begin{cases} 7i_{x3} + 2i_{y3} + 8i_{z3} = 0 \\ 2i_{x3} + 16i_{y3} + 10i_{z3} = 0 \\ 8i_{x3} + 10i_{y3} + 13i_{z3} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.25})$$

$$\therefore \begin{cases} i_{x3} = \frac{2}{3} \\ i_{y3} = \frac{1}{3} \\ i_{z3} = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad (\text{A2.26})$$

問題 A2.4 透水係数テンソルの主方向と主透水係数の値の求め方 2

三次元 x, y, z 直角座標系における点 P の透水係数テンソルが,

$$[D] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{m/s}) \quad (\text{A2.27})$$

で与えられている。主透水係数の値と主方向を求めなさい。

<解答例_問題 A2.4>

主方向は、流速ベクトル $\mathbf{v}$ が動水勾配ベクトル $\mathbf{i}$ と一致する方向であるという物理的な条件から、主透水係数の大きさを λ とすると、(A2.27)式と、

$$[D]\mathbf{i} = \lambda \mathbf{i} \quad \text{本文(4.2)}$$

から、計算過程では、指数と単位 ($\times 10^{-4}$ m/s) を省略して、

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.28})$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{A2.29})$$

となる。動水勾配ベクトルが 0 ベクトル以外の意味のある解をもつためには、

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A2.30})$$

を満たさなければならない。したがって、 λ の値は、

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad (\text{A2.31})$$

$$\begin{aligned} &= (2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) - \frac{1}{2}(2-\lambda) - \frac{1}{2}(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = 3, 2, 1 \quad (\times 10^{-4} \text{ m/s}) \quad (\text{A2.32})$$

と求めることができる。最大、中間、及び、最小主透水係数を、 k_1, k_2 , 及び、 k_3 とすると、

$$\lambda_1 = k_1 = 3 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_2 = k_2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_3 = k_3 = 1 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

となる。次に、 $\lambda = 3, 2, 1 \quad (\times 10^{-4} \text{ m/s})$ に対応して、正規化した動水勾配ベクトルを求めると次のようになる。

(i) $\lambda_1 = k_1 = 3 \quad (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{A2.33})$$

$$\therefore \begin{cases} -i_{x1} - \frac{1}{\sqrt{2}}i_{z1} = 0 \\ -i_{y1} - \frac{1}{\sqrt{2}}i_{z1} = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i_{x1} - \frac{1}{\sqrt{2}}i_{y1} - i_{z1} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.34})$$

$$\therefore \begin{cases} i_{x1} = \frac{1}{2} \\ i_{y1} = \frac{1}{2} \\ i_{z1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (\text{A2.35})$$

(ii) $\lambda_2 = k_2 = 2$ ($\times 10^{-2} \text{ cm/s}$) のとき

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{A2.36})$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}i_{z2} = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i_{z2} = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i_{x2} - \frac{1}{\sqrt{2}}i_{y2} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.37})$$

$$\therefore \begin{cases} i_{x2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ i_{y2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i_{z2} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.38})$$

(iii) $\lambda_3 = k_3 = 1$ ($\times 10^{-2} \text{ cm/s}$) のとき

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{y3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{y3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{A2.39})$$

$$\therefore \begin{cases} i_{x3} - \frac{1}{\sqrt{2}} i_{z3} = 0 \\ i_{y3} - \frac{1}{\sqrt{2}} i_{z3} = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} i_{x3} - \frac{1}{\sqrt{2}} i_{y3} + i_{z3} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.40})$$

$$\therefore \begin{cases} i_{x3} = \frac{1}{2} \\ i_{y3} = \frac{1}{2} \\ i_{z3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (\text{A2.41})$$

問題 A2.5 透水係数テンソルの主方向と主透水係数の値の求め方 3

三次元 x, y, z 直角座標系における点 P の透水係数テンソルが,

$$[D] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 17+2\sqrt{2} & -3 & 3\sqrt{2}+2 \\ -3 & 17+2\sqrt{2} & 3\sqrt{2}-2 \\ 3\sqrt{2}+2 & 3\sqrt{2}-2 & 14 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{m/s}) \quad (\text{A2.42})$$

