概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

第 30 回
整数論サマースクール報告集
「概均質ベクトル空間論の発展」

2023 年9月 4 日～9月8日

於　神戸大学

目次

まえがき

第 30 回整数論サマースクール『概均質ベクトル空間論の発展』は、2023 年 9 月 4 日から 8 日までの 5 日間、神戸大学六甲台キャンパスで開催されました。本報告集には、サマースクールでの講演をもとに、講演者の方々に執筆していただいた記事を収録しています。

コロナ禍の影響で 2020 年のサマースクールは延期になり、2021 年と 2022 年はオンラインで開催されました。2023 年、社会活動も全体的にはコロナ以前に戻りつつあり、今年度はサマースクールを 4 年ぶりに対面で開催しました。

常連の方も初参加の方も、年配の方から学生の方まで、約 75 名の幅広い立場の方にご参加いただきました。一つの会場に集まって、他の参加者と一緒に、その様子も感じながら講演を聞くことは、オンラインにはない良さがあります。久しぶりの対面開催でとても楽しかったという声を多くいただいて、対面開催ができたことを嬉しく思いました。参加してくださった皆様に感謝いたします。

インターネットと国際化の時世にあたり、新しい試みの一つとして、講義の一つを米国の Frank Thorne さんにお願いし、Zoom を用いて遠隔で講義をしていただきました。英語の講演でしたが聞きやすく、評判もよかったように思います。

講演者の皆さまには当日の講演だけでなく、事前準備、予稿作成、報告集執筆などに多くの労を取っていただきました。とても熱心に取り組んでいただいたおかげで、サマースクールもこの報告集も充実した内容になったと思います。深く御礼申しあげます。また、過去のサマースクール世話人の方々に様々な相談に乗っていただきました。特に東京理科大の青木宏樹さんには多くの助言をいただきました。ありがとうございました。このほか、参加者の皆様はもちろん、本サマースクールの開催にあたりご理解とご協力をいただいた関係の皆様に感謝いたします。

会場は神戸大学農学研究科の C101 大講義室でした。収容人数が多く機能性の高い会場を提供してくださった農学研究科と、開催中ご支援をいただいた同研究科事務室の皆様に御礼申し上げます。このサマースクールと報告集は科学研究費基盤研究(B)「数論的不変式論の深化と数論統計学」(22H01115, 谷口隆)の助成を受けております。

第 30 回整数論サマースクール世話人
谷口隆・杉山和成・石塚裕大

2023 年度整数論サマースクール
「概均質ベクトル空間論の発展」

日程	9 月 4 日 (月) – 8 日 (金)
開催地	神戸大学・六甲台第 2 キャンパス
会場	農学研究科 C 棟・C101 大講義室
世話人	谷口隆 (神戸大)、杉山和成 (千葉工大)、石塚裕大 (九州大 IMI)
Website	`https://sites.google.com/view/ntss2023/`

プログラム

4 日 (月)

13:30-	受付
14:00-14:10	開会
14:10-15:00	谷口隆 (神戸大) 例で学ぶ概均質ベクトル空間
15:20-16:10	杉山和成（千葉工業大） 概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（1 変数の場合）
16:30-17:20	谷口隆 (神戸大) 本論のための準備

5 日 (火)

9:00-9:50	石塚裕大（九州大） 三元二次形式のペアと射影空間の幾何
10:10-11:00	石塚裕大（九州大） 有理軌道、整軌道の解釈 (1)
11:20-12:10	石塚裕大（九州大） 有理軌道、整軌道の解釈 (2)
14:10-15:00	佐藤文広（立教大名誉教授） 関数等式の一般化 (1)
15:20-16:10	佐藤文広（立教大名誉教授） 関数等式の一般化 (2)
16:30-17:20	都築正男（上智大） 新谷二重ゼータ関数

6 日 (水)

9:00-9:50	Frank Thorne（University of South Carolina） Counting integral orbits：Zeta function method (1)
10:10-11:00	Frank Thorne（University of South Carolina） Counting integral orbits：Zeta function method (2)
11:20-12:10	鈴木雄太（立教大） 整数軌道の数え上げ：数の幾何と平均法 (1)
12:30-	懇親会（会場：レストランさくら）

7日 (木)

9:00-9:50	鈴木雄太（立教大） 整数軌道の数え上げ：数の幾何と平均法 (2)
10:10-11:00	伊吹山知義（大阪大名誉教授） 概均質ベクトル空間：Retrospective account(1)
11:20-12:10	伊吹山知義（大阪大名誉教授） 概均質ベクトル空間：Retrospective account(2)
14:10-15:00	鈴木美裕（京都大） 保型形式付き概均質ゼータ関数 (1)
15:20-16:10	鈴木美裕（京都大） 保型形式付き概均質ゼータ関数 (2)
16:30-17:20	佐野薫（NTT 基礎数学研究センタ） 余正則空間と楕円曲線のセルマー群 (1)
17:30-	今後のサマースクールについて

8日 (金)

9:00-9:50	佐野薫（NTT 基礎数学研究センタ） 余正則空間と楕円曲線のセルマー群 (2)
10:10-11:00	山本修司（慶応大） 大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性 (1)
11:20-12:10	山本修司（慶応大） 大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性 (2)
12:20-	閉会

タイムテーブル

	9/4	9/5	9/6	9/7	9/8
9:00-9:50		石塚	Thorne	鈴木雄	佐野
10:10-11:00		石塚	Thorne	伊吹山	山本
11:20-12:10		石塚	鈴木雄 (懇親会)	伊吹山	山本
14:10-15:00	谷口	佐藤		鈴木美	
15:20-16:10	杉山	佐藤		鈴木美	
16:30-17:20	谷口	都築		佐野 (今後)	

連絡先： tani@math.kobe-u.ac.jp (谷口隆)

テーマと開催趣旨

サマースクールの開催趣旨については、「テーマと目的」と題して、ウェブサイトで次のように案内しました。

概均質ベクトル空間の概念は 1960 年代に佐藤幹夫により提唱されました。1970年代前半に佐藤幹夫と新谷卓郎により、関数等式をみたすゼータ関数が各々の空間に伴っていることが発見されてから、概均質ベクトル空間は整数論における基本的な研究対象の一つとなりました。以来ゼータ関数についての数多くの知見を含む、多様な成果、応用が得られています。また 21 世紀に入ってから Bhargava の研究により、概均質ベクトル空間の整数軌道に豊富な数論的構造が宿っていることが明らかになり、さらなる展望が開かれました。現在も、さまざまな問題意識に基づいて、活発な研究が行われています。

概均質ベクトル空間をテーマとする整数論サマースクールは 2002 年にも開催されています。二度目となる今回は、基礎理論を手短に復習したのち、前回のサマースクール以降に進展のあった話題に比較的重点を置いて、それらの入門的解説を行います。

概均質ベクトル空間については整数論的な視点に限ってもさまざまな話題があり、網羅することはできませんが、概均質ベクトル空間について学び、研究の現状を知る一助としていただけたらと思っています。同時にこのサマースクールが、参加者どうしの交流の場としても有意義になるようにしたいと思います。皆様のご参加をお待ちしております。

プログラムは全体を「基礎」と「本論」のカテゴリーに分け、「基礎」の部分を世話人３名で分担し、「本論」を世話人以外の講演者８名が担当しました。谷口、杉山、石塚の担当した初めの６コマが「基礎」で、残りの１５コマが「本論」です。

「基礎」の部分で解説した知識は、「本論」でさまざまな形で陰に陽に用いられています。他方、「本論」の８つの講演どうしは、動機や問題意識で様々な繋がりはあるものの、論理的な依存関係はほとんどありませんので、気になった記事から読んでいただくことができます。具体的な内容については、各記事の冒頭の概要（または目次）が参考になると思うので、ご覧ください。

「テーマと目的」に記したように、今回のサマースクールでは比較的、第 10 回整数論サマースクール『概均質ベクトル空間』(2002 年開催) 以降に進展のあった整数論的な話題を中心に取り扱っています。ただし進展と言ってもかなり多様なものがあり、今回取り上げたのは一部にとどまります。また、概均質ベクトル空間は創立当初から表現論、不変式論、代数解析学とも関わりが深く、その整数論への寄与や影響も大きなものがありますが、時間的な制約もあり、今回のサマースクールでは扱えませんでした。

これらについて、文献をうまく選んで手短に紹介することは難しいのですが、文献探索の出発点としては、本報告集や 2002 年の整数論サマースクール報告集での引用文献、そして、過去の数理解析研究所講究録なども手引きになると思います。1995 年以前の文献については佐藤文広先生の「概均質ベクトル空間の文献」(数理解析研究所講究録 924 所収, 1995 年) があります。

本報告集と上記案内が、概均質ベクトル空間に関心のある方の何かの参考になれば幸いです。

谷口隆

参加者リスト

青木 宏樹	東京理科大学
浅野 拓己	北海道大学
池田 保	京都大学
石井 竣	慶應義塾大学
石塚 裕大	九州大学
伊吹山 知義	大阪大学
LIM HANJUN	東京工業大学
大江 亮輔	東京大学
大下 達也	群馬大学
大塚 瑛介	東北大学
大野 泰生	東北大学
小田部 秀介	名古屋工業大学
小野 雅隆	早稲田大学
片岡 武典	東京理科大学
桂田 英典	北海道大学
金井 和貴	呉工業高専
金村 佳範	慶應義塾大学
木田 雅成	東京理科大学
木村 巌	富山大学
小林 真一	九州大学
小宮 涼	東京工業大学
齋藤 陽平	慶應義塾大学
佐々野 詠淑	龍谷大学
佐藤 文広	立教大学
佐野 薫	NTT
佐野 昂迪	大阪公立大学
志賀 明日香	東北大学
渋川 元樹	神戸大学
白鳥 翔	創価大学
杉山 和成	千葉工業大学
鈴木 健正	神奈川大学
鈴木 美裕	京都大学
鈴木 雄太	立教大学
関 真一朗	青山学院大学
高瀬 幸一	宮城教育大学
高田 佑太	北海道大学
武田 渉	東京理科大学
竹平 航平	東北大学
田島 凌太	九州大学
田嶋 和明	福島工業高専
立谷 洋平	弘前大学
舘野 荘平	名古屋大学
田中 拓弥	東京工業大学
谷口 隆	神戸大学
近田 真治	慶應義塾大学
土見 怜史	神戸大学
都築 正男	上智大学
角皆 宏	上智大学
戸澗 勇一郎	名古屋大学
冨田 拓希	慶應義塾大学
富安 亮子	九州大学
富山 和樹	早稲田大学
内藤 浩忠	香川大学
中川 仁	上越教育大学
中田 裕貴	京都大学
中野 光	富山大学
並川 健一	東京電機大学
西岡 斉治	山形大学
西山 享	青山学院大学
根岸 崚	北海道大学
Lucas Hiroyuki Ragni Hamada	東京工業大学
原 隆	津田塾大学
広中 由美子	早稲田大学
古澤 昌秋	大阪公立大学
堀永 周司	NTT
松川 寿人	北海道大学
村上 友哉	九州大学
村原 英樹	北九州市立大学
森本 和輝	神戸大学
柳澤 拓也	東京理科大学
八尋 耕平	京都大学
山崎 義徳	愛媛大学
山田 智宏	神戸大学
山本 修司	慶應義塾大学
横溝 真紘	東北大学

（75 名）

敬称略、所属は参加時のもの

例で学ぶ概均質ベクトル空間

谷口隆（神戸大学大学院理学研究科）

概要

典型的で単純な概均質ベクトル空間 (G, V) の例を 8 個紹介し，それぞれのもっとも基本的な性質を解説する。特異集合（Zariski 開軌道の補集合）と (G, V) の相対不変式の関係を説明する。また，概均質ベクトル空間の基本的で個性的な例である 2 元 3 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^3(2)$ についてはやや詳しく調べる。非特異元の固定部分群を決定し，また有理軌道を初等的な方法で記述する。これらの例を通して概均質ベクトル空間についてイメージを持ってもらうことが目的である。

概均質ベクトル空間には一定の整然とした基礎理論があるが，ここではそれの正式な導入に替えて，基本的で単純な例を数例具体的に考え，本報告集の内容を理解する上で必要になる基本的な感覚を身につけてもらうことを目指す。正式な理論は木村 [13] を参照のこと。

1 節で代数群について簡単に説明する。また軌道を解釈するときに必要になる，有限次分離代数（有限次エタール代数）の概念を説明する。2 節で概均質ベクトル空間と相対不変式の定義を説明する。3 節で 7 個程度の概均質ベクトル空間の具体例について考える。より本格的な例は本報告集の石塚 [9, 10] などで現れる。4 節では，概均質ベクトル空間の有理軌道について考える。

1　予備知識

1.1　代数群とは？

概均質ベクトル空間は代数群の表現だが，代数群（あるいは位相群や Lie 群）の正式な導入を始めると，非常に多くの手間がかかり，なかなか概均質ベクトル空間の話が始められない。そこでここでは，本書の内容が理解できるための最低限の知識を，実例を通して説明することを試みる。

典型的な実例として，GL_2 について考えてみよう。任意の可換環 A に対し，$A^\times$ を A の単数群として，

$$\mathrm{GL}_2(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in A, ad-bc \in A^\times \right\}$$

が行列の乗法で群になる。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ などはその具体例である。

環 A に群 $\mathrm{GL}_2(A)$ を対応させるこの $A \mapsto \mathrm{GL}_2(A)$ は関手的であることに注意しよう。つまり，環準同型 $\phi\colon A \to B$ があれば，行列の成分ごとに ϕ で送ることで写像 $\mathrm{GL}_2(A) \to \mathrm{GL}_2(B)$ が定まり，これが群準同型写像になる。実際に群準同型であることは，手を動かしてみれば，ϕ が環準同型であることから直接にしたがうことが分かるだろう。たとえば環の標準単射 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ から単射 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ が定まり，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群である。また係数ごとに法 p を考えることで，群準同型 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ が定まるが，これは標準全射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ から誘導されたものである。

専門的には $\mathrm{GL}_2(A)$ はスキーム GL_2 の A 有理点であり，GL_2 を代数多様体やスキームとして論ずるときは，位相は Zariski 位相を考えることになる。たとえば GL_2 は Zariski 位相で連結である。しかし，実有理点の群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ については，$\mathbb{R}$ のユークリッド位相から定まる位相を考える。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は Lie 群で，Haar 測度が存在する。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は 2 つの連結成分からなり，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ が単位連結成分（単位元を含む連結成分）である。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群である。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ も $\mathbb{Q}_p$ の位相を考える。全不連結な，局所コンパクト位相群になる。

ここまで GL_2 で考えてきたが，GL_n で同様である。GL_1 の場合は，$\mathrm{GL}_1(A) = A^\times$ である。$\mathrm{GL}_n(A)$ は A^n の A 加群としての自己同型全体のなす群である。

環 A にその加法群 A を対応させる代数群（関手）を $\mathbb{G}_a$ で表す。また $\mathrm{GL}_1 = \mathbb{G}_m$ と書くことがある。a, m はそれぞれ additive, multiplicative の頭文字である。繰り返しになるが，$\mathbb{G}_a(A) = A$, $\mathbb{G}_m(A) = A^\times$ である。

例 1.1

$$B = \mathrm{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \,\middle|\, b = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \right\}$$

とする。これは $B(A) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(A) \mid b = 0 \right\}$ という関手である。定義からただちに $B(A) = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, d \in A^\times, c \in A \}$ と書ける。

B は GL_2 の Zariski 閉集合で，行列の積で閉じるので，GL_2 の閉部分群である。

B の部分集合を

$$T = \mathrm{T}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in B_2 \,\middle|\, c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \right\},$$
$$N = \mathrm{N}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in B_2 \,\middle|\, a = d = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \right\}$$

とおく。いずれも B の閉部分群で，$B = T \ltimes N$ である。同型

$$T \xrightarrow{\cong} \mathbb{G}_m^2, \qquad N \xrightarrow{\cong} \mathbb{G}_a$$

がそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto (a, d), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mapsto c$$

で定まる。

代数群の間にも準同型を考えることができる。たとえば代数群の準同型 $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ がある。各 A について，群準同型 $\det\colon \mathrm{GL}_n(A) \to \mathrm{GL}_1(A)$ が定まることが分かるだろう。正確には後者の det と前者の det は異なるが，同じ記号を用いることが通例である。SL_n は $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ の核である。これを $\mathrm{SL}_n := \{g \in \mathrm{GL}_n \mid \det g = 1\}$ のように表現することもある。

線型代数群（文脈から明らかな場合は単に代数群と呼ぶことが多い）とは，素朴には，ある GL_n の Zariski 閉部分群のことである。Zariski 閉とは，行列の各成分の多項式の共通零点ということで，体 K 上の代数群というのは，その多項式が K 上の多項式だということである。G が体 K 上の代数群であれば，任意の K 代数 A について，A 有理点の集合 $G(A)$ が群になり，$A \mapsto G(A)$ は K 代数から群への共変関手である。

例 1.2　S を K を成分にもつ n 次対称行列で，$\det(S) \neq 0$ とする。

$$\mathrm{O}_S := \{g \in \mathrm{GL}_n \mid gS\,{}^t g = S\}$$

を S の直交群という。これは K 上の代数群である。実際，S の成分が K であることから，$gS\,{}^t g = S$ は g の成分の K 係数多項式たちが 0 になるという条件である。任意の K 代数 A について，$\mathrm{O}_S(A) = \{g \in \mathrm{GL}_n(A) \mid gS\,{}^t g = S\}$ である。

$$\mathrm{SO}_S := \mathrm{O}_S \cap \mathrm{SL}_n$$

を特殊直交群という。これは SL_n の部分群であり，O_S の正規部分群である。$\mathrm{SO}_S(A) = \mathrm{O}_S(A) \cap \mathrm{SL}_n(A) = \{g \in \mathrm{SL}_n(A) \mid gS\,{}^tg = S\}$ である。

$$\mathrm{GO}_S := \{g \in \mathrm{GL}_n \mid gS\,{}^tg = tS, \exists t \in \mathrm{GL}_1\}$$

を相似直交群という。最後の $\exists t$ は少し略式の書き方で，意味は $\mathrm{GO}_S := \{(t, g) \in \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_n \mid gS\,{}^tg = tS\}$ である。この t は g から一意に決まるので，GO_S を GL_n の部分群とみなすことができる。

$$\mathrm{GO}_S \ni (t, g) \mapsto t \in \mathrm{GL}_1$$

は群準同型であり，この核が O_S である。

S が単位行列 I_n のとき，$\mathrm{GO}_S, \mathrm{O}_S, \mathrm{SO}_S$ をそれぞれ $\mathrm{GO}_n, \mathrm{O}_n, \mathrm{SO}_n$ と書く。

注意 1.3　これらの群を考えることは，3.5 節で扱う，n 次対称行列のなす概均質ベクトル空間 (G, V) を考えることと非常に近い。直交群は，(G, V) の非特異元 $S \in V'(K)$ の固定部分群である。

1.2　代数群の構造と簡約群

概均質ベクトル空間を考えるときに頻繁に現れる簡約群 (reductive group) という概念について，少しコメントしておく。

基本的には体 K 上の代数群 G についての条件である。K 上の連結代数群 G は，$\overline{K}$ に底変換した $G \times_K \overline{K}$ の “冪単根基 (nilpotent radical)” が自明になるとき，簡約群という。（簡約可能な群と呼ばれることもある。）が，実は著者は簡約群を扱うとき，あまり冪単根基に立ち戻って考えてはいない。簡約群の例としては，上述の $\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{GO}_S, \mathrm{O}_S, \mathrm{SO}_S$ や，斜交群 Sp_{2n}，一般斜交群 GSp_{2n} などがある。これらはいずれも $g \mapsto {}^tg^{-1}$ で閉じているという特徴がある。K が標数 0 の代数閉体のときは，G の適当な共役が $g \mapsto {}^tg^{-1}$ で閉じることが必要十分である。例 1.1 の B は簡約でない群の例である。

標数 0 の代数閉体上の代数群は一般に簡約な部分群 L と冪単部分群 U の半直積 $G = L \ltimes U$ の形に書け，簡約群 L はトーラス T と半単純群 S の積 $L = TS$ の形で，T の元と S の元の積は可換であるように表すことができる。ここに，冪単群とは対角成分がみな 1 の上三角群の部分群と同型になるもの，トーラスは $\mathbb{G}_m$ の直積と同型になるもの，半単純群は可換な連結部分群を持たないもののことである。

1.3　有限次分離代数

概均質ベクトル空間の非特異な軌道を考える上で基本的な役割をもつ，有限次分離代数の概念を簡単にまとめておく。なお分離代数はエタール代数と呼ばれることもある。

定義 1.4　F を K 上有限次の代数で，$\dim_K(F) = n$ とする。以下は同値である。

(1) 跡（トレース）$\mathrm{Tr}\colon F \to K$ の定める双線形形式 $F \times F \ni (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(xy) \in K$ が非退化である。
(2) F はある K の有限分離拡大 $F_1, \ldots, F_m$ の直積 $F_1 \times \cdots \times F_m$ と同型である。
(3) $F \otimes \overline{K} \cong (\overline{K})^n$ である。ただし $\overline{K}$ は K の代数閉包である。

この同値な条件をみたす F を K の n 次分離代数という。

これらの同値性についてはたとえば [1, V, §6 Proposition 2, §6 Theorem 4, §8 Propositoin 1] を参照されたい。

例 1.5　(1) n 次の多項式 $P \in K[X]$ について，K 上 n 次の代数 $K[X]/(P)$ が分離的であるのは，P が重根をもたないときである。
(2) K が代数閉体なら，K の n 次分離代数は K^n のみである。たとえば $\mathbb{C}$ の n 次分離代数は $\mathbb{C}^n$ のみである。
(3) $\mathbb{R}$ の n 次分離代数は $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$（ただし $r_1 + 2r_2 = n$）と書ける。
(4) $\mathbb{Q}$ の 2 次分離代数は $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ か 2 次体 L である。$\mathbb{Q}$ の 3 次分離代数は $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ か $\mathbb{Q}$ と 2 次体 L の直積 $\mathbb{Q} \times L$ か 3 次体 F かのいずれかである。

命題 1.6　K^n の K 代数としての自己同型群は，成分の置換による n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ である。

証明　$\varphi\colon K^n \to K^n$ を自己同型とする。第 i 成分のみが 1 で他の成分は 0 である元を $e_i \in K^n$ とする。$e_1, \ldots, e_n$ は K^n の K 基底であり，また $\sum e_i = 1$, $e_i^2 = e_i$, $i \neq j$ のとき $e_ie_j = 0$ である。$f_i = \varphi(e_i) = \sum a_{ji}e_j$ とする。$f_i^2 = f_i$ より $a_{ji}^2 = a_{ji}$ である。したがって $a_{ij} \in K$ は $0, 1$ のいずれかである。$i \neq j$ とする。

$$f_if_j = \sum_{k,l} a_{ki}e_ka_{lj}e_l = \sum_k a_{ki}a_{kj}e_k = 0$$

より，任意の k について $a_{ki}a_{kj} = 0$ である。k を固定する。すべての i について $a_{ki} = 0$ なら φ による像が e_k を含まないので，$a_{ki} = 1$ となる i が存在する。$a_{ki}a_{kj} = 0$ より $j \neq i$ について $a_{kj} = 0$ となる。よってこの i は k に対してただ一つであり，それを $i = \tau(k)$ とする。$e_k = f_{\tau(k)}$ である。φ は単射なので $f_{\tau(k)}$ は異なる k に対しすべて異なるので τ は全単射である。$\sigma = \tau^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ とすると $f_i = e_{\sigma(i)}$ である。 □

2　概均質ベクトル空間と相対不変式

本節では，概均質ベクトル空間とそのもっとも基本的で重要な役割を担う相対不変式を定義し，その性質をまとめる。基礎理論のより詳しい内容は [13, 2 章] を参照のこと。

K を体とし，G を K 上の連結な代数群とする。V を K 上の有限次元ベクトル空間とし，$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を (K 上の) 代数群としての準同型写像とする。このとき (G, ρ, V) を G の (K 上の) 表現という。ρ が固定されているときは単に (G, V) を書くこともある。このとき，$g \in G$, $x \in V$ に対し $\rho(g)x$ を gx と書く。

定義 2.1　G の表現 $(G, \rho, V) = (G, V)$ が**概均質ベクトル空間**であるとは，V に Zariski 開な軌道 V' が存在することをいう。

これは，$V'(\overline{K})$ が単一の $G(\overline{K})$ 軌道であるという意味である。このとき V' を**非特異集合**，$S := V \setminus V'$ を**特異集合**という。

定義 2.2　(G, V) を表現とする。V 上の有理関数 $f \in K(V)$ は，任意の $g \in G$ と $x \in V$ に対して $f(gx) = \chi(g)f(x)$ となる G の指標 $\chi\colon G \to \mathrm{GL}_1$ が存在するとき，**相対不変式**であるという。

ただし G の指標とは群準同型 $G \to \mathrm{GL}_1$ のことである。特に自明な指標に対する相対不変式を絶対不変式というが，概均質ベクトル空間については次が成り立つ。

補題 2.3　概均質ベクトル空間の絶対不変式は定数に限る。

証明　f が絶対不変式ならば，任意の $g \in G$, $x \in V$ に対して $f(gx) = f(x)$ が成り立つ。よって f は V' 上で定数である。したがってその Zariski 閉包である V 上で定数

である。 □

これより，同じ指標に対応する相対不変式は，定数倍を除いて一致することも分かる。（逆に，(G,V) が概均質ベクトル空間でなければ，定数でない絶対不変式が存在することが知られている。）

概均質ベクトル空間において，相対不変式と特異集合の関係は次の命題にまとめられる。

命題 2.4　(G,V) を概均質ベクトル空間とし，$n=\dim V$ とする。特異集合 S の $n-1$ 次元の既約成分を $S_1,\dots,S_r$ とし，S_i を定める既約多項式を $P_i\in\overline{K}[V]$ とする。この P_i は相対不変式である。また $\overline{K}$ 上の任意の相対不変式 P は $P=c\prod_i P_i^{m_i}$, $c\in\overline{K}^{\times}, m_i\in\mathbb{Z}$ とあらわされる。

証明 G は連結なので既約である。よって GS_i は既約であり，$S_i\subset GS_i\subset S$ なので，$S_i=GS_i$ である。したがって S_i の既約性から各 $g\in G$ に対して $g^{-1}S_i=S_i$ である。これより既約多項式 $P_i(gx)$ は定数倍を除いて $P_i(x)$ と等しい。$P_i(gx)=\chi(g)P_i(x)$ とすると $\chi\colon G\to\mathrm{GL}_1$ は必然的に準同型で，P_i は相対不変式である。

P を相対不変式とし，$P=\prod_{1\le j\le k}R_j$ を既約因子への分解とする。$P(gx)=\prod_{1\le j\le k}R_j(gx)$ で $\overline{K}[V]$ は UFD なので，定数倍を除いて，$R_j(gx)$ は $R_1,\dots,R_k$ のどれかと一致する。したがって群準同型 $G\to\mathfrak{S}_k$ が定まる。この核は指数有限なので，G が連結であることから，核は G と一致する。よって各 R_j は相対不変式である。R_j の零点集合は S の既約成分になるから，ある S_i と一致し，定数倍を除いて R_j は P_i と一致する。 □

定義 2.5　命題 2.4 の $P_1,\dots,P_r\in\overline{K}[V]$ を (G,V) の**基本相対不変式**という。

基本相対不変式は概均質ベクトル空間 (G,V) のゼータ関数を定義するときに使われる。$K=\mathbb{Q}$ として，大まかにはゼータ関数は

$$\sum_{x\in\Gamma\backslash(L\cap V_i)}\frac{\mu_x}{|P_1(x)|^{s_1}|P_2(x)|^{s_2}\cdots|P_r(x)|^{s_r}}$$

という r 個の複素変数の関数である。L は $V(\mathbb{Q})$ 内の格子，Γ は L を不変にする $G(\mathbb{Q})$ の数論的部分群，V_i は $V'(\mathbb{R})$ の連結成分で，$\mu_x\in\mathbb{R}_{>0}$ は軌道 Γx の “大きさ” を測る量である。$r=1$ の 1 変数の場合の一般論が本報告数の杉山 [8] で説明される。多変数の場合は本報告集の佐藤 [5] で扱われる。

3　概均質ベクトル空間の例

それでは，概均質ベクトル空間 (G, V) の基本的な例を取り上げ，その性質を見ていこう。より本格的な例は [9, 10] などで扱われる。ここで取り上げる例では，3.3 節の $(B, V) = (\mathrm{B}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ を除き，(G, V) の特異集合 S は K 上定義された既約超曲面である。したがって命題 2.4 より (G, V) は唯一の基本相対不変式をもつ。なお，$(\mathrm{B}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の特異集合は 2 つの既約成分を持ち，この概均質ベクトル空間には基本相対不変式が 2 つある。

3.1　1 次元の概均質ベクトル空間

もっとも単純な (G, V) として，1 次元空間 $V = K$ に $G = \mathrm{GL}_1$ が作用する場合を考えてみよう。$t \in G$, $x \in V$ に対し $\rho_1(t)x = tx$ によって $\rho_1 \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を定める。$S = \{0\}$ とすると，$V' = V \setminus S = \{x \in V \mid x \neq 0\}$ は G の単一軌道である。この場合，$\overline{K}$ で考えなくても，K 上で $V'(K)$ は単一の $G(K)$ 軌道である。$P(x) = x$ は唯一の基本相対不変式で，$P(\rho_1(t)x) = tP(x)$ である。

G の V への作用は他にも考えることができる。今度は $t \in G$, $x \in V$ に対し $\rho_2(t)x = t^2x$ によって $\rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を定める。同じく $S = \{0\}$，$V' = V \setminus S = \{x \in V \mid x \neq 0\}$ とすると，$V'(\overline{K})$ は単一の $G(\overline{K})$ 軌道である。これは $x, y \in V(\overline{K})$ とすると，$t = \sqrt{y/x} \in G(\overline{K}) = \overline{K}^{\times}$ が取れて，$y = t^2x$ となるからである。

一般の体 K 上で考えると，$x, y \in V'(K)$ は y/x の平方根が取れなければ同じ軌道にない。$\mathbb{R}$ 上では，$V'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0} \cup \mathbb{R}_{<0}$ と 2 個の $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\times}$ 軌道に分かれる。一般の体では，たとえば $K = \mathbb{Q}$ なら

$$G(\mathbb{Q})\backslash V'(\mathbb{Q}) \ni x \longmapsto \mathbb{Q}(\sqrt{x}) \in \{\mathbb{Q}\text{ の 2 次拡大 }\} \cup \{\mathbb{Q}\}$$

が全単射になる。K の標数が 2 でなければ，$\mathbb{Q}$ を K に変えても同様である。

注意 3.1　なお，$x \in V'(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ が $\mathbb{Q}$ の平方元のときは $\mathbb{Q}(\sqrt{x}) = \mathbb{Q}$ であり，これが右辺にある $\mathbb{Q}$ である。実際には代数的により自然な対応物は $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ である。この場合，右辺の集合は $\mathbb{Q}$ の 2 次分離代数の (同型類の) なす集合になる。

この例からも明らかなように，G と V から ρ が一意に定まるわけではない。しかし，早い段階で ρ が定義され以降固定されるような場合は，ρ は省略されることもよ

くある。

3.2 正方行列の空間

n を正の整数とし，$G = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$, $V = \mathrm{M}_n$ とする。V は n 次正方行列全体のなす n^2 次元のベクトル空間である。$g = (g_1, g_2) \in G$, $x \in V$ に対し，$gx = g_1 x\, {}^t g_2$ として，$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を定める。（g_2 の転置は群の作用を左作用にするためである。）これは行列の基本変形の群論的抽象化である。$x \in V$ に左から g_1 をかけることが x の行変形で，右から ${}^t g_2$ をかけることが x の列変形である。基本変形の理論から

$$G(K)\backslash V(K) \ni x \longmapsto \mathrm{rank}(x) \in \{i \mid 0 \leq i \leq n\}$$

は全単射である。$S = \{x \in V \mid \mathrm{rank}(x) < n\}$, $V' = V \setminus S = \{x \in V \mid \mathrm{rank}(x) = n\}$ とおく。V' は V の Zariski 開集合であり，$V'(K)$ は単一の $G(K)$ 軌道だから，(G, V) は概均質ベクトル空間である。また $P(x) = \det x$ とおけば，これは V 上の既約多項式で S は P の零点集合である。よって P は唯一の基本相対不変式で，実際 $\chi(g) = \det g_1 \cdot \det g_2$ とすると $P(gx) = \chi(g)P(x)$ は明らかである。

注意 3.2 $n \times m$ 次の長方行列のなす空間 V に $G = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ を作用させても同様のことが考えら，(G, V) は概均質ベクトル空間である。対称性から $n > m$ とすると，$V' = \{x \in V \mid \mathrm{rank}(x) = m\}$ が非特異集合である。ただしこの場合，$S = \{x \in V \mid \mathrm{rank}(x) < m\}$ はすべての m 次の小行列式が 0 であるという条件で，余次元は 2 以上になる。したがってこの (G, V) には相対不変式は存在しない。

3.3 2 元 2 次形式の空間

V を 2 元 2 次形式のなす 3 次元ベクトル空間とする：

$$V = \mathrm{Sym}^2(2) := \{x(u, v) = au^2 + buv + cv^2 \mid a, b, c \in K\} \cong K^3$$

$G = \mathrm{GL}_2$ が変数の線形変換で V に作用する：

$$(g \cdot x)(u, v) = x((u, v)g) = x(pu + rv, qu + sv), \qquad g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

これは左作用，すなわち $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ である。$P(x)$ を $x(u, v)$ の判別式，つまり $P(x) = \mathrm{Disc}(x) = b^2 - 4ac$ とおくと，$P(gx) = (\det g)^2 P(x)$ となるので $P(x)$ は

相対不変式である。

補題 3.3 $V' = \{x \in V \mid P(x) \neq 0\}$ は $\overline{K}$ で単一軌道である。

証明 $w(u,v) := uv \in V'(K)(\subset V'(\overline{K}))$ とし，$x \in V(\overline{K})$ が w と同じ $G(\overline{K})$ 軌道であることを示す。$P(x) \neq 0$ であるとは，$x(u,v)$ が重根をもたないということである。$\overline{K}$ では $x(u,v) = (\alpha_1 u + \beta_1 v)(\alpha_2 u + \beta_2 v)$ と分解し，これが重根を持たないというのは，$\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \beta_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_2 \\ \beta_2\end{pmatrix}$ が平行でないということで，したがって $\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix} \neq 0$ だということである。$x = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix} w$ である。 □

したがって，(G,V) は $P(x) = \mathrm{Disc}(x)$ を唯一の基本相対不変式とする，概均質ベクトル空間である。

スカラー行列 $aI_2 = \begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}$ は a^2 倍で作用する。だから，スカラー倍だけ違う二つの 2 元 2 次形式が，K 上で同じ軌道にあるとは限らない。たとえば $u^2 + v^2, 3u^2 + 3v^2 \in V'(\mathbb{Q})$ は同じ $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ 軌道にはないが，整数論的な考察のためにはこれらが同じ軌道にあった方がよいことがある。そのようなときは，$\tilde{G} = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ とし，$t \in \mathrm{GL}_1$ を普通の t 倍で作用させる表現を考えることがある。($\ker(\rho\colon \tilde{G} \to \mathrm{GL}(V)) = \{(t^{-2}, tI_2)\} \cong \mathbb{G}_m$ である。) この場合，自然な全単射

$$\tilde{G}(K)\backslash V'(K) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{K \text{ の } 2 \text{ 次分離代数}\}$$