で与えられている。主透水係数の値と主方向を求めなさい。

<解答例_問題 A2.5>

主方向は、流速ベクトル $\mathbf{v}$ が動水勾配ベクトル $\mathbf{i}$ と一致する方向であるという物理的な条件から、主透水係数の大きさを λ とすると、(A2.42)式と、

$$[D] \mathbf{i} = \lambda \mathbf{i} \quad \text{本文 (4.2)}$$

から、計算過程では、指数と単位 ($\times 10^{-4}$ m/s) を省略して、

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 17+2\sqrt{2} & -3 & 3\sqrt{2}+2 \\ -3 & 17-2\sqrt{2} & 3\sqrt{2}-2 \\ 3\sqrt{2}+2 & 3\sqrt{2}-2 & 14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.43})$$

$$\therefore \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 17+2\sqrt{2}-4\lambda & -3 & 3\sqrt{2}+2 \\ -3 & 17-2\sqrt{2}-4\lambda & 3\sqrt{2}-2 \\ 3\sqrt{2}+2 & 3\sqrt{2}-2 & 14-4\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{A2.44})$$

となる。動水勾配ベクトルが 0 ベクトル以外の意味のある解をもつためには、

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 17+2\sqrt{2}-4\lambda & -3 & 3\sqrt{2}+2 \\ -3 & 17-2\sqrt{2}-4\lambda & 3\sqrt{2}-2 \\ 3\sqrt{2}+2 & 3\sqrt{2}-2 & 14-4\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A2.45})$$

を満たさなければならない。したがって、 λ の値は、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 17+2\sqrt{2}-4\lambda & -3 & 3\sqrt{2}+2 \\ -3 & 17-2\sqrt{2}-4\lambda & 3\sqrt{2}-2 \\ 3\sqrt{2}+2 & 3\sqrt{2}-2 & 14-4\lambda \end{vmatrix} \\
& = \frac{1}{4} 64 (-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 44\lambda + 48) \\
& = 16(6-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{A2.46}$$

$$\therefore \lambda = 6, 4, 2 \quad (\times 10^{-4} \text{ m/s}) \tag{A2.47}$$

と求めることができる。最大、中間、及び、最小主透水係数を、 k_1, k_2 , 及び、 k_3 とすると、

$$\lambda_1 = k_1 = 6 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_2 = k_2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_3 = k_3 = 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

となる。次に、 $\lambda = 6, 4, 2 \quad (\times 10^{-4} \text{ m/s})$ に対応して、正規化した動水勾配ベクトルを求めると次のようになる。

(i) $\lambda_1 = k_1 = 6 \quad (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 17+2\sqrt{2}-4\lambda & -3 & 3\sqrt{2}+2 \\ -3 & 17-2\sqrt{2}-4\lambda & 3\sqrt{2}-2 \\ 3\sqrt{2}+2 & 3\sqrt{2}-2 & 14-4\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -7+2\sqrt{2} & -3 & 3\sqrt{2}+2 \\ -3 & -7-2\sqrt{2} & 3\sqrt{2}-2 \\ 3\sqrt{2}+2 & 3\sqrt{2}-2 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{y1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} = 0 \tag{A2.48}$$

(A2.48)式の第一・二式、及び、第一・三式から、それぞれ、

$$\begin{cases} 32i_{y1} + (32-16\sqrt{2})i_{z1} = 0 \\ (32-16\sqrt{2})i_{x1} - 16i_{z1} = 0 \end{cases} \tag{A2.49}$$

が得られ、

$$\begin{cases} i_{x1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0.85355 \\ i_{y1} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0.14645 \\ i_{z1} = \frac{1}{2} = 0.50000 \end{cases} \tag{A2.50}$$

とる。

(ii) $\lambda_2 = k_2 = 4 \quad (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 17+2\sqrt{2}-4\lambda & -3 & 3\sqrt{2}+2 \\ -3 & 17-2\sqrt{2}-4\lambda & 3\sqrt{2}-2 \\ 3\sqrt{2}+2 & 3\sqrt{2}-2 & 14-4\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & -3 & 3\sqrt{2}+2 \\ -3 & 1-2\sqrt{2} & 3\sqrt{2}-2 \\ 3\sqrt{2}+2 & 3\sqrt{2}-2 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x2} \\ i_{y2} \\ i_{z2} \end{Bmatrix} = 0 \tag{A2.51}$$

(A2.51)式の第一・二式, 及び, 第一・三式から, それぞれ,

$$\begin{cases} -16i_{y2} + (16 + 8\sqrt{2})i_{z2} = 0 \\ (16 + 8\sqrt{2})i_{x2} + 8i_{z2} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.52})$$

が得られ,

$$\begin{cases} i_{x2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0.14645 \\ i_{y2} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -0.85355 \\ i_z = -\frac{1}{2} = -0.50000 \end{cases} \quad (\text{A2.53})$$

をうる。

(iii) $\lambda_3 = k_3 = 2$ ($\times 10^{-2} \text{ cm/s}$) のとき

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 17 + 2\sqrt{2} - 4\lambda & -3 & 3\sqrt{2} + 2 \\ -3 & 17 - 2\sqrt{2} - 4\lambda & 3\sqrt{2} - 2 \\ 3\sqrt{2} + 2 & 3\sqrt{2} - 2 & 14 - 4\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{y3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 9 + 2\sqrt{2} & -3 & 3\sqrt{2} + 2 \\ -3 & 9 - 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} - 2 \\ 3\sqrt{2} + 2 & 3\sqrt{2} - 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{y3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{A2.54})$$

(A2.54)式の第一・二式, 及び, 第一・三式から, それぞれ,

$$\begin{cases} 64i_{y3} + 32\sqrt{2}i_{z3} = 0 \\ 32\sqrt{2}i_{x3} + 32i_{z3} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2.55})$$

が得られ,

$$\begin{cases} i_{x3} = \frac{1}{2} = 0.50000 \\ i_{y3} = \frac{1}{2} = 0.50000 \\ i_{z3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.70711 \end{cases} \quad (\text{A2.56})$$

をうる。

問題 A2.6 透水係数テンソルの主方向と主透水係数の値の求め方 4

三次元 x, y, z 直角座標系における点 P の透水係数テンソルが,

$$[D] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 59 - 6\sqrt{2} & -2\sqrt{6} + 3\sqrt{3} & -14 - 6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6} + 3\sqrt{3} & 65 + 6\sqrt{2} & 2\sqrt{6} - 14\sqrt{3} \\ -14 - 6\sqrt{2} & 2\sqrt{6} - 14\sqrt{3} & 68 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{m/s}) \quad (\text{A2.57})$$

で与えられている。主透水係数の値と主方向を求めなさい。

<解答例_問題 A2. 6>

主方向は、流速ベクトル $\mathbf{v}$ が動水勾配ベクトル $\mathbf{i}$ と一致する方向であるという物理的な条件から、主透水係数の大きさを λ とすると、(A2.57)式と、

$$[D] \mathbf{i} = \lambda \mathbf{i} \quad \text{本文(4.2)}$$

から、計算過程では、指数と単位 ($\times 10^{-4}$ m/s) を省略して、

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 59-6\sqrt{2} & -2\sqrt{6}+3\sqrt{3} & -14-6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6}+3\sqrt{3} & 65+6\sqrt{2} & 2\sqrt{6}-14\sqrt{3} \\ -14-6\sqrt{2} & 2\sqrt{6}-14\sqrt{3} & 68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.58})$$

$$\therefore \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 59-6\sqrt{2}-16\lambda & -2\sqrt{6}+3\sqrt{3} & -14-6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6}+3\sqrt{3} & 65+6\sqrt{2}-16\lambda & 2\sqrt{6}-14\sqrt{3} \\ -14-6\sqrt{2} & 2\sqrt{6}-14\sqrt{3} & 68-16\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{A2.59})$$

となる。動水勾配ベクトルが 0 ベクトル以外の意味のある解をもつためには、

$$\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 59-6\sqrt{2}-16\lambda & -2\sqrt{6}+3\sqrt{3} & -14-6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6}+3\sqrt{3} & 65+6\sqrt{2}-16\lambda & 2\sqrt{6}-14\sqrt{3} \\ -14-6\sqrt{2} & 2\sqrt{6}-14\sqrt{3} & 68-16\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A2.60})$$

を満たさなければならない。したがって、 λ の値は、

$$\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 59-6\sqrt{2}-16\lambda & -2\sqrt{6}+3\sqrt{3} & -14-6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6}+3\sqrt{3} & 65+6\sqrt{2}-16\lambda & 2\sqrt{6}-14\sqrt{3} \\ -14-6\sqrt{2} & 2\sqrt{6}-14\sqrt{3} & 68-16\lambda \end{vmatrix} \quad (\text{A2.61})$$

$$= \frac{1}{16} 16^3 (-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 44\lambda + 48)$$

$$= 16^2 (6-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$$

$$= 0$$

$$\therefore \lambda = 6, 4, 2 \quad (\times 10^{-4} \text{ m/s}) \quad (\text{A2.62})$$