が定まる。$x \in V'(K)$ が K で 1 次因子に分解するときは $K \times K$ を，そうでないときは $x = a(u + \beta_1 v)(u + \beta_2 v)$ として，K の 2 次拡大 $K(\beta_1)$ を対応させればよい。これが全単射になることは比較的簡単に分かるので，証明は省略する。なお $\tilde{G}$ で考えた場合，特異集合 $S(K)$ は 2 つの $\tilde{G}(K)$ 軌道からなり，代表元として $v^2, 0$ が取れることも簡単に分かる。

また，$w = uv \in V'(K)$ とすると，固定部分群 $\tilde{G}_w = \{g \in \tilde{G} \mid gw = w\}$ は，

$$\tilde{G}_w = \left\{\left(\frac{1}{ps}, \begin{pmatrix}p & 0 \\ 0 & s\end{pmatrix}\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{qr}, \begin{pmatrix}0 & q \\ r & 0\end{pmatrix}\right)\right\} \cong \mathrm{GL}_1^2 \rtimes \mathfrak{S}_2$$

と分かる。実際，$g = (g_1, g_2) \in \tilde{G}_w$ とすると $g_2 \in \mathrm{GL}_2$ は，定数倍を除いて uv を変えないので，u, v を定数倍を除いて動かさないか入れ替えるかのどちらかである。前者の場合 g_2 は対角行列で，後者の場合は g_2 は反対角行列である。

最後に $G = \mathrm{GL}_2$ を，例 1.1 で定義した部分群 $B = \mathrm{B}_2$ に制限した表現 (B, V) について考えてみよう。今度は $x(u,v) = au^2 + buv + cv^2$ に対し，$Q(x) = a$ とすると，これも相対不変式であることがすぐに分かる。

補題 3.4 (B, V) は特異集合を $S = \{x \in V \mid P(x)Q(x) = 0\}$ とする概均質ベクトル空間である。

証明 $V' := \{x \in V \mid P(x)Q(x) \neq 0\}$ が $\overline{K}$ 上で単一の B 軌道であることを示す。$w := u^2 - uv = u(u-v) \in V'(K)$ とする。$x = au^2 + buv + cv^2 \in V'(\overline{K})$ とし，w と同じ $B(\overline{K})$ 軌道にあることを示す。$a \neq 0$ より $a^{-1/2} I_2 \in B(\overline{K})$ の作用で x を a^{-1} 倍して，$a = 1$ としてよい。$x = (u - \alpha v)(u - \beta v)$ とすると，$b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{smallmatrix}\right) \in B(\overline{K})$ として，$bx = u(u - \gamma v)$，ただし $\gamma = \beta - \alpha \neq 0$ となる。$b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \in B(\overline{K})$ として，$b'bx = w$ である。 □

この場合も群は，スカラー倍の作用をつけた $\tilde{B} = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{B}_2$ を考えることがある。この概均質ベクトル空間 $(\tilde{B}, V)$ に伴う 2 変数のゼータ関数が本報告集の都築 [12] で扱われる。

3.4 2 元 3 次形式の空間

V を 2 元 3 次形式のなす 4 次元ベクトル空間とする：

$$V = \mathrm{Sym}^3(2) := \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \mid a,b,c,d \in K\} \cong K^4$$

$G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ とし，作用を

$$(g \cdot x) = t_1 x((u,v)g_2), \qquad g = (t_1, g_2) \in G, x \in V$$

で定める。$T := \ker(\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)) = \{(t^{-3}, tI_2)\} \cong \mathrm{GL}_1$ である。

$$P(x) := \mathrm{Disc}(x) = b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$$

が相対不変式で，$\chi(g) = t_1^4 (\det g_2)^6$ とすると，$P(gx) = \chi(g)P(x)$ である。

補題 3.5 $V' = \{x \in V \mid P(x) \neq 0\}$ は $\overline{K}$ で単一軌道である。

証明 $x \in V'(\overline{K})$ とし，$w = uv(u-v) \in V'(K)$ と同じ軌道にあることを示す。

$$x = (\alpha_1 u - \beta_1 v)(\alpha_2 u - \beta_2 v)(\alpha_3 u - \beta_3 v)$$

x は重根をもたないから，$\alpha_1 u - \beta_1 v \mapsto u$, $\alpha_2 u - \beta_2 v \mapsto v$ とする $g_2 \in \mathrm{GL}_2(\overline{K})$ が存在する。よって x はある $y = uv(\alpha u - \beta v) \in V'(\overline{K})$ と同じ軌道にある。$y \in V'(\overline{K})$ より $\alpha\beta \neq 0$ で，$g = (\alpha\beta, \left(\begin{smallmatrix} \alpha^{-1} & \\ & \beta^{-1} \end{smallmatrix}\right)) \in G(\overline{K})$ とすると，$gy = w$ である。 □

補題 3.6 $G_w/T \cong \mathfrak{S}_3$ である。ただし $\mathfrak{S}_3$ は 3 次対称群である。

証明 $g = (t_1, g_2) \in G_w$ とすると，g_2 は $u, v, u - v$ を $K^\times$ 倍を除きそのどれかに移す。したがって群準同型 $G_w \to \mathfrak{S}_3$ が定まる。$u, v, u - v$ の置換としては，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が $u \leftrightarrow v$ で $u - v$ は（定数倍を除いて）動かさず，また，$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が，（定数倍を除いて）$u \mapsto u + v \mapsto v \mapsto u$ と巡回的に置換することから，$G_w \to \mathfrak{S}_3$ は全射である。これの核を考える。u, v をそれぞれ $K^\times$ 倍するなら，g_2 は対角行列で，$g_2 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{smallmatrix}\right)$ とすると，g_2 で $u + v \mapsto \alpha u + \beta v$ である。これが $u + v$ の $K^\times$ 倍になるので $\alpha = \beta$ である。$g = (\alpha^{-3}, \alpha I_2) \in T$ と分かる。よって $G_w/T \cong \mathfrak{S}_3$ である。 □

3.3 節の 2 元 2 次形式の空間もそうであったように，2 元 3 次形式の空間においても，$V'(K)$ は単一の $G(K)$ 軌道ではない。軌道 $G(K)\backslash V'(K)$ は 4 節で改めて考える。2 元 3 次形式の概均質ベクトル空間とそのゼータ関数は本報告集の Thorne [3] や鈴木美 [14] で整数論的に考察される。また，本報告集の山本 [7] で，この空間の類数についての鏡映定理が解説される。

注意 3.7 V を 2 元 n 次形式の空間，$G = \mathrm{GL}_2$ とすると，$n \leq 3$ では (G, V) は概均質ベクトル空間である。他方，$n \geq 4$ の場合は，$\dim V = n + 1 \geq 5$ であり，また $\dim G = 4$ だから，軌道の次元は最大でも 4 である。したがって軌道は Zariski 開になることはない。ただし，$n = 4$ のときは余正則空間で，佐野 [6] で扱われる。

つまり，(G, ρ, V) が概均質ベクトル空間であれば，$\dim(G/\ker\rho) \geq \dim V$ である。

3.5 対称行列の空間/2 次形式の空間

$n \geq 1$ とし，$V = \mathrm{Sym}^2(n) := \{x \in \mathrm{M}_n \mid {}^t x = x\}$ を対称行列の空間とする。$G = \mathrm{GL}_n$ が $(g, x) \mapsto gx{}^t g$ で作用する。(${}^t(gx{}^t g) = g{}^t x{}^t g = gx{}^t g$ である。) $P(x) = \det x$ は相対不変式である。$V' = \{x \in V \mid P(x) \neq 0\}$ とおくと，$V'(\overline{K})$ が単一の $G(\overline{K})$ 軌道であることはよく知られている。$w = I_n \in V'(K)$ の固定部分群

は $G_w = \{(t,g) \mid g^t g = I_n\} \cong \mathrm{O}_n$ である。

$K = \mathbb{R}$ とする。$x \in V'(\mathbb{R})$ に対し，重複を込めた正の固有値の個数 p と負の固有値の個数 q の組 (p,q) を対応させることで，

$$G(\mathbb{R})\backslash V'(\mathbb{R}) \longrightarrow \{(p,q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \mid p+q=n\}$$

が定まる。これが全単射であるというのが Sylvester の慣性律である。

K の標数は 2 でないとする。V を 2 次形式の空間と考えることもできる。$v = (v_1, \ldots, v_n)$ を n 個組の変数とし，対称行列 $x \in V$ に対し $x(v) = vx^t v$ とすると，これは $v_1, \ldots, v_n$ の斉次 2 次式である。$x = (x_{ij})$ なら，$x(v) = \sum_{i,j} x_{ij} v_i v_j$ である。$w(v) = \sum_{i,j} \delta_{ij} v_i v_j = v_1^2 + \cdots + v_n^2$ である。この $x \mapsto x(v)$ によって V を 2 次形式の空間と同一視できる。こう考えると

$$(gx)(v) = v(gx^t g)^t v = (vg)x^t(vg) = x(vg)$$

だから，$G = \mathrm{GL}_n$ は変数の線形変換で 2 次形式の空間 V に作用する。

$n = 2$ なら

$$x = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \mapsto x(v) = (v_1\ v_2) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = av_1^2 + bv_1v_2 + cv_2^2$$

であり，また $\det x = ac - \frac{1}{4}b^2 = -\frac{1}{4}\mathrm{Disc}(x(v))$ である。

この表現も，$G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_n$ で考えることがある。この場合，

$$G_w = \{(t,g) \mid tg^t g = I_n\} \cong \{g \in \mathrm{GL}_n \mid g^t g = t' I_n\ \exists t' \in \mathrm{GL}_1\} = \mathrm{GO}_n$$

である。2 次形式は Q とも書く。2 次形式 Q が非退化であるのは $P(Q) \neq 0$ のときで，この場合に $\mathrm{O}(Q)$, $\mathrm{GO}(Q)$ はそれぞれ $G = \mathrm{GL}_n$ および $G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_n$ のときの Q の固定部分群のことである。

3.6 2 次空間

Q を K 上の非退化な n 元 2 次形式とする。$V = K^n$ とし，$G = \mathrm{GO}(Q) \subset \mathrm{GL}_n$ とする。G を V に普通の行列倍で作用させる。$Q(x)$ は相対不変式であり，$V' = \{x \in V \mid Q(x) \neq 0\}$ は $\overline{K}$ で単一軌道である。

4 概均質ベクトル空間の有理軌道

4.1 2 元 3 次形式の空間の非特異軌道

ここまでの例で，非特異な有理軌道の集合 $G(K)\backslash V'(K)$ についても考えてきた。これは 1 点になることもあったが，そうでないこともあった。3.1 節の $(\mathrm{GL}_1, \rho_2, K)$ や 3.3 節の $(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ では，$G(K)\backslash V'(K)$ は K の 2 次拡大（正確には 2 次分離代数）の同型類と 1 対 1 に対応した。したがってこれらの (G, V) は，何らかの意味で K の 2 次拡大を記述する概均質ベクトル空間だと考えることができる。

V を 2 元 3 次形式の空間とし，$G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ とする。この場合，有理軌道は K の 3 次分離代数と対応する。

命題 4.1 有理軌道の集合 $G(K)\backslash V'(K)$ と K の 3 次分離代数の同型類のなす集合の間に自然な全単射がある。

証明 $x \in V'(K)$ に対し，K の 3 次分離代数 F_x を次のように定める。

(1) x が K 上で 1 次式の積に分解するときは $F_x = K \times K \times K$ とする。

(2) x が K 上で 1 次式 $au + bv$ と 2 次既約式 $y(u, v)$ の積に分解するときは，α を $y(u, 1)$ の根として，$F_x = K \times K(\alpha)$ とする。

(3) x が K 上で既約なときは，α を $x(u, 1)$ の根として，$F_x = K(\alpha)$ とする。

任意の 3 次分離代数はある F_x と同型である。また，$x, y \in V'(K)$ とすると，これらが同じ $G(K)$ 軌道にあれば，$F_x \cong F_y$ であることも定義からすぐ分かる。よって逆に，$F_x \cong F_y$ のときに x, y が同じ $G(K)$ 軌道にあることが示せればよい。

(1) $F_x \cong K^3$ のとき，補題 3.5 とまったく同じ証明で x は $w = w(u, v) = uv(u+v)$ と同じ $G(K)$ 軌道にあることが分かるので，x, y は同じ $G(K)$ 軌道にある。

(2) $F_x \cong K \times L$ で L/K は 2 次の体拡大であるとする。$F_x \cong F_y$ とする。同型を固定して $F_x = F_y$ であるとする。K 上の 1 次式 $au + bv$ は $\mathrm{GL}_2(K)$ で v に移せるので，$x = v(u - \alpha v)(u - \alpha' v)$ $y = v(u - \beta v)(u - \beta' v)$, $L = K(\alpha) = K(\beta)$ としてよい。$\beta = a + b\alpha$, $a \in K$, $b \in K^\times$ と書ける。$g_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -a & b \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(K)$ とすると，$g = (b^{-1}, g_2) \in G(K)$ について，$gx = y$ である。

(3) F_x が K の 3 次拡大であるとする。$F_x \cong F_y$ とする。同型を固定して $F_x = F_y$

であるとする。$\alpha \in F_x$ は $x(u,1)$ の根，$\beta \in F_y$ は $y(u,1)$ の根とする。$\alpha, \beta \in F_y = F_x$ で，$1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ は K 上 1 次従属だから，$b\alpha\beta + d\beta - a\alpha - c = 0$ となるすべては 0 でない $a, b, c, d \in K$ が存在する。$\alpha = \frac{a\beta+c}{b\beta+d}$ なので $ad - bc \neq 0$ かつ，$x(\frac{a\beta+c}{b\beta+d}, 1) = 0$ であり，したがって β は $x(au+c, bv+d)$ の根である。β の K 上の最小多項式は 3 次だから，$x(au+c, bv+d)$ と $y(u,1)$ は $K^\times$ 倍を除いて一致する。斉次化すれば，$y(u,v) = tx(au+cv, bu+dv)$ とできる。 $\square$

本報告集の谷口 [11] でこの命題の Galois コホモロジーを使った証明を述べる。4 次や 5 次の分離代数を記述する概均質ベクトル空間もあり，本報告集の石塚 [9, 10] で扱われる。

4.2 分離代数と関手性

1.1 節で代数群を関手性の観点を踏まえて説明したが，そのこととの関係を簡単に述べておきたい。3.1 節で述べたが，K 上 2 次の分離代数の集合は K 上の 2 次以下の分離拡大体と一対一に対応する。3 次でも事情は同様である。4 次以上になるとそうはならないものの，この記事の範疇では体でなく分離代数で考える理由がはっきりしにくいかも知れないが，意図があって，その一つは関手性である。

K 代数の準同型 ϕ: $A \to B$ があれば，群準同型 $G(A) \to G(B)$ および K 加群の準同型 $V(A) \to V(B)$ が定まる。どちらも ϕ で表すことにすると，この ϕ はそれぞれの作用を保つ。つまり $\phi(gx) = \phi(g)\phi(x)$ が任意の $g \in G(A)$, $x \in V(A)$ に対してなりたつ。したがって軌道の集合の間にも写像 $G(A)\backslash V(A) \to G(B)\backslash V(B)$ が誘導される。K' が K の拡大である場合は $G(K)\backslash V'(K) \to G(K')\backslash V'(K')$ が定まる。軌道の解釈として K 上の代数を考えるときは，代数の側では K 代数 F はテンソルで $F \mapsto F \otimes K'$ と送るのが自然で，これと整合的であることが望ましい。

F が K の 3 次拡大体であっても，$F \otimes K'$ は K' の 3 次拡大体であるとは限らない。しかし，F が K 上の 3 次分離代数であれば，$F \otimes K'$ は K' 上の 3 次分離代数である。つまり，分離代数は体の拡大で安定な概念である。

具体例で見てみよう。2 元 3 次形式の空間 (G, V) を $K = \mathbb{Q}$ 上で考える。$x(u,v) = u^3 - 2v^3 \in V'(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であり，対応する 3 次分離代数 $F_x := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ は $\mathbb{Q}$ の拡大体である。他方，$K' = \mathbb{R}$ とすると，$\mathbb{R}$ の 3 次拡大体は存在せず，$\mathbb{R}$ 上 3 次の分離代数は $\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ の 2 個である。これが $G(\mathbb{R})\backslash V'(\mathbb{R})$ が 2 個の元からなることと対応する。$x \in V'(\mathbb{R})$ に対応する $\mathbb{R}$ 上の 3 次分離代数は $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ であり，これは

$F_x \otimes \mathbb{R}$ と同型である。

3 次体 F は $F \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ のとき総実といい，$F \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ のとき虚という。3 次拡大でなく 3 次分離代数を考えることで，自然な写像 $G(\mathbb{Q})\backslash V'(\mathbb{Q}) \to G(\mathbb{R})\backslash V'(\mathbb{R})$ と整合的な対応になる。

また，軌道に関わるデータを記述するときも，分離代数で考えた方が整合的になることが多い。例えば，$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合，$x \in V'(K)$ に対応する 2 次分離代数を F_x とすると，$G_x(K) \cong F_x^\times \rtimes \mathrm{Aut}(F_x)$ である。

4.3 特異軌道は

特異軌道の集合 $G(K)\backslash S(K)$ の記述は $G(K)\backslash V'(K)$ の記述とは別の問題である。これもゼータ積分の "特異積分" を計算するときに必要になる（本報告集では鈴木美 [14], 都築 [12]) など，概均質ベクトル空間 (G, V) を研究する上で欠かせない。3.1, 3.2, 3.3 節では特異軌道も含めた $G(K)\backslash V(K)$ の記述を与えたが，ここで，2 元 3 次形式の空間の特異軌道を考えてみよう。

補題 4.2 $uv^2, v^3, 0 \in S(K)$ は相異なる $G(K)$ 軌道にあり，これらの軌道の和集合が $S(K)$ である。

証明 $0 \neq x \in V(K)$ について，$x \in S(K)$ とは $x(u,v)$ が $\overline{K}$ で重複する因子をもつことである。次数を考えるとそれは K 上の 1 次因子になる。重複する因子を $\mathrm{GL}_2(K)$ で v に動かせばよい。3 重の場合は av^3, $a \in K$ となり，2 重の場合は $(au+bv)v^2$, $a \in K^\times$, $b \in K$ で後者は $au+bv \mapsto u$, $v \mapsto v$ とすればよい。 □

K 上で 3 次の非分離代数（の同型類）は 3 個あり，$K \times K[v]/(v^2)$, $K[v]/(v^3)$, $K[u,v]/(u^2, uv, v^2)$ である。補題 4.2 の 3 個の軌道と順に対応させるのは自然で，これにより命題 4.1 が $G(K)\backslash V(K)$ と 3 次代数の同型類のなす集合との対応に延長されたことになる。

そこで，このような延長が一般に可能であるか考えるのは自然であるが，これはあまり単純には解決しない。非特異集合 $V'(K)$ の軌道が 2 次分離代数と対応する場合を考えてみよう。3.1 節と 3.3 節でそのような概均質ベクトル空間を紹介した。それぞれ，$(\mathrm{GL}_1, \rho_2, K)$ と $(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ である。K 上 2 次の非分離代数は $K[v]/(v^2)$ の 1 個だけである。$(\mathrm{GL}_1, \rho_2, K)$ の特異集合は 1 個の軌道からなるので，$K[v]/(v^2)$ と対応させればよい。しかし，$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合は 3.3 節で

述べたように，特異集合は 2 個の軌道からなるので，2 次非分離代数と一対一に対応させることができない。

$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合は，2 次代数だけでなく，それの適当な加群との組を考えることで，特異集合を含めた一対一を考えることができることが分かっている [4]。$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^3(2))$ の場合の対応は，Levi-Delone-Faddeev 対応が特異集合にも延長できる [2] ことが背景にある。そのような命題を得るためには，抽象的な一般論ではない，個々の表現の具体的な考察が必要になるようである。

参考文献

[1] Nicolas Bourbaki. *Algebra II. Chapters 4–7.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, french edition, 2003.

[2] W.T. Gan, B. Gross, and G. Savin. Fourier coefficients of modular forms on G_2. *Duke Math. J.*, 115:105–169, 2002.

[3] F. Thorne. Counting cubic fields using shintani's zeta function. 本報告集, 2023.

[4] Melanie Matchett Wood. Gauss composition over an arbitrary base. *Adv. Math.*, 226(2):1756–1771, 2011.

[5] 佐藤文広. 関数等式の一般化. 本報告集, 2023.

[6] 佐野薫. 余正則空間と楕円曲線のセルマー群. 本報告集, 2023.

[7] 山本修司. 大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性. 本報告集, 2023.

[8] 杉山和成. 概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（1 変数の場合）. 本報告集, 2023.

[9] 石塚裕大. 三元二次形式のペアと射影空間の幾何. 本報告集, 2023.

[10] 石塚裕大. 有理軌道、整軌道の解釈. 本報告集, 2023.

[11] 谷口隆. 本論のための準備. 本報告集, 2023.

[12] 都築正男. 新谷二重ゼータ関数. 本報告集, 2023.

[13] 木村達雄. **概均質ベクトル空間**. 岩波書店, 1998.

[14] 鈴木美裕. 保型形式と概均質ゼータ関数. 本報告集, 2023.

概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（1 変数の場合）

杉山和成（千葉工業大学数学教室）

概要

佐藤幹夫・新谷卓郎 [SS2] による，1 変数概均質ゼータ関数の理論について解説する．木村達雄 [Ki1] や佐藤文広 [Sa1, Sa2] など，すでにすぐれた成書や解説が数多くあるので，詳細については省略して，なるべく予備知識を仮定せずに，歴史や最近の結果などについても適宜触れつつ，1 変数の概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（関数等式など）について紹介する．本稿で解説されるゼータ関数やゼータ積分は，以降の記事で（一般化され形を変えながら）繰り返し登場する．

1 Introduction

概均質ゼータ関数の入門としては，[Ki1, pp. 8-9] や [Sa2, pp. 6-7] のように，Riemann ゼータ関数を概均質ベクトル空間の理論で扱い，局所関数等式を導入するのが定番である．しかし，時にはいつもと違う味わいを求めたいと思うのが人情で，本稿では，繰り返しを避けるという意味もあって，正定値 2 次形式に付随するゼータ関数を最初の例として取り扱う事にする．この例で現れる群はコンパクトなので，群作用を持ち出す必然性は実はあまりないのであるが，「大きな群の作用」が役割を果たしている様子が Riemann ゼータ関数のときより見やすいかもしれない[*1]．

$SO(n) = \{k \in SL_n(\mathbb{C})\,;\, {}^t kk = I_n\}$ とする．$G = GL_1(\mathbb{C}) \times SO(n), V = \mathbb{C}^n$ とし，G の V の上への表現 ρ を

$$\rho(g)v = tkv \qquad (g = (t, k) \in G, v \in V)$$

[*1] 定番メニューを希望される方は，[Sa2, pp. 6–7], [Sug, pp. 1–4] などをご覧ください．Web から入手できます．

により定義すると，(G,ρ,V) は概均質ベクトル空間になる．さらに，$P(v)=\sum_{i=1}^{n}v_i^2=v_1^2+\cdots+v_n^2$ は (G,ρ,V) の相対不変式である．すなわち，

$$P(\rho(g)v)=t^2\cdot P(v) \qquad\qquad (g=(t,k)\in G, v\in V)$$

である．Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ の積分表示

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\int_0^{\infty}t^{s/2-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}dt$$

を群論的に一般化して，(G,ρ,V) に対するゼータ関数を定義してみよう．まず，$G^+=\mathbb{R}_{>0}\times SO(n)_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}^n-\{0\}$ に推移的に作用している．ここで，$SO(n)_{\mathbb{R}}$ はコンパクトな実型を考えていることに注意する．積分を定義するためには，群やベクトル空間上の不変測度を固定する必要があるが，$\mathbb{R}_{>0}$ 上の不変測度としては，$d^{\times}t=\dfrac{2dt}{t}$ をとり，$SO(n)_{\mathbb{R}}$ 上の不変測度 dk は，$\int_{SO(n)_{\mathbb{R}}}dk=1$ をみたすように正規化しておく*2．これで G^+ 上の測度 $dg=d^{\times}tdk$ が決まる．次に，$dv=dv_1\ldots dv_n$ を $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度すると，

$$\omega(v)=P(v)^{-n/2}dv$$

は G^+ の作用に関して不変な $\mathbb{R}^n$ 上の測度になる．$v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対して，

$$SO(n)_{v,\mathbb{R}}=\{k\in SO(n)_{\mathbb{R}}\,;\,kv=v\}$$

を v における等方部分群（isotropy subgroup, stabilizer）とすると，

$$\mathbb{R}_{>0}\times SO(n)_{\mathbb{R}}/SO(n)_{v,\mathbb{R}}\cong\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \tag{1.1}$$

となっている*3．各 $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対して，$SO(n)_{v,\mathbb{R}}$ 上の不変測度 $d\mu_v$ を次の積分公式が成り立つように正規化する: 任意の $F(g)=F(t,k)\in L^1(G^+)$ に対して，

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\int_{SO(n)_{\mathbb{R}}}F(t,k)d^{\times}tdk\\&\qquad=\int_0^{\infty}\int_{SO(n)_{\mathbb{R}}/SO(n)_{v,\mathbb{R}}}\omega(t\dot{k}v)\int_{SO(n)_{v,\mathbb{R}}}F(t,\dot{k}h)d\mu_v(h)\end{aligned} \tag{1.2}$$

*2 不変測度，より一般に，局所コンパクト群上の Haar 測度については，小林・大島 [KO]，野村 [No] などを参照してください．

*3 G^+ の v における等方部分群 G_v^+ を $\mathbb{R}_{>0}$ に射影した像は，単位群 $\{1\}$ である．また，$SO(n)_{v,\mathbb{R}}\cong SO(n-1)_{\mathbb{R}}$ であり，コンパクト群である．

が成り立つ．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数全体がなす空間[*4]であるとし，$s \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$Z(f;s) = \int_0^\infty t^{2s} d^\times t \int_{SO(n)_\mathbb{R}} \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f(tkv) dk \tag{1.3}$$

とおく．これが，(G, ρ, V) に付随するゼータ積分である．積分の収束性の確認は一旦留保して，$Z(f;s)$ からゼータ関数を取り出そう．和と積分の順番を変更して，

$$Z(f;s) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \int_0^\infty t^{2s} d^\times t \int_{SO(n)_\mathbb{R}} f(tkv) dk$$

として，積分公式 (1.2) を $F(t,k) = t^{2s} f(tkv)$ に対して適用すると，

$$Z(f;s) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \int_0^\infty \int_{SO(n)_\mathbb{R}/SO(n)_{v,\mathbb{R}}} t^{2s} f(t\dot{k}v) \omega(t\dot{k}v) \int_{SO(n)_{v,\mathbb{R}}} d\mu_v(h)$$

となる．G^+ が $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に推移的に作用していることから，積分公式 (1.2) を用いると，任意の $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $\int_{SO(n)_{v,\mathbb{R}}} d\mu_v(h)$ は一定値 c であることが証明できる[*5]．さらに，$t^{2s} = \dfrac{P(t\dot{k}v)^s}{P(v)^s}$, $\omega(v) = P(v)^{-n/2} dv$ に注意すると，

$$\begin{aligned} Z(f;s) &= c \cdot \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{P(v)^s} \int_0^\infty \int_{SO(n)_\mathbb{R}/SO(n)_{v,\mathbb{R}}} P(t\dot{k}v)^{s-n/2} f(t\dot{k}v) d(t\dot{k}v) \\ &= c \cdot \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{P(v)^s} \int_{\mathbb{R}^n} P(x)^{s-n/2} f(x) dx \end{aligned}$$

と変形できる．2 つめの等号では同型 (1.1) を用いているが，1 点集合 $\{0\}$ は測度 0 なので，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上の積分を $\mathbb{R}^n$ 上の積分に直している．ゼータ関数 $\zeta_P(s)$ と（無限素点における）局所ゼータ関数 $\Phi(f;s)$ を

$$\begin{aligned} \zeta_P(s) &= \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{P(v)^s} = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{(v_1^2 + \cdots + v_n^2)^s}, \\ \Phi(f;s) &= \int_{\mathbb{R}^n} P(x)^{s-n/2} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (x_1^2 + \cdots + x_n)^{s-n/2} f(x) dx \end{aligned}$$

[*4] C^∞-関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が，任意の $p, q \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $\sup_{v \in \mathbb{R}^n} |v^p D_v^q f(v)| < +\infty$ をみたすとき，f は急減少関数であるといわれる．ここで，$p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n)$ に対して $v^p = v_1^{p_1} \ldots v_n^{p_n}$, $D_v^q = (\partial/\partial v_1)^{q_1} \cdots (\partial/\partial v_n)^{q_n}$ である．

[*5] (1.2) の左辺に $F(t,k) = e^{-\pi P(tkv)}$ を代入した積分は v によらないことを用いればよい．

と定義する．$\zeta_P(s)$ は Epstein ゼータ関数とよばれているものである[*6]．$\zeta_P(s)$ と $\Phi(f;s)$ はともに $\mathrm{Re}(s) > n/2$ の範囲で絶対収束する[*7]ので，Fubini の定理より，この範囲で $Z(f;s)$ が収束することが分かり，形式的な計算が正当化される．よって，

命題 1.1 $\mathrm{Re}(s) > n/2$ のとき，次の等式が成り立つ．

$$Z(f;s) = c \cdot \zeta_P(s)\Phi(f;s).$$

命題 1.1 は，ゼータ積分が（大域）ゼータ関数と局所ゼータ関数の積であらわされるということを示しており，**ゼータ関数の積分表示**とよばれるものの一例である．

Poisson の和公式について復習しよう．まず，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の **Fourier 変換**を

$$\widehat{f}(v^*) = \int_{\mathbb{R}^n} f(v) e^{2\pi i \langle v, v^* \rangle} dv$$

と定義する．ここで，$v = (v_1, \ldots, v_n)$, $v^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle v, v^* \rangle = \sum_{i=1}^n v_i v_i^*$ としている．$\widehat{f}(v^*) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であるが，

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^n} f(v) = \sum_{v^* \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(v^*)$$

という等式が成り立つことが知られている（**Poisson の和公式**）．$g = (t, k) \in G^+$ に対して，$f_g(v) = f(tkv)$ とおくと，$\widehat{f_g}(v^*) = t^{-n}\widehat{f}(t^{-1} \cdot {}^t k^{-1} v^*)$ となることが簡単に確かめられるので，$g = (t, k) \in G^+, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^n} f(tkv) = t^{-n} \sum_{v^* \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(t^{-1} \cdot {}^t k^{-1} v^*) \tag{1.4}$$

となる．(1.3) の積分を少し修正して，$s \in \mathbb{C}, f^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$Z^*(f^*;s) = \int_0^\infty t^{-2s} d^\times t \int_{SO(n)_\mathbb{R}} \sum_{v^* \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f^*(t^{-1} \cdot {}^t k^{-1} v^*) dk$$

[*6] 実は，$\zeta_P(s)$ の関数等式については，Hurwitz が Epstein より 10 年以上前に 1880 年代の終わりに見つけていた．Hurwitz の数学日記の中に論文の原稿が残っている．[Os] を参照．Epstein's zeta functions という呼称は Siegel と Deuring により広まったと思われる．Epstein は Siegel の Frankfurt 大学での同僚であったが，Epstein はユダヤ人であったため失職した．戦後，Siegel が Frankfurt 大学数学教室の歴史について講演をしているが，その中で自殺する直前の Epstein を訪問した時のことについても触れている．（講演録が上野 [U, 第 1 巻] に所収．）

[*7] $\Phi(f;s)$ の収束性は $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であることから分かる．$\zeta_P(s)$ の収束については，たとえば，[Ki1, p. 234] をみよ．

とおく．後述するが，$Z^*(f^*;s)$ は双対概均質ベクトル空間 (G,ρ^*,V^*) に付随するゼータ積分である．$P(t^{-1}\cdot {}^tk^{-1}v^*)=t^{-2}\cdot P(v^*)$ だから，t のべきが t^{2s} でなく t^{-2s} となっている．

Poisson の和公式を利用して，$Z(f;s)$ と $Z^*(f^*;s)$ の間の関係を導く．まず，t の積分範囲を 2 つに分けて，

$$Z_+(f;s)=\int_1^\infty t^{2s}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}f(tkv)dk,$$

$$Z_-(f;s)=\int_0^1 t^{2s}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}f(tkv)dk$$

とおく．明らかに $Z(f;s)=Z_+(f;s)+Z_-(f;s)$ であるが，$Z_+(f;s)$ は任意の $s\in\mathbb{C}$ に対して収束し，s の整関数を定める．というのも，$1\le t$ のとき，実数 a に対して，t^a は a についての単調増加関数になるからである．$Z(f;s)$ の s の関数としての極は，$Z_-(f;s)$ の方から出てくる．$Z^*(f^*;s)$ についても同様に，

$$Z^*_+(f^*;s)=\int_0^1 t^{-2s}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v^*\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}f^*(t^{-1}\cdot {}^tk^{-1}v^*)dk,$$

$$Z^*_-(f^*;s)=\int_1^\infty t^{-2s}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v^*\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}f^*(t^{-1}\cdot {}^tk^{-1}v^*)dk$$

と 2 つの積分に分ける．**積分範囲の取り方が反対になっている**ことに注意しよう．上で説明したのと同じ理由で，$Z^*_+(f^*;s)$ は s の整関数を定める．以下，$\mathrm{Re}(s)>n/2$ とする．(1.4) を使いたいが，$\{0\}$ の扱いに注意が必要で，

$$\begin{aligned}
Z^*_-(\widehat{f};s)&=\int_1^\infty t^{-2s}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v^*\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(t^{-1}\cdot {}^tk^{-1}v^*)dk-\widehat{f}(0)\int_1^\infty t^{-2s}d^\times t\\
&=\int_1^\infty t^{-2s+n}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v\in\mathbb{Z}^n}f(tkv)dk-\frac{\widehat{f}(0)}{s}\\
&=\int_1^\infty t^{-2s+n}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}f(tkv)dk+f(0)\int_1^\infty t^{-2s+n}d^\times t-\frac{\widehat{f}(0)}{s}\\
&=Z_+\left(f;\frac{n}{2}-s\right)+\frac{f(0)}{s-\frac{n}{2}}-\frac{\widehat{f}(0)}{s}
\end{aligned}$$

となる．同様の変形を $Z_-\left(f;\frac{n}{2}-s\right)$ に対しても行う事が出来て，結局

$$Z^*(\widehat{f};s)=Z_+^*(f;s)+Z_+\left(f;\frac{n}{2}-s\right)+\frac{f(0)}{s-\frac{n}{2}}-\frac{\widehat{f}(0)}{s}=Z\left(f;\frac{n}{2}-s\right)$$

が示された．以上をまとめて，次の命題を得る．

命題 1.2（ゼータ積分の関数等式） $Z(f;s)$ および $Z^*(f^*;s)$ は全 $\mathbb{C}$ 平面に解析接続され，$s=0,\dfrac{n}{2}$ で 1 位の極を持つ．さらに，関数等式

$$Z^*(\widehat{f};s)=Z\left(f;\frac{n}{2}-s\right)$$

が成り立つ．

最後に局所ゼータ関数 $\Phi(f;s)$ の性質を引用する．$\Delta=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)^2$ をラプラシアンとすると，部分積分などにより，

$$\Phi(\Delta f;s+1)=\int_{\mathbb{R}^n}P(x)^{s+1-n/2}(\Delta f)(x)dx=4s\left(s+1-\frac{n}{2}\right)\Phi(f;s)$$