と求めることができる。最大、中間、及び、最小主透水係数を、 k_1 , k_2 , 及び、 k_3 とすると、

$$\lambda_1 = k_1 = 6 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_2 = k_2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_3 = k_3 = 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

となる。次に、 $\lambda = 6, 4, 2 \quad (\times 10^{-4} \text{ m/s})$ に対応して、正規化した動水勾配ベクトルを求めると次のようになる。

(i) $\lambda_1 = k_1 = 6 \quad (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

$$\begin{cases} i_{x1} = 0.35355 \\ i_{y1} = 0.61237 \\ i_{z1} = -0.70711 \end{cases} \quad (\text{A2.63})$$

(ii) $\lambda_2 = k_2 = 4$ ($\times 10^{-2}$ cm/s) のとき

$$\begin{cases} i_{x2} = -0.57322 \\ i_{y2} = 0.73920 \\ i_{z2} = 0.35355 \end{cases} \quad (\text{A2.64})$$

(iii) $\lambda_3 = k_3 = 2$ ($\times 10^{-2}$ cm/s) のとき

$$\begin{cases} i_{x3} = 0.73920 \\ i_{y3} = 0.28033 \\ i_{z3} = 0.61237 \end{cases} \quad (\text{A2.65})$$

問題 A2.7 透水係数テンソルの主方向と主透水係数の値の求め方 5

三次元 x, y, z 直角座標系における点 P の透水係数テンソルが,

$$[D] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{m/s}) \quad (\text{A2.66})$$

で与えられている。主透水係数の値と主方向を求めなさい。

<解答例_問題 A2.7>

主方向は、流速ベクトル $\mathbf{v}$ が動水勾配ベクトル $\mathbf{i}$ と一致する方向であるという物理的な条件から、主透水係数の大きさを λ とすると、(A2.66)式と、

$$[D]\mathbf{i} = \lambda \mathbf{i} \quad \text{本文(4.2)}$$

から、計算過程では、指数と単位 ($\times 10^{-4}$ m/s) を省略して、

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.67})$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{A2.68})$$

となる。動水勾配ベクトルが 0 ベクトル以外の意味のある解をもつためには、

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A2.69})$$

を満たさなければならない。したがって、 λ の値は、

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ & = (3-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda) + 2 + 2 - (5-\lambda) - 4(3-\lambda) - (6-\lambda) \\ & = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 57\lambda + 71 \\ & = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.70})$$

$$\therefore \lambda = 7.95934, 3.46983, 2.57083 \quad (\times 10^{-4} \text{ m/s}) \quad (\text{A2.71})$$

と求めることができる。最大, 中間, 及び, 最小主透水係数を, k_1, k_2 , 及び, k_3 とすると,

$$\lambda_1 = k_1 = 7.95934 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_2 = k_2 = 3.46983 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$\lambda_3 = k_3 = 2.57083 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

となる。次に, $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応して, 正規化した動水勾配ベクトルを求めると次のようになる。

(i) $\lambda_1 = k_1 = 7.95934 \text{ } (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

$$\begin{cases} i_{x1} = 0.27265 \\ i_{y1} = 0.60028 \\ i_{z1} = 0.75189 \end{cases} \quad (\text{A2.72})$$

(ii) $\lambda_2 = k_2 = 3.46983 \text{ } (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

$$\begin{cases} i_{x2} = -0.17838 \\ i_{y2} = -0.73641 \\ i_{z2} = 0.65260 \end{cases} \quad (\text{A2.73})$$

(iii) $\lambda_3 = k_3 = 2.57083 \text{ } (\times 10^{-2} \text{ cm/s})$ のとき

$$\begin{cases} i_{x3} = 0.94543 \\ i_{y3} = -0.31205 \\ i_{z3} = -0.093707 \end{cases} \quad (\text{A2.74})$$

付録3 回転座標変換行列

A3.1 二次元における回転座標変換行列

まず、二次元における回転座標系について考える。ここでは、二次元直交座標系である x, y 座標系における回転行列を考える。 x, y 座標系を反時計回りに γ だけ回転した q, r 座標系を考える。 x, y 座標系における点 A の位置ベクトル (a_x, a_y) は、 q, r 座標系において (a_q, a_r) に変換される。

$$\begin{Bmatrix} a_q \\ a_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.1})$$

次に、三次元の直交座標空間右手系にとった、 x, y, z 座標系における回転行列について考える。 x, y 座標系を反時計回りに γ だけ回転したときに右ねじが進む方向を z 軸の正方向とすると、右手系の x, y, z 座標系が構成される。(A3.1)式は、 z 軸まわりに反時計回りに γ だけ回転したときの座標変換式となる。このとき、 z の値は変わらない。

A3.2 三次元における回転座標変換行列(参考文献 A3.1 から)

航空機力学における、地面固定座標系 (x_0, y_0, z_0) 系から機体固定座標系 (x_3, y_3, z_3) 系への座標変換を考える。ここでは、オイラー角と座標系の定義を参考文献 A3.1 から引用する。「航空機力学において、オイラー角は次のような3つの順序を有する回転 ψ, θ, φ によって定義される。まず、 x_0, y_0, z_0 系を z_0 軸まわりに回転し、 x_0 が z_0 と x_3 とで定まる面に含まれるようにする。このときの回転角を ψ とし、この位置にある x_0, y_0, z_0 系を x_1, y_1, z_1 系と名づけ、その座標変換行列を $F_1(\psi)$ とする。次に、 x_1, y_1, z_1 系を y_1 軸まわりに回転し、 x_1 を x_3 に一致させ、これを x_2, y_2, z_2 系と名づけ、このときの回転角を θ とし、その座標変換行列を $F_2(\theta)$ とする、最後に x_2, y_2, z_2 系を x_2 軸まわりに回転し、 x_3, y_3, z_3 系と一致させる。このときの回転角を φ とし、その座標変換行列を $F_3(\varphi)$ とする。」^{A3.1)}

参考文献 A3.1 では、 z 軸が鉛直下方にとられているが、ここでは鉛直上方にとった。 x, y, z 座標系を右手系にとっているので、結果に本質的な違いはない。

(1) z 軸まわりの回転座標変換

まず、 z 軸まわりの回転座標変換行列を求める。 x_0, y_0, z_0 系を z_0 軸まわりに反時計回りに ψ だけ回転した x_1, y_1, z_1 系を考える。 x_0, y_0, z_0 系は x_1, y_1, z_1 系に次のように変換される。

Fig.A3.1 において、 z 軸は点として見えている、回転軸の成分は不変であるので、(A3.1)式を参照して、

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = [R_1(\psi)] \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.2})$$

となる。ここに、

$$[R_1(\psi)] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

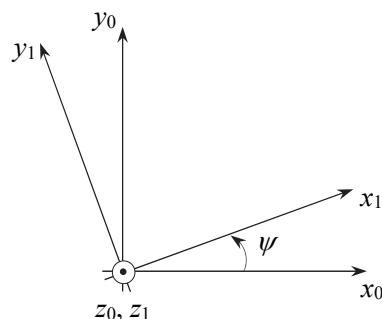


Fig.A3.1 z_0 軸まわりの回転(三次元場) (z 軸は紙面から垂直に手前向きであるので点として見えている)

(2) y 軸まわりの回転座標変換

次に, y 軸まわりの回転座標変換行列を求める。(1)と同様にして, x_1, y_1, z_1 系を y_1 軸まわりに反時計回りに θ だけ回転した x_2, y_2, z_2 系を考える。 x_1, y_1, z_1 系は x_2, y_2, z_2 系に次のように変換される。

Fig.A3.2において, y 軸は点として見えている, 回転軸の成分は不変であるので, (A3.1)式を参照して,

$$\begin{cases} z_2 \\ x_2 \\ y_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} z_1 \\ x_1 \\ y_1 \end{cases} \quad (\text{A3.3})$$

となる。成分の順序を入れ替える準備のため, (A3.3)式を展開する。

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 \cos \theta + x_1 \sin \theta + y_1 \cdot 0 \\ x_2 &= -z_1 \sin \theta + x_1 \cos \theta + y_1 \cdot 0 \\ y_2 &= z_1 \cdot 0 + x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 1 \end{aligned} \quad (\text{A3.4})$$

式の順番及び項の順番を入れ替えて整理すると,

$$\begin{aligned} x_2 &= -z_1 \sin \theta + x_1 \cos \theta + y_1 \cdot 0 \\ y_2 &= z_1 \cdot 0 + x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 1 \\ z_2 &= z_1 \cos \theta + x_1 \sin \theta + y_1 \cdot 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.5})$$