となることが確かめられるが，この式を繰り返し使う事により $\Phi(f;s)$ は全 $\mathbb{C}$ 平面に有理型に解析接続される．さらに，次の等式が成り立つことが知られている．

命題 1.3（局所関数等式）

$$\Phi(\widehat{f};s)=\pi^{-2s+(n-2)/2}\Gamma(s)\Gamma\left(s-\frac{n-2}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{n}{2}-s\right)\Phi\left(f;\frac{n}{2}-s\right).$$

この命題の証明については，木村 [Ki1, 命題 4.23] を参照．いずれにせよ，これで準備がすべて終わって，命題 1.1, 1.2 より，

$$\zeta_P(s)\Phi(\widehat{f};s)=\zeta_P\left(\frac{n}{2}-s\right)\Phi\left(f;\frac{n}{2}-s\right)$$

がわかり，これと命題 1.3 をあわせて，次の定理を得る．

定理 1.4（ゼータ関数の関数等式） $\zeta_P(s)$ は関数等式

$$\zeta_P\left(\frac{n}{2}-s\right)=\pi^{-2s+(n-2)/2}\Gamma(s)\Gamma\left(s-\frac{n-2}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{n}{2}-s\right)\zeta_P(s)$$

をみたす．この関数等式は，次のように整理される．

$$\widehat{\zeta}_P\left(\frac{n}{2}-s\right)=\widehat{\zeta}_P(s),\qquad \text{ただし，}\widehat{\zeta}_P(s):=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_P(s).$$

注意 1.5 (1) $Z(f;s)$ は $s=0,\ \dfrac{n}{2}$ において 1 位の極を持つが，$s=0$ の方は $\Phi(f;s)$ からくる極である．$\zeta_P(s)$ は $s=\dfrac{n}{2}$ のみで 1 位の極を持ち，他では正則である．詳細は略す．

(2) ゼータ積分 (1.3) において $f_0(v)=e^{-\pi P(v)}$ とすると，$SO(n)_{\mathbb{R}}$ の積分は消えて，正定値 2 次形式 $P(v)$ に付随するテータ級数の Mellin 変換になり，この場合はテータ変換公式から直接 $\zeta_P(s)$ の関数等式が導かれて，局所関数等式は不要である[*8]．例えば，高瀬 [Ta, 2.5 節] を参照．

さて，$P(v)$ を不定値 2 次形式（例えば

$$P(v)=v_1^2+\cdots+v_p^2-v_{p+1}^2-\cdots-v_n^2$$

など）に対して上の方法を一般化しようとしても簡単には上手く行かない．

(A) まず，整数 m に対して，$P(v)=m$ をみたす $v\in\mathbb{Z}^n$ の個数が有限ではない．別の言い方をすると，不定値の場合，$SO(P)_{\mathbb{R}}\cong SO(p,n-p)_{\mathbb{R}}$ は非コンパクトでその数論的部分群も無限群になるため，無限個の $v\in\mathbb{Z}^n$ で $P(v)$ の値が同じになりうる．このため，$\sum|P(v)|^{-s}$ はこのままでは収束しない．

(B) 不定値の場合，f を f_0 のように特殊化しても $\Phi(f_0;s)$ は簡単な積分にならず，実は超幾何関数に関連する積分になる．

(C) 不定値だと，P の零点集合 S と $\mathbb{Z}^n$ の共通部分が $\{0\}$ より真に大きい．すなわち，$\{v\in\mathbb{Z}^n\,;\,P(v)=0\}\supsetneqq\{0\}$ となる．このことにより，ゼータ積分の主要部の計算が困難になる．

これらが，Siegel が不定値 2 次形式のゼータ関数を考えたときに直面した困難であり（論文は 1938-39 年に出版），一般に概均質ゼータ関数を定義し関数等式を証明するときも全く同様の障壁を乗り越えなければならない．概均質ベクトル空間の理論では，第 1 の問題 (A) については Siegel のアイディアを踏襲している．すなわち，密度とよばれる量 $\mu(v)$ を分子にのせて重みを付け，さらに Γ-軌道の代表点での和を考えることで収束する Dirichlet 級数を定義する．第 2，第 3 の問題 (B),(C) を扱うときに，テスト関数 f を導入したことの利益が享受できる．

[*8] $\Phi(f_0;s)$ がガンマ関数で表されるという事の反映である．実は，$\zeta_P(s)$ の関数等式が先に分かっているのであれば，局所関数等式が導かれる．命題 1.2，命題 1.3，定理 1.4 の 3 つの事実のうち，2 つが分かっていれば，残りの一つが導かれる，という仕組みになっている．

それでは，以下，Sato-Shintani [SS2] の概均質ゼータ関数の理論について，概観を見ていこう．

2　b-関数，局所関数等式

まず最初に，

- **[仮定 0]** (G, ρ, V) は $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間である

と仮定しよう．すなわち，以下の (i)〜(iv) を仮定する．

(i) G ($\subset GL_m(\mathbb{C})$) は $\mathbb{Q}$ 上定義された連結線形代数群である．
(ii) V は $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$ となる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $V_{\mathbb{Q}}$ を含む．（$V_{\mathbb{Q}}$ を V の $\mathbb{Q}$-構造とよぶ．）
(iii) $V_{\mathbb{Q}}$ の適当な基底をとり $V_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{C}^n \cong V$ とする．$g = (g_{ij}) \in G$ に対して，$\rho(g) = (\rho(g)_{kl}) \in GL_n(\mathbb{C})$ とかくとき，各行列成分 $\rho(g)_{kl}$ は g_{ij} の $\mathbb{Q}$-係数の有理関数になる．
(iv) ある $v_0 \in V$ が存在して，$\rho(G)v_0$ が V の Zariski 開集合になる．

このとき，$S := V - \rho(G)v_0$ を特異集合とよぶ．定義より，S は Zariski 閉集合（すなわち，幾つかの多項式の零点集合）になる．

次に, V^* を V の双対ベクトル空間とし, $\rho^* : G \to GL(V^*)$ を ρ の反傾表現とする．すなわち，ρ^* は $g \in G, v \in V, v^* \in V^*$ に対して，$\langle \rho(g)v, \rho^*(g)v^* \rangle = \langle v, v^* \rangle$ により定義される表現であり, V^* の適当な基底をとると，$\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$ ($n = \dim_{\mathbb{C}} V$) となる．我々は常に，

- **[仮定 1]** G は簡約可能代数群[*9]であり，特異集合 S は $\mathbb{C}$ 上で既約な超曲面である

と仮定する．簡約可能という仮定から，$V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ の基底をうまくとると，${}^t\rho(G) = \rho(G) \subset GL_n(\mathbb{C})$ とできるので[*10]，双対三つ組 (G, ρ^*, V^*) はふたたび概均

[*9] 定義は [Ki1, § 1.4] を参照．代数群については，最近では，太田・西山 [ON] など日本語で書かれた良い教科書がある．「簡約可能」を単に「簡約」とする方が最近の傾向ではあるが、ここでは [Ki1] に合わせた。
[*10] Mostow の定理を使う．例えば，Platonov-Rapinchuk [PR, Theorem 3.7] を参照．

質ベクトル空間になり，その特異集合 S^* は $\mathbb{C}$ 上既約な超曲面となる[*11]．すべての $v \in V_{\mathbb{Q}}$ に対して $\langle v, v^* \rangle \in \mathbb{Q}$ をみたすような $v^* \in V^*$ の全体を $V_{\mathbb{Q}}^*$ とすると，$V_{\mathbb{Q}}^*$ は V^* の $\mathbb{Q}$-構造になり，(G, ρ^*, V^*) はこの $\mathbb{Q}$-構造に対して $\mathbb{Q}$ 上定義される．[Ki1, 定理 2.9] より，

$$S = \{v \in V\,;\, P(v) = 0\}$$

とかくとき，$P(v)$ は (G, ρ, V) の相対不変式になるのであった．すなわち，G の有理指標 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ が存在して，

$$P(\rho(g)v) = \chi(g)P(v) \qquad (g \in G, v \in V) \tag{2.1}$$

が成り立つ．(G, ρ, V) が $\mathbb{Q}$ 上定義されているので，P は $\mathbb{Q}$-係数の絶対既約多項式にとれる．[Ki1, 命題 2.18] より，$d = \deg P$, $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ とすると，$d|2n$ であり，

$$\det \rho(g)^2 = \chi(g)^{\frac{2n}{d}} \tag{2.2}$$

が成り立つ．後でこの関係式は，ベクトル空間上の不変測度を構成するときなど頻繁に用いられる．b-関数を定義しよう．(G, ρ^*, V^*) の特異集合 S^* の定義方程式 P^* はやはり $\mathbb{Q}$-係数の絶対既約多項式にとれて，

$$P^*(\rho^*(g)v^*) = \chi(g)^{-1}P^*(v^*) \qquad (g \in G, v^* \in V^*) \tag{2.3}$$

をみたす．$P^*(D_v)$ を $P^*(D_v)e^{\langle v, v^* \rangle} = P^*(v^*)e^{\langle v, v^* \rangle}$ $(v \in V, v^* \in V^*)$ をみたす V 上の偏微分作用素とすると，$P^*(D_{\rho(g)v}) = \chi(g)^{-1}P^*(D_v)$ となる．よって，$P^*(D_v)P(v)^{s+1}$ は χ^s に対応する相対不変式になるので，$P(v)^s$ と（s に依存する）定数倍を除いて一致する．これより，

$$P^*(D_v)P(v)^{s+1} = b(s)P(v)^s \tag{2.4}$$

をみたす s の多項式 $b(s)$ が存在することが分かる．詳細については，[Ki1, 命題 2.22] を参照のこと．$b(s)$ を (G, ρ, V) の ***b*-関数**とよぶ．例えば，$P(v) = v_1^2 + \cdots + v_n^2$ に対しては，$P^*(D_v) = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial v_n}\right)^2$ ととれて，

$$P^*(D_v)P(v)^{s+1} = 4(s+1)\left(s + \frac{n}{2}\right)P(v)^s$$

が成り立つ．

[*11] ざっくり言えば，(G, ρ, V) と (G, ρ^*, V^*) は，（$\mathbb{C}$ 上では）そっくり同じと考えていい．

[仮定 0](i) のように $G \subset GL_m(\mathbb{C})$ と埋め込まれているとき，$G_{\mathbb{R}} = G \cap GL_m(\mathbb{R})$ とする．$G_{\mathbb{R}}$ には Lie 群の構造が入り，G^+ をその単位連結成分とする．$V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ とする．$G_{\mathbb{R}}$ や $V_{\mathbb{R}}$ の位相は Zariski 位相ではなくて，$\mathbb{R}$ の普通の位相で考える．G^+ は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ へ作用するが，この作用は推移的ではない．

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_\nu$$

を連結成分への分解とすると，各 V_i は G^+-軌道である．G^+ は $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ にも反傾表現で作用しているが，$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ は同じ個数の有限個の連結成分に分かれる．詳しくは，[Ki1, 系 4.4, 命題 4.5] を参照せよ．

例 2.1 (1) $G = GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$, $V = \mathbb{C}$ として，$x \mapsto tx \ \ (t \in G, x \in V)$ により G を V に作用させてできる 1 次元概均質ベクトル空間の場合，$P(v) = v$ であり，$S = \{0\}$ である．$G^+ = \mathbb{R}_{>0}$ で $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_{>0} \cup \mathbb{R}_{<0}$ と 2 つの連結成分に分かれる．b-関数 $b(s)$ は

$$\frac{d}{dv} v^{s+1} = (s+1)v^s, \qquad b(s) = s+1$$

である．

(2) $G = GL_n(\mathbb{C}), V = M_n(\mathbb{C})$ として，$\rho(g)v = gv \ (g \in G, v \in V)$ と定義すると，(G, ρ, V) は概均質ベクトル空間で，$P(v) = \det v$ であり，$S = \{v \in V \ ; \ \det v = 0\}$ である．$G^+ = \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \, ; \det g > 0\}$ で，

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \{v \in V_{\mathbb{R}} \, ; \det v > 0\} \cup \{v \in V_{\mathbb{R}} \, ; \det v < 0\}$$

と連結成分に分解する．b-関数 $b(s)$ は

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial v_{ij}}\right) \det(v)^{s+1} = \prod_{i=1}^{n} (s+i) \cdot \det(v)^s, \qquad b(s) = \prod_{i=1}^{n}(s+i)$$

となることが知られている．

(3) $G = GL_n(\mathbb{C})$ が対称行列の空間 $V = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ に $\rho(g)v = gv\,{}^tg \ (g \in G, v \in V_{\mathbb{R}})$ で作用しているとすると，(G, ρ, V) は概均質ベクトル空間で，$P(v) = \det v$, $S = \{v \in V \ ; \ \det v = 0\}$ である．このとき，Sylvester の慣性法則より，

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_0^{(n)} \cup V_1^{(n)} \cup \cdots \cup V_n^{(0)}, \tag{2.5}$$
$$V_p^{(n)} = \text{符号}\,(p, n-p)\,\text{の非退化実対称行列}$$

と連結成分に分解される．ここでは，$G_{\mathbb{R}}$ でも G^+ でも同じ分解になる．b-関数 $b(s)$ は

$$b(s) = \prod_{i=1}^{n}\left(s + \frac{i+1}{2}\right)$$

となることが知られている．

$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots V_\nu$ および $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^* = V_1^* \cup \cdots V_\nu^*$ を連結成分への分解とする[*12]．$\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}), \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ をそれぞれ $V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}^*$ 上の急減少関数の空間として，各連結成分ごとに

$$\Phi_i(f;s) = \int_{V_i} |P(v)|^{s-n/d} f(v)dv, \qquad (f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})\,;\, i = 1, \ldots, \nu), \tag{2.6}$$

$$\Phi_i^*(f^*;s) = \int_{V_i^*} |P^*(v^*)|^{s-n/d} f^*(v^*)dv^*, \quad (f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)\,;\, i = 1, \ldots, \nu), \tag{2.7}$$

と定義する．ただし，dv, dv^* は $V_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}^*$ 上の Lebesgue 測度である．$\Phi_i(f;s)$, $\Phi_i^*(f^*;s)$ は $\mathrm{Re}(s) > n/d$ において絶対収束し s の正則関数を与えるが，b-関数を用いると，全 $\mathbb{C}$ 平面に有理型に解析接続される．詳細は，[Ki1, §4.1] を参照の事．$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$, $f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ に対して，その Fourier 変換 $\widehat{f} \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$, $\widehat{f^*} \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ をそれぞれ，

$$\widehat{f}(v^*) = \int_{V_{\mathbb{R}}} f(v) e^{2\pi i\langle v, v^*\rangle} dv, \qquad \widehat{f^*}(v) = \int_{V_{\mathbb{R}}^*} f^*(v^*) e^{2\pi i\langle v, v^*\rangle} dv^*$$

と定義する．b-関数 $b(s)$ を 1 次式に分解して，$b(s) = b_0 \prod_{i=1}^{d}(s + \alpha_i)$ とするとき，

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^{d} \Gamma(s + \alpha_i)$$

とおく．このとき，次の事実が知られている．

命題 2.2（局所関数等式） $i = 1, \ldots, \nu$ とし，$f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ とする．f^* によらない整関数 $c_{ij}(s)$ が存在して，

$$\Phi_i\left(\widehat{f^*}; s\right) = \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right) \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij}(s) \Phi_j^*\left(f^*; \frac{n}{d} - s\right) \tag{2.8}$$

が成り立つ．

[*12] 実際の応用上は，V_i, V_j^* は幾つかの連結成分の和集合になっているということも許容する．

局所関数等式が成り立つ理由について，簡単に説明したい．まず，収束などを無視して，形式的に

$$\int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle} dv$$

という V^* 上の関数を考える．この関数において v^* を $\rho^*(g)v^*$（ただし，$g \in G^+$）に置き換えると，

$$\begin{aligned}\int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle v,\rho^*(g)v^*\rangle} dv &= \int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle \rho(g)^{-1}v,v^*\rangle} dv \\ &= \int_{V_{\mathbb{R}}} P(\rho(g)v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle} d(\rho(g)v) \\ &= \chi(g)^{s-n/d} \int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle} \underbrace{\det \rho(g)}_{=\chi(g)^{n/d}} dv \\ &= \chi(g)^{s} \int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s} e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle} dv\end{aligned}$$

となり，G^+ の作用に関し，相対不変である．一方，$P^*(v^*)^{-s}$ も，

$$P^*(\rho^*(g)v^*)^{-s} = \chi^*(g)^{-s} P^*(v^*)^{-s} = \chi(g)^s P^*(v^*)^{-s} \quad (g \in G^+)$$

となるので，同じ指標 $\chi(g)^s$ に対応する相対不変式である．概均質ベクトル空間では同じ指標に対応する相対不変式は定数倍を除いて一致するのだから，s にのみに依存する関数 $c(s)$ が存在して，

$$\int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle} dv = c(s) \cdot P^*(v^*)^{-s}$$

となるであろう，というのが素朴な期待であり，この期待を超関数の等式として正当化したのが (2.8) である．$\Phi_i(\widehat{f^*}; s)$, $\Phi_j^*(f^*; \frac{n}{d} - s)$ は同じ指標に対応する G^+-相対不変な超関数であり，V_j^* が G^+-軌道であるので，もし f^* の台が $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ に含まれているのであれば，軌道上の超関数で群の作用で不変なものは定数倍を除いて一意的に決まる，という定理[*13]から (2.8) は直ちにしたがう．しかし，一番テクニカルなのは，$V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ 上の超関数として得られた等式を $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の超関数の等式に拡張するところ（[Ki1, 命題 3.14] など）であり，$\mathbb{Q}_p$ 上の局所関数等式については，対応する結果が存在しないとのことである．

[*13] Bruhat, Harish-Chandra らの結果．例えば，[Ki1, 定理 3.24] を参照．

局所関数等式と b 関数の関係についても触れておこう．b-関数のガンマ関数部分 $\gamma(s-n/d)$ は b-関数から定まっているが，逆に局所関数等式が b-関数の明示式なしに計算できていれば，b-関数が計算できる．（実際に，局所関数等式が b-関数より先に分かる場合がある．）さらに，局所関数等式が存在することの系として，$b(s)$ が

$$b(s)=(-1)^d b\left(-s-\frac{n}{d}-1\right). \tag{2.9}$$

という関数等式をみたすことがわかる．（詳しくは，[Ki1, 命題 4.19] を参照．）

局所関数等式の例

局所関数等式の例をいくつか紹介する．

(1) $G=GL_1(\mathbb{C})$, $V=\mathbb{C}$ の場合，$P(v)=v$, $P^*(v^*)=v^*$ であり，任意の $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^\infty |x|^{s-1}\widehat{f}(x)dx \\ \displaystyle\int_{-\infty}^0 |x|^{s-1}\widehat{f}(x)dx \end{pmatrix} = (2\pi)^{-s}\cdot\Gamma(s)\cdot\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}s}{2}} & e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}s}{2}} \\ e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}s}{2}} & e^{\frac{\pi\sqrt{-1}s}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^\infty |t|^{-s}f(t)dt \\ \displaystyle\int_{-\infty}^0 |t|^{-s}f(t)dt \end{pmatrix}$$

が成り立つ．[Ki1, 命題 4.21] を参照．

(2) 不定値 2 次形式の場合の局所関数等式について述べよう．一般に，$A\in GL_n(\mathbb{C})$, $x\in\mathbb{C}^n$ に対して，$A[x]={}^t xAx$ と表す（Siegel の記号）．$n\geq 3$ と仮定する．$1\leq p\leq n-1$ に対して，

$$I_{p,n-p}=\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

とおくと，$\mathbb{R}$ 上の符号 $(p,n-p)$ の不定値 2 次形式 $P(x)$ はある $B\in GL_n(\mathbb{R})$ を用いて

$$P(x)=({}^t BI_{p,n-p}B)[x]$$

と表される．$SO(P)=\{g\in SL_n(\mathbb{C})\ ;\ P(gx)=P(x)\}$ とおき，$G=GL_1\times SO(P)$ の $V=V^*=\mathbb{C}^n$ への作用 ρ, ρ^* を $\rho(g)x=\alpha\, Ax$, $\rho^*(g)x=\alpha^{-1}\,{}^t A^{-1}x$ $(g=(\alpha,A)\in G, x\in\mathbb{C}^n)$ で定めると，(G,ρ,V) は正則概均質ベクトル空間になり，$P(x)$ は (G,ρ,V) の既約相対不変式で，$Q(y)=(B^{-1}I_{p,n-p}{}^t B^{-1})[y]$ は (G,ρ^*,V^*) の既約相対不変式である．(G,ρ,V) の特異集合は $S=\{x\in V\ ;\ P(x)=0\}$ で

与えられ，(G, ρ^*, V^*) の特異集合は $S^* = \{y \in V^* \ ; \ Q(y) = 0\}$ で与えられる．$\sqrt{|\det P|} = |\det B|$ とかく．

$V_\pm = \{x \in V_\mathbb{R} \ ; \ \pm P(x) > 0\}$，$V^*_\pm = \{y \in V^*_\mathbb{R} \ ; \ \pm Q(y) > 0\}$ とおくと，$V_\mathbb{R} - S_\mathbb{R} = V_+ \cup V_-$，$V^*_\mathbb{R} - S^*_\mathbb{R} = V^*_+ \cup V^*_-$ と分解する．これらは $G_\mathbb{R}$-軌道分解ではあるが，一般に連結ではない（$p = 1$ あるいは $= n - 1$ の場合）．しかし特に支障はない．このとき，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int_{V^*_+} |Q(y)|^{s-\frac{n}{2}} \widehat{f}(y) dy \\ \displaystyle\int_{V^*_-} |Q(y)|^{s-\frac{n}{2}} \widehat{f}(y) dy \end{pmatrix} = A(s) \cdot \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{V_+} |P(y)|^{-s} f(y) dy \\ \displaystyle\int_{V_-} |P(y)|^{-s} f(y) dy \end{pmatrix},$$

但し，

$$A(s) = \Gamma(s + 1 - \frac{n}{2}) \ \Gamma(s) \ \sqrt{|\det P|} \\ \cdot \ \pi^{-2s+\frac{n}{2}-1} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \pi(s - \frac{p}{2}) & \sin \frac{\pi p}{2} \\ \sin \frac{\pi(n-p)}{2} & -\sin \pi(s - \frac{n-p}{2}) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

である．この局所関数等式は，Gelfand-Shilov による一般化関数（generalized functions）の本の中で最初に登場した．[Sug] に詳細な計算が書かれている．

(3) 正方行列の空間 $G = GL_n(\mathbb{C})$, $V = M_n(\mathbb{C})$ の場合について考えよう．上で述べたように，$V_\mathbb{R} - S_\mathbb{R}$ は 2 つの連結成分に分かれるが，本質的に局所ゼータ関数は同じものなので，連結成分に分けずに局所関数等式をかくことにすると，$f \in \mathcal{S}(M_n(\mathbb{R}))$ に対して，

$$\int_{M_n(\mathbb{R})} |\det x|^{s-n} \widehat{f}(x) dx \\ = (2\pi)^{-ns} \cdot (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^n \cdot \cos \frac{\pi s}{2} \cdots \cos \frac{\pi(s-n+1)}{2} \\ \times \Gamma(s)\Gamma(s-1) \cdots \Gamma(s-n+1) \cdot \int_{M_n(\mathbb{R})} |\det y|^{-s} f(y) dy \quad (2.11)$$

となる．符号で分けた行列型の関数等式の係数については，数学の歩み [SS1] の中に Shintani の結果 [Sh1, Theorem 1.1] を使った計算法がかかれている．[Sug] の中にそれが引き写されている．

(4) 対称行列のなす概均質ベクトル空間の局所関数等式は，Shintani [Sh2] により計算された．$G = GL_n(\mathbb{C}), V = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ として，$\rho(g)v = gv\,{}^t g$ $(g \in G,\, v \in V)$ とする．$S = \{v \in V\,;\, \det v = 0\}$ とおくと，$V - S$ は単一の G-軌道である．この例では，V と V^* を $\langle v, v^* \rangle = \mathrm{tr}\, vv^*$ により同一視する．$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の連結成分への分解は (2.5) のように与えられている．$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して，

$$\Phi_i(f;s) = \int_{V_i^{(n)}} |P(v)|^{s-(n+1)/2} f(v)dv \qquad (\mathrm{Re}(s) > (n+1)/2, 0 \le i \le n)$$

と定義する．

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(s + \frac{i+1}{2}\right) \tag{2.12}$$

とおき，さらに，$0 \le i, j \le n$ に対して，

$$\begin{aligned} u_{ij}(s) = \sqrt{-1}^{(n+1)(i+j-n/2)}(-1)^{(n-j)(n-j+1)/2} \\ \times \sum_{r=\max(0,i+j-n)}^{\min(i,j)} (-1)^{r(n+1)} \alpha_{j,r}\alpha_{n-j,i-r} \cdot \boldsymbol{e}\left[\frac{2r-i-j}{2}\right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

とおく．$\alpha_{i,j}$ はある定数で，定義は [Sh2, Lemma 14] を参照の事．このとき，

$$\Phi_i(\widehat{f};s) = \pi^{n(n-1)/4}(2\pi)^{-ns}\gamma\left(s - \frac{n+1}{2}\right)\boldsymbol{e}\left[\frac{ns}{4}\right]\sum_{j=0}^{n} u_{ij}(s)\Phi_j\left(f; \frac{n+1}{2} - s\right)$$

となる．詳細については原論文を参照してください．

(5) 2 元 3 次形式の空間の局所関数等式は，Shintani [Sh1] で計算された．$G = GL_2(\mathbb{C})$ とし，V を 2 元 3 次形式の空間

$$\{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^4$$

とする．G は V に u, v への変数変換として作用する．

$$P(x) = b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$$

を判別式とすると，$P(x)$ は (G,V) の相対不変式である．$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の連結成分への分解は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup V_2$，ただし，$V_i = \{x \in V_{\mathbb{R}}\,;\,(-1)^{i-1}P(x) > 0\}$，となる．$V$ と

V^* をある内積で同一視する．このとき，$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \int_{V_1} |P(x)|^{s-1} \widehat{f}(x)dx \\ \int_{V_1} |P(x)|^{s-1} \widehat{f}(x)dx \end{pmatrix} = \frac{3^{3s-2}}{2\pi^{4s}} \Gamma(s)^2 \Gamma\left(s - \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(s + \frac{1}{6}\right)$$
$$\times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s & \sin \pi s \\ 3 \sin \pi s & \sin 2\pi s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{V_1} |P(x)|^{-s} f(x)dx \\ \int_{V_2} |P(x)|^{-s} f(x)dx \end{pmatrix}$$

が成立する．詳細は原論文を参照していただきたいが，かなり面倒な計算である．F. Sato [Sa4] は，$c_{ij}(s)$ の計算を退化主系列の絡作用素の計算に帰着させるという公式を示したが，その応用例として，上の関数等式の別証明が与えられている．

注意 2.3　(1) 第 1 節「Introduction」の最後で述べた問題 (B) について，Siegel は不定値 2 次形式の場合に（f を特殊化した）局所ゼータ関数を超幾何関数を用いてあらわし，超幾何関数についての公式を用いて局所関数等式を計算した．しかし，一般の場合に $\mathbb{R}$ 上の局所ゼータ関数が既知の関数であらわされるかどうかは分からない．むしろ，$\Phi(f; s)$ の明示的な計算よりも局所関数等式の計算の方がやさしい場合が多いのである．

(2) Shintani [Sh1, Theorem 1.1] は，$c_{ij}(s)$ が $e^{\pi\sqrt{-1}s/2}$, $e^{-\pi\sqrt{-1}s/2}$ の d 次以下の多項式として表されるという事を証明した．[Ki1, § 4.3] に詳細な解説がある．しかし，この結果も $c_{ij}(s)$ の完全な明示式を与えているわけはなく，命題 2.2 は厳密にいえば局所関数等式の「存在定理」である．

(3) 命題 2.2 は，1961 年頃に佐藤幹夫氏により発見されたとのことである．佐藤幹夫氏が概均質ベクトル空間の定義にたどり着いた元々の動機は，「斉次多項式で与えられる定数係数偏微分作用素のうち，その基本解がふたたび何らかの斉次多項式を用いて明示的に表されるようなものの一般的な枠組みを知りたい」ということであった[*14]．初期の頃には，概均質ベクトル空間の理論が代数解析学の手法の「実験台」として機能し，b-関数の超局所計算法などが誕生し（柏原 [Ka] を参照），その成果の結晶として，既約正則という最も基本的なクラスの概均質ベクトル空間の b-関数が超局所計算法を用いてすべて計算され

[*14] 基本解の構成は，$1/P(v)$ の Fourier 変換と関係している．命題 2.2 は，多項式の複素冪の超関数としての Fourier 変換がふたたび多項式の複素冪になっている，と解釈できることに注意せよ．命題 2.2 を，**概均質ベクトル空間の基本定理**とよぶこともある．

た．一方，関数等式の係数 $c_{ij}(s)$ についても超局所計算法が開発されたが[*15]，こちらは上手く行かない部分があるらしく，既約正則の場合でも，幾つかの例では $c_{ij}(s)$ が計算されていない．

3　ゼータ積分とゼータ関数の定義

[仮定 **0**], [仮定 **1**] に加え，次の仮定をおく．これはゼータ関数を考えるうえで基本的なものである．

- [仮定 **2**] 任意の $v \in (V-S)\cap V_{\mathbb{Q}}$ に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(G_v^{\circ}, GL_1) = \{1\}$ となる．ここで，G_v° は，v における等方部分群 $G_v = \{g \in G\,;\, \rho(g)v = v\}$ の（代数群としての）単位連結成分である．

実 Lie 群 $G_{\mathbb{R}}$ の単位連結成分を G^+ とし，

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_\nu, \quad V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^* = V_1^* \cup \cdots \cup V_\nu^*$$

を連結成分への分解とする．$n = \dim_{\mathbb{C}} V, d = \deg P$ として

$$\omega(v) = |P(v)|^{-n/d} dv \tag{3.1}$$

とおく．(2.2) より，$\omega(v)$ は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 上の G^+-不変測度を与える．ただし，dv は $V_{\mathbb{R}}$ 上の Lebesgue 測度である．dg を G^+ の Haar 測度とする．$v \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ に対して，$G_v^+ = G^+ \cap G_v$ とおくと，[仮定 **2**] より，G_v^+ はユニモジュラーな Lie 群になる[*16]．そこで G_v^+ 上に両側不変測度 $d\mu_v$ が存在するが，(1.2) のように，$d\mu_v$ を次のように正規化する: 任意の $F \in L^1(G^+)$ に対して，積分公式

$$\int_{G^+} F(g)dg = \int_{G^+/G_v^+} \omega(\rho(\dot{g}v)) \int_{G_v^+} F(\dot{g}h) d\mu_v(h) \tag{3.2}$$

が成り立つ．

さて，L を $V_{\mathbb{Q}}$ の格子とする．すなわち，$V_{\mathbb{Q}}$ の基底を適当にとると，

$$V_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n \supset \mathbb{Z}^n \cong L$$

[*15] 超局所計算法のアイディアや，それが開発された頃のエピソードが [Ki2] で紹介されている．

[*16] ユニモジュラー Lie 群の定義は，[Ki1, p. 211] などを参照の事．[仮定 **2**] の下では，G_v は $\mathbb{Q}$ 上 split するトーラスを持たないので，いわゆるモジュラス指標が自明になるのである．

となるとする．また，$\mathit{\Gamma}$ を $G_{\mathbb{Q}} \cap G^+$ に含まれる数論的部分群[*17]であって，$\rho(\mathit{\Gamma})L \subset L$ をみたすものとする．前節で述べたように，**[仮定 0]** より，相対不変式 P は $\mathbb{Q}$-係数の多項式にとれるが，適当に定数倍して P は L 上で整数値をとるようにしておく．$v \in L - S$ に対して，$\mathit{\Gamma}_v = G_v^+ \cap \mathit{\Gamma}$ とおき，

$$\mu(v) = \int_{G_v^+/\mathit{\Gamma}_v} d\mu_v(h) \tag{3.3}$$

とする．**[仮定 2]** および Borel と Harish-Chandra [BH] の結果より，$\mu(v) < +\infty$ であることが保証される．$\mu(v)$ を v の属する $\mathit{\Gamma}$-軌道 $\rho(\mathit{\Gamma})v$ の**密度**とよぶことがある．この量 $\mu(v)$ の意味については後述する．

以上でゼータ関数を定義する準備が整った．L が $\mathit{\Gamma}$-不変であることより，$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して，

$$\psi(g) = \sum_{v \in L-S} f(\rho(g)v)$$

は $\psi(g\gamma) = \psi(g)$ をみたす．よって $\psi(g)$ は $G^+/\mathit{\Gamma}$ 上の関数になり，

$$Z(f, L; s) = \int_{G^+/\mathit{\Gamma}} \chi(g)^s \sum_{v \in L-S} f(\rho(g)v) dg \tag{3.4}$$

という積分を考えることができる．これを，(G, ρ, V) のゼータ積分とよぶ．ゼータ積分は $\mathit{\Gamma}$ にも依存するが，$\mathit{\Gamma}$ を取り替えても，ゼータ積分は定数倍しか変わらない．（数論的部分群の定義からわかる．）それで，ゼータ積分の表記は $Z(f, L, \mathit{\Gamma}; s)$ などではなく，$Z(f, L; s)$ とする．積分の収束については最後にコメントすることにして，先程と同じように形式的に計算する．まず，$L - S$ を

$$L - S = \bigcup_{i=1}^{\nu} L \cap V_i = \bigcup_{i=1}^{\nu} \bigcup_{v \in \mathit{\Gamma} \backslash L \cap V_i} \rho(\mathit{\Gamma})v$$

と分解する．2 つめの等号は $L \cap V_i$ を $\rho(\mathit{\Gamma})$-軌道に分けて，軌道の代表点 $v \in \mathit{\Gamma} \backslash L \cap V_i$ にわたる和を考えるという意味である．さらに，$\rho(\mathit{\Gamma})v \cong \mathit{\Gamma}/\mathit{\Gamma}_v$ という 1 対 1 対応があるので，まとめると

$$L - S = \bigcup_{i=1}^{\nu} L \cap V_i = \bigcup_{i=1}^{\nu} \bigcup_{v \in \mathit{\Gamma} \backslash L \cap V_i} \rho(\mathit{\Gamma})v = \bigcup_{i=1}^{\nu} \bigcup_{v \in \mathit{\Gamma} \backslash L \cap V_i} \bigcup_{\gamma \in \mathit{\Gamma}/\mathit{\Gamma}_v} \rho(\gamma)v$$

[*17] $[\mathit{\Gamma} : \mathit{\Gamma} \cap G_{\mathbb{Z}}] < +\infty$ かつ $[G_{\mathbb{Z}} : \mathit{\Gamma} \cap G_{\mathbb{Z}}] < +\infty$ をみたす群のこと．詳しくは，[Ki1, § 5.1] を参照．

という分解ができる．これを (3.4) に挿し込む．形式的に積分と和の順序を交換して，

$$Z(f,L;s)=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{v\in\Gamma\backslash L\cap V_i}\int_{G^+/\Gamma}\chi(g)^s\sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_v}f(\rho(g)\rho(\gamma)v)dg$$

となる．[Ki1, 補題 5.9] より，$P(L)\subset\mathbb{Z}$ となっているならば，任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して $\chi(\gamma)=1$ であるから，

$$\begin{aligned}Z(f,L;s)&=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{v\in\Gamma\backslash L\cap V_i}\int_{G^+/\Gamma}\chi(g\gamma)^s\sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_v}f(\rho(g\gamma)v)dg\\&=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{v\in\Gamma\backslash L\cap V_i}\int_{G^+/\Gamma_v}\chi(g)^s f(\rho(g)v)dg\end{aligned}$$

となる．G^+/Γ 上の積分と Γ/Γ_v 上の和をまとめたのである．最右辺の積分において，積分公式 (3.2) *18および $\chi(g)^s=\dfrac{|P(\rho(g)v)|^s}{|P(v)|^s}$ となることを用いると，

$$\begin{aligned}\int_{G^+/\Gamma_v}\chi(g)^s f(\rho(g)v)dg&=\frac{1}{|P(v)|^s}\int_{G^+/\Gamma_v}|P(\rho(g)v)|^s f(\rho(g)v)dg\\&=\frac{1}{|P(v)|^s}\int_{G^+/G_v^+}|P(\rho(\dot g v)|^s f(\rho(\dot g v)\omega(\rho(\dot g v))\int_{G_v^+/\Gamma_v}d\mu_v(h)\\&=\frac{\mu(v)}{|P(v)|^s}\int_{G^+/G_v^+}|P(\rho(\dot g v)|^{s-n/d}f(\rho(\dot g v)d(\rho(\dot g)v)\end{aligned}$$

となる．最後の等号については，(3.1), (3.3) をみよ．$v\in V_i$ のとき，G^+/G_v^+ 上の積分は V_i の積分にできて，

$$\int_{G^+/G_v^+}|P(\rho(\dot g v)|^{s-n/d}f(\rho(\dot g v)d(\rho(\dot g)v)=\int_{V_i}|P(x)|^{s-n/d}f(x)dx=\Phi_i(f;s)$$

となる．局所ゼータ関数の定義 (2.6) を思い出そう．以上をすべてまとめて，

$$Z(f,L;s)=\sum_{i=1}^{\nu}\left\{\sum_{v\in\Gamma\backslash L\cap V_i}\frac{\mu(v)}{|P(v)|^s}\right\}\cdot\Phi_i(f;s)$$

*18 正確には，

$$\int_{G^+/\Gamma_v}F(g)dg=\int_{G^+/G_v^+}\omega(\rho(\dot g v))\int_{G_v^+/\Gamma_v}F(\dot g h)d\mu_v(h)$$

という積分公式を用いている．(3.2) からこの積分公式を導出する方法については，[Ki1, (5.2)] を参照の事．

と計算できた．

定義 3.1（概均質ゼータ関数の定義）

$$\xi_i(L;s) := \sum_{v\in\Gamma\backslash L\cap V_i} \frac{\mu(v)}{|P(v)|^s} \qquad (i=1,\ldots,\nu)$$

を (G,ρ,V) に付随する概均質ゼータ関数と定義する．

H. Saito [Sai] の結果より，$\xi_i(L;s)$ は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき絶対収束することが分かる[*19]．したがって，上の形式的な計算は正当化されて，次の命題を得る．

命題 3.2（ゼータ関数の積分表示） $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき，ゼータ積分 $Z(f,L;s)$ は任意の $f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して絶対収束し，

$$Z(f,L;s)=\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i(L;s)\Phi_i(f;s)$$

が成り立つ．

主定理を述べる前に，ゼータ関数 $\xi_i(L;s)$ の定義に至った Siegel のアイディアについて説明しよう．詳しくは，伊吹山 [I1, 第 7 章 3.3], 佐藤 [Sa1] を参照の事.