となり, x 軸まわりの回転座標変換行列に書き直すと,

$$\begin{cases} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} = [R_2(\theta)] \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} \quad (\text{A3.6})$$

となる。ここに,

$$[R_2(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

である

(3) x 軸まわりの回転座標変換

次に, x 軸まわりの回転座標変換行列を求める。(1), (2)と同様にして, x_2, y_2, z_2 系を x_2 軸まわりに反時計回りに φ だけ回転した x_3, y_3, z_3 系を考える。 x_2, y_2, z_2 系は x_3, y_3, z_3 系に次のように変換される。

Fig.A3.3において, x 軸は点として見えている, 回転軸の成分は不変であるので, (A3.1)式を参照して,

$$\begin{cases} y_3 \\ z_3 \\ x_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} y_2 \\ z_2 \\ x_2 \end{cases} \quad (\text{A3.7})$$

となる。(2)と同様にして, 成分の順序を入れ替え, x 軸まわりの回転座標変換行列に書き直すと,

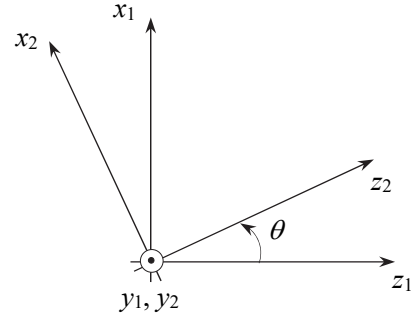


Fig.A3.2 y_1 軸まわりの回転(三次元場)(y 軸は紙面から垂直に手前向きであるので点として見えている)

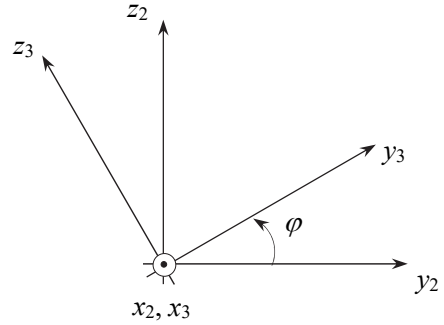


Fig.A3.3 x_2 軸まわりの回転(三次元場)(x 軸は紙面から垂直に手前向きであるので点として見えている)

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = [R_3(\varphi)] \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.8})$$

となる。ここに、

$$[R_3(\varphi)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

である。

A3.3 回転座標変換行列とオイラー角(参考文献 A3.1 から)

飛行機を例にとって回転座標変換の説明を行う(参考文献 A3.1 参照)。地面に固定された地面固定座標系から飛行機に固定された機体固定座標系への座標変換は、座標を z 軸まわりに ψ だけ回転し、その結果の座標を y 軸まわりに θ だけ回転し、最後に、その結果を x 軸まわりに φ だけ回転することによって得られる。そのときの回転角 ψ, θ, φ をオイラー角と呼び 飛行機の姿勢を表す。回転座標変換行列は、それぞれの行列の積となるので回転の順を考慮して次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.9a})$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix} = [R_3(\varphi)] \cdot [R_2(\theta)] \cdot [R_1(\psi)] \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = [E(\varphi, \theta, \psi)] \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.9b})$$

ここに、

$$[E(\varphi, \theta, \psi)] = [R_3(\varphi)] \cdot [R_2(\theta)] \cdot [R_1(\psi)]$$

である。また、機体固定座標から地面固定座標への逆の変換については $[E]$ の逆行列となるが、回転座標変換行列に関しては、転置行列と等しくなり、

$$[E(\varphi, \theta, \psi)]^{-1} = [E(\varphi, \theta, \psi)]^T \quad (\text{A3.10})$$

である。逆行列と転置行列が等しくなることはこれまでの個々の軸まわりについてもいえる。

A3.4 付録 A2 の問題における回転座標変換行列

ここで、 x, y, z 座標系を、 z, y, x 軸に関して反時計回りに、それぞれ順番に、 γ, β, α だけ回転した q, r, s 座標系を考える。 x, y, z 座標系における点 A の位置ベクトル (a_x, a_y, a_z) は、 q, r, s 座標系において (a_q, a_r, a_s) に変換される。このときの回転座標変換行列は、(A3.9a)式において、オイラー角 ψ, θ, φ をそれぞれ γ, β, α と置き換え、かつ、

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_q \\ a_r \\ a_s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.11})$$