正整数 m に対して $\{v\in L\cap V_i\,;\,P(v)=\varepsilon_i m\}$ という集合を考える．ここで，$P(v)$ の符号は V_i 上で一定なので，それを ε_i と記している．最初の節で述べたように，これが無限集合になるのが問題であったが，実は，次のような定理がある．

補題 3.3（[BH, Theorem 6.9]） H を $\mathbb{Q}$ 上定義された簡約可能な代数群とし，$\rho: H\to GL(V)$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された有理表現，X は H-軌道で閉集合になっているものとする．このとき，$V_{\mathbb{Q}}$ 内の $H_{\mathbb{Z}}$-不変格子について，$X\cap L$ は有限個の $H_{\mathbb{Z}}$-軌道に分かれる．

$H=\mathrm{Ker}\,\chi$ とすると，(G,ρ,V) が概均質ベクトル空間であることより，$\{v\in L\cap V_i\,;\,P(v)=\varepsilon_i m\}$ は H-軌道で，かつ閉集合である．よって，上の定理が適用で

[*19] 概均質ゼータ関数の収束の証明は，理論の創成期の頃からの問題であったが，[Sai] により完全に解決された．

きて，

$$\{v \in L \cap V_i\,;\, P(v) = \varepsilon_i m\} = \overset{\text{有限和}}{\coprod_{\substack{v \in \varGamma \backslash L \cap V_i \\ P(v)=\varepsilon_i m}}} \rho(\varGamma)v = \overset{\text{有限和}}{\coprod_{\substack{v \in \varGamma \backslash L \cap V_i \\ P(v)=\varepsilon_i m}}} \varGamma/\varGamma_v$$

のように，有限個の $\rho(\varGamma)$-軌道に分解する[*20]．各 $\varGamma$-軌道は無限個の格子点を含んでいるので，このままでは有限の量が取り出せないが，先程定義した密度 $\mu(v)$ は $G_v^+/\varGamma_v$ の体積で，$\varGamma_v$ の「サイズ」の逆数に比例しているのだから，$\varGamma/\varGamma_v$ の「サイズ」を測っていると考えていいだろう，というのが本質的なアイディアである．

$\xi_i(L;s)$ の定義に戻って，$\xi_i(L;s)$ を通常の Dirichlet 級数の形にかくと，

$$\xi_i(L;s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_i(L;m)}{m^s}, \quad N_i(L;m) = \sum_{\substack{v \in \varGamma \backslash L \cap V_i \\ P(v)=\varepsilon_i m}} \mu(v)$$

となる．$N_i(L;m)$ は有限の量の有限の和だから有限値であり，これが $\{v \in L \cap V_i\,;\, P(v) = \varepsilon_i m\}$ という集合の「サイズ」を測っていると考えられる．不定値 2 次形式のゼータ関数のときに，Siegel は $N_i(L;m)$ を**表現の測度**（measure of representations, *Darstellungsmaß*）とよんだが，それはいわゆる Siegel の主定理に関係している．Siegel のゼータ関数と Siegel の主定理の関係については，伊吹山 [I1] を参照．また，上野 [U, 第 2 巻] にも（主として正定値の場合についてであるが），Siegel の 2 次形式論についての解説がある．2 次形式の場合に限らず一般に，$\mu(v)$ や $N_i(L;m)$ を厳密に測度として取り扱う方法が，Sato [Sa3]，Hironaka–Sato [HS] により与えられている．他方，$\varGamma_v$ **が有限群となる場合は**，$\mu(v)$ は $\sharp(\varGamma_v)^{-1}$ におきかえることができ，$\xi_i(L;s)$ は

$$\sum_{v \in \varGamma \backslash L \cap V_i} \frac{\sharp(\varGamma_v)^{-1}}{|P(v)|^s}$$

という Dirichlet 級数になるが，これは，おおよそ類数の母関数というべきものになる．2 元 3 次形式の空間のゼータ関数がその典型例である．

4 ゼータ関数の関数等式

前節までと同様に，[仮定 **0**], [仮定 **1**], [仮定 **2**] を仮定する．

---

*20 類数の有限性を想起せよ．

上で (G,ρ,V) のゼータ積分とゼータ関数の定義を述べたが，双対概均質ベクトル空間 (G,ρ^*,V^*) についても同様に定義できる．第 2 節で述べたように，(G,ρ^*,V^*) の特異集合 S^* の定義方程式 P^* は $\mathbb{Q}$-係数の絶対既約な多項式にとれて，$\chi^*=\chi^{-1}$ に対応する相対不変式になる (cf. (2.3))．(G,ρ^*,V^*) の局所ゼータ関数 $\Phi_i^*(f^*;s)$ を (2.7) のように定義する．このようにほぼ同様に定義していくが，$V_{\mathbb{Q}}^*$ 内の格子 L^* は勝手な格子ではなく，L の**双対格子**をとる[*21]．すなわち，$V_{\mathbb{Q}}$ 内の格子 L に対して，

$$L^*=\{v^*\in V_{\mathbb{Q}}^*\,;\,\langle L,v^*\rangle\subset\mathbb{Z}\}$$

と定義する．L^* は $\mathit{\Gamma}$-不変な格子である．このとき，(G,ρ^*,V^*) のゼータ関数 $\xi_j^*(L^*;s)$ $(j=1,\dots,\nu)$ を

$$\xi_j^*(L^*;s)=\sum_{v^*\in\Gamma\backslash L^*\cap V_j^*}\frac{\mu^*(v^*)}{|P^*(v^*)|^s},\quad \mu^*(v^*):=\int_{G_{v^*}^+/\Gamma_{v^*}}d\mu_{v^*}(h) \tag{4.1}$$

と定義する．ここで，$G_{v^*}^+$ 上の不変測度 $d\mu_{v^*}$ は，(3.2) に相当する積分公式を通じて正規化しておく．さらに，$f^*\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$, $s\in\mathbb{C}$ に対して，(G,ρ^*,V^*) のゼータ積分を

$$Z^*(f^*,L^*;s)=\int_{G^+/\Gamma}\chi^*(g)^s\sum_{v^*\in L^*-S^*}f^*(\rho^*(g)v^*)dg \tag{4.2}$$

と定義する．このとき，命題 3.2 と全く同様にして，$\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき，

$$Z(f^*,L^*;s)=\sum_{j=1}^{\nu}\xi_j^*(L^*;s)\Phi_j^*(f^*;s) \tag{4.3}$$

となることがわかる．

さて，第 1 節でやったように，ゼータ積分を積分範囲で 2 つに分ける．

$$\begin{aligned}Z_+(f,L;s)&=\int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi(g)\geq 1}}\chi(g)^s\sum_{v\in L-S}f(\rho(g)v)dg,\\ Z_-(f,L;s)&=\int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi(g)\leq 1}}\chi(g)^s\sum_{v\in L-S}f(\rho(g)v)dg\end{aligned}$$

と定義する．第 1 節で説明したのと同じ理由で，$Z_+(f,L;s)$ は任意の $s\in\mathbb{C}$ に対して絶対収束し，s の整関数を定める．$Z_-(f,L;s)$ は $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ のとき絶対収束する．

[*21] Poisson の和公式を使うため．

同様に，$Z^*(f^*, L^*; s)$ も二つの積分に分けるが，積分領域に注意が必要である．

$$\begin{aligned}
Z_+^*(f^*, L^*; s) &= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi^*(g)\geq 1}} \chi^*(g)^s \sum_{v^* \in L^* - S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)dg \\
&= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \boldsymbol{\chi(g)\leq 1}}} \chi(g)^{\boldsymbol{-s}} \sum_{v^* \in L^* - S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)dg, \\
Z_-^*(f^*, L^*; s) &= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi^*(g)\leq 1}} \chi^*(g)^s \sum_{v^* \in L^* - S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)dg \\
&= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \boldsymbol{\chi(g)\geq 1}}} \chi(g)^{\boldsymbol{-s}} \sum_{v^* \in L^* - S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)dg
\end{aligned}$$

とおくと，$Z_+^*(f^*, L^*; s)$ は任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して絶対収束し，s の整関数を定める．$Z_-(f^*, L^*; s)$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ のとき絶対収束する．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 4.1（ゼータ積分の関数等式） $f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ を $S_{\mathbb{R}}^*$ に制限すると 0 になり，かつ f^* の Fourier 変換 $\widehat{f^*}$ を $S_{\mathbb{R}}$ に制限すると 0 になるとする．つまり，f^* が条件

$$f^*\big|_{S_{\mathbb{R}}^*} = 0, \qquad \widehat{f^*}\big|_{S_{\mathbb{R}}} = 0 \tag{4.4}$$

をみたすとする．このとき，関数等式

$$Z\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right) = v(L^*)Z^*\left(f^*, L^*\,;\, \frac{n}{d} - s\right)$$

が成り立ち，両辺は s の整関数に解析接続される．

証明 上で見たように，2 つのゼータ積分をそれぞれ，

$$\begin{gathered}
Z\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right) = Z_+\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right) + Z_-\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right), \\
Z^*\left(f^*, L^*\,;\, s\right) = Z_+^*\left(f^*, L^*\,;\, s\right) + Z_-^*\left(f^*, L^*\,;\, s\right)
\end{gathered}$$

と分解する．Z_+ と Z_-^* の積分範囲が同じであり，Z_- と Z_+^* の積分範囲が同じであることに改めて注意せよ．さて，Poisson の和公式（[Ki1, 定理 4.34]）

$$\sum_{v \in L} \widehat{f^*}(v) = v(L^*) \sum_{v^* \in L^*} f^*(v^*), \quad v(L^*) := \int_{V_{\mathbb{R}}^*/L^*} dv^*$$

において，$f^*(v^*)$ を $f_g^*(v^*) := f^*(\rho^*(g)v^*)$ $(g \in G^+)$ に置き換える．(4.4) という

条件から和をとる範囲が両辺とも小さくなり，

$$\begin{aligned}\sum_{v\in L-S}\widehat{f^*}(\rho(g)v) &= v(L^*)\det\rho(g)^{-1}\sum_{v^*\in L^*-S^*}f^*(\rho^*(g)v^*)\\ &= v(L^*)\chi(g)^{-n/d}\sum_{v^*\in L^*-S^*}f^*(\rho^*(g)v^*)\end{aligned}$$

が成り立つ．二つ目の等号で，(2.2) を使った．すると，$\mathrm{Re}(s)\gg 0$ の範囲で，

$$\begin{aligned}Z_-\left(\widehat{f^*},L\,;\,s\right) &= \int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi(g)\le 1}}\chi(g)^s\sum_{v\in L-S}\widehat{f^*}(\rho(g)v)dg\\ &= v(L^*)\int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi(g)\le 1}}\chi(g)^{s-n/d}\sum_{v^*\in L^*-S^*}f^*(\rho^*(g)v^*)dg\\ &= v(L^*)\int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi^*(g)\ge 1}}\chi^*(g)^{n/d-s}\sum_{v^*\in L^*-S^*}f^*(\rho^*(g)v^*)dg\\ &= v(L^*)Z_+^*\left(f^*,L^*\,;\,\frac{n}{d}-s\right)\end{aligned}$$

が成り立つが，最右辺が s の整関数なので，これにより最左辺の積分が全 $\mathbb{C}$ 平面に正則に解析接続された．同様にして，$\mathrm{Re}(s)\ll 0$ の範囲で，

$$v(L^*)Z_+^*\left(f^*,L^*\,;\,\frac{n}{d}-s\right)=Z_+\left(\widehat{f^*},L\,;\,s\right)$$

が成り立つが，これにより左辺の積分が整関数に解析接続される．したがって，

$$\begin{aligned}Z\left(\widehat{f^*},L\,;\,s\right) &= Z_+\left(\widehat{f^*},L\,;\,s\right)+v(L^*)Z_+^*\left(f^*,L^*\,;\,\frac{n}{d}-s\right)\\ &= v(L^*)Z^*\left(f^*,L^*\,;\,\frac{n}{d}-s\right)\end{aligned}$$

となり，関数等式が示された．また，この式から，関数等式の両辺が s の整関数に解析接続されていることに注意せよ． □

いよいよ主定理を述べる．

定理 4.2（ゼータ関数の関数等式） ゼータ関数 $\xi_i(L;s)$ および $\xi_j^*(L^*;s)$ を，それぞれ定義 3.1 および (4.1) のように定義する．

(1) $\xi_i(L;s)$, $\xi_j^*(L^*;s)$ は全 $\mathbb{C}$ 平面に有理型に解析接続される．

(2) $b(s)$ を b-関数とする．$b(-s)\xi_i(L;s)$, $b(-s)\xi_j^*(L^*;s)$ は s の整関数になる．つまり，ゼータ関数の極の位置の候補が b-関数で記述される．

(3) 関数等式

$$v(L^*)\xi_j^*\left(L^*;\frac{n}{d}-s\right)=\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\sum_{i=1}^{\nu}c_{ij}(s)\xi_i(L;s) \qquad (j=1,\dots,\nu)$$

が成り立つ．ただし，記号は命題 2.2 と同じである．

証明 (1), (2) $f_0(v)\in C_0^\infty(V_i)$ をとり，$f(v)=P^*(D_v)f_0(v)$ とおくと，明らかに $f\big|_{S_\mathbb{R}}=0$ である．$P^*(D_v)e^{\langle v,v^*\rangle}=P^*(v^*)e^{\langle v,v^*\rangle}$ より，

$$\widehat{f}(v^*)=\int_{V_\mathbb{R}}P^*(D_v)f_0(v)e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle}dv=(-2\pi i)^dP^*(v^*)\widehat{f_0}(v^*)$$

となり，$P^*(v^*)$ が掛かっているから，$\widehat{f}\ \big|_{S^*_\mathbb{R}}=0$ である．f の逆 Fourier 変換を $f^*(v^*)$ とかくと，$\widehat{f^*}(v)=f(v)$ であり，結局，この f^* が条件 (4.4) をみたすことがわかる．よって，この f を $Z(f,L;s)$ に代入すると，s の整関数になるが，命題 3.2 より，

$$Z(f,L;s)=\xi_i(L;s)\cdot\Phi_i(f;s)$$

となる．$f_0(v)\in C_0^\infty(V_i)$ に注意せよ．$\Phi_i(f;s)$ は s の有理型関数に解析接続されるので，

$$\xi_i(L;s)=\frac{Z(f,L;s)}{\Phi_i(f;s)}$$

も s の有理型関数に解析接続される．さらに，$f(v)=P^*(D_v)f_0(v)$ より，部分積分のテクニックで，

$$\begin{aligned}\Phi_i(f;s)&=\int_{V_i}|P(v)|^{s-n/d}P^*(D_v)f_0(v)dv\\&=(-1)^d\varepsilon_ib\left(s-\frac{n}{d}-1\right)\Phi_i(f_0;s-1)\\&=\varepsilon_ib(-s)\Phi_i(f_0;s-1)\end{aligned}$$

である．ここで，V_i 上の $P(v)$ の符号を ε_i と記した．また，最後の等号では，b-関数の関数等式 (2.9) を用いている．任意の s に対して，$\Phi_i(f_0;s-1)\neq 0$ をみたす $f_0\in C_0^\infty(V_i)$ を見つけることができるので，

$$b(-s)\xi_i(L;s)=\varepsilon_i\cdot\frac{Z(f,L;s)}{\Phi_i(f_0;s-1)}$$

は $\mathbb{C}$ 上の正則関数になる．$\xi_j^*(L^*;s)$ についても同様に証明できる．

(3) 局所関数等式との関係を見やすくするため，ベクトルの等式としてかく．記号は，命題 2.2 のとおりとし，$C(s) := (c_{ij}(s))_{1\le i,j\le\nu}$ を関数等式の係数が作る $\nu\times\nu$ 行列とする．このとき，命題 2.2 は

$$\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_\nu\end{bmatrix}\left(\widehat{f^*};s\right)=\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\cdot C(s)\begin{bmatrix}\Phi_1^*\\ \vdots\\ \Phi_\nu^*\end{bmatrix}\left(f^*;\frac{n}{d}-s\right)$$

とかける．すると，ゼータ関数の積分表示（命題 3.2）とあわせて，

$$\begin{aligned}Z\left(\widehat{f^*},L;s\right)&=[\xi_1,\dots,\xi_\nu]\,(L;s)\cdot\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_\nu\end{bmatrix}\left(\widehat{f^*};s\right)\\ &=\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\cdot[\xi_1,\dots,\xi_\nu]\,(L;s)\cdot C(s)\begin{bmatrix}\Phi_1^*\\ \vdots\\ \Phi_\nu^*\end{bmatrix}\left(f^*;\frac{n}{d}-s\right)\end{aligned}\tag{4.5}$$

となる．一方，(4.3) より，

$$v(L^*)Z^*\left(f^*,L^*;\frac{n}{d}-s\right)=v(L^*)\,[\xi_1^*,\dots,\xi_\nu^*]\left(L^*;\frac{n}{d}-s\right)\cdot\begin{bmatrix}\Phi_1^*\\ \vdots\\ \Phi_\nu^*\end{bmatrix}\left(f^*;\frac{n}{d}-s\right)\tag{4.6}$$

である．各 $1\le j\le\nu$ に対して，$f_0^*(v^*)\in C_0^\infty(V_j^*)$ をとり，$f^*(v^*):=P(D_{v^*})f_0^*(v^*)$ とおくと，$\widehat{f^*}(v)=(-2\pi i)^dP(v)\widehat{f_0^*}(v)$ であるから，f^* は条件 (4.4) をみたし，f^* に対して，(4.5) と (4.6) は等しい．さらに，$1\le k\le\nu$ に対して，局所ゼータ関数 $\Phi_k^*(f^*;\frac{n}{d}-s)$ は $k\ne j$ のとき恒等的に 0 であり，$\Phi_j^*(f^*;\frac{n}{d}-s)$ は 0 ではない．したがって，

$$v(L^*)\,[\xi_1^*,\dots,\xi_\nu^*]\left(L^*;\frac{n}{d}-s\right)=\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\cdot[\xi_1,\dots,\xi_\nu]\,(L;s)\cdot C(s)$$

という行ベクトルの等式が得られる．つまり，

$$v(L^*)\begin{bmatrix}\xi_1^*\\ \vdots\\ \xi_\nu^*\end{bmatrix}\left(L^*;\frac{n}{d}-s\right)=\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\cdot{}^tC(s)\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\nu\end{bmatrix}(L;s)$$

のように，関数等式の係数行列が局所関数等式のそれの転置行列になっている．この等式の第 j 行目が，定理の関数等式である． □

注意 4.3 (1) 第 1 節の終わりの問題 (C) のところで述べたように，一般には $L \cap S$ や $L^* \cap S^*$ が $\{0\}$ より真に大きく，それが関数等式の証明を困難なものにする．そこで，条件 (4.4) をみたす関数を構成して，その困難を回避する．ここで，テスト関数を自由に取れるようにしておいた意味が出てくる．

(2) もちろん，本来はこの条件をつけずに一般に計算できた方が良く，計算できれば，極や留数の詳しい情報が分かる．ただし，その時には積分

$$I(f;s) = \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g)\leq 1}} \chi(g)^s \Biggl\{ \chi(g)^{-\frac{n}{d}} v(L^*) \sum_{v^* \in L^* \cap S^*} f^*(\rho^*(g)v^*) - \sum_{v \in L \cap S} \widehat{f^*}(\rho(g)v) \Biggr\} dg$$

を計算しなければならないが，Shintani [Sh1, Sh2] や Yukie [Yu] などの計算例をみると分かるように，一般には非常に難しく、計算できていない例も多い。この計算を回避しても，b-関数を使った議論により，極の位置の候補までは特定できる．

(3) 条件 (4.4) をみたす関数を利用するという議論は，[SS2] では，論文の最後の Additional Remark として記述があり，Professors M. Kuga and G. Shimura に suggest された，と謝辞が書かれている[*22].

5 概均質ゼータ関数の例といくつかのコメント

概均質ゼータ関数の関数等式の例を挙げよう．また，最近の結果で，[SS2] のゼータ関数やその関数等式の理論に関わっているようなものついて，いくつかコメントしたい[*23].

(1) $G = GL_1(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}$ という 1 次元概均質ベクトル空間を考える．$L = \mathbb{Z} \supset \mathbb{Q} = V_{\mathbb{Q}}$ としたときのゼータ関数は，Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

[*22] 微分作用素を使って特異集合上の寄与を消す，というテクニックは，Selberg や Maaß などによってそれ以前から知られていたようである．

[*23] もちろん，筆者の力量では網羅的に解説することはできません．ほんの一部の結果の紹介にとどまっていることを深くお詫びします．

である．$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_{>0} \cup \mathbb{R}_{<0}$ と 2 つの連結成分に分かれるが，どちらも同じ Riemann ゼータ関数になり，

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

という関数等式をみたす．

(2) 不定値 2 次形式の Siegel ゼータ関数は概均質ゼータ関数の prototype である．$n \geq 5$ とし，局所関数等式の例 (2) と同じ記号を使う．格子は $L = \mathbb{Z}^n$ をとり，数論的部分群は $\Gamma = SO(P)_{\mathbb{Z}} = SO(P) \cap SL_n(\mathbb{Z})$ をとる．ゼータ関数は，

$$\xi_{\pm}(s) = \sum_{x \in SO(P)_{\mathbb{Z}} \backslash \mathbb{Z}^n \cap V_{\pm}} \frac{\mu(x)}{|P(x)|^s}, \quad \xi^*_{\pm}(s) = \sum_{y \in SO(P)_{\mathbb{Z}} \backslash \mathbb{Z}^n \cap V^*_{\pm}} \frac{\mu(y)}{|Q(y)|^s}$$

と定義され，

$$\begin{pmatrix} \xi_+\left(\frac{n}{2}-s\right) \\ \xi_-\left(\frac{n}{2}-s\right) \end{pmatrix} = {}^tA(s) \begin{pmatrix} \xi^*_+(s) \\ \xi^*_-(s) \end{pmatrix}$$

という関数等式を満たす．ただし，$A(s)$ は (2.10) であたえられる 2×2 行列である．伊吹山 [I1] は，n が偶数のときの Siegel ゼータ関数に対する明示公式を示した．（2 つの Dirichlet L-関数の積たちの $\mathbb{Q}$-線形和の形に表される．）

(3) 正方行列の行列式のゼータ関数を

$$\xi_{\det}(s) = \sum_{v \in GL_n(\mathbb{Z}) \backslash M_n(\mathbb{Z}) \cap GL_n(\mathbb{R})} \frac{1}{|\det v|^s}$$

と定義する．(2.11) などを使うと，

$$\begin{aligned} \xi_{\det}(n-s) = (2\pi)^{-ns} \cdot (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^n \cdot \cos\frac{\pi s}{2} \cdots \cos\frac{\pi(s-n+1)}{2} \\ \times \Gamma(s)\Gamma(s-1)\cdots\Gamma(s-n+1) \cdot \xi_{\det}(s) \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．$\xi_{\det}(s)$ は単純環のゼータ関数の特別な場合であり，Zorn などによって調べられている．実は，

$$\zeta_{\det}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)\cdots\zeta(s-n+1)$$

である．

(4) 対称行列のなす空間のゼータ関数について．記号は，局所関数等式の例 (4) のところと同じとする．$\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$ とし，$L \subset V_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Q})$ を任意の Γ-不変な格子とする．ゼータ関数を

$$\xi_i(L;s) = \sum_{v \in \Gamma \backslash L \cap V_i^{(n)}} \frac{\mu(v)}{|\det v|^s}$$

とする．このとき，関数等式

$$\xi_i\left(L; \frac{n+1}{2} - s\right) = v(L^*)\pi^{n(n-1)/4}(2\pi)^{-ns} \\ \times \gamma\left(s - \frac{n+1}{2}\right)\boldsymbol{e}\left[\frac{ns}{4}\right]\sum_{j=0}^{n} u_{ji}(s)\xi_j(L^*;s)$$

が成り立つ．ただし，$\gamma(s), u_{ij}(s)$ はそれぞれ，(2.12), (2.13) で与えられた通りで，L^* は L の双対格子であり，$v(L^*)$ は $V_{\mathbb{R}}/L^*$ の体積である．Ibukiyama-Saito [IS, IS2] は $\xi_i(L;s)$ に対する明示公式を証明し，もっと簡単な形の関数等式があることを示した．また，Ibukiyama-Katsurada [IK] は，Koecher-Maass 級数とよばれる一種の概均質ゼータ関数に対して同様の明示公式を証明し，関数等式の簡略化を行った．本報告集所収の [I2] に，明示公式の発見に至った経緯なども含めて解説されている．

(5) 2 元 3 次形式のゼータ関数について．この例では，G_v が有限群であるから，第 3 節の終わりで述べたように，ゼータ関数は

$$\sum_{v \in \Gamma \backslash L \cap V_i} \frac{\sharp(\Gamma_v)^{-1}}{|P(v)|^s}$$

という Dirichlet 級数になり，2 元 3 次形式の類数に関係するゼータ関数になる．Shintani [Sh1] は，そのような類数に関連する 4 つの Dirichlet 級数 $\xi_i(L;s), \xi_j(\widehat{L};s)$ $(i,j = 1,2)$ を定義し，関数等式

$$\begin{pmatrix} \xi_1(L;1-s) \\ \xi_2(L;1-s) \end{pmatrix} = \frac{3^{3s-2}}{2\pi^{4s}}\Gamma(s)^2\Gamma\left(s-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{6}\right) \\ \times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s & \sin \pi s \\ 3\sin \pi s & \sin 2\pi s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1(\widehat{L};s) \\ \xi_2(\widehat{L};s) \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示した．L と $\widehat{L}$ の定義など，詳細は原論文を参照してください．Ohno [O] は，この 4 つのゼータ関数の係数を具体的に書き出し，2 組ずつが本質的に同じであると予想した．この予想は，Nakagawa [Na] により証明された．格子を取り換えた場合について，Ohno-Taniguchi-Wakatsuki [OTW] などにより研究されている．山本修司氏の解説 [Ya] も参照のこと．

(6) 多変数化あるいは保型形式付きなどのゼータ関数の一般化，およびその応用については，本報告集所収の他の論説（佐藤文広 [Sa6], 鈴木美裕 [Suz], 都築正男 [Tsu]）を参照してください．

M. Sato-Shintani [SS2] の理論は，「大きな群の作用」に関する相対不変式から，関数等式など良い性質を持つ Dirichlet 級数が構成できることを示した理論で，それにより実際に，対称行列の行列式や 2 元 3 次形式の判別式から新しいゼータ関数が構成された．さらに，その整数論への応用も見つかった．[SS2] の理論は明快で，これにより「ゼータ関数の関数等式」の背後にある数学的な構造が一般に明らかにされたかのように見えるが，実はそうではない．佐藤 [Sa2] の最後の節に，概均質ゼータ関数と Eisenstein 級数の（正規化された）周期との関係について議論されているが，概均質ゼータ関数と保型形式の L-関数との関連についてはまだ明らかにされるべきことが残されていると思う．また，最近，F. Sato [Sa5], T. Kogiso–F. Sato [KS] により，非概均質的局所関数等式の例が見つかっている．『関数等式はなぜ成り立つか』という問いに対する答えを我々はまだ持ち合わせていないのである．

謝辞

佐藤文広先生，広中由美子先生，谷口隆さんは，原稿を読んで有益なコメントを下さいました．2002 年のサマースクールで同じテーマについて講演しましたが，私の理解不足のため，不得要領な話になってしまいました．今回，再チャレンジの機会を頂いたと思い，学び直しのつもりで講演の予稿を執筆しましたが，昔の記憶が呼び起されるたび，多くの方との議論を通じて沢山のことを教わってきたのだと改めて実感しました．大学院時代の指導教官である木村達雄先生をはじめ，これまでお世話になった皆様に対し，この場をお借りして厚く御礼申し上げます．

参考文献

[BH] A. Borel and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. Math.* **75**(1962), 485-535.

[HS] Y. Hironaka and F. Sato, Eisenstein series on reductive symmetric spaces and representation of Hecke algebras, *J. reine angew. Math.* **445**(1993), 45–108.

[I1] 伊吹山知義，保型形式特論，共立出版，2016.

[I2] 伊吹山知義，概均質ベクトル空間: Retrospective account, 本報告集.

[IK] T. Ibukiyama and H. Katsurada, Koecher Maass Series for Real Analytic Siegel Eisenstein Series, in *Automorphic Forms and Zeta Functions* (ed. by S. Boecherer, T. Ibukiyama, M. Kaneko, F. Sato), World Scientific (2006),170–197.

[IS] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices I. An explicit form of zeta functions, *Amer. J. Math.* **117**(1995), 1097–1155.

[IS2] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices II. Functional equations and special values, *Nagoya Math. J.* **208**(2012), 263–315.

[Ka] 柏原正樹，代数解析概論，岩波書店，2000.

[Ki1] 木村達雄，概均質ベクトル空間，岩波書店，1998.

[Ki2] 木村達雄編，佐藤幹夫の数学（増補版），日本評論社，2014.

[KO] 小林俊行・大島利雄，Lie 群と表現論，岩波書店，2005.

[KS] T. Kogiso and F. Sato, Clifford quartic forms and local functional equations of non-prehomogeneous type, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **23**(2016), 791–866.

[O] Y. Ohno, A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms, *Amer. J. Math.* **119**(1997), 1083–1094.

[OTW] Y. Ohno, T. Taniguchi and S. Wakatsuki, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms, *Amer.*

J. Math. **131**(2009), 1525–1541.

[ON] 太田琢也・西山享，代数群と軌道，数学書房，2015.

[Os] N. Oswald, An unpublished paper 'Über einige durch unendliche Reihen definirte Functionen eines complexen Argumentes' by Adolf Hurwitz, *Historia Mathematica* **44**(2017), 252–279.

[Na] J. Nakagawa, On the relations among the class numbers of binary cubic forms, *Invent. Math.,* **134**(1998), 101–138.

[No] 野村隆昭，球面調和関数と群の表現，日本評論社，2018.

[Sai] H. Saito, Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces, *Nagoya Math. J.* **170**(2003), 1–31.

[PR] V. Platonov and A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics **139**, Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen, Academic Press, 1994.

[Sa1] 佐藤文広，概均質ベクトル空間のゼータ関数入門，数理解析研究所講究録 **924**(1995), 46–60.

[Sa2] 佐藤文広，Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間のゼータ関数，Rokko lectures in mathematics **2** (1996).

[Sa3] F. Sato, Siegel's main theorem of homogeneous spaces, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **41**(1992), 141–167.

[Sa4] F. Sato, Functional equations of prehomogeneous zeta functions and intertwining operators, *J. Math. Soc. Japan* **58**(2006), 995–1008.

[Sa5] F. Sato, Quadratic maps and nonprehomogeneous local functional equations, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **56**(2007), 163–184.

[Sa6] 佐藤文広，概均質ゼータ関数の関数等式の一般化，本報告集.

[SS1] 佐藤幹夫述，新谷卓朗記，概均質ベクトル空間の理論，数学の歩み **15**, 85–157.

[SS2] M. Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogenous vector spaces, *Ann. of Math.* **100**(1974), 131–170.

[Sh1] T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, *J. Math. Soc. Japan* **24**(1972), 132–188.

[Sh2] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **22**(1975), 25–65.

[Sug] 杉山和成，概均質ベクトル空間の基本定理，第 10 回整数論サマースクール報告集所収.

[Suz] 鈴木美裕，保型形式つき概均質ゼータ関数，本報告集.

[Ta] 高瀬幸一，保型形式とユニタリ表現，数学書房，2014.

[Tsu] 都築正男，新谷 2 重ゼータ関数，本報告集.

[U] 上野健爾，ジーゲル 1「人と数学」，ジーゲル 2「2 次形式論の発展と現代数学」，現代数学社，2022.

[Ya] 山本修司，大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性，本報告集.

[Yu] A. Yukie, *Shintani zeta functions*, London Math. Soc. Lecture Note Series **183**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

本論のための準備

谷口隆（神戸大学大学院理学研究科）

概要

本論を理解する上で必要になる予備知識のうち，重要な 3 つを概説する。1 つ目は Galois コホモロジーである。これは石塚 [27] の有理軌道の記述で必要になると共に，佐野 [24] の Selmer 群の定義と記述，山本 [25] の大野・中川の鏡映定理の証明でも用いられる。2 つ目はアデールである。これはゼータ関数をアデール化して考える鈴木美 [30], 都築 [29] で現れる。最後の一つは篩法である。これは Thorne [21], 鈴木雄 [31], 鈴木美 [30] で密度定理を証明する際に用いられる。

1 Galois コホモロジー

本報告集では Galois コホモロジーは以下のように現れる。

	講演	目的
(A)	石塚 [27] ほか	非特異軌道の集合 $G(K)\backslash V'(K)$ の記述
(B)	佐野 [24]	セルマー群 $\mathrm{Sel}_n(E)$ の定義
(C)	山本 [25]	コホモロジー群上での調和解析

K 上の概均質ベクトル空間 (G,V) において，非特異集合 V' は $\overline{K}$ 上では単一の G 軌道だが，K 有理軌道はそうとは限らず，K 有理軌道の集合 $G(K)\backslash V'(K)$ の記述は基本的な問題である。本稿では，Galois コホモロジーの定義と必要な性質をまとめ，$G(K)\backslash V'(K)$ を記述する (A) について主に説明する。(B), (C) については本報告集の [24], [25] を参照のこと。

本節では (A) について，次を証明する。（Galois コホモロジー $\mathrm{H}^1(K,G)$ は次の 1.1 節で定義する。）

定理 1.1（定理 1.11） $w \in V'(K)$ とし，G_w をその固定部分群とする。自然な単射

$$G(K)\backslash V'(K) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(K, G_w)$$

が存在する。$\mathrm{H}^1(K, G) = \{1\}$ ならば，これは全単射である。

これにより，$G(K)\backslash V'(K)$ の理解は，非特異元の固定部分群 G_w やその Galois コホモロジー $\mathrm{H}^1(K, G_w)$ の分析と密接にかかわる。たとえば，標数 0 の局所体の Galois コホモロジーは必ず有限になることが知られているので，次が分かる。

系 1.2 (G, V) が $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間であるとき，$G(\mathbb{Q}_p)\backslash V'(\mathbb{Q}_p)$ および $G(\mathbb{R})\backslash V'(\mathbb{R})$ は有限集合である。

注意 1.3 Galois コホモロジーは群のコホモロジー $\mathrm{H}^i(G, M)$ の例であり，桂 [23] など Galois 理論の標準的な教科書で Galois コホモロジーが扱われている。ただし群のコホモロジーや Galois コホモロジーを考えるとき，多くの場合 M は可換群であるが，目的 (A) のためには，非可換群の Galois コホモロジーを考える必要がある。M が可換群のとき $\mathrm{H}^i(G, M)$ は可換群でコホモロジー群と呼ばれるが，非可換群の Galois コホモロジーは群構造は持たない。また次数も標準的には 1 次しまでしかない。非可換群の Galois コホモロジーは Serre [16, I§5, III] や雪江 [22] などを参照のこと。なお (B),(C) で用いられるのは可換群の Galois コホモロジーである。

なお，定理 1.1 は，齋藤裕氏により，概均質ベクトル空間のゼータ関数の “明示公式” を計算したり [14]，収束を証明したり [15] する際にも用いられた。アデールで書かれたゼータ積分を Galois コホモロジーを使って，局所体上の積分で書くことができる。本稿でも 1.5 節で少し触れるが，詳しくは齋藤 [14, 32] を参照のこと。

1.1 定義

簡単のため K は完全体，つまり K に非分離な代数拡大は存在しないとする。標数が 0 の体や有限体は完全体である。K の代数閉包 $\overline{K}$ を固定し，$\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ とする。Γ_K の作用は右作用とする。

注意 1.4 “正則” な概均質ベクトル空間に対しては，完全体でない K に対しても，分離閉包の Galois 群を考えることで同じ結論が得られる。詳細は [22] を参照のこと。

定義 1.5　G を K 上の代数群とする。

- $G(\overline{K})$ に離散位相を入れる。連続写像 $h\colon \Gamma_K \to G(\overline{K})$ は，すべての $\sigma, \tau \in \Gamma$ について $h(\sigma\tau) = h(\tau)h(\sigma)^\tau$ が成り立つとき，1-コサイクルであるという。
- h が 1-コサイクルなら，$g \in G(\overline{K})$ として，$h'(\sigma) = g^{-1}h(\sigma)g^\sigma$ で定まる h' も 1-コサイクルである。2 つの 1-コサイクル h, h' は，$h'(\sigma) = g^{-1}h(\sigma)g^\sigma$ がすべての σ について成り立つような $g \in G(\overline{K})$ が存在するとき，同値であるという。

1-コサイクルの同値類を G の 1 次 Galois コホモロジーといい，$\mathrm{H}^1(K, G)$ で表す。$\Gamma \ni \sigma \mapsto 1 \in G(\overline{K})$ を自明な 1-コサイクルといい，その類を自明類という。

これらの確認には，$(g^{-1})^\sigma = (g^\sigma)^{-1}$，$(g_1g_2)^\sigma = g_1^\sigma g_2^\sigma$ に注意すればよい。$h\colon \Gamma_K \to G(\overline{K})$ を $h = (h_\sigma)$ と表すこともある。これは各 σ について $h_\sigma = h(\sigma) \in G(\overline{K})$ の意味である。群のコホモロジーとしての記号では正確には $\mathrm{H}^1(\Gamma_K, G(\overline{K}))$ であるが，$\mathrm{H}^1(K, G)$ の表記もそれなりに一般的である。G が非可換であれば $\mathrm{H}^1(K, G)$ は群構造をもたず，$\mathrm{H}^1(K, G)$ は自明類を基点とする基点付き集合 (pointed set) になる。定義から，$\mathrm{H}^1(K, G_1 \times G_2) = \mathrm{H}^1(K, G_1) \times \mathrm{H}^1(K, G_2)$ である。また $G_1 \to G_2$ が代数群の（K 上の）準同型であれば，$\mathrm{H}^1(K, G_1) \to \mathrm{H}^1(K, G_2)$ が誘導される。

次は良く知られている。

命題 1.6　任意の $n \geq 1$ で $\mathrm{H}^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{1\}$ である。

したがって，G が GL_n の直積であれば，やはり $\mathrm{H}^1(K, G) = \{1\}$ である。また，より一般に，A を中心的単純環とし，$A^\times$ を K 上の代数群と考えたとき，$\mathrm{H}^1(K, A^\times) = \{1\}$ である。A が n 次行列環の場合が命題 1.6 である。

1.2　完全系列

G_1, G_2, G_3 を K 上の代数群とする。K 上の準同型の系列

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_2 \xrightarrow{\phi_2} G_3 \longrightarrow 1$$

は，次がすべて成り立つとき，完全系列であるという。

- G_1 は G_2 の部分群で ϕ_1 は包含写像である

- $\ker(\phi_2) = G_1$ である
- $G_2(\overline{K}) \to G_3(\overline{K})$ が全射である

このとき，$G_3(K)$ が $\mathrm{H}^1(K, G_1)$ に右から次のように作用する。$g \in G_3(K)$, $\overline{h} \in \mathrm{H}^1(K, G_1)$ とする。$h = (h_\sigma)$ を，類 $\overline{h}$ に属する 1-コサイクルとする。$\phi_2(\tilde{g}) = g$ となる $\tilde{g} \in G_2(\overline{K})$ をとる。このとき任意の $\sigma \in \Gamma_K$ に対して，$h'_\sigma = \tilde{g}^{-1} h_\sigma \tilde{g}^\sigma \in G_2(\overline{K})$ とおく。$\phi_2(h'_\sigma) = g^{-1}\phi_2(h_\sigma) g^\sigma = g^{-1} g = 1$ より $h'_\sigma \in \ker\phi_2 = G_1(\overline{K})$ である。$h' = (h'_\sigma)$ は G_1 の 1-コサイクルである。h' の類 $\overline{h'}$ は $\tilde{g}$ と h の取り方によらずに定まり，$(g, \overline{h}) \mapsto \overline{h'}$ は $G_3(K)$ の右作用である。写像 $G_3(K) \to \mathrm{H}^1(K, G_1)$ が，$\mathrm{H}^1(K, G_1)$ の自明元に $G_3(K)$ の各元を作用させることにより定まる。次の証明は難しくない。

定理 1.7　上の条件のもとで，次の系列は完全である。

$$
\begin{aligned}
1 \longrightarrow G_1(K) \longrightarrow G_2(K) \longrightarrow G_3(K) \\
\longrightarrow \mathrm{H}^1(K, G_1) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, G_2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, G_3)
\end{aligned}
$$

さらに，$\mathrm{H}^1(K, G_1)/G_3(K) \to \mathrm{H}^1(K, G_2)$ は単射である。ただし完全とは，自明類の逆像が，その前の写像の像と一致すること（確認！）である。

注意 1.8　これはいわゆる「長完全系列」である。$G_i(K) = G_i(\overline{K})^{\Gamma_K} = \mathrm{H}^0(\Gamma_K, G_i(\overline{K})) =: \mathrm{H}^0(K, G_i)$ は 0 次のコホモロジーである。なお，G が可換群のときは任意の $i \geq 0$ について $\mathrm{H}^i(\Gamma_K, G)$ が定義され，長完全系列が定まる。

例 1.9　$\mathrm{H}^1(K, \mathrm{SL}_n) = \{1\}$ である。

これは群の完全系列 $1 \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{GL}_n \overset{\det}{\to} \mathrm{GL}_1 \to 1$ に定理 1.7 を使えば，$\mathrm{H}^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{1\}$ と $\det\colon \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_1(K)$ が全射であることからしたがう。

注意 1.10　A を中心的単純環とし，A^1 を被約ノルム $N\colon A^\times \to \mathrm{GL}_1$ の核とすると，$\mathrm{H}^1(K, A^\times) = \{1\}$ は同様だが，K 有理点の準同型 $A^\times \to K^\times$ は一般に全射ではなく，全単射 $N(A^\times)\backslash K^\times \to \mathrm{H}^1(K, A^1)$ が定まる。

1.3　有理軌道と Galois コホモロジー

G を代数群とし，H をその (滑らかな) 閉部分群とする。このとき幾何学的商 $X = G/H$ が存在することが知られている（[8, pp. 98-99]）。X は通例群構造は持たないが，$G(\overline{K})/H(\overline{K}) \to X(\overline{K})$ が全単射であるため，$X(K) \to \mathrm{H}^1(K, H)$ が上と同様に定義される。具体的には，$x \in X(K)$ に対し，商写像で x に行く $g \in G(\overline{K})$ を取り，x に 1-コサイクル $(g^{-1}g^{\sigma})_{\sigma}$ の類を対応させる。類は g の取り方によらない。この写像については，次が成り立つ。証明は定理 1.7 と同様である。

定理 1.11　上の条件のもとで，$G(K)\backslash X(K) \to \mathrm{H}^1(K, H)$ は単射であり，

$$G(K)\backslash X(K) \to \mathrm{H}^1(K, H) \to \mathrm{H}^1(K, G)$$

は完全である。

特に $\mathrm{H}^1(K, G) = \{1\}$ ならば $G(K)\backslash X(K) \to \mathrm{H}^1(K, H)$ は全単射である。

1.4　K 型と Galois コホモロジー

Galois コホモロジーが与えられた K 上の対象の K 型を分類することを説明する。X を K 上の（連結とは限らない）代数多様体とする。$\overline{X} := X \times_K \overline{K}$ とする。このとき Γ_K が $\overline{X}$ に右から作用する。$\sigma \in \Gamma_K$ に対して，誘導された $\overline{X} \to \overline{X}$ を σ_X で表す。

$\mathrm{Aut}\,(X)$ を X の自己同型群とする。ここでは $\mathrm{Aut}\,(X)$ は X に右から作用するものとする。$\mathrm{Aut}\,(X)$ は K 上の群スキームになり，その A 有理点 $\mathrm{Aut}\,(X)(A)$ は $X \times_K A$ の A-自己同型群になることが知られている。Γ_K は $\mathrm{Aut}\,(X)(\overline{K}) = \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(\overline{X})$ に右から作用する。具体的には，$\alpha \in \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(\overline{X})$ と $\sigma \in \Gamma_K$ に対して α^{σ} を

$$\alpha^{\sigma} = \sigma_X \circ \alpha \circ \sigma_X^{-1}; \quad \overline{X} \xrightarrow{\sigma_X^{-1}} \overline{X} \xrightarrow{\alpha} \overline{X} \xrightarrow{\sigma_X} \overline{X}.$$

で定めると，$\alpha \mapsto \alpha^{\sigma}$ が右作用である。

定義 1.12　X を K 上の代数的な対象（たとえば代数多様体や代数群など）とする。2 つのそのような K 上の対象 X, Y について，$\overline{Y}$ が $\overline{X}$ と $\overline{K}$ 上同型であるとき，Y を X の K 型であるという。

Y を X の K 型とする。$\overline{K}$ 同型 $\psi\colon \overline{Y} \to \overline{X}$ を取る。$\sigma \in \Gamma_K$ に対し,

$$h_Y(\sigma) = \sigma_X \circ \psi \circ \sigma_Y^{-1} \circ \psi^{-1}; \quad \overline{X} \xrightarrow{\psi^{-1}} \overline{Y} \xrightarrow{\sigma_Y^{-1}} \overline{Y} \xrightarrow{\psi} \overline{X} \xrightarrow{\sigma_X} \overline{X},$$

と定めると,この $h_Y(\sigma)$ は $\mathrm{Aut}\,(X)(\overline{K}) = \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(\overline{X})$ の元である。これについて

$$\begin{aligned} h_Y(\tau)h_Y(\sigma)^\tau &= h_Y(\sigma)^\tau \circ h_Y(\tau) = \tau_X \circ h_Y(\sigma) \circ \tau_X^{-1} \circ h_Y(\tau) \\ &= \tau_X \circ \sigma_X \circ \psi \circ \sigma_Y^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \tau_X^{-1} \circ \tau_X \circ \psi \circ \tau_Y^{-1} \circ \psi^{-1} \\ &= (\sigma\tau)_X \circ \psi \circ (\sigma\tau)_Y^{-1} \circ \psi^{-1} \\ &= h_Y(\sigma\tau), \end{aligned}$$

であるので,h_Y は $\mathrm{Aut}\,(X)$ の 1-コサイクルである。簡単な計算で,このコホモロジー類は ψ の取り方によらないことがわかる。このコホモロジー類も同じ h_Y で表す。次の補題は簡単に証明できる。

補題 1.13　この対応 $Y \mapsto h_Y$ は,X の K 型の同型類の集合から $\mathrm{H}^1(K, \mathrm{Aut}\,(X))$ への単射を与える。この単射で,X(の同型類)は自明類に送られる。

次は,いわゆる「K 型の存在定理」である。証明はたとえば [22, §8] あるいは [16, III§1,Propostion 5] を参照のこと。

定理 1.14　X が(連結とは限らない)準射影代数多様体であれば,上の写像は全単射である。

1.5　概均質ベクトル空間の有理軌道の記述

2 元 3 次形式の概均質ベクトル空間 $(G, V) = (\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, V)$ を例にとって,有理軌道の記述を考えてみよう。$V = \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3\}$ に,GL_2 が変数 (u,v) の線形変換で,GL_1 が通常のスカラー倍で作用する。本報告集の谷口 [28] では次の命題を初等的に示したが,これの Galois コホモロジーによる証明を与えよう。

命題 1.15　$G(K)\backslash V'(K)$ は K の 3 次分離代数の同型類のなす集合 $\mathcal{A}_3(K)$ と自然に 1 対 1 に対応する。

証明　$w = w(u,v) = uv(u+v) \in V'(K)$ を取り,G_w をその固定部分群とする。

$G_w \cong \mathrm{GL}_1 \times \mathfrak{S}_3$ である。したがって次のように示される。

(1) $\mathrm{H}^1(K, G) = \mathrm{H}^1(K, \mathrm{GL}_1) \times \mathrm{H}^1(K, \mathrm{GL}_2) = \{1\}$ なので全単射 $G(K)\backslash V'(K) \to \mathrm{H}^1(K, G_w)$ が定まる（定理 1.11）。

(2) $\mathrm{H}^1(K, G_w) = \mathrm{H}^1(K, \mathfrak{S}_3)$ で，[28, 命題 1.6] により $\mathfrak{S}_3 \cong \mathrm{Aut}\,(K^3)$ だから，$\mathrm{H}^1(K, G_w)$ は K^3 の K 型の（同型類の) なす集合とみなせる。（定理 1.14）

(3) K^3 の K 型とは K の 3 次分離代数のこと [28, 定義 1.2] なので，$G(K)\backslash V'(K)$ は K の 3 次分離代数のなす集合 $\mathcal{A}_3(K)$ と一対一に対応する。

□

一般の概均質ベクトル空間 (G, V) においてはこの議論はもう少し複雑になる。$\mathrm{H}^1(K, G) = \{1\}$ である場合は多く，このとき $G(K)\backslash V'(K) \to \mathrm{H}^1(K, G_w)$ は全単射であるが，たとえば $(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合だと [28, 3.3 節] で見たように $w = w(u, v) = uv \in V'(K)$ に対して $G_w \cong \mathrm{GL}_1^2 \rtimes \mathfrak{S}_2$ である。直積であれば上と同様になるが，半直積なのが問題である。

G_w° を G_w の単位連結成分とする。(G, V) が既約正則で放物型とよばれる概均質ベクトル空間であれば，ある $1 \le i \le 5$ について $G_w/G_w^\circ \cong \mathfrak{S}_i$ である。つまり完全系列

$$1 \to G_w^\circ \to G_w \to \mathfrak{S}_i \to 1 \tag{1.1}$$

が成り立つ。ここから

$$\mathrm{H}^1(K, G_w) \to \mathrm{H}^1(K, \mathfrak{S}_i) \tag{1.2}$$

が誘導される。$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合は $G_w^\circ \cong \mathrm{GL}_1^2$ で，$G_w \cong \mathrm{GL}_1^2 \rtimes \mathfrak{S}_2$ と半直積になるということは，完全系列 (1.1) が分裂するということである。したがって (1.2) は全射である。(1.2) の各点のファイバーがどうなっているかが問題である。

(1.2) は単射とは限らない。定理 1.7 の完全系列により，各点の逆像は，$\mathrm{H}^1(K, G_x^\circ)$ により記述される。すべての $x \in V'(K)$ で $\mathrm{H}^1(K, G_x^\circ) = \{1\}$ であれば，(1.2) は単射である。$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合はそうなっているので，$G(K)\backslash V'(K) \to \mathrm{H}^1(K, \mathfrak{S}_2)$ が全単射になる。つまり，$G(K)\backslash V'(K)$ は K 上の 2 次分離代数と一対一に対応する。これらのことについては，谷口 [20] も参照されたい。

なお，(1.2) は斎藤裕氏のゼータ関数の “明示公式” の理論でも基本的な役割を持つ。詳しくは齋藤 [14, 32] を参照のこと。

局所体上の Galois コホモロジーは有限になる（[16, III§4,Theorem 4]）。

定理 1.16 K を局所体とする。$\mathrm{H}^1(K,G)$ は有限集合である。

このことから，局所体 K 上で，概均質ベクトル空間の非特異集合 $V'(K)$ は有限個の $G(K)$ 軌道からなることが分かる。

2 アデール

有理点の集合を $G(\mathbb{R}), V(\mathbb{Z})$ のように書くと本節は式の記述がやや煩雑になるので，$G(\mathbb{R}) =: G_{\mathbb{R}}, V(\mathbb{Z}) =: V_{\mathbb{Z}}$ などで表すことにする。(G,V) が $\mathbb{Z}$ 上定義されているとして，格子 $V_{\mathbb{Z}}$ に伴うゼータ関数の積分表示は，本報告集の杉山 [26] で説明されるように，古典的には

$$Z^{\mathrm{cl}}(\Phi_\infty, s) := \int_{G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}} |\chi(g_\infty)|^s \sum_{x \in V'_{\mathbb{Q}} \cap V_{\mathbb{Z}}} \Phi_\infty(g_\infty x) dg_\infty \tag{2.1}$$

で与えられる（試験関数を Φ_∞ と書きまた $G_{\mathbb{R}}$ の元を g_∞ と書く理由はすぐに明らかになる）。他方，(G,V) を一般の代数体 F 上で考え，$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ をそのアデール環として，ゼータ積分はアデールを使って

$$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) := \int_{G_{\mathbb{A}}/G_F} |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^s \sum_{x \in V'_F} \Phi(gx) dg \tag{2.2}$$

で定義されることもある。ただし $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ はイデールノルムである。本報告集でも都築 [29] や鈴木美 [30] ではゼータ積分はアデールを使って定式化される。本節ではアデリックなゼータ積分 (2.2) について，(2.1) との関係や取り扱いの方法について簡単に説明する。

2.1 アデールの定義の復習

$\mathbb{Q}$ 上のアデール $\mathbb{A}$ は，制限直積

$$\mathbb{A} = \prod_{p \le \infty}{}' \mathbb{Q}_p$$

で定義される。p は素数または ∞ で，p が素数のときは $\mathbb{Q}_p$ は p 進数体で，$\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$ とする。$\prod'$ は制限直積の記号で，$\mathbb{A}$ は $x = (x_p)_p$, $x_p \in \mathbb{Q}_p$ としたとき，有限個以外の p で $x_p \in \mathbb{Z}_p$ であるようなもの全体のなす集合であることを表す。$\mathbb{A}$ は環にな

り，$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{A}$ に対角に埋め込まれて部分環になる。$\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ はコンパクトである。$p=\infty$ を除いた制限直積を $\mathbb{A}_{\mathrm{f}} = \prod'_{p<\infty} \mathbb{Q}_p$ と書き，$\mathbb{Q}$ の有限アデール環という。定義から $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{\mathrm{f}}$ である。

$\mathbb{A}$ の単数群 $\mathbb{A}^\times$ をイデール群という。$t = (t_p)_p$, $t_p \in \mathbb{Q}_p^\times$ で，有限個以外の p で t_p は $\mathbb{Z}_p^\times$ の元であるようなもの全体のなす集合である。したがって

$$\mathbb{A}^\times = \prod_{p\leq\infty}{}' \mathbb{Q}_p^\times$$

である。Π' は，$p<\infty$ について，$\mathbb{Q}_p^\times$ の部分群 $\mathbb{Z}_p^\times$ に関する制限直積であることを表す。これは，$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$ が $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ の，部分群 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}_p)$ $(p<\infty)$ に関する制限直積だということである。これは GL_n で正しい。

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) = \prod_{p\leq\infty}{}' \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$$

で，Π' は $p<\infty$ について $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の部分群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 関する制限直積だということである。

$\mathbb{Z}$ の副有限完備化を $\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/(n)$ とする。中国剰余定理により $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ である。また，$\mathbb{A}_{\mathrm{f}} = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ である。

一般の代数体 F に対しても，F のアデール環 $\mathbb{A}_F$ は同様の構成で定義されるが，$\mathbb{A}_F = \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Q}} F$ と定義してもよい。F が固定されていて誤解のおそれがないときは，F のアデール環を $\mathbb{A}$ と書くこともある。

2.2　両者の関係

$F=\mathbb{Q}$ のとき，適当な条件のもとで $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = Z^{\mathrm{cl}}(\Phi_\infty, s)$ が成り立つ。この意味で (2.2) は (2.1) の一般化である。具体的には次が成り立つ。

定理 2.1　$F=\mathbb{Q}$ とし，G について $G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{R}} G_{\widehat{\mathbb{Z}}} G_{\mathbb{Q}}$ が成り立っているとする。$G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{A}_{\mathrm{f}}}$ の Haar 測度 dg が直積測度 $dg = dg_\infty dg_{\mathrm{f}}$ で dg_{f} は $\int_{G_{\widehat{\mathbb{Z}}}} dg_{\mathrm{f}} = 1$ となるように規格化されているとする。また $V_{\mathbb{A}} = V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{A}_{\mathrm{f}}}$ 上の試験関数 Φ は $\Phi = \Phi_\infty \otimes \Phi_{\mathrm{f}}$ の形でかつ Φ_{f} は $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ の指示関数であるとする。このとき

$$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = Z^{\mathrm{cl}}(\Phi_\infty, s)$$

である。

証明 条件より $G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{R}}G_{\widehat{\mathbb{Z}}}G_{\mathbb{Q}}/G_{\mathbb{Q}} \cong G_{\mathbb{R}}G_{\widehat{\mathbb{Z}}}/(G_{\mathbb{R}}G_{\widehat{\mathbb{Z}}} \cap G_{\mathbb{Q}})$ である。$\mathbb{Q} \cap \widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ に注意すれば，$G_{\mathbb{R}}G_{\widehat{\mathbb{Z}}} \cap G_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Z}}$ であるから，

$$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = \int_{(G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}) \times G_{\widehat{\mathbb{Z}}}} |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^s \sum_{x \in V'_{\mathbb{Q}}} \Phi_\infty(g_\infty x)\Phi_{\mathrm{f}}(g_{\mathrm{f}} x) dg_\infty dg_{\mathrm{f}}$$

である。ここで $g_{\mathrm{f}} \in G_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ のとき $\chi(g_{\mathrm{f}}) \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ なのでそのイデールノルムは 1 であり，よって $|\chi(g)|_{\mathbb{A}} = |\chi(g_\infty)|_{\mathbb{A}}|\chi(g_{\mathrm{f}})|_{\mathbb{A}} = |\chi(g_\infty)|_{\mathbb{A}} = |\chi(g_\infty)|$ である。また $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ は $G_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ 不変なので $g_{\mathrm{f}} \in G_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ のとき $\Phi_{\mathrm{f}}(g_{\mathrm{f}} x) = \Phi_{\mathrm{f}}(x)$ である。よって，$V_{\mathbb{Q}} \cap V_{\widehat{\mathbb{Z}}} = V_{\mathbb{Z}}$ であることから，

$$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = \int_{G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}} |\chi(g_\infty)|^s \sum_{x \in V'_{\mathbb{Q}} \cap V_{\mathbb{Z}}} \Phi_\infty(g_\infty x) dg_\infty \cdot \int_{G_{\widehat{\mathbb{Z}}}} dg_{\mathrm{f}}$$

である。$\int_{G_{\widehat{\mathbb{Z}}}} dg_{\mathrm{f}} = 1$ なのでこれは $Z^{\mathrm{cl}}(\Phi_\infty, s)$ と一致する。 □

定理 2.1 の G の条件については，次がよく知られている。

命題 2.2 $G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{R}}G_{\widehat{\mathbb{Z}}}G_{\mathbb{Q}}$ は G が GL_n や，そのブロック下三角な行列のなす部分群のとき正しい。

また，G_1, G_2 で正しければ $G_1 \times G_2$ でも正しい。

注意 2.3 $Z^{\mathrm{cl}}(\Phi_\infty, s)$ と $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s)$ のどちらがよいかは目的にもよる。一般の代数体で考えたい場合や，$\mathbb{Q}_p$ 上の緻密な局所理論を考えたい場合は，やはり $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s)$ の方が便利であるが，そうでなければアデリックな定式化にこだわる必要がないこともある。なお，杉山 [26] で説明されるゼータ関数 $\xi_i(L, s)$ の格子 L の任意性は，(2.2) では Φ_{f} の取り方の任意性に対応する。

2.3　アデリックな積分の取り扱い

ゼータ積分の解析接続と関数等式を証明する方法は，Z^{cl} と Z^{ad} であまり違いはない。Z^{cl} の場合は杉山 [26, 命題 4.1] で扱われているので，ここでは Z^{ad} が並行した扱いになることを簡単に説明しておく。(2.2) の右辺の積分が $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で収束しているとする。（これは例外的な場合を除き正しい。正確には [15] を参照。）積分領域を $|\chi(g)| \geq 1$ の部分と $|\chi(g)| \leq 1$ の部分に分け，$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = Z^{\mathrm{ad}}_+(\Phi, s) + Z^{\mathrm{ad}}_-(\Phi, s)$ と

する。$Z_{+}^{\mathrm{ad}}(\Phi,s)$ の積分は任意の s で収束し，s の整関数になる。Z_{-}^{ad} の方に Poisson 和公式を用いる。

V^* を V の双対空間とする。非自明な加法指標 $\psi\colon \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}$ を固定し，Φ の Fourier 変換 $\widehat{\Phi}\colon V_{\mathbb{A}}^* \to \mathbb{C}$ を

$$\widehat{\Phi}(y) = \int_{V_{\mathbb{A}}} \Phi(x)\psi([x,y])dx$$

で定める。ただし $[x,y]$ は $x \in V$ と $y \in V^*$ のペアリングであり，$V_{\mathbb{A}}$ の Haar 測度 dx は $\int_{V_{\mathbb{A}}/V_F} dx = 1$ となるように規格化しているとする。Poisson 和公式は $\sum_{x\in V_F} \Psi(x) = \sum_{y\in V_F^*} \widehat{\Psi}(y)$ である。これを $Z_{-}^{\mathrm{ad}}(\Phi,s)$ の和に適用するために，$\Psi(x) = \Phi(gx)$ とおいてそのフーリエ変換 $\widehat{\Psi}$ を計算すると，

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(y) &= \int_{V_{\mathbb{A}}} \Phi(gx)\psi([x,y])dx = |\det\rho(g)|_{\mathbb{A}}^{-1} \int_{V_{\mathbb{A}}} \Phi(x)\psi([g^{-1}x,y])dx \\ &= |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{-n/d} \int_{V_{\mathbb{A}}} \Phi(x)\psi([x,g^*y])dx = |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{-n/d}\widehat{\Phi}(g^*y)\end{aligned}$$

である。ただし $\rho^*\colon G \to \mathrm{GL}(V^*)$ は反傾表現で，$\rho^*(g)y = g^*y$ と書いた。また $n = \dim V$ で d は相対不変式 P の次数である。したがって

$$\sum_{x\in V_F} \Phi(gx) = |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{-n/d} \sum_{y\in V_F^*} \widehat{\Phi}(g^*y)$$

である。これより

$$Z_{-}^{\mathrm{ad}}(\Phi,s) = Z_{+}^{\mathrm{ad}*}(\widehat{\Phi}, n/d-s) + I(\Phi,s),$$

ただし

$$I(\Phi,s) = \int_{\substack{G_{\mathbb{A}}/G_F \\ |\chi(g)|\le 1}} |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{s} \left(|\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{-n/d} \sum_{y\in S_F^*} \widehat{\Phi}(g^*y) - \sum_{x\in S_F} \Phi(gx) \right) dg$$

と表される。ゼータ積分 $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi,s)$ の式に代入すれば

$$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi,s) = Z_{+}^{\mathrm{ad}}(\Phi,s) + Z_{+}^{\mathrm{ad}*}(\widehat{\Phi}, n/d-s) + I(\Phi,s)$$

で，右辺の前の 2 つの項は s の整関数であるなので，極の主要部は $I(\Phi,s)$ の分析に帰着される。$\Phi|_{S_F} \equiv \widehat{\Phi}|_{S_F^*} \equiv 0$ となるように Φ を取れば $I(\Phi,s) = 0$ であり，この Φ に対して $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi,s)$ は整関数であり，関数等式 $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi,s) = Z^{\mathrm{ad}*}(\widehat{\Phi}, n/d-s)$ が成り立つ。

3 篩法入門

篩法とは，素数の分布や素数の条件で定まる集合の個数を調べる一つの手法である。Eratosthenes の篩に起源をもち，今日では非常に多種多様な篩法が知られている。概均質ベクトル空間からも，篩法を用いて示すことのできる密度定理がある。本報告集では Thorne [21], 鈴木雄 [31], 鈴木美 [30] で篩法が登場するが，これらはいずれも無平方篩 (squarefree sieve) という種類の篩と考えることができる。

X を正の実数とし，$N_{\mathrm{sf}}(X)$ で $1 \leq n \leq X$ であるような無平方な整数 n の個数を表す。$X \to \infty$ のときの $N_{\mathrm{sf}}(X)$ の挙動を調べるのは，無平方篩のもっとも基本的な問題だと考えることができる。本節では $N_{\mathrm{sf}}(X)$ の挙動を 2 通りの方法で調べることで，無平方篩の考え方を説明する。

3.1 誤差評価のない漸近式

次は Gegenbauer の定理として古典的に知られている。

命題 3.1（**Gegenbauer の定理**）

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_{\mathrm{sf}}(X)}{X} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

証明 Y を実数とする。$1 \leq n \leq X$ となる整数 n で，$p < Y$ であるすべての素数 p について p^2 で割れないようなものの個数を $N_Y(X)$ とする。中国剰余定理から

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_Y(X)}{X} = \prod_{p<Y} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \tag{3.1}$$

である。$N_{\mathrm{sf}}(X) \leq N_Y(X)$ なので，

$$\limsup_{X\to\infty} \frac{N_{\mathrm{sf}}(X)}{X} \leq \prod_{p<Y} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

である。Y は任意だから，

$$\limsup_{X\to\infty} \frac{N_{\mathrm{sf}}(X)}{X} \leq \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)}$$

である。一方，$N_Y(X)$ では数えられるが $N_{\mathrm{sf}}(X)$ では数えられない整数 n は，ある素数 $p \geq Y$ について，p^2 で割れる。

$$(X \text{ 以下の正の整数で } p^2 \text{ で割れるものの個数}) \leq \frac{X}{p^2} \tag{3.2}$$

であることから

$$N_Y(X) - N_{\mathrm{sf}}(X) \leq \sum_{p \geq Y} \frac{X}{p^2} \leq X \sum_{k \geq Y} \frac{1}{k^2} \leq \frac{X}{Y-1}$$

である。したがって

$$\frac{N_{\mathrm{sf}}(X)}{X} \geq \frac{N_Y(X)}{X} - \frac{1}{Y-1} \underset{X\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{p<Y}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{Y-1}$$

である。Y は任意だから

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{N_{\mathrm{sf}}(X)}{X} \geq \prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)}$$

である。これで証明された。 □

証明を振り返ってみよう。$N_Y(X)$ は，$p < Y$ について p^2 で割れる数は除去したという意味で“篩にかけた”集合の個数である。$N_Y(X)$ の $X \to \infty$ の極限は中国剰余定理で簡単に求められるが，これは $N_Y(X)$ が数える整数は有限個の素数の条件で定まっているからである。$N_{\mathrm{sf}}(X)$ の n が無平方という条件は，「すべての素数 p について $p^2 \nmid n$ である」という，無限個の素数の条件であるために，直接の扱いが難しい。そこで有限個の素数の条件で規定されている $N_Y(X)$ で近似したのだが，命題 3.1 を証明するためにはこの近似がよいこと，すなわち $N_{\mathrm{sf}}(X)$ と $N_Y(X)$ の差が適切に小さいことを示す必要がある。(3.2) は単純な評価だが，これが $|N_Y(X) - N_{\mathrm{sf}}(X)|$ の小ささを保証するものとなっている。

3.2 誤差評価

実際には $N_{\mathrm{sf}}(X)$ について，命題 3.1 より強い，次の評価を証明することができる。上の証明とは独立に，この命題を示そう。

命題 3.2

$$N_{\mathrm{sf}}(X) = \frac{1}{\zeta(2)} X + O(X^{1/2}).$$

証明 q を無平方な正の整数として，無平方な正整数 q について，

$$N(q;X) := (1 \leq n \leq X \text{ で } q^2 \text{ の倍数となる } n \text{ の個数})$$

と定める．包除原理 (inclusion-exclusion principle) によって

$$N_{\mathrm{sf}}(X) = \sum_q \mu(q) N(q;X) \tag{3.3}$$

である．ただし $\mu(q)$ は Möbius 関数で，q は無平方な正の整数全体をわたる。ここで，$N(q;X) = \lfloor q^{-2}X \rfloor$ だから，q, X について一様な評価

$$N(q;X) = q^{-2}X + O(1), \tag{3.4}$$
$$N(q;X) = O(q^{-2}X), \tag{3.5}$$

が成り立つ．パラメーター Q を用意し，(3.3) の和を次のように分ける．

$$N_{\mathrm{sf}}(X) = \sum_{q \leq Q} \mu(q) N(q;X) + \sum_{q > Q} \mu(q) N(q;X). \tag{3.6}$$

第 1 項には (3.4) を，第 2 項には (3.5) を用いると，

$$\begin{aligned}
N_{\mathrm{sf}}(X) &= X \sum_{q \leq Q} \frac{\mu(q)}{q^2} + O\left(\sum_{q \leq Q} 1\right) + O\left(X \sum_{q > Q} q^{-2}\right) \\
&= X\left(\sum_q \frac{\mu(q)}{q^2} + O(\sum_{q > Q} q^{-2})\right) + O(Q) + O(XQ^{-1}) \\
&= X \sum_q \frac{\mu(q)}{q^2} + O(Q + XQ^{-1})
\end{aligned}$$

となる．$Q = XQ^{-1}$ となるよう Q を選ぶ．このとき $Q = X^{1/2}$，$O(Q + XQ^{-1}) = O(X^{1/2})$ であり，また $\sum_q \frac{\mu(q)}{q^2} = \prod_p (1 - \frac{1}{p^2}) = 1/\zeta(2)$ なので示された． □

こちらの証明でも，無限個の素数の条件で定まる $N_{\mathrm{sf}}(X)$ を直接は扱わず，包除原理 (3.3) により，有限個の素数の条件で定まる $N(q;X)$ と結び付けて考えている。(3.6) は，Q 以下の無平方数 q で “篩にかけ” て，その誤差を評価する方針であることを意味する。こちらの証明では，やはり成立する理由は単純だが，$N(q;X)$ の 2 つの評価 (3.4), (3.5) が鍵になっている。

3.3 概均質ベクトル空間における篩

概均質ベクトル空間で篩法が用いられた初めての著名な例は 1971 年の Davenport-Heilbronn [10] と言ってよいと思われる。ここで，$|\mathrm{Disc}(F)| < X$ となる 3 次体 F の同型類の個数を $N_3(X)$ としたとき

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_3(X)}{X} = \frac{1}{3\zeta(3)} \tag{3.7}$$

であることが示された。篩法の適用方法としては命題 3.1 の証明の流れである。以来，概均質ベクトル空間で同様の篩法によって，Datskovsky, Wright, Kable, 雪江, 谷口, Bhargava, 鈴木美裕, 若槻 [9, 13, 12, 19, 2, 3, 18] らにより密度定理が示されてきた。

概均質ベクトル空間でも命題 3.2 のような包除原理による篩が有効であることが一般的に指摘されたのは，比較的最近の Belabas-Bhargava-Pomerance [1] による。[1] では $N_3(X)$ については (3.7) の改良として

$$N_3(X) = \frac{1}{3\zeta(3)} X + O(X^{7/8} \log^2 X) \tag{3.8}$$

が示された。以来，Bhargava, Shankar, 谷口, Thorne, Tsimerman, Hough [7, 6, 17, 11] などにより，誤差評価を含む成果が得られている。

現在は余正則空間においても篩法から密度定理が示されるようになった。ただし [4, 5] では今のところ主要項のみが決定されていて，誤差項の評価は得られていない。数える対象が複雑な場合は，(3.2) や (3.4), (3.5) に対応する評価を得るのは難しいことも多い。問題に応じて様々なアプローチが取られている。

参考文献

[1] M Belabas, M. Bhargava, and C. Pomerance. Error estimates for the Davenport-Heilbronn theorems. *Duke. Math. J.*, 153:173–210, 2010.