と置き換えることによって次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} a_q \\ a_r \\ a_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.12a})$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} a_q \\ a_r \\ a_s \end{Bmatrix} = [E(\alpha, \beta, \gamma)] \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.12b})$$

付録2での問題A2.4, A2.5, A2.6における, 主方向を表す方向余弦マトリックスは, z, y, x 軸に関して反時計まわりにそれぞれ順番に γ, β, α だけ回転したときの回転座標変換行列(A3.12a)式を用いて, 次のように求めることができる。

(1) $\alpha = 0^\circ, \beta = -45^\circ, \gamma = 45^\circ$ のとき (問題A2.4の主方向)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a_q \\ a_r \\ a_s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & \sin 0 \\ 0 & -\sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-45) & 0 & -\sin(-45) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-45) & 0 & \cos(-45) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 \\ -\sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.13}) \end{aligned}$$

(2) $\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 45^\circ$ のとき (問題A2.5の主方向)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} a_q \\ a_r \\ a_s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45 & \sin 45 \\ 0 & -\sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45 & 0 & -\sin 45 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 45 & 0 & \cos 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 & 0 \\ -\sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 & 2 \\ \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.14}) \end{aligned}$$

(3) $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ$ のとき (問題 A2.6 の主方向)

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} a_q \\ a_r \\ a_s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30 & \sin 30 \\ 0 & -\sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45 & 0 & -\sin 45 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 45 & 0 & \cos 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 60 & \sin 60 & 0 \\ -\sin 60 & \cos 60 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{6} & -4\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-6 & \sqrt{6}+2\sqrt{3} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{6}+2\sqrt{3} & 3\sqrt{2}-2 & 2\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \tag{A3.15}
 \end{aligned}$$

A3.5 q, r, s 座標系における主透水係数テンソル $[D_{(qrs)}]$ から、元の x, y, z 座標系における透水係数テンソル $[D_{(xyz)}]$ を求める方法—透水係数テンソルの主方向が q, r, s 座標軸と一致する場合—

透水係数テンソルの主方向が q, r, s 座標軸と一致する場合について考える。 q, r, s 座標系 (x, y, z 座標系の回転座標変換行列で表される) における主透水係数テンソル $[D_{(qrs)}]$ から、元の x, y, z 座標系における透水係数テンソル $[D_{(xyz)}]$ を求める方法は次のようになる。テンソルの座標変換式：

$$[D_{(qrs)}] = [A] [D_{(xyz)}] [A]^{-1} \tag{A3.16}$$

の両辺に、それぞれ左側から $[A]^{-1}$ 、右側から $[A]$ をかけ合わせると、 $[A]^{-1} [A] = [A] [A]^{-1} = [E] = 1$ (ここで、 $[E]$ は単位行列) を用いて、

$$\begin{aligned}
 [A]^{-1} [D_{(qrs)}] [A] &= [A]^{-1} [A] [D_{(xyz)}] [A]^{-1} [A] \\
 \therefore [D_{(xyz)}] &= [A]^{-1} [D_{(qrs)}] [A] \tag{A3.17}
 \end{aligned}$$

となる。ここに、

$[D_{(qrs)}]$: r, q, s 座標系における透水係数テンソル

$[D_{(xyz)}]$: x, y, z 座標系における透水係数テンソル

$[A]$: 主方向を表す方向余弦マトリックス (または、回転座標変換行列)

$[A]^{-1}$: $[A]$ の逆行列

である。付録 2 の問題で用いた、 x, y, z 座標系における透水係数テンソル $[D_{(xyz)}]$ を、与えられた q, r, s 座標系における主透水係数テンソル $[D_{(qrs)}]$ から求める方法について、問題 A2.4, A2.5, A2.6 を例にとって示すと次のようになる。

以下では、問題 A2.4, A2.5, A2.6 の場合について、それぞれ、

- ① 与えられた q, r, s 座標系における主透水係数テンソル $[D_{(qrs)}]$ の値、
- ② 主方向を表す方向余弦マトリックス (または、回転座標変換行列) $[A]$ 、及び、
- ③ 方向余弦マトリックスの逆行列 $[A]^{-1}$ ($= [A]^T$)

に対して、

- ④ $[D_{(xyz)}] (= [A]^{-1} [D_{(qrs)}] [A])$

の値が求められる。逆に、各問題においては、 x, y, z 座標系の透水係数テンソルとして④が問題と

して与えられ、主値①、及び、主方向②（または、その逆行列③）が解として求められている。

ここで、番号①～④は説明に際して用いたものであり、以下、各場合の式の計算においては番号を付していない。また、各場合の①及び④の透水係数テンソルについては単位 (m/s) の表記を省略している。