[2] M. Bhargava. The density of discriminants of quartic rings and fields. *Ann. Math.*, 162:1031–1063, 2005.

[3] M. Bhargava. The density of discriminants of quintic rings and fields. *Ann. Math.*, 172:1559–1591, 2010.

[4] M. Bhargava and A. Shankar. Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves. *Ann. Math.*, 181:191–242, 2015.

[5] M. Bhargava and A. Shankar. Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0. *Ann. Math.*, 181:587–621, 2015.

[6] M. Bhargava, A. Shankar, and J. Tsimerman. On the Davenport-Heilbronn theorems and second order terms. *Invent. Math.*, 193:439–499, 2013.

[7] Manjul Bhargava, Takashi Taniguchi, and Frank Thorne. Improved error estimates for the Davenport-Heilbronn theorems. *Math. Ann., to appear: arXiv:2107.12819*, 2023.

[8] A. Borel. *Linear algebraic groups.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2nd edition, 1991.

[9] B. Datskovsky and D.J. Wright. Density of discriminants of cubic extensions. *J. Reine Angew. Math.*, 386:116–138, 1988.

[10] H. Davenport and H. Heilbronn. On the density of discriminants of cubic fields. II. *Proc. Royal Soc.*, A322,:405–420, 1971.

[11] Robert Hough. The shape of cubic fields. *Res. Math. Sci.*, 6(3):Paper No. 25,, 2019.

[12] A.C. Kable and D.J. Wright. Uniform distribution of the Steinitz invariants of quadratic and cubic extensions. *Compos. Math.*, 142:84–100, 2006.

[13] A.C. Kable and A. Yukie. The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields, I. *Tohoku Math. J.*, 54:513–565, 2002.

[14] H. Saito. Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vecotr spaces. *Math. Ann.*, 315:587–615, 1999.

[15] H. Saito. Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces. *Nagoya. Math. J.*, 170:1–31, 2003.

[16] Jean-Pierre Serre. *Galois cohomology.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, english edition, 2002. Translated from the French by Patrick Ion and revised by the author.

[17] A. Shankar and J. Tsimerman. Counting S_5-fields with a power saving error term. preprint, arXiv:1310.1998.

[18] Miyu Suzuki and Satoshi Wakatsuki. Explicit mean value theorems for toric periods and automorphic L-functions. *arXiv preprint arXiv:2103.04589*, 2021.

[19] T. Taniguchi. A mean value theorem for the square of class number times regulator of quadratic extensions. *Ann. Inst. Fourier*, 58-2:625–670, 2008.

[20] T. Taniguchi. On parameterizations of rational orbits of some forms of prehomogeneous vector spaces. 125-2:169–100, 2008. Manuscripta Math.

[21] F. Thorne. Counting cubic fields using shintani's zeta function. 本報告集, 2023.

[22] A. Yukie. Rational orbit decomposition of prehomogeneous vector spaces. available from https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~yukie/.

[23] 桂利行. 代数学 *III* 体とガロア理論. 東京大学出版会, 2005.

[24] 佐野薫. 余正則空間と楕円曲線のセルマー群. 本報告集, 2023.

[25] 山本修司. 大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性. 本報告集, 2023.

[26] 杉山和成. 概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（1 変数の場合）. 本報告集, 2023.

[27] 石塚裕大. 有理軌道、整軌道の解釈. 本報告集, 2023.

[28] 谷口隆. 例で学ぶ概均質ベクトル空間. 本報告集, 2023.

[29] 都築正男. 新谷二重ゼータ関数. 本報告集, 2023.

[30] 鈴木美裕. 保型形式と概均質ゼータ関数. 本報告集, 2023.

[31] 鈴木雄太. 整数軌道の数え上げ：数の幾何と平均法. 本報告集, 2023.

[32] 齋藤裕. ゼータ関数の具体的表示について. 第 *10* 回整数論サマースクール報告集, 2003.

三元二次形式のペアと射影空間の幾何

石塚　裕大（九州大学 IMI）

概要

高次合成則のことを学ぶに当たって，ひとつの有用な観点となるのが射影空間とその幾何学である．この章では，できるだけ具体的に射影空間とその座標変換群を導入し，また必要な幾何学的な性質について概均質ベクトル空間の観点から議論しておく．ここで登場する観点は [佐野] においても基礎的である．

記号について：$K^2 \otimes K^2 \otimes K^3$ や $K^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 K^3$ などの空間を，K を省略して $2 \otimes 2 \otimes 3$ や $2 \otimes \mathrm{Sym}^2 3$ のように略記することがある．

1　射影直線

K を体とし，K^2 を二次元 K-ベクトル空間とする．このゼロベクトルを $\mathbf{0}$ と書く．

1.1　射影直線の定義

$K^2 \setminus \mathbf{0}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下で定義する．ゼロベクトルでないベクトル $(a_0, a_1), (b_0, b_1) \in K^2 \setminus \mathbf{0}$ について，

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff \exists \lambda \in K^*, (\lambda a_0, \lambda a_1) = (b_0, b_1)$$

で定義する．たとえば $a \neq 0$ なら $(a : 0) = (1 : 0)$ であるし，$(0 : a) = (0 : 1)$, また $(a : a) = (1 : 1)$ である．

この同値類は「比 $a_0 : a_1$ と $b_0 : b_1$ が等しい」と理解することができる．そこで $(a_0, a_1) \in K^2 \setminus \mathbf{0}$ の同値類を $(a_0 : a_1)$ と書く．K 上の**射影直線** *projective line* $\mathbb{P}^1(K)$ とは，この同値類全体の集合であるとする．

関連する事項を加えておこう．

- $\mathbb{P}^1(K)$ は K^2 内の一次元部分空間の集合と思うこともできる．実際，$[a_0 : a_1]$

について $K(a_0, a_1) \subsetneq K^2$ を対応させればよい．

- 実数体 $\mathbb{R}$ 上の射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ は円周 S^1 に同相である．また複素数体 $\mathbb{C}$ 上の射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は球面 S^2 に同相になる（Riemann 球面）．

$a \mapsto (a:1)$ で定義される単射 $K \hookrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ を考えると，$(1:0)$ 以外の点は像に入る．これによりセル分解

$$\mathbb{P}^1(K) = K \sqcup \{(1:0)\}$$

を得る．仲間はずれの $(1:0)$ を無限遠点と呼ぶことがあり，その場合は ∞ で表したりする．いわば射影直線は直線 $K = \mathbb{A}^1(K)$ の無限遠点 ∞ による一点コンパクト化である．

1.2 射影直線の座標変換

直線だと言うなら座標変換を考えたい．射影直線の座標変換群は直線のそれより大きなものになっている．

K 成分の可逆行列 $g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$ を考える．このとき，$P = (a_0 : a_1) \in \mathbb{P}^1(K)$ について

$$Pg = (a_0 : a_1) \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} := (pa_0 + ra_1 : qa_0 + sa_1) \in \mathbb{P}^1(K)$$

とする．特にスカラー行列 $\lambda I_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ は

$$P \cdot \lambda I_2 = (\lambda a_0 : \lambda a_1) = (a_0 : a_1)$$

と自明に作用する．重要なのは次の性質である．

命題 1.1 $\mathbb{P}^1(K)$ への $\mathrm{GL}_2(K)$ の作用は三重推移的である．

三重推移的とは，異なる三点の組 $(P_0, Q_0, R_0), (P_1, Q_1, R_1) \in \mathbb{P}^1(K)^3$ を用意すると，ある $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ について

$$P_0 g = P_1,\ Q_0 g = Q_1,\ R_0 g = R_1$$

が成り立つということである．

証明 $W_0 = ((1:0),(0:1),(1:1))$ とする．(P_1, Q_1, R_1) は W_0 であると仮定して示せば十分である．

- 実際，(P_0, Q_0, R_0) を W_0 に移す行列を g_0, (P_1, Q_1, R_1) を W_0 に移す行列を g_1 とすれば，$g_0 g_1^{-1}$ が (P_0, Q_0, R_0) を (P_1, Q_1, R_1) に移す．

いま $P_0 = (a_0 : a_1), Q_0 = (b_0 : b_1)$ とすると，$P_0 \neq Q_0$ という仮定から，行列

$$g = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$$

は可逆である．そして $P_0 g^{-1} = (1:0)$ および $Q_0 g^{-1} = (0:1)$ である．

また $R_0 g^{-1} = (c_0 : c_1)$ とおくと，P_0, Q_0 は R_0 と異なるから $P_0 g^{-1}, Q_0 g^{-1}$ は $R_0 g^{-1}$ と異なる．つまり c_0, c_1 はゼロではない．したがって

$$h = \begin{pmatrix} c_0^{-1} & 0 \\ 0 & c_1^{-1} \end{pmatrix}$$

を考えることができる．

そこで $g^{-1}h$ を作用させてみると，

$$P_0 g^{-1} h = (1:0),\ Q_0 g^{-1} h = (0:1)$$

は変わらず，$R_0 g^{-1} h = (1:1)$ であることがわかる．つまり $g^{-1}h$ は (P_0, Q_0, R_0) を W_0 に移す． □

1.3 二元三次形式と三点集合

さて，[谷口 1] の記号を踏襲し，$V(K)$ を K 係数の二元三次形式の空間

$$V(K) = \mathrm{Sym}^3 K^2 = \{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \mid a, b, c, d \in K\}$$

として，二元三次形式 $x = x(u, v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \in V(K)$ を考えよう．いま

$$x(\lambda u, \lambda v) = \lambda^3 x(u, v)$$

であるから，一般には $x(\lambda a_0, \lambda a_1) \neq x(a_0, a_1)$ である．

しかし $x(a_0, a_1)$ がゼロか否かという点に限れば，$\lambda \in K^*$ について $(\lambda a_0, \lambda a_1)$ を考えても同じである．そこで，x の零点集合

$$Z_x = Z_x(K) \coloneqq \{(a_0 : a_1) \in \mathbb{P}^1(K) \mid x(a_0, a_1) = 0\}$$

を矛盾なく考えることができる．

例 1.2　$w_0 = uv(u-v)$ について，

$$Z_{w_0}(\mathbb{Q}) = \{(1:0), (0:1), (1:1)\}$$

となり，これは上の命題で導入した W_0 と一致する．

例 1.3　一方で $x = u^3 - 2v^3$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&Z_x(\mathbb{Q}) = \emptyset,\\
&Z_x(\mathbb{R}) = \{(\sqrt[3]{2}:1)\},\\
&Z_x(\mathbb{C}) = \{(\sqrt[3]{2}:1), (\zeta_3\sqrt[3]{2}:1), (\zeta_3^2\sqrt[3]{2}:1)\}
\end{aligned}$$

となる（$\zeta_3 \in \mathbb{C}$ は 1 の原始三乗根とする）．どの体で考えるかによって元の数が異なることに注意しよう．

例 1.4　重根がある $x = u^2v$ のような場合は，

$$Z_x(\mathbb{C}) = \{(1:0), (0:1)\}$$

となって，複素数体で考えても二点しかない．$x \in V(K)$ が非退化，つまり判別式が消えないことと，$Z_x(\overline{K})$ が三点であることは同値である．

なお同様に K 係数の二元 n 次形式 $F(u,v) \in \mathrm{Sym}^n 2$ があると，その零点集合 $Z_F(K)$ を考えることができる．たとえば $n=1$ のときは $F(u,v) = pu + qv$ であるが，$F \neq 0$ なら

$$Z_{pu+qv}(K) = \{(q:-p)\}$$

という一点集合になる．逆に，一点集合 $\{(a_0:a_1)\} \in \mathbb{P}^1(K)$ があると，それは $\ell(u,v) = a_1u - a_0v$ についての $Z_\ell(K)$ と一致する．この ℓ は定数倍を除いて一意に決まることもわかる．次数の高い場合も，n 点集合 $W \subseteq \mathbb{P}^1(K)$ があると，$W = Z_F(K)$ となるような F が，定数倍を除いて一意に定まる．この事実は射影直線の場合にはシンプルだが，より次元の高い射影空間で考えると対応する事実を注意深く調べる必要がある．$n=3$ の場合にはあとで具体的に示しておく．

ここで，Z_x の性質を調べ，$\mathbb{P}^1(K)$ への $\mathrm{GL}_2(K)$ の作用が三重推移的であることと関連付けてみよう．[谷口 1] に述べられているとおり，$V(K)$ には $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{GL}_1(K) \times \mathrm{GL}_2(K)$ の作用が

$$gx(u,v) = g_1x((u\ v)g_2)$$

により定義されていると考える．

命題 1.5　$x \in V(K)$, $g = (g_1, g_2) \in G(K)$ について $Z_x(K)g_2^{-1} = Z_{gx}(K)$ である．

証明 $P = (a_0 : a_1) \in Z_{gx}(K)$ とすると，定義から $(gx)(a_0, a_1) = 0$ である．ところで作用の定義から

$$(gx)(a_0, a_1) = g_1 x((a_0, a_1)g_2)$$

となる．これは $Pg_2 \in Z_x(K)$ を意味する．つまり $P \in Z_x(K)g_2^{-1}$ である．逆向きの包含は議論を逆にたどればよい．□

一つ用語を定義しておく．二元三次形式 $x \in V(K)$ が分裂するとは，x が K 上で三つの線形形式の積に分解し，なおかつそれらの線形形式が定数倍しても互いに相異なる状況を指す．平たく言えば，$Z_x(K)$ が $\mathbb{P}^1(K)$ に相異なる三点を定める場合である．

系 1.6　$x \in V(K)$ が分裂するとき，ある $g = (g_1, g_2) \in G(K)$ が存在して $x = gw_0$ である．

証明 x が分裂すると，$Z_x(K)$ は異なる三点になる．$\mathrm{GL}_2(K)$ の三重推移性から，ある g_2 について $Z_x(K)g_2^{-1} = Z_{w_0}(K)$ である．上の命題を使えば，$Z_{(1,g_2)x}(K) = Z_{w_0}(K) = W_0$ とも言える．

さらに命題の前に述べたとおり，$Z_y(K) = W_0$ となる $y(u, v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3$ は $w_0 = uv(u - v)$ の定数倍しかないのだが，これを後々との比較のために具体的に示しておこう．

- $(1 : 0) \in W_0$ で消えるから，$a = 0$.
- $(0 : 1) \in W_0$ で消えるから，$d = 0$.
- さらに $(1 : 1) \in W_0$ で消えるので，$b + c = 0$.
- 一方で K が標数 2 でなければ，$(1 : -1) \notin W_0$ である．するとこの上で y は消えないから，$-b + c \neq 0$. K の標数が 2 でないため，$b + c = 0$ と合わせれば $b \neq 0$ がわかる．K が標数 2 であれば別の点を選ぶ必要がある．

以上をまとめると，$y(u, v) = buv(u - v)$ $(b \neq 0)$ となる．

上の状況に戻ると，$(1, g_2)x = buv(u - v)$ $(b \neq 0)$ となっている．定数 b の逆数を g_1 とすれば $(g_1, g_2)x = w_0$ である．□

この系で $K=\overline{K}$ とすれば，分裂する二元三次形式は gw_0 と表示できることがわかる．$x\in V(K)$ が $\overline{K}$ 上で分裂することは x が重根を持たないことで，これは $\mathrm{Disc}(x)\neq 0$ と同値であることを組み合わせれば，二元三次形式の空間 $V=\mathrm{Sym}^3 2$ が概均質ベクトル空間になることを示したことになる．もちろん判別式 $\mathrm{Disc}(x)$ が相対不変式である．

2 射影平面

次に射影平面を考えよう．K を体とし，今度は K 上の三次元数ベクトル空間 K^3 を考える．このゼロベクトルを再び $\mathbf{0}$ と書く．

2.1 定義と射影変換

前と同様に，$K^3\setminus\mathbf{0}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下で定義する．ゼロベクトルでないベクトル $(a_0,a_1,a_2),(b_0,b_1,b_2)\in K^3\setminus\mathbf{0}$ について，

$$(a_0,a_1,a_2)\sim(b_0,b_1,b_2)\iff \exists\lambda\in K^*,(\lambda a_0,\lambda a_1,\lambda a_2)=(b_0,b_1,b_2)$$

で定義する．元 $(a_0,a_1,a_2)\in K^3\setminus\mathbf{0}$ の同値類を $(a_0:a_1:a_2)$ と書く．K 上の**射影平面** *projective plane* $\mathbb{P}^2(K)$ とは，この同値類全体の集合であるとする．

セル分解も射影直線と同様に考えられる．$(a_0,a_1)\mapsto(a_0:a_1:1)$ で定義される写像 $K^2\hookrightarrow\mathbb{P}^2(K)$ を考えると，これは単射である．その像に入らないのは

$$\{(a_0:a_1:0)\mid(a_0,a_1)\in K^2\setminus\mathbf{0}\}$$

という点集合であり，これは $(a_0:a_1)\mapsto(a_0:a_1:0)$ という写像 $\mathbb{P}^1(K)\hookrightarrow\mathbb{P}^2(K)$ によって射影直線 $\mathbb{P}^1(K)$ と同一視できる．つまりセル分解は

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^2(K)&=K^2\sqcup\mathbb{P}^1(K)\\&=K^2\sqcup K^1\sqcup\{(1:0:0)\}\end{aligned}$$

と記述できる．この射影直線を無限遠直線と呼ぶことがある．

射影変換も射影直線と同様である．$(a_0:a_1:a_2)\in\mathbb{P}^2(K)$ および $g\in\mathrm{GL}_3(K)$ について，$(a_0:a_1:a_2)g$ をベクトル $(a_0,a_1,a_2)g$ の同値類として定義する．やはりスカラー行列は自明に作用する．

2.2　平面二次曲線と直線

事情が大きく異なってくるのは零点集合である．

とはいっても，定義自体は変わらない．K 係数の三元二次形式 $F = F(u, v, w) \in \mathrm{Sym}^2 3$ について，

$$Z_F(K) \coloneqq \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(K) \mid F(a_0, a_1, a_2) = 0\}$$

と定義する．前と同様に $F(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = \lambda^2 F(u, v, w)$ であることから定義できていることが従う．F が三元 n 次形式でも同様に定義ができる．

異なるのは，$Z_F(K)$ が一般に点集合ではなく，曲線になることである．

例 2.1　図的に理解しやすいので，K を実数体 $\mathbb{R}$ として考えよう．そして

$$F(u, v, w) = u^2 + v^2 - w^2$$

という例を取る．このとき

$$Z_F(\mathbb{R}) = \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 = 0\}$$

であるが，このままではよくわからない．

そこで，セル分解の K^2 の部分，つまり $a_2 \neq 0$ の部分に限って考えてみよう．K^2 の埋め込み写像 $(a_0, a_1) \mapsto (a_0 : a_1 : 1)$ を $\iota\colon K^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(K)$ と書けば,

$$\iota^{-1}(Z_F(\mathbb{R})) = \{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \mid a_0^2 + a_1^2 - 1 = 0\}$$

となって，これは原点中心，半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ であることがわかる．同様に $F = uw - v^2$ とすれば放物線 $y = x^2$ が，$F = u^2 - v^2 - w^2$ とすれば双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ が出てくる．

逆に,

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

という実係数の二次式について $f = 0$ で定義される $\mathbb{R}^2$ 内の二次曲線があれば，それは

$$F(u, v, w) = au^2 + buv + cv^2 + duw + evw + fw^2$$

という二次形式について $\iota^{-1}(Z_F(\mathbb{R}))$ だと理解することができる．つまり $Z_F \subseteq \mathbb{P}^2$ は二次曲線 $f=0$ を無限遠直線にまで補完した図形である．$\mathbb{P}^2$ を射影平面と呼ぶことを踏まえ，Z_F を**平面二次曲線** *conic* と呼ぶことがある[*1]．

例 2.2 $n \neq 2$ についての三元 n 次形式でもほぼ同様である．たとえば $n=1$ だと

$$f(x,y) = ax + by + c \quad ((a,b) \neq (0,0))$$

で定まる直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ に対応して，

$$F(u,v,w) = au + bv + cw$$

という線形形式を考えれば，$\iota^{-1}(Z_F(\mathbb{R})) = \ell$ である．つまり $Z_F(\mathbb{R})$ は ℓ を補完する図形である．補完する前が直線であることを踏まえ，一次形式 $F \neq 0$ についての Z_F を射影直線，あるいは単に直線と呼ぶことが多い．同型 $Z_F \cong \mathbb{P}^1$ が構成できるので，$\mathbb{P}^1$ を射影直線と呼んだこととも整合する．

なお $n=3$ だと楕円曲線（の K-form）が登場する．$n=4$ 以上だとより複雑な曲線が登場することになる．

多項式を一変数多い斉次多項式にしていることを踏まえ，f から F を考えることをしばしば斉次化 homogenization と呼ぶ．

2.3 三元二次形式の空間と平面二次曲線

ここで三元二次形式の空間 $\mathrm{Sym}^2 3$ について復習しておこう．この空間は

$$\mathrm{Sym}^2 3 = \{F(u,v,w) = au^2 + buv + cv^2 + duw + evw + fw^2 \mid a,b,\ldots,f \in K\}$$

と二次形式そのものを考えることもできるが，K が標数 2 でない場合は F に Gram 行列と呼ばれる対称行列

$$M_F \coloneqq \begin{pmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & d & e/2 \\ c/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$$

[*1] 一般の平面二次曲線は quadratic あるいは plane quadratic, 非特異な場合は円錐曲線 conic や conic section と呼ぶという区別もあり得るらしい．

を対応させることで，次数 3 の対称行列の空間と考えることもできる．逆の対応は

$$F(u,v,w) = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} M_F \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

である．群 $\mathrm{GL}_3(K)$ の作用は

$$(gF)(u,v,w) = F((u,v,w)g),$$
$$M_{gF} = gM_F{}^tg$$

で与えられ，相対不変式 $P(F)$ は

$$P(F) = 4\det(M_F)$$

がある (整係数多項式になり, 標数 2 でも定義できている)．すると開軌道は $P(F) \neq 0$ つまり $\mathrm{rank}\, M_F = 3$ で与えられるが，このとき Z_F は非特異 nonsingular な平面二次曲線に対応する．ほかの $K = \overline{K}$ 上の軌道は $\mathrm{rank}\, M_F = 2, 1, 0$ に対応するが，それぞれ以下のように理解できる：

- $\mathrm{rank}\, M_F = 2$: 二直線の和集合．たとえば $F(u,v,w) = uv$ のときは直線 Z_u, Z_v の和集合で，共通零点 $(0:0:1)$ が特異点になっている．
- $\mathrm{rank}\, M_F = 1$: いわゆる二重直線．たとえば $F(u,v,w) = u^2$ のとき，点集合としては直線 $Z_{u^2}(K) = Z_u(K)$ である．スキームで考えると Z_{u^2} と Z_u にあたる空間に違いが出てくる．
- $\mathrm{rank}\, M_F = 0$: $F = 0$ に限られるので，$Z_F(K) = \mathbb{P}^2(K)$ である．

なお，K が標数 2 のときは $\mathrm{Sym}^2\, 3$ は自明でない $\mathrm{GL}_2(K)$ 部分表現を持つなど様子が異なってくるが，$P(F) \neq 0$ で定義される空間が開軌道であること，開軌道の要素は非特異な二次曲線に対応すること，および特異な二次曲線の分類は同じである．

2.4 三元二次形式のペアの空間

さて，本稿の主題である三元二次形式のペアの空間 $2 \otimes \mathrm{Sym}^2\, 3$ を考えよう．この空間は $\mathrm{Sym}^2\, 3 \oplus \mathrm{Sym}^2\, 3$ と思うことができるので，元 $x \in K^2 \otimes \mathrm{Sym}^2\, K^3$ を，

(1) 三元二次形式 $A(u,v,w), B(u,v,w)$ の対 $x = (A, B)$, あるいは

(2) 標数 2 以外なら三次対称行列 M_A, M_B の対 (M_A, M_B)

と考えることができる．代数群 G は $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ であり，$g = (g_2, g_3) \in G(K) = \mathrm{GL}_2(K) \times \mathrm{GL}_3(K)$ の作用は $g_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと

$$gx = \begin{cases} (p(g_3A) + q(g_3B), r(g_3A) + s(g_3B)) & ((1)\text{ の理解}), \\ (pg_3M_A{}^tg_3 + qg_3M_B{}^tg_3, rg_3M_A{}^tg_3 + sg_3M_B{}^tg_3) & ((2)\text{ の理解}) \end{cases}$$

で与えられる．以後 x としては 2 つの解釈を自由に行き来する．

相対不変式についても考えよう．不定元 u, v を用意し，$x = (A, B)$ について

$$f_x(u, v) \coloneqq 4\det(M_Au + M_Bv) \in \mathrm{Sym}^3 2$$

とおく．これは二元三次形式だから，その判別式を取ることで

$$P(x) \coloneqq \mathrm{Disc}\, f_x$$

を定義することができる．P は x の係数たちの整係数 12 次多項式になっており，また次のように相対不変式である：

命題 2.3　指標 $\chi\colon G \to \mathrm{GL}_1$ を $\chi(g) = \chi(g_2, g_3) \coloneqq \det(g_2)^3 \det(g_3)^4$ で定めると，$P(g_3x) = \chi(g)^2 P(x)$ である．

この証明は $\det, \mathrm{Disc}$ の性質による．

2.5　三元二次形式のペアと一般の四点

次に，この空間を幾何的に理解しよう．

いま $x = (A, B) \in V(K)$ を取ったとき，対応する集合 $Z_x(K) \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ を

$$\begin{aligned} Z_x(K) &\coloneqq Z_A(K) \cap Z_B(K) \\ &= \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(K) \mid A(a_0, a_1, a_2) = B(a_0, a_1, a_2) = 0\} \end{aligned}$$

で定義する．$g = (g_2, g_3) \in \mathrm{GL}_2(K) \times \mathrm{GL}_3(K)$ の作用についても，射影直線の場合と同様に，以下のように考えることができる．

- $(1, g_3)$ は $\mathbb{P}^2(K)$ の座標変換として作用する．つまり $Z_{(1,g_3)x}(K) = Z_x(K)g_3^{-1}$ が $\mathrm{Sym}^3 2$ と同様に証明できる．

- 一方 $(g_2, 1)$ の作用だが，$g_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ は可逆なので

$$\begin{cases} (pA + qB)(a_0, a_1, a_2) = pA(a_0, a_1, a_2) + qB(a_0, a_1, a_2) = 0 \\ (rA + sB)(a_0, a_1, a_2) = rA(a_0, a_1, a_2) + sB(a_0, a_1, a_2) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A(a_0, a_1, a_2) = 0 \\ B(a_0, a_1, a_2) = 0 \end{cases}$$

であり，$Z_{(g_2,1)x}(K) = Z_x(K)$ がわかる．

$Z_x(\overline{K})$ はどのような集合だろうか？　例を見てみよう．

例 2.4　$x = (u^2 + v^2 - 2w^2, u^2 + 2v^2 - 3w^2)$ としてみよう．$K = \mathbb{R}$ とし，さらにセル $\mathbb{R}^2 \subsetneq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の部分で考えると，

$$\mathbb{R}^2 \cap Z_x(\mathbb{R}) = \{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \mid a_0^2 + a_1^2 = 2, a_0^2 + 2a_1^2 = 3\} \quad = \{(\pm 1, \pm 1)\}$$

となる．これは図に描いてみると円と楕円が四点で交わっている例であり，$Z_x(\mathbb{C})$ もこの四点由来のものしかないことがわかる．

例 2.5　$w_0 = (A_0 = u(v - w), B_0 = v(u - w))$ とおく．するとそれぞれ階数が 2 の行列に対応しているので，Z_{A_0}, Z_{B_0} は二直線の和集合

$$Z_{A_0}(K) = Z_u(K) \cup Z_{v-w}(K)$$
$$Z_{B_0}(K) = Z_v(K) \cup Z_{u-w}(K)$$

である．その共通零点 $Z_{w_0}(K)$ は直線ごとに分けて考えればよく，直線と直線は一点で交わるので，四点であることが期待できる．実際に計算すると

$$Z_{w_0}(K) = \{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1), (1:1:1)\}$$

と四点集合になる．この四点の集合を W_0 と置くことにする．

ところでこの四点，ただの四点ではない．どの三つを選んでも同一直線上にない，という性質を持っている．この性質を持つ四点の集合 $W \subsetneq \mathbb{P}^2(K)$ を**一般の四点** *generic four points* と呼ぶことにする．一般の四点については，以下のように三重推移性の類似が成立する：

命題 2.6　一般の四点 $W \subsetneq \mathbb{P}^2(K)$ について，ある $g_3 \in \mathrm{GL}_3(K)$ が存在して $Wg_3 = W_0$.

証明は三重推移性の命題と同様である．まず三つの点の座標を

$$P_0 = (a_0 : a_1 : a_2), P_1 = (b_0 : b_1 : b_2), P_2 = (c_0 : c_1 : c_2)$$

とおくと，この（類の代表の）成分を並べた

$$g = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

という行列が可逆であることと，P_0, P_1, P_2 が同一直線上にないことが同値である．このとき g^{-1} は P_0, P_1, P_2 をそれぞれ $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$ に移動する．すると 4 つ目の点 $P_3 g^{-1}$ は，三点が同一直線上にないことを活用すればどの座標もゼロでないことがわかるので，対角行列で $(1:1:1)$ に調節できる．

この命題から次の性質を証明できる．

系 2.7　$Z_x(K)$ が一般の四点なら，ある $g = (g_2, g_3) \in G(K)$ について $gx = w_0$.

証明 実際，直前の命題からある g_3 について $Z_{(1,g_3)x}(K) = Z_{w_0}(K)$ である．すると $(1, g_3)x = (A, B)$ について，A, B は W_0 の四点でゼロになる．三元二次形式 $F(u,v,w) = au^2 + buv + cuw + dv^2 + evw + fw^2$ が W_0 で消える条件をチェックしてみると，

- $F(1,0,0) = 0$ から $a = 0$.
- $F(0,1,0) = 0$ から $d = 0$.
- $F(0,0,1) = 0$ から $f = 0$.
- $F(1,1,1) = 0$ から $b + c + e = 0$.

となって，結局

$$F(u,v,w) = (-c)u(v-w) + (-e)v(u-w)$$

と，w_0 の 2 つの二次形式の線形結合で書けてしまう．$(0:1:1), (1:0:1) \notin Z_{(1,g_3)x}(K)$ から，A, B は K 上一次独立であることもわかり，ある $g_2 \in \mathrm{GL}_2(K)$ について $(g_2, 1)(A, B) = w_0$ であることがわかる．□

この系と次の事実を合わせれば，$2 \otimes \mathrm{Sym}^2 3$ が概均質ベクトル空間であることを幾何的に理解できたことになる．

定理 2.8　$P(x) \neq 0$ なら，$Z_x(\overline{K})$ は一般の四点である．

証明をやや具体的な方法で与えておこう．

証明 K を最初から $\overline{K}$ にしてしまってよい．これまでの $x = (A, B)$ という記号を踏襲する．さらに K の標数が 2 でないとして，対称行列を使って考えることにする．標数 2 でも対応する議論を二次形式で証明できる．

$P(x) = \mathrm{Disc}(f_x)$ だったから，$P(x) \neq 0$ なら $\mathrm{Disc}(f_x) = 0$ は $\mathbb{P}^1(K)$ の三つの相異なる点を定める．適当に $g_2 \in \mathrm{GL}_2(K)$ を使ってこの三点が

$$\{(1:0), (0:1), (1:1)\}$$

であるとしてよい．すると，行列 $M_A, M_B, M_A + M_B$（とそれらの定数倍）が階数 2 以下であり，他の線形結合 $a_0 M_A + a_1 M_B$ は階数 3 である．

ゼロでない M_A の核 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(M_A)$ を選ぶ．万が一 $M_B \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ なら，

$$(a_0 M_A + a_1 M_B)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

となるので，「他の線形結合 $a_0 M_A + a_1 M_B$ は階数 3」に矛盾する．つまり $M_A, M_B, M_A + M_B$ の核はそれぞれ相異なる．

さらに $M_A, M_B, M_A + M_B$ のゼロでない核を $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B, \boldsymbol{v}_{A+B}$ とおく．これらが一次独立であることを示そう．適当に $g_3 \in \mathrm{GL}_3(K)$ で動かして，

$$\boldsymbol{v}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおいてよい．すると行列の形は $a, b \neq 0$ について

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} b & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$$

という表示になる．もし $\boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{v}_A + \beta \boldsymbol{v}_B$ であるなら

$$(M_A + M_B)\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} b\alpha^2 \\ a\beta^2 \\ * \end{pmatrix}$$

であり，$(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ のときは決してゼロベクトルにならない．つまり $\boldsymbol{v}_{A+B}$ は $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$ の一次結合ではないことがわかる．前段落の結果と合わせて，$\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B, \boldsymbol{v}_{A+B}$ は一次独立である．

$\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B, \boldsymbol{v}_{A+B}$ が一次独立であるから，適当に $g_3 \in \mathrm{GL}_3(K)$ で動かして

$$\boldsymbol{v}_A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{A+B} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

であるとしてよい．すると行列の形はさらに絞られて

$$M_A = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&a&0\\0&0&c\end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix}b&0&0\\0&0&0\\0&0&-c\end{pmatrix}$$

となる．さらに対角行列で座標変換すれば，$a = -1, b = c = 1$ と考えてよく，このとき $Z_x(K) = W_0$ である． □

3　$\mathbb{P}^3$ の五点について

ここでは講義で触れなかった，射影空間 $\mathbb{P}^3$ の五点の場合にまつわる幾何学の一部を紹介する．

3.1　射影空間 $\mathbb{P}^3$ と一般の $n+2$ 点

上記の $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2$ の構成は $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ でも同様に $K^{n+1} \setminus \mathbf{0}$ の同値類として構成できる：つまり，$K^{n+1} \setminus \mathbf{0}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下で定義する．ゼロベクトルでないベクトル

$$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n) \in K^{n+1} \setminus \mathbf{0}$$

について，

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} \iff \exists \lambda \in K^*, \lambda a_i = b_i \ (0 \leq i \leq n)$$

で定義する．元 $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^{n+1} \setminus \mathbf{0}$ の同値類を $(a_0 : a_1 : a_2 : \cdots : a_n)$ と書く．K 上の n **次元射影空間** *projective plane* $\mathbb{P}^n(K)$ とは，この同値類全体の集合であるとする．これまた以前と同じように，$\mathbb{P}^n(K)$ には右から $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ が作用する．$P = (a_0 : a_1 : a_2 : \cdots : a_n), g \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ について，Pg は $(a_0, a_1, \ldots, a_n)g$ の類である．

$n+1$ 元 r 次形式 $F=F(u_0,u_1,\dots,u_n)\in \mathrm{Sym}^r K^{n+1}$ について，**超曲面** *hypersurface*[*2]

$$Z_F(K)=\{(a_0:a_1:\cdots:a_n)\in\mathbb{P}^n(K)\mid F(a_0,a_1,\dots,a_n)=0\}$$

が定義される．特に $r=1$ の場合，$Z_F(K)$ は**超平面** *hyperplane* という．

$\mathbb{P}^n(K)$ の部分集合 $W\subsetneq\mathbb{P}^n(K)$ が**一般の** $n+2$ **点** *generic* $n+2$ *points* とは，ここでは「どの $n+1$ 点も同一超平面上に乗らないこと」と定義しよう（他の定義もあり得る）．これは「どの $n+1$ 点の座標を並べて作った $n+1$ 次正方行列も可逆」に同値になる．そして命題 2.6 と同様に，「一般の $n+2$ 点には $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ が推移的に作用する」ことが証明できる．

ところが，$n\geq 3$ の場合，$n+2$ 点と表現の軌道との対応はあまり明らかでない．特に $n\geq 4$ の場合は現在も活発に研究が行われている．以下では具体例を通じて，$n=3$ の場合と概均質ベクトル空間 $4\otimes\bigwedge^2 5$ との対応を紹介しよう．

注意 3.1（[佐野] との関連） なお，この射影空間の構成は数ベクトル空間 K^{n+1} から始まっているが，一般にベクトル空間から出発しても同様の構成ができる．つまり K-ベクトル空間 V について，$v,w\in V$ をゼロベクトルでないとするとき，

$$v\sim w\iff \exists\lambda\in K^*,\lambda v=w$$

として同値関係を導入して，その商集合を考えるのである．

さらにその変種として，数ベクトル空間 K^{n+1} から出発した別の空間を考えることもある．K^{n+1} について、重み $m_0,m_1,\dots,m_n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ というデータを固定する．すると**重み付き射影空間** *weighted projective space* $\mathbb{P}(m_0,m_1,\dots,m_n)$ は，ゼロベクトルでないベクトル

$$\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,a_2,\dots,a_n),\boldsymbol{b}=(b_0,b_1,b_2,\dots,b_n)\in K^{n+1}\setminus\boldsymbol{0}$$

について，

$$\boldsymbol{a}\sim\boldsymbol{b}\iff\exists\lambda\in\overline{K}^*,\lambda^{m_i}a_i=b_i\ (0\leq i\leq n)$$

で定義される $K^{n+1}\setminus\boldsymbol{0}$ 上の同値関係 $\sim$ による商空間である．これらは [佐野] にて登場する．

[*2] $n=3$ の場合は**曲面** *surface* や**平面** *plane* と呼ぶ．

3.2 $\mathbb{P}^3(K)$ 中の一般の五点

我々が考えるのは $n = 3$ の場合である.「一般の 5 点」とは，点集合 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 であって，どの 4 点も同一平面上に乗らないもののことであった. 代表例としては,

$$W_0 \coloneqq \{(1:0:0:0), (0:1:0:0), (0:0:1:0), (0:0:0:1), (1:1:1:1)\}$$

がある．一般の $n+2$ 点については，適切な $g_4 \in \mathrm{GL}_4(K)$ によって $Wg_4 = W_0$ とできる.

いま軌道が何に対応するかわからないので，ひとまず系 2.7 と同様に，W_0 上で消える二次形式 $F(u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathrm{Sym}^2 K^4$ の集合を確認してみよう.

- $F(1,0,0,0) = 0$ から u_0^2 の係数はゼロ.
- 同様に，$F(0,1,0,0) = F(0,0,1,0) = F(0,0,0,1) = 0$ から u_1^2, u_2^2, u_3^2 の係数はゼロである.
- すると残った係数を並べてみれば,

  $$F = a_{01}u_0u_1 + a_{02}u_0u_2 + a_{03}u_0u_3 + a_{12}u_1u_2 + a_{13}u_1u_3 + a_{23}u_2u_3$$

  と書き出せる．最後の条件 $F(1,1,1,1) = 0$ から

  $$a_{01} + a_{02} + a_{03} + a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$$

  である.

すると W_0 で消える二次形式全体は五次元空間をなす．これを $Q(W_0)$ とおこう．この基底としては以下のものがある：

$$\begin{aligned}
Q_0 &= u_1(u_2 - u_3), \\
Q_1 &= u_3(u_2 - u_0), \\
Q_2 &= u_0(u_1 - u_3), \\
Q_3 &= u_2(u_1 - u_0), \\
Q_4 &= (u_1 - u_2)(u_0 - u_3),
\end{aligned}$$

を取ることができる．つまり一般の五点からは，四元二次形式を五個選ぶことができ，その選びかたの任意性は基底の取替え，つまり $\mathrm{GL}_5(K)$ の作用に対応することがわかる.

$n=2$ の場合ではこのように考えて得られる二次形式二つが答えだった．実際，一般の三元二次形式を二つ選べば，一般の四点を定めてしまうからだ．ところが一般の四元二次形式を五つ選んでも，その零点集合は五点にならない．やや極端な場合だが，たとえば

$$u_0^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2$$

という四つを選ぶだけで，共通零点が空集合になってしまう．発見的には，一つ二次形式を追加するごとに一つ次元が下がると期待できるので，三次元の $\mathbb{P}^3$ において十分一般的な四つの二次形式の共通零点は空集合になると期待される．つまり上記の $Q_0, Q_1, \ldots, Q_4$ は何らかの意味で特別な二次形式の五つ組である．

3.3 関係式加群と交代行列

二次形式の組の特別性はいろいろあり得るが，今回は**関係式** *syzygy* があることがわかる．たとえば今の場合，以下のような関係式が成立する：

$$u_0Q_0 - u_1Q_1 - u_2Q_2 + u_3Q_3 = 0.$$

直前に出てきた四つの二次式 $u_0^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2$ ではどうか．$Q_i' = u_i^2$ $(0 \le i \le 3)$ とおいて調べてみると，

$$u_i^2Q_j' - u_j^2Q_i' = 0$$

という関係式は見つかるが，これは言い換えれば $Q_i'Q_j' - Q_j'Q_i' = 0$ ということであり，二次式であれば常に見つけられる関係式である．ほかにも

$$(u_1^2u_2 - u_1u_3^2)Q_0' + (u_2^2u_3 - u_0^2u_2)Q_1' + (u_0u_3^2 - u_1^2u_3)Q_2' + (u_0^2u_1 - u_2^2u_0)Q_3' = 0$$

などのような関係式は見つかるが，上の関係式にさらに多項式をかけて足したものであり，本質的には上の関係式で尽きていることまでわかる（より詳細な意味は後述）．とくに，Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 のときのような一次式をかけて得られる関係式は存在しない．

Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 の間に成り立つ関係式すべてを記述してみよう．そのために記号を準備する．まず $S = K[u_0, u_1, u_2, u_3]$ とおく．$\boldsymbol{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ の**関係式加群** *syzygy module* とは，自由加群 S^5 の部分集合 $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q}) \subseteq S^5$ として，

$$p_0Q_0 + p_1Q_1 + \cdots + p_4Q_4 = 0$$

を満たす $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^5$ 全体として定義される．関係式に多項式をかけても，また関係式同士を足してもまた関係式になるので，この集合 $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q})$ は S^5 の部分加群になる．他の場合，つまり $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n) \in S^n$ についても，関係式加群 $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{F})$ を考えられる．特に関係式加群の関係式加群，その関係式加群というように一連の加群の列を考えることができる．これらを同時に射影分解として表示することもできる（[佐野] にも暗に登場する）．

例 3.2 まず $\boldsymbol{Q}' = (Q'_0, Q'_1, Q'_2, Q'_3)$ の場合の関係式加群 $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q}') \subseteq S^4$ を考えてみよう．上記の考察から，たとえば

$$\begin{aligned}&(u_1^2, -u_0^2, 0, 0), (u_2^2, 0, -u_0^2, 0), (u_3^2, 0, 0, -u_0^2),\\ &(u_1^2u_2 - u_1u_3^2, u_2^2u_3 - u_0^2u_2, u_0u_3^2 - u_1^2u_3, u_0^2u_1 - u_2^2u_0) \in \mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q}')\end{aligned}$$

がわかる．ところが最後のものについては,

$$\begin{aligned}&(u_1^2u_2 - u_1u_3^2, u_2^2u_3 - u_0^2u_2, u_0u_3^2 - u_1^2u_3, u_0^2u_1 - u_2^2u_0) =\\ &u_2(u_1^2, -u_0^2, 0, 0) + u_3(0, u_2^2, -u_1^2, 0) + u_0(0, 0, u_3^2, -u_2^2) + u_1(-u_3^2, 0, 0, u_0^2)\end{aligned}$$

なので,

$$R_{i,j} \coloneqq u_i^2e_j - u_j^2e_i \quad (0 \le i < j \le 3)$$

とすれば $R_{i,j}$ たちの S-線形結合で書けてしまう．実は $R_{i,j}$ たちは $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q}')$ の生成元であることがわかる．これが「本質的には上の関係式で尽きている」の意味である．

例 3.3 今度は本筋の $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q}) \subseteq S^5$ を考えてみる．計算は省略するが，書き出してみると

$$\begin{aligned}R_0 &\coloneqq (0, -u_0 + u_1, u_0 - u_2, u_0 - u_3, -u_0),\\ R_1 &\coloneqq (u_0 - u_1, 0, -u_1 + u_2, u_1 - u_3, u_1),\\ R_2 &\coloneqq (-u_0 + u_2, u_1 - u_2, 0, -u_2 + u_3, u_2),\\ R_3 &\coloneqq (-u_0 + u_3, -u_1 + u_3, u_2 - u_3, 0, -u_3),\\ R_4 &\coloneqq (u_0, -u_1, -u_2, u_3, 0)\end{aligned}$$

が生成元であることがわかる．

いま試みにこれを並べて正方行列で書いてみよう．すると,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -u_0 + u_1 & u_0 - u_2 & u_0 - u_3 & -u_0 \\ u_0 - u_1 & 0 & -u_1 + u_2 & u_1 - u_3 & u_1 \\ -u_0 + u_2 & u_1 - u_2 & 0 & -u_2 + u_3 & u_2 \\ -u_0 + u_3 & -u_1 + u_3 & u_2 - u_3 & 0 & -u_3 \\ u_0 & -u_1 & -u_2 & u_3 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．交代行列だ！　変数はいま u_0, u_1, u_2, u_3 の 4 つがあるから，それぞれの係数を取り出して

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という四枚の五次交代行列が得られたことになる．つまり，$4 \otimes \bigwedge^2 5$ の要素 $\boldsymbol{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ が見つかったわけだ．しかも $0 \leq i \leq 3$ について A_i は i 行か i 列にしか成分が存在せず，成分は各行各列で $1, -1$ がそれぞれ偶数個になっている．

ちなみに，$A_0 + A_1 + A_2 + A_3$ を考えてみると，

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．これが点 $(1:1:1:1)$ に対応する「五番目の」交代行列である．

さらに奇数次の交代行列 A から二次式を復元することもできる．A から第 i 行と第 i 列を取り除いた主小行列 $A^{(i)}$ は交代行列になるが，この**パフィアン** *Pfaffian* を取るという操作で i ごとに二次式が得られ，もとの $\boldsymbol{Q}$ が（定数倍を除いて）復元されるのである．

たとえば今の場合は，A のうち第 1 行・第 1 列を取り除くと

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & -u_1 + u_2 & u_1 - u_3 & u_1 \\ u_1 - u_2 & 0 & -u_2 + u_3 & u_2 \\ -u_1 + u_3 & u_2 - u_3 & 0 & -u_3 \\ -u_1 & -u_2 & u_3 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．このパフィアンは

$$\begin{aligned} \mathrm{Pf} A^{(1)} &= (-u_1 + u_2)(-u_3) - (u_1 - u_3)u_2 + u_1(-u_2 + u_3) \\ &= u_1u_3 - u_2u_3 - u_1u_2 + u_2u_3 - u_1u_2 + u_1u_3 = 2u_1(-u_2 + u_3) = -2Q_0 \end{aligned}$$

となる．同様に計算すると，

$$\begin{aligned}\operatorname{Pf} A^{(2)} &= 2Q_1, \\ \operatorname{Pf} A^{(3)} &= -2Q_2, \\ \operatorname{Pf} A^{(4)} &= 2Q_3, \\ \operatorname{Pf} A^{(5)} &= -2Q_4\end{aligned}$$

であり，もとの基底に戻ってくる！　実際 $\operatorname{Ker} A$ は $\operatorname{Frac}(S) = K(u_0, u_1, u_2, u_3)$ 係数の行列として一次元の核を持ち，

$$\operatorname{Ker} A = K(u_0, u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}$$

であることがわかるのである．

3.4　背景事情

残った問題はいくつかある．A を得るために選んだ $Q_0, Q_1, \ldots, Q_4$ やその関係式 $R_0, R_1, \ldots, R_4$ はどのように選んだのか．またいつでも選ぶことが可能なのか？

これらのうち，存在についてのみコメントをしておく．可換環論における Buchsbaum–Eisenbud の定理によると，Gorenstein である余次元 3 のイデアルは，関係式加群から同様にして奇数次の交代行列を構成できるのである（[BE77]）．今の場合は $\mathbb{P}^3$ 中の一般的な五点の定義イデアルがこの定理の適用範囲にあるために，五次交代行列 A が得られると考えられる．なお，$n \geq 4$ の場合は可換環論の問題としても研究対象であるようだ（たとえば $\mathbb{P}^n$ 中の $n+2$ 点の定義イデアルと n 次環の構造定数の関係については [FR21] を参照）．

また，$4 \otimes \bigwedge^2 5$ の不変式については一切触れなかった．これについては [AFK02] や [KY04] を参照してほしい．

参考文献

[AFK02]　K. Amano, M. Fujigami and T. Kogiso, Construction of irreducible relative invariant of the prehomogeneous vector space $(\mathrm{SL}_5 \times \mathrm{GL}_4, \bigwedge^2(\mathbb{C}^5) \otimes \mathbb{C}^4)$. *Lin. Alg. and its Appl.* **155** (2002), 215–222.

[BE77] D.A. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebraic structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension 3. *Amer. J. Math.* **99** (1977), 447–485.

[FR21] T. Fisher and L. Radičević, Computing structure constants for rings of finite rank from minimal free resolutions. arXiv: 2109.07845.

[KY04] A.C. Kable and A. Yukie, On the space of quadruples of quinary alternating forms. J. Pure and Appl. Alg. **186** (2004), 277–295.

[佐野] 佐野薫，余正則空間と楕円曲線のセルマー群．**本報告集**，2023.

[谷口 1] 谷口隆，例で学ぶ概均質ベクトル空間．**本報告集**，2023.

有理軌道，整軌道の解釈

石塚　裕大（九州大学 IMI）

概要

いくつかの概均質ベクトル空間の体上の軌道，あるいは $\mathbb{Z}$ 上の軌道が代数による自然な解釈を持つことを概説する．これは [鈴木雄], [Thorne], [鈴木美] で扱われるような，体の数え上げを軌道の数え上げに帰着する場面で利用される．また体上の軌道の解釈は [佐野] で取り扱われる楕円曲線の Selmer 群の軌道解釈の雛形ともなっている．

簡単のため，この章では K は完全体とする．前節と同様に $K^2 \otimes K^2 \otimes K^3$ や $K^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 K^3$ などの空間を，K を省略して $2 \otimes 2 \otimes 3$ や $2 \otimes \mathrm{Sym}^2 3$ のように略記することがある．

1　有理軌道の解釈：Wright–Yukie 理論

いくつかの概均質ベクトル空間について，その軌道に射影空間の点集合を対応させ，体 k 上の分離代数と体 k 上の軌道（有理軌道）との間に対応を見出すことができる．これは Wright–Yukie [WY92] を筆頭としたいくつかの論文によって実行された．今節では，このうち代表的なものについて概観する．

1.1　二元三次形式と三次代数

まず [谷口 1, 谷口 2] から次の命題を思い出す．

命題 1.1　次の集合の間に自然な対応がある．

- 体 K 上の三次分離代数の同型類．
- $V(K) = \mathrm{Sym}^3 K^2$ の非退化な元（つまり $P(x) \neq 0$）の部分集合 $V'(K)$ についての $G(K) = \mathrm{GL}_1(K) \times \mathrm{GL}_2(K)$ 軌道．

初等的な証明が [谷口 1] に，ガロアコホモロジーを使った証明が [谷口 2] にある．ここでは後者について簡単に復習しておこう．

1.1.1 三次分離代数とガロアコホモロジー

まず三次分離代数の同型類をガロアコホモロジーで解釈する命題を復習しよう．

命題 1.2 K 上の三次分離代数の同型類は $H^1(K, \mathfrak{S}_3)$ と自然に全単射を持つ．

実際，K 上の三次分離代数 L は $L \otimes_K \overline{K}$ が $K^3 \otimes_K \overline{K} \cong \overline{K}^3$ に同型になるような K 代数だった [谷口 1, 定義 1.4]．この同型を $\rho_L \colon L \otimes_K \overline{K} \to K^3 \otimes_K \overline{K}$ とおくと，

$$c_L(\sigma) = \rho_L^{-1} \rho_L^{\sigma}$$

で定義される写像

$$c_L \colon \Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathrm{Aut}_{\overline{K}\text{-alg}}(\overline{K}^3)$$

は $\mathrm{Aut}_{\overline{K}\text{-alg}}(\overline{K}^3)$ に値を取る 1-コサイクルになる（[谷口 2, §1.4] 参照．1-コサイクルの定義は [谷口 2, 定義 1.5] を参照）．いま [谷口 1, 命題 1.6] によると

$$\mathrm{Aut}_{\overline{K}\text{-alg}}(\overline{K}^3) = \mathrm{Aut}_{K\text{-alg}}(K^3) \cong \mathfrak{S}_3$$

であるから，

$$c_L \in H^1(K, \mathrm{Aut}_{\overline{K}\text{-alg}}(\overline{K}^3)) \cong H^1(K, \mathfrak{S}_3)$$

がわかる．これが全単射を与えるのである [谷口 2, 補題 1.12]．別にこの対応は n 次分離代数でもよい．

1.1.2 非退化軌道とガロアコホモロジー

次に軌道と $H^1(K, \mathfrak{S}_3)$ との対応を見ておこう．写像 $G(\overline{K}) \to V'(\overline{K})$ を $g \mapsto gw_0$ で定める．これは全射であり（V の概均質性），「核」は固定部分群

$$G_{w_0}(\overline{K}) = \{g \in G(\overline{K}) \mid gw_0 = w_0\}$$

である．これから「短完全列」

$$1 \longrightarrow G_{w_0}(\overline{K}) \longrightarrow G(\overline{K}) \longrightarrow V'(\overline{K}) \longrightarrow 1$$

が得られ，「長完全列」

$$\begin{aligned}1 \longrightarrow G_{w_0}(K) \longrightarrow G(K) \longrightarrow V'(K) \\ \longrightarrow H^1(K, G_{w_0}) \longrightarrow H^1(K, G)\end{aligned}$$

ができる．つまり

$$G(K) \setminus V'(K) \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathrm{Ker}(H^1(K, G_{w_0}) \to H^1(K, G))$$

である [谷口 2, 定理 1.11]．ここまでは概均質ベクトル空間での一般論であり，$V'(K)$ の代わりに $G(\overline{K})w_0 \cap V(K)$ を考えることで概均質空間でない場合にも拡張できる．

いま $V = \mathrm{Sym}^3 2, G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ である特殊事情を利用して，より状況を絞り込める：

(1) [谷口 2, 命題 1.6] から，$H^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{1\}$ である．すると

$$H^1(K, G) = H^1(K, \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2) \cong H^1(K, \mathrm{GL}_1) \times H^1(K, \mathrm{GL}_2) = \{1\}.$$

したがって $\mathrm{Ker}(H^1(K, G_{w_0}) \to H^1(K, G)) = H^1(K, G_{w_0})$ となる．

(2) $T \coloneqq \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{GL}(V))$ とおくと，$G_{w_0} \cong \mathfrak{S}_3 \times T$ である．したがって $H^1(K, G_{w_0}) \cong H^1(K, \mathfrak{S}_3) \times H^1(K, T)$ である．

(3) $T = \{(t^{-2}, tI_2) \mid t \in K^*\}$ と特定される（I_2 はサイズ 2 の単位行列）．特に $T \cong \mathrm{GL}_1$ であるから，再び Hilbert 90 から $H^1(K, T) = \{1\}$ である．

これから，$G(K) \backslash V'(K)$ は $H^1(K, \mathfrak{S}_3)$ と自然に全単射を持つ．(2) の $G_{w_0} \cong \mathfrak{S}_3 \times T$ についても少し深入りしておこう．

(2.1) $G_{w_0}(K)$ は $Z_{w_0}(K) = W_0 = \{(1:0), (0:1), (1:1)\}$ に右から作用する．したがって群準同型 $\pi_0 \colon G_{w_0} \to \mathrm{Aut}(W_0) \cong \mathfrak{S}_3$ が誘導される．

(2.2) $\mathrm{Ker}(\pi_0) = T$ である．実際 W_0 の各点を固定するから $g = (g_1, g_2)$ について g_2 はスカラー行列であり，w_0 を固定することから g_1 が決定される．

(2.3) π_0 は分裂する：つまり単射準同型 $\iota_0 \colon \mathrm{Aut}(W_0) \hookrightarrow G_{w_0}(K)$ であって，$\pi_0 \circ \iota_0$ が恒等写像になるものが存在する [Yuk, Lemma 13.15].

(2.4) T は中心 $Z(G)$ に入る．つまり T の各元は G の任意の元と可換である．

これらを合わせると，写像

$$G_{w_0} \to \mathfrak{S}_3 \times T; g \mapsto (\pi_0(g), g\iota_0(\pi_0(g))^{-1})$$

が同型を与えることが以下のようにして（純粋に群論的に）わかる．

- well-defined: π_0 の核が T だから $g\iota_0(\pi_0(g))^{-1}$ は T の要素である．
- 全射：$(s,t) \in \mathfrak{S}_3 \times T$ について $\iota(s)t \in G_{w_0}$ を考えれば良い．
- 群準同型：$g_2\iota_0(\pi_0(g_2))^{-1}$ は T の要素だから G の要素と可換であり，

$$\begin{aligned} g_1\iota_0(\pi_0(g_1))^{-1} \cdot g_2\iota_0(\pi_0(g_2))^{-1} &= g_1 \cdot g_2\iota_0(\pi_0(g_2))^{-1} \cdot \iota_0(\pi_0(g_1))^{-1} \\ &= (g_1g_2) \cdot \iota_0(\pi_0(g_1g_2))^{-1} \end{aligned}$$

  となるので従う．
- 単射性: $\pi_0(g) = 1$ から $g \in T$ であり，このとき $g\iota_0(\pi_0(g))^{-1} = g$ であることから従う．

1.2　三元二次形式のペアと四次代数

さて，この節のメインである次を紹介しよう．

命題 1.3　次の集合の間に自然な対応がある．

- 体 K 上の四次分離代数の同型類.
- $V(K) = K^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 K^3$ の非退化な元（つまり $P(x) \neq 0$）の部分集合 $V'(K)$ についての $G(K) = \mathrm{GL}_2(K) \times \mathrm{GL}_3(K)$ 軌道.

実はこの命題を証明するだけならば，前節のガロアコホモロジーによる抽象的な証明で素早くできてしまう．実際，$H^1(K, \mathfrak{S}_4)$ が四次分離代数の同型類に対応することは命題 1.2 と同様である．軌道側では，特殊事情にあたる部分 (1)∼(3) を一つ一つ証明していけばよい：

(1) Hilbert の定理 90 から，

$$H^1(K, G) = H^1(K, \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3) \cong H^1(K, \mathrm{GL}_2) \times H^1(K, \mathrm{GL}_3) = \{1\}.$$

したがって $\mathrm{Ker}(H^1(K, G_{w_0}) \to H^1(K, G)) = H^1(K, G_{w_0})$ となる．

(2) $T \coloneqq \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{GL}(V))$ とおくと，$G_{w_0} \cong \mathfrak{S}_4 \times T$ である．したがって $H^1(K, G_{w_0}) \cong H^1(K, \mathfrak{S}_4) \times H^1(K, T)$ である．

(3) $T = \{(t^{-3}I_2, tI_3) \mid t \in K^*\}$ と特定される．特に $T \cong \mathrm{GL}_1$ であるから，再び Hilbert 90 から $H^1(K, T) = \{1\}$ である．したがって $H^1(K, G_{w_0}) \cong$

$H^1(K, \mathfrak{S}_4)$.

(2) の $G_{w_0} \cong \mathfrak{S}_4 \times T$ も，二元三次形式とまったく同様に証明できる．(2.1) 群準同型 $\pi_0 \colon G_{w_0} \to \mathrm{Aut}(W_0) \cong \mathfrak{S}_4$ が定まり，(2.2) 核が T に一致し，(2.3) 単射 $\iota_0 \colon \mathrm{Aut}(W_0) \to G_{w_0}$ で $\pi_0 \circ \iota_0$ が恒等射になるものが見つかる [Yuk, Proposition 14.18]．さらに (2.4) T は $Z(G)$ に入ることから，全く同様にして同型

$$G \to \mathfrak{S}_4 \times T; g \mapsto (\pi_0(g), g\iota_0(\pi_0(g))^{-1})$$

が定義できる．

1.2.1　具体的な対応

抽象的にはこれで対応が理解できたが，せっかくなのでより具体的に理解してみよう．

例 1.4　K 上の四次方程式

$$f(u) \coloneqq u^4 + bu^3 + cu^2 + du + e = 0 \ (b, c, d, e \in K)$$

を考える．重根がないことは仮定するが，別に既約性は仮定しない．このとき

$$R_f \coloneqq K[u]/(u^4 + bu^3 + cu^2 + du + e)$$

で四次分離代数ができる（K は完全体であることに注意）．

一方，四次多項式 f を次のように分解できる：

$$\begin{cases} v - u^2 = 0, \\ v^2 + buv + cv + du + e = 0. \end{cases}$$

これらは二元二次の多項式なので，斉次化をすると三元二次形式のペアができる：

$$\begin{cases} A_f(u, v, w) = vw - u^2, \\ B_f(u, v, w) = v^2 + buv + cvw + duw + ew^2. \end{cases}$$

このとき，$x_f = (A_f, B_f)$ について対応する四次分離代数は R_f である．なお $Z_x(\overline{K})$ は，$f(u) = 0$ の根 u_i $(1 \leq i \leq 4)$ について $P_i = (u_i : u_i^2 : 1)$ と記述される．

この対応はモニックな二元三次形式 $x(u, v) = u^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3$ について，対応する分離代数が $K[u]/(x(u, 1))$ で与えられることと対応している．

1.2.2 三次レゾルベント体

上の例を深掘りしてみよう．四次多項式 f から定まる $x_f = (A_f, B_f)$ について，$f_{x_f}(u,v) = 4\det(uM_A + vM_B)$ によって二元三次形式が定義されたことを思い出そう．二元三次形式は三次分離代数に対応するはずだが，この三次分離代数と，四次分離代数 R_f の関係はなにかあるだろうか．

簡単のため，f を K 上で既約な多項式としよう．すると R_f は K の四次拡大体になり，f の根 $\alpha \in \overline{K}$ について $K(\alpha)$ に同型になる．α の共役を $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ としたとき，

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_0\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3,\\ \beta_2 &= \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3,\\ \beta_3 &= \alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\end{aligned}$$

を根とする三次多項式

$$c_f(u) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)$$

は K 上で定義される．この方程式 c_f を f の**三次レゾルベント** *cubic resolvent* といい，対応する三次分離代数 $C_f = K[u]/(c_f(u))$ が f_{x_f} にも対応することがわかる．$K(\alpha_0)$ の Galois 閉包 $K(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ が K の $\mathfrak{S}_4$-拡大なら，$K = K(\beta_1)$ は D_8-不変部分体に対応する[*1]．

幾何的に見てみよう．$f_{x_f}(u,v)$ の自明でない根 $(s,t) \neq (0,0)$ を取ると，三元二次形式 $F = sA_f + tB_f$ は対応する行列の階数が下がる．前章 [石塚] でも事実として述べたように，行列の階数は 2 までしか下がらず，対応する二次曲線 $Z_F(\overline{K})$ は二本の直線の和集合になる．

$$Z_{x_f}(\overline{K}) = \{P_i = (\alpha_i : \alpha_i^2 : 1) \mid 0 \leq i \leq 3\}$$

であることを思い出すと，$Z_{x_f}(\overline{K})$ を通る二本の直線の和集合は，

$$\begin{aligned}C_1 &= (P_0, P_1 \text{ を通る直線}) \cup (P_2, P_3 \text{ を通る直線}),\\ C_2 &= (P_0, P_2 \text{ を通る直線}) \cup (P_1, P_3 \text{ を通る直線}),\\ C_3 &= (P_0, P_3 \text{ を通る直線}) \cup (P_1, P_2 \text{ を通る直線})\end{aligned}$$

---

*1 より一般の設定で，レゾルベントを考えることもできる（[SM85]）．f の根たちの多項式 $\beta = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ を取り，Galois 群 G での固定部分群を H とおく．$\sigma \in G/H$ についての $X - \sigma(\beta)$ を掛けると，基礎体 K 係数の多項式が得られる．これがレゾルベント $R_{f,F}(X)$ である．なお，$K(\beta)$ は一般には H-不変部分体になるとは限らない．

の 3 つあるが，C_1, C_2, C_3 がそれぞれ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ に対応するわけである．

なお，f が既約であるとき，c_f がいつ既約になるかも決定できる．$K(\alpha)$ の Galois 閉包 $K(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ について，$\mathrm{Gal}(K(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)/K)$ が四次対称群 $\mathfrak{S}_4$ もしくは交代群 $\mathfrak{A}_4$ なら三次レゾルベント c_f は既約になり，それ以外は c_f は既約にならないことがわかる．R_x が四次拡大体に，かつ c_f が既約な三次多項式になる場合は**強既約** *strongly irreducible* と呼ばれ，[鈴木雄] で扱う対象になる．

1.3 Wright–Yukie の理論から

Wright–Yukie [WY92] では，いくつかの概均質ベクトル空間の開軌道に入る元 $x \in V'(K)$ について，点の集合 $Z_x \subseteq \mathbb{P}^n$ を対応させるなどして，分離代数との対応を論じている．いくつかの例を見てみよう．

例 1.5（[谷口 1，§3.1]） K の標数は 2 でないとする．$V = K, G = \mathrm{GL}_1$ とし，$\lambda \cdot x = \lambda^2 x$ で作用を定める．すると，$G(K) \setminus V'(K)$ は二次分離代数の同型類と対応する．

例 1.6（[WY92, §2]） $V = 4 \otimes \bigwedge^2 5, G = \mathrm{GL}_4 \times \mathrm{GL}_5$ とする．これは五元二次交代形式の四つ組，あるいは五次交代行列の四つ組と考えられる．G の作用は $2 \otimes \mathrm{Sym}^2 3$ の場合と同様に入れると，概均質ベクトル空間になる．このとき $G(K) \setminus V'(K)$ は五次分離代数の同型類と対応する．この場合には，Z_x として $\mathbb{P}^3$ の五点を対応させる．

例 1.7（[谷口 1，§3.3]） すでに見た内容ではあるが，異なる表現が同じ分離代数をパラメータ付けしていることがある．$V = \mathrm{Sym}^2 2, G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ とすれば，$G(K) \setminus V'(K)$ は二次分離代数の同型類と対応する．Z_x としては，二元二次形式 $x(u, v)$ の零点集合を対応させる．これは $\overline{K}$ 上では二点になる．

例 1.8（[WY92, §3]） 三元二次形式の対 $x \in 2 \otimes \mathrm{Sym}^2 3$ について $f_x \in \mathrm{Sym}^3 2$ を考えることが，幾何的にも代数的にも意味を持つことをこれまでに紹介した．この写像は $g = (g_2, g_3) \in \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ を $g' = (\det(g_3)^2, g_2) \in \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ に送ることで，$f_{gx} = g' f_x$ となり，「同変」な写像になっている．このような表現の間の同変な写像はほかにもある．