(1) 問題 A2.4 の場合

$$[D_{(qrs)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{A2.18})$$

$$[A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.13})$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.19})$$

に対して、

$$\begin{aligned} [D_{(xyz)}] &= [A]^{-1} [D_{(qrs)}] [A] \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 4 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (\text{A2.27})$$

と求められる。

(2) 問題 A2.5 の場合

$$[D_{(qrs)}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{A3.20})$$

$$[A] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 & 2 \\ \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.14})$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \\ 2 & \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-2 \\ -2\sqrt{2} & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.21})$$

に対して,

$$\begin{aligned}
[D_{(xyz)}] &= [A]^{-1} [D_{(qrs)}] [A] \\
&= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \\ 2 & \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-2 \\ -2\sqrt{2} & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 & 2 \\ \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-2 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 17+2\sqrt{2} & -3 & 3\sqrt{2}+2 \\ -3 & 17-2\sqrt{2} & 3\sqrt{2}-2 \\ 3\sqrt{2}+2 & 3\sqrt{2}-2 & 14 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \tag{A2.42}
\end{aligned}$$

と求められる。

(3) 問題 A2.6 の場合

$$[D_{(qrs)}] = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \tag{A3.22}$$

$$[A] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{6} & -4\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-6 & \sqrt{6}+2\sqrt{3} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{6}+2\sqrt{3} & 3\sqrt{2}-2 & 2\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \tag{A3.15}$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2}-6 & \sqrt{6}+2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} & \sqrt{6}+2\sqrt{3} & 3\sqrt{2}-2 \\ -4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \tag{A3.23}$$

に対して,

$$\begin{aligned}
[D_{(xyz)}] &= [A]^{-1} [D_{(qrs)}] [A] \\
&= \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2}-6 & \sqrt{6}+2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} & \sqrt{6}+2\sqrt{3} & 3\sqrt{2}-2 \\ -4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{6} & -4\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-6 & \sqrt{6}+2\sqrt{3} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{6}+2\sqrt{3} & 3\sqrt{2}-2 & 2\sqrt{6} \end{bmatrix} \times 10^{-4} \\
&= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 59-6\sqrt{2} & -2\sqrt{6}+3\sqrt{3} & -14-6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6}+3\sqrt{3} & 65+6\sqrt{2} & 2\sqrt{6}-14\sqrt{3} \\ -14-6\sqrt{2} & 2\sqrt{6}-14\sqrt{3} & 68 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \tag{A2.57}
\end{aligned}$$

と求められる。

参考文献

A3.1) 加藤寛一郎, 大屋昭男, 柄沢研治: 航空機力学入門, pp.9-11, 1982 年 11 月 20 日初版, 東京大学出版会(2015 年 11 月 27 日, 第 14 刷).

Seepage flow through anisotropic permeable soil in three dimensions

– Tensor of coefficients of permeability, principal value and direction of the tensor –

Tsutomu Tanaka
Arnold Verruijt

Abstract

Soil generally has an anisotropic permeability with respect to seepage flow. This anisotropic permeability has marked effects on the characteristics of seepage flow through soil. The mechanism of seepage flow through anisotropic porous media should be clarified to accurately estimate the safety against seepage failure when designing hydraulic structures. In this paper, the mechanism of water flow through a pipe and channel (or crack) in 3D soil, the coefficients of permeability as a symmetric tensor, permeability tensor at a point, principal value and direction of permeability tensor, invariants of permeability tensor, and relationship between structural permeabilities and mathematically equivalent permeability tensor are discussed. The following topics are also considered supplementarily:

- (1) Methods of three multiplications of vectors, which are useful to formulize equations, solve examples, etc.
- (2) Questions and answers with respect to the anisotropic permeability tensor, which are based on developing the seepage-flow theory.
- (3) Rotational-coordinates transformation matrix, which is useful to understand the concept of the coordinate-conversion system.

Key words: Three-dimensional soil with anisotropic permeability, seepage flow through soil, tensor of coefficient of permeability (or permeability tensor), principal value and direction of permeability tensor, invariant of permeability tensor, structural permeabilities and mathematically equivalent permeability tensor

©2023 Research Center for Urban Safety and Security, Kobe University, All rights reserved.