$V = 2 \otimes 2 \otimes 2, G = \mathrm{GL}_2^3$ とする．

$$K^2 \otimes K^2 \otimes K^2 = (K^2 \otimes K^2) \oplus (K^2 \otimes K^2)$$

であるから，$V(K)$ の要素は 2×2 の行列 2 つ組 $x=(M_1,M_2)$ と思うことができる．すると，$f_x(u,v)=\det(M_1u+M_2v)$ は二元二次形式であり，$g=(g_1,g_2,g_3)\in G(K)$ について $g'=(\det g_2\det g_3,g_1)\in \mathrm{GL}_1(K)\times\mathrm{GL}_2(K)$ とすると，$f_{gx}=g'f_x$ である．

ただし，この場合 $G(K)\setminus V'(K)$ としては同じ二次分離代数の同型類を対応させるので，軌道を代数で解釈すると恒等写像になってしまう．

例 1.9（**[WY92, §3]**） $V=2\otimes 3\otimes 3, G=\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_3^2$ とする．$V(K)$ の要素は 3×3 の行列 2 つ組 $x=(M_1,M_2)$ と思うことができる．すると，$f_x(u,v)=\det(M_1u+M_2v)\in\mathrm{Sym}^3 2$ である．

この場合も，$G(K)\setminus V'(K)$ としては同じ三次分離代数の同型類を対応させる．

別の論文に目を向ければ，K 上の四元数環や八元数環の同型類と対応する軌道が取り扱われている．前者は [Yuk, Section 11], 後者については [Yuk, Section 20] および [WYZ00] を参照のこと．

2　整軌道の解釈：高次合成則

Wright–Yukie 理論は分離代数と有理軌道との対応であった．これと対比すると，Bhargava による高次合成則は n 次環と整数上の軌道（整軌道）との対応にしたものと考えられる．ポイントはレゾルベント構造と，極大性が局所条件であることである．この節のより詳細な解説は [谷口 11] を参照のこと．

2.1　n 次環と基本判別式

まず n 次環の定義から始めよう．これは n 次代数の整数環類似になっている．

定義 2.1　$n\geq 2$ について，可換環 R が n **次環** *n-ic ring* とは，アーベル群として $R\cong\mathbb{Z}^n$ であることである．

例 2.2　いくつかの例を挙げておく．

- $R=\mathbb{Z}^n,\mathbb{Z}[x]/(x^n)$ は n 次環である．
- $K/\mathbb{Q}$ を n 次拡大とすると，整環 $\mathcal{O}\subseteq K$ は n 次環である．
- R,S を r,s 次環とすれば $R\times S$ は $r+s$ 次環である．また，$n\geq 1$ について $R_n=\mathbb{Z}+nR$ も r 次環となる．

たとえば $R=\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ は二次環．その部分環 $R_2=\mathbb{Z}[2\sqrt{2}]$ は整環で，やはり二次環．その直積 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\times\mathbb{Z}[2\sqrt{2}]$ は四次環である．

より一般に，R_0 を可換環，R を R_0 代数とするとき，R が n 次の R 代数とは，R_0 加群として $R\cong R_0^n$ であることとする．R_0 が体 K のときは，K 上の n 次分離代数は n 次 K 代数であるが，逆は成立しない．

n 次環で分離代数にあたるものを定義するため，跡写像 $\mathrm{Tr}=\mathrm{Tr}_{R/\mathbb{Z}}\colon R\to\mathbb{Z}$ を考えよう．これは $r\in R$ について，$\times r\colon R\to R$ を n 次行列表示したときのトレースのことである．

定義 2.3　R を n 次環，$(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ を $\mathbb{Z}$ 基底とする．R の**判別式** *discriminant* を，$\mathrm{Disc}(R)\coloneqq\det(\mathrm{Tr}(\alpha_i\alpha_j))_{0\le i,j\le n-1}$ で定義する．

判別式は R の $\mathbb{Z}$ 基底の取り方に依存しない．これは

$$(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})=(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1})g\ (g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}))$$

と取り替えたとき，

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{Tr}(\beta_i\beta_j))_{0\le i,j\le n-1}&=\det\left({}^tg\det(\mathrm{Tr}(\alpha_i\alpha_j))_{0\le i,j\le n-1}g\right)\\&=\det(g)^2\det(\mathrm{Tr}(\alpha_i\alpha_j))_{0\le i,j\le n-1}\end{aligned}$$

となるが，$g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ について $\det(g)^2=1$ だからである．なお一般の R_0 上では，判別式は R_0^{*2} 倍を除いてのみ定義される．

例 2.4　先に挙げた例のいくつかで見てみる．

- $\mathrm{Disc}(\mathbb{Z}^n)=1,\mathrm{Disc}(\mathbb{Z}[x]/(x^n))=0$.
- n 次拡大 $K/\mathbb{Q}$ の整数環 $\mathcal{O}_K\subseteq K$ については $\mathrm{Disc}(\mathcal{O}_K)$ が K の判別式 $\mathrm{Disc}(K)$ の定義であった．
- $\mathrm{Disc}(R\times S)=\mathrm{Disc}(R)\,\mathrm{Disc}(S)$.
- R の $\mathbb{Z}$ 基底を $\omega_0=1,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1}$ とすると（命題 2.5 参照），$R_k=\mathbb{Z}+kR$ の $\mathbb{Z}$ 基底は $\omega_0=1,k\omega_1,k\omega_2,\ldots,k\omega_{n-1}$ である．すると $\mathrm{Disc}(R_k)=k^{2(n-1)}\,\mathrm{Disc}(R)$ である．

$\mathrm{Disc}(R)\neq0$ であるような n 次環を非退化 nondegenerate な n 次環と呼ぶ．これは分離代数の整数版である．

2.1.1　小さな次数の環の分類

つぎに $n=1,2$ の場合を調べておこう．そのために次の補題を用意しておく．

命題 2.5（[谷口 11, 補題 2.1]）　n 次環 R の $\mathbb{Z}$ 基底の一つとして，R の単位元 1_R を取ることができる．つまり $R/\mathbb{Z}\cdot 1_R$ は自由加群.

証明　もし $r\in R$ と $n\geq 2$ で $nr=1_R$ となるものが見つかると，r で生成される部分環 $\mathbb{Z}[r]\subseteq R$ は $\mathbb{Z}[1/n]$ に同型で，有限生成でない $\mathbb{Z}$ 加群になる．これは Noether 環の有限生成加群の部分加群が有限生成であることに矛盾する．　□

$\boldsymbol{n=1:}$ $R=\mathbb{Z}1_R$ は $\mathbb{Z}$ に標準的に同型になる．

$\boldsymbol{n=2:}$ $R=\mathbb{Z}1_R+\mathbb{Z}\tau$ とおく．$\tau^2=a\tau+b$ と表示できるが, τ の代わりに $\tau-m$ を考えることで，$a=0,1$ としてよい．このような m の取り方は一つしかない．

(1) $a=0$ のとき：$R\cong\mathbb{Z}[u]/(u^2-b)$ で，$\mathrm{Disc}(R)=4b$.

(2) $a=1$ のとき：$R\cong\mathbb{Z}[u]/(u^2-u-b)$ で，$\mathrm{Disc}(R)=4b+1$.

すると，二次環 R から $\mathrm{Disc}(R)$ を与える写像は，同型類からの全単射であることがわかる．

命題 2.6　次の対象の間に，自然な全単射が存在する：

- 二次環の同型類.
- $d\in\mathbb{Z}$ であって，$d\equiv 0,1 \pmod 4$ であるようなもの.

注意 2.7　なお，R の $\mathbb{Z}$-基底 $1_R,\tau'$ であって $\tau'^2=a'\tau'+b'$ $(a'=0,1)$ を満たすものは τ のほかに $a-\tau$ が存在する．$\tau, a-\tau$ は同じ方程式を満たすので，$\tau\mapsto a-\tau$ は 2 次環の自己同型 $R\to R$ を誘導する．

この自己同型の存在は少し厄介なので，$\mathbb{Z}$ 加群としての同型 $\iota\colon R/\mathbb{Z}1_R\cong\mathbb{Z}\tau\xrightarrow{\cong}\mathbb{Z}$ のデータを加えた (S,ι) の組を考えることがある（向き付き二次環 oriented quadratic ring と呼ぶ)．詳しくは [谷口 11], [Bha04a] 参照.

2.2　Levi–Delone–Faddeev 対応

さて，いよいよ本論の一つである次の対応を紹介しよう．

定理 2.8（Levi [Lev14], Delone–Faddeev [DF64], ...） 次の対象の間に，自然な全単射が存在する：

- 三次環の同型類.
- 軌道の集合 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{Sym}^3 \mathbb{Z}^2$.

ただし，$g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ は f に

$$(gf)(u,v) = \frac{1}{\det g} f(pu + rv, qu + sv)$$

で作用する.

この構成のあらすじを紹介する．三次環 R の $\mathbb{Z}$-基底 $1_R, \omega, \theta$ を取る．このとき適当な $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ について ω, θ を $\omega - m_1, \theta - m_2$ に取り替えると，$\omega\theta \in \mathbb{Z}1_R$ としてよい．この操作（正規化）は二次環において τ を $\tau - m$ に取り替えた操作に対応する.

するとある $a, b, c, d, k, \ell, m \in \mathbb{Z}$ を用いて次のように環構造を記述できる：

$$\begin{cases} \omega\theta = k, \\ \omega^2 = \ell - b\omega + a\theta, \\ \theta^2 = m - d\omega + c\theta. \end{cases}$$

種明かしをすると，この場合には $au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3$ を対応させるのである. k, ℓ, m が決まらないように見えるが，結合法則によって $\omega^2 \cdot \theta = \omega \cdot \omega\theta, \omega \cdot \theta^2 = \omega\theta \cdot \theta$ であり，この係数を比較すると

$$k = -ad,\ \ell = -ac,\ m = -bd$$

が従う*2．ω, θ の取替が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 作用に対応する.

なお，有理軌道と比べて代数群 $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ と作用が変わってしまったように見えるが，$(g_1, g_2) \in \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ の作用は今回の作用の $g_1 \det(g_2) I_2 \cdot g_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ の作用に一致するので，軌道自体は一致している.

*2 この 1_R の係数がほかの係数から一意的に決定される現象は $n \geq 4$ についての n 次環でも成り立つ ([KY04, Lemma 2]).

2.3 四次環の高次合成則：レゾルベント構造

四次環に移ろう．このまま四次環の同型類が $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^3$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ 軌道に対応すると言いたいところだが，それでは足りないのである．

前節の四次分離代数の場合，三元二次形式のペア $x = (A, B) \in K^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 K^3$ から二元三次形式 $f_x(u, v) = 4\det(M_A u + M_B v) \in \mathrm{Sym}^3 K^2$ を構成でき，それが「三次レゾルベント代数」とでも呼ぶべき三次分離代数に対応していた．Bhargava [Bha04c] によれば，この三次レゾルベント代数の整数版である三次レゾルベント環を導入することが必要だったのである．

2.3.1 形式 Galois 閉包

四次分離代数が $\mathfrak{S}_4$ を Galois 群に持つとき，三次レゾルベントを考えるに当たっては，まず Galois 閉包が活躍していた．そこで Galois 閉包の形式化を考える．

定義 2.9（[Bha04c], cf. [BSat14]） n 次環 R の形式 Galois 閉包 formal Galois closure とは，次のようにして構成される環 $\overline{R}$ である．

(1) n^n 次環 $R^{\otimes n}$ を考え，$r \in R$ と $1 \leq i \leq n$ について

$$\sigma_i(r) = 1_R \otimes 1_R \otimes \cdots \otimes \overset{i}{\hat{r}} \otimes \dots 1_R$$

とおく．これは環準同型 $R \to R^{\otimes n}$ を定める．

(2) n^n 次環 $R^{\otimes n}$ のイデアルで，$r \in R$ について

$$\sigma_1(r) + \sigma_2(r) + \cdots + \sigma_n(r) - \mathrm{Tr}(r) 1_R^{\otimes n}$$

で生成されるものを I_R とおく．

(3) ある整数 $m \geq 2$ について $mr \in I_R$ となるような $r \in R^{\otimes n}$ 全体を J_R とおく．これもイデアルである．

(4) $\overline{R} \coloneqq R^{\otimes n}/J_R$ とする．

大雑把に言うと，$r \in R$ について $r^n - a_1 r^{n-1} + \cdots \pm a_n = 0$ となるなら，$\sigma_1(r), \ldots, \sigma_n(r)$ たちの k 次対称式が a_k となるような環である．また $\sigma_i(r)$ の像たちは，$\overline{R}$ における「r の共役」にあたる．$R^{\otimes n}$ には成分の入れ替えで $\mathfrak{S}_n$ が作用し，

I_R, J_R はその作用で不変であるから，$\overline{R}$ についても $\mathfrak{S}_n$ が作用することになる．これが Galois 群の代わりになる．そして R が非退化なら，$\overline{R}$ は $n!$ 次環になる．

注意 2.10（[BSat14]） 退化している場合は状況が異なってくる．実際 $n=4$ の場合で $R=\mathbb{Z}[x,y,z]/(x^2,y^2,z^2,xy,yz,zx)$ とおくと，$\overline{R}$ は 32 次環になると証明されている [BSat14, §9]．このことの応用として，J_R で割る今回の定義では，形式 Galois 閉包の構成が底変換と可換でないことがわかる [BSat14, Remark 7]．したがってレゾルベント環の定義は別の定義が必要になる [Bha04c, §3.9]．

[BSat14] では別の定義を採用している．この場合は底変換と可換だが，$\overline{R}$ には torsion が入ってきて，一般には m 次環にならない．この点は鈴木雄太氏にご指摘いただいた．

2.3.2 三次レゾルベント環

三次レゾルベント環では，α について $\beta=\alpha_0\alpha_1+\alpha_2\alpha_3$ のような元を考えることが重要だった．いま Galois 閉包にあたる環と R の元の共役ができたので，形式的に真似して写像を構成しよう．

非退化な四次環 Q について，**三次レゾルベント写像** *cubic resolvent map* $\widetilde{\phi}_{4,3}\colon Q\to\overline{Q}$ を次で定義する：

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_{4,3}(\alpha)&=\sigma_1(\alpha)\sigma_2(\alpha)+\sigma_3(\alpha)\sigma_4(\alpha)\\&=\alpha\otimes\alpha\otimes 1_R\otimes 1_R+1_R\otimes 1_R\otimes\alpha\otimes\alpha.\end{aligned}$$

注意として，これは R 加群の準同型ではなく，いわゆる二次写像になっている．また像は $D_4=\langle(12),(34),(13)(24)\rangle\subsetneq\mathfrak{S}_4$ について不変であり，したがって $\overline{Q}^{D_4}$ に属する．

次に三次不変環 cubic invariant ring $R^{\mathrm{inv}}(Q)$ を，$\mathbb{Z}$ 上 $\mathrm{Im}(\widetilde{\phi}_{4,3}(Q))$ で生成される $\overline{Q}$ の部分環とする．非自明なことだが，これは三次環になる．ところが，一般には $\mathrm{Disc}(R^{\mathrm{inv}}(Q))\neq\mathrm{Disc}(Q)$ である．形式のレベルでは $\mathrm{Disc}(A,B)=\mathrm{Disc}(f_{A,B})$ であるにも関わらずだ．したがって $R^{\mathrm{inv}}(Q)$ ではない環を対応させる必要がある．そこで，最終的な定義は以下のようになる：

定義 2.11（[Bha04c, Definition 8]） 非退化な四次環 Q の**三次レゾルベント環** *cubic resolvent ring* とは，三次環 $C\subseteq\overline{Q}^{D_4}\otimes\mathbb{Q}$ であって，$C\supseteq R^{\mathrm{inv}}(Q)$ となり，なおかつ $\mathrm{Disc}(C)=\mathrm{Disc}(Q)$ となるもののことである．

つまり $\mathrm{Disc}(Q)=\mathrm{Disc}(C)$ であって，三次レゾルベント写像 $\widetilde{\phi}_{4,3}$ が $Q\to C$ という写像として定義できるということである（この定義は非退化の場合のみ）．この定義を導入すると，めでたく軌道との対応が構成できる．

定理 2.12（[Bha04c, Theorem 1]） 次の集合の間に，判別式を保つ全単射が存在する：

- 非退化な四次環 Q, 三次環 C および三次レゾルベント写像 $\widetilde{\phi}_{4,3}:Q\to C$ の組 $(Q,C,\widetilde{\phi}_{4,3})$ の同型類.
- 相対不変式 P が消えない軌道の集合 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\times\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})\setminus(\mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}^2\,\mathbb{Z}^3)'$.

片方の構成だけを具体的に見ておこう．$\widetilde{\phi}_{4,3}(r+m)$ を計算してみると，

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_{4,3}(r+m)&=(r+m)\otimes(r+m)\otimes1\otimes1+1\otimes1\otimes(r+m)\otimes(r+m)\\&=r\otimes r\otimes1\otimes1+1\otimes1\otimes r\otimes r+m(\sigma_1(r)+\sigma_2(r)+\sigma_3(r)+\sigma_4(r))+2m^2\\&\equiv\widetilde{\phi}_{4,3}(r)+m\,\mathrm{Tr}(r)+2m^2\end{aligned}$$

となるため，$C/\mathbb{Z}1_C$ の類は変わらない．したがって $\widetilde{\phi}_{4,3}$ は $\phi_{4,3}\colon Q/\mathbb{Z}1_Q\to C/\mathbb{Z}1_C$ を誘導するが，$Q/\mathbb{Z}1_Q\cong\mathbb{Z}^3, C/\mathbb{Z}1_C\cong\mathbb{Z}^2$ から，この $\phi_{4,3}$ が三元二次形式のペアとして表示できるのである．また退化した場合にも，「Disc が四次環 Q と一致して，二次写像 $\phi_{4,3}\colon Q/\mathbb{Z}1_Q\to C/\mathbb{Z}1_C$ が定義できる三次環 C」とレゾルベント環の定義を取り替えることで拡張できる．詳細は元論文 [Bha04c] を参照してほしい．

2.3.3 三次レゾルベント環の個数

ところで，上のように定義すると，与えられた四次環について三次レゾルベント環が一つあるかどうかもわからないが，実際には必ず一つ以上はあることがわかる．その前に用語を一つ定義する．

R を非退化な n 次環としたとき，その内容 content を

$$\mathrm{ct}(R):=\max_{m\in\mathbb{Z}}(\exists R':n\text{ 次環}, R=\mathbb{Z}+mR')$$

として定義する．

この定義は見た目ほど難しいものではない．R' の整基底を $1_{R'}=1_R,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ とすると，$R=\mathbb{Z}+mR'$ の整基底は $1_{R'}=1_R,m\alpha_1,\ldots,m\alpha_{n-1}$ である．R' の構造

定数 $c_{i,j}^k$ を
$$\alpha_i\alpha_j = c_{i,j}^0 + \sum_{1\le k\le n-1} c_{i,j}^k \alpha_k$$
とすると，R の構造定数は
$$(m\alpha_i)(m\alpha_j) = m^2 c_{i,j}^0 + \sum_{1\le k\le n-1} m c_{i,j}^k (m\alpha_k)$$
からすべて m の倍数になる．逆に R の構造定数たちがすべて m の倍数なら，1_R 以外の基底を $1/m$ 倍して，$R = \mathbb{Z} + mR'$ となる環 R' を構成できる．したがって，$\mathrm{ct}(Q)$ は構造定数の最大公約数である．

事実 2.13（[Bha04c, Corollary 4]） 非退化な四次環 Q について，その三次レゾルベント環は $\sigma_1(\mathrm{ct}(Q)) = \sum_{d|\mathrm{ct}(Q)} d$ 個だけ存在する．特に，一つ以上は三次レゾルベント環が存在する．

また，$\mathrm{ct}(Q) = 1$ のときは $R^{\mathrm{inv}}(Q)$ が唯一の三次レゾルベント環になることが証明されている [Bha04c, Corollary 18].

2.3.4 極大性

関連する概念である極大性について考えておく．n 次環 R について，別の n 次環 R' で $R' \supsetneq R$ となるものが見つからないとき，R は**極大** *maximal* であるという．

例 2.14 n 次環 R について $R_m = \mathbb{Z} + mR$ とすると $m \ge 2$ なら $R \supsetneq R_m$ である．したがって $\mathrm{ct}(R) > 1$ であれば R は極大ではない．極大なら $\mathrm{ct}(R) = 1$ である．

例 2.15 n 次体 $K/\mathbb{Q}$ について，その整数環 $\mathcal{O}_K$ は極大である．このことと前小小節の結果を合わせると，$\mathcal{O}_K$ の三次レゾルベント環は $R^{\mathrm{inv}}(\mathcal{O}_K)$ 唯一に定まることがわかる．

ところで，n 次 $\mathbb{Z}_p$ 代数 R についても類似の条件を考えられる．別の n 次 $\mathbb{Z}_p$ 代数 R' で $R' \supsetneq R$ となるものが見つからないとき，R は n 次 $\mathbb{Z}_p$ 代数として極大 maximal であるという．そして n 次環 R について，$R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ が n 次 $\mathbb{Z}_p$ 代数として極大であるとき，R は p **で極大** *maximal at p* であるという．

事実として，以下がわかる：

- n 次環 R が極大であることは，すべての素数 p について p で極大であることと同値.
- 四次環 R が p で極大であることは，対応する点 $x \in \mathbb{Z}^2 \otimes \operatorname{Sym}^2 \mathbb{Z}^3$ の mod p^2 の合同条件で定義される [Bha04c, §4].
- 非退化な n 次環 R が極大なら，R は整数環の直積である.

特に，強既約な $x \in \mathbb{Z}^2 \otimes \operatorname{Sym}^2 \mathbb{Z}^3$ の軌道であって，上記の mod p^2 の合同条件を満たすものを数えることは，Galois 群が $\mathfrak{S}_4$ になる四次体を数えることに対応することがわかる.

2.4 その他の高次合成則

Wright–Yukie 理論のときのように，ほかのいくつかの表現についてその整軌道の解釈が知られている.

例 2.16（[Bha08]） $V(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^4 \otimes \bigwedge^2 \mathbb{Z}^5, G(\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ とすると，次の 2 つの集合の間に，判別式を保つ全単射が存在する：

- 五次環 Q，六次レゾルベント環 S と六次レゾルベント写像 $\widetilde{\phi}_{5,6} \colon Q \to C$ の同型類.
- 整軌道の集合 $G(\mathbb{Z}) \setminus V(\mathbb{Z})$.

この対応は五次体の数え上げに用いられている.

例 2.17（[Bha04b]） $V(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^3, G(\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})^2$ とする．このとき次の 2 つの集合の間に，判別式を保つ全単射が存在する：

- 三次環 C とその “分数イデアル”I, I' の三つ組 (C, I, I') で，$II' \subseteq C, N(I)N(I') = 1$ を満たすものの同値類.
- 整軌道の集合 $G(\mathbb{Z}) \setminus V(\mathbb{Z})$.

これを利用すると，三次体のイデアル類群を軌道として解釈できる．また，前節で考えた同変な写像 $x = (M_1, M_2) \mapsto f_x(u, v) = \det(M_1 u + M_2 v)$ について代数側で解釈すると，(C, I, I') から C だけを抽出する写像になっている．有理軌道では見られなかった現象である.

なおこの三次環の場合の類似として，$\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ の軌道についても「二次環＋特定の条件を満たす分数イデアル三つ」の同値類という解釈が見つかるほか，$\mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^2$ の軌道も「二次環＋分数イデアル」の同値類という解釈が見つかる [Bha04a]．特に後者は退化した環にも拡張できるという意味で，いわゆる Gauss の合成則の拡張になっている．

しかし注 2.7 で見た「向き付けられた二次環」を考える必要が出たり，「向き付きのイデアル」や上記の同値関係を定義したりと，定義すべき内容が非常に多くなってしまうので，ここでは割愛する．

参考文献

[Bha04a] M. Bhargava, Higher composition laws I: A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations. *Ann. Math.* **158** (2004), 217–250.

[Bha04b] M. Bhargava, Higher composition laws II: On cubic analogues of Gauss composition. *Ann. Math.* **159** (2004), 865–886.

[Bha04c] M. Bhargava, Higher composition laws III: The parametrization of quartic rings. *Ann. Math.* **159** (2004), 1329–1360.

[Bha08] M. Bhargava, Higher composition laws IV: The parametrization of quintic rings. *Ann. Math.* **167** (2008), 53–94.

[BSat14] M. Bhargava and M. Satriano, On a notion of “Galois closure” for extensions of rings. *J. Eur. Math. Soc.* **16** (2014), no.9, 1881–1913.

[DF64] B. N. Delone and D. K. Faddeev, *The theory of irrationalities of the third degree*, vol.10, American Mathematical Society, 1964.

[KY04] A. C. Kable and A. Yukie, A construction of quintic rings, *Nagoya Math. J.* **173** (2004), 163–203.

[Lev14] F. Levi, Kubische zahlkörper und binäre kubische formen klassen, Ber. S̈achs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Naturwiss **66**(1914), 26–37.

[SM85] L. Soicher and J. McKay, Computing Galois Groups over the Rationals, J. Number Th. **20** (1985) 273–281.

[WY92] D. Wright and A. Yukie, *Prehomogeneous vector spaces and field extensions*, Inv. Math. **110** (1992), 283–314.

[WYZ00] D. Witte, A. Yukie and R. Zierau, Prehomogeneous vector spaces and Ergodic theory II, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 1687–1708.

[Yuk] A. Yukie, Rational orbit decomposition of prehomogeneous vector spaces. Available from https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~yukie/.

[石塚] 石塚裕大，三元二次形式のペアと射影空間の幾何．**本報告集**，2023.

[佐野] 佐野薫，余正則空間と楕円曲線のセルマー群．**本報告集**，2023.

[鈴木美] 鈴木美裕，保型形式付き概均質ゼータ関数．**本報告集**，2023.

[鈴木雄] 鈴木雄太，整数軌道の数え上げ：数の幾何と平均法．**本報告集**，2023.

[谷口 11] 谷口隆，高次合成則入門．**数理解析研究所講究録別冊 B25** (2011), 211–253.

[谷口 1] 谷口隆，例で学ぶ概均質ベクトル空間．**本報告集**，2023.

[谷口 2] 谷口隆，本論のための準備．**本報告集**，2023.

[Thorne] F. Thorne，Counting integral orbits：Zeta function method．**本報告集**，2023.

概均質ゼータ関数の関数等式の一般化

佐藤　文広 (立教大学)

谷口隆・杉山和成両氏の報告（本報告集 [59], [57]）では，概均質ベクトル空間の定義，例，および，付随する 1 変数ゼータ関数の基本性質について解説されている．ここでは，ゼータ関数を一般化し，その関数等式を論ずる．本稿で扱うゼータ関数の一般化とは，

- 多変数ゼータ関数,
- Dirichlet 型の L 関数,
- 多項式係数のゼータ関数
- 保型形式の周期を係数とするゼータ関数

である．以下，§1 では，まず，概均質ベクトル空間の基本性質について，[59], [57] で触れられなかったことを含めて説明した後，[57] で解説された概均質ベクトル空間に付随する 1 変数ゼータ関数の関数等式について，その証明の仕組みについて復習する．それを確認することによって，一般化の際に何が拡張されねばならないのかがはっきりしてくるだろう．§2 では，複数の基本相対不変式を持つ概均質ベクトル空間に対して多変数のゼータ関数を定義し，その関数等式・解析接続について，知られていることをまとめる．§3 では，§4, §5 で解説されるゼータ関数の一般化について，古典的な例を簡単に説明する．それを踏まえて，§4 では，概均質ベクトル空間のゼータ関数の Dirichlet 型 L 関数への拡張を説明する．§5 では，多項式係数，および，保型形式の周期を係数とするゼータ関数について解説する．§6 では，概均質ベクトル空間の相対不変式ではない多項式でも，概均質ベクトル空間の理論が与えるような関数等式を満たす（少なくとも局所）ゼータ関数が定義できる例が存在することを見る．したがって，概均質ベクトル空間がこの種の理論の究極の設定というわけではないのかもしれない．

全体として，結果を精密に述べるよりは，考え方や関数等式の成立つ仕組みを説明することに重点を置いたので，証明を含め詳しいことに関心がある場合は原論文を見ていただければ幸いである．

1　概均質ベクトル空間の基本性質とゼータ関数の関数等式の根拠

1.1　複数の基本相対不変式を持つ概均質ベクトル空間

まず，より一般化されたゼータ関数の関数等式について解説する都合上，概均質ベクトル空間の基本的な代数的性質も [59], [57] より多少一般的な形で復習しておこう（詳しくは [47], [49], [15, Chapter 2] 参照）．

F を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体を固定する．（実際には，$F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のみを考える．）G $(\subset GL_N(\mathbb{C}))$ を F 上定義された線型代数群，V を F-構造（すなわち，$V = V(F) \otimes_F \mathbb{C}$ となる部分 F-ベクトル空間 $V(F)$）を持つ有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間，$\rho : G \to GL(V)$ を G の V 上の有理表現とする．ρ も F 上定義されているとする．このとき，(G, ρ, V) は F 上で定義されているという．（定義体に関する説明は [15, p. 12] を見よ．[59] にも簡単な説明があった．）F の拡大体 L に対し，

L-有理点の集合 $G(L) := G \cap GL_N(L)$，$V(L) = V(F) \otimes_F L$ を考えると，$G(L)$ も群であり，ρ は $G(L)$ の $V(L)$ 上の表現を引き起こす．$G = G(\mathbb{C}), V = V(\mathbb{C})$ である．

定義 1.1.1　(G, ρ, V) が**概均質ベクトル空間** $\overset{\text{def}}{\iff}$ V に G の（Zariski-）開軌道 Ω が存在する．Ω の補集合 $S := V \setminus \Omega$ を**特異集合**という．

(**注．**　[59], [57] の記号では，Ω でなく V' を用いている．)

以下，(G, ρ, V) は F 上定義された概均質ベクトル空間だとする．

命題 1.1.2　特異集合 S を

$$S = \underbrace{S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n}_{\text{余次元 1，超曲面}} \cup \underbrace{S_1' \cup S_2' \cup \cdots \cup S_{n'}'}_{\text{余次元 } >1}$$

と F 上で既約成分に分解する．このとき，余次元 1 の既約成分 S_i $(1 \le i \le n)$ に対して，

$$S_i = \{v \in V \mid P_i(v) = 0\}$$

となる F 上既約な多項式 P_i が 0 でない有理数倍を除いて一意的に定まる．これらの P_i は相対不変式であり，そして，任意の F-係数相対不変式は，$P_1, P_2, \ldots, P_n$ の冪積で表される．

この命題によって与えられる $P_1, P_2, \ldots, P_n$ を F **上の基本相対不変式**という．ρ が既約表現ならば $n = 1$ (or 0)（すなわち，相対不変式は存在しないか，または，既約相対不変式はただ１つ）であるが，一般には $n \ge 2$ の場合も生ずる．

F 上の基本相対不変式 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ に対応する G の有理指標を $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ とおく．すなわち，

$$P_i(\rho(g)v) = \chi_i(g) P_i(v) \quad (g \in G, v \in V)$$

が成立っているとする．このとき，有理指標 χ_i $(1 \le i \le n)$ も F 上定義されている．

$$X_\rho(G)_F = \text{相対不変式に対応する } G \text{ の } F \text{ 上定義された有理指標の全体}$$

とおくと，$X_\rho(G)_F$ は乗法群であり，$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ で生成される階数 n の自由アーベル群となっている．F 上の基本相対不変式の個数 n $(= \operatorname{rank} X_\rho(G)_F)$ を概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) の F-**ランク**という．

(G, ρ, V) が有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義されていて，その $\mathbb{Q}$-ランク n が 2 以上のときには，自然に

$$\sum_v \frac{\mu(v)}{|P_1(v)|^{s_1} \, |P_2(v)|^{s_2} \cdots |P_n(v)|^{s_n}}$$

のような多変数のゼータ関数が考えられるのである．($\mu(v)$ や和の取り方の正確な意味などは、§2 で解説する．)

複数の基本相対不変式を持つ概均質ベクトル空間の例をあげておこう．

例 1.1.3　$Y \in M_m(\mathbb{C})$, ${}^tY = Y$ を 非退化対称行列とし，

$$G = SO_Y \times B_{m-1}, \quad V = M_{m,m-1}(\mathbb{C}), \quad \rho(g,b)v = gvb^{-1}.$$

$$SO_Y = \left\{ g \in GL_m(\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^tgYg = Y \right\},$$

$$B_{m-1} := \left\{ b = \begin{pmatrix} b_1 & b_{12} & \cdots & b_{1,m-1} \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{m-2,m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in GL_{m-1}(\mathbb{C}) \right\} \quad (\text{上三角行列群})$$

を考える．このとき，(G, ρ, V) は

$$\Delta_i(A) := \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1i} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ii} \end{pmatrix} : \text{行列 } A \text{ の } i \text{ 次首座行列式}$$

とおくと，

$$S = \bigcup_{i=1}^{m-1} \left\{ v \in V \;\middle|\; \Delta_i({}^tvYv) = 0 \right\}$$

を特異集合とする概均質ベクトル空間であり，Y の成分が $\mathbb{C}$ の部分体 F に属しているとき、この概均質ベクトル空間は F 上定義されている．そして、F 上の基本相対不変式とそれに対応する G の有理指標は

$$\Delta_i({}^tvYv), \quad \chi_i(g,b) = (b_1 b_2 \cdots b_i)^{-2} \quad (i = 1, \ldots, m-1)$$

で与えられる．

例 1.1.4　Y は例 1 と同じとし，

$$G = SO_Y \times GL_{m-1}(\mathbb{C}) \times GL_{m-2}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_1(\mathbb{C}),$$

$$V = M_{m,m-1}(\mathbb{C}) \oplus M_{m-1,m-2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{2,1}(\mathbb{C}),$$

$$\begin{aligned} &\rho(g_m, g_{m-1}, g_{m-2}, \ldots, g_1)(v_{m-1}, v_{m-2}, \ldots, v_1) \\ &\quad = (g_m v_{m-1} g_{m-1}^{-1}, g_{m-1} v_{m-2} g_{m-2}^{-1}, \ldots, g_2 v_1 g_1^{-1}) \end{aligned}$$

を考える．このとき，(G, ρ, V) は

$$S = \bigcup_{i=1}^{m-1} \left\{ v \in V \;\middle|\; \det\left[{}^t(v_{m-1} v_{m-2} \cdots v_i) Y (v_{m-1} v_{m-2} \cdots v_i)\right] = 0 \right\}$$

を特異集合とする概均質ベクトル空間であり，Y の成分が体 F に含まれていれば，やはり F 上定義されている．基本相対不変式とそれに対応する G の有理指標は

$$P_i(v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_1) := \det\left[{}^t(v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_i) Y (v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_i)\right]$$

$$\chi_i(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1) = (\det g_i)^{-2}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

で与えられる．

1.2　双対概均質ベクトル空間と正則概均質ベクトル空間

杉山 [57] によると，ゼータ関数の関数等式とは次のようなものであった：

$$(*) \qquad (G,\rho,V) \text{ のゼータ関数} \xleftrightarrow{\text{両者を結びつける関係}} \text{双対 } (G,\rho^*,V^*) \text{ のゼータ関数}.$$

ここで，概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) の**双対**とは，

$V^* = V$ の双対空間，
$\rho^* = \rho$ の反傾表現，すなわち，$\langle \rho(g)v, \rho^*(g)v^* \rangle = \langle v, v^* \rangle$ で定まる G の V^* 上の有理表現

で与えられる (G,ρ^*,V^*) のことであり，(G,ρ,V) が体 F 上定義されているとき，V の F-構造から V^* の F-構造が自然に定まって，(G,ρ^*,V^*) も F 上定義されている．

上の図式 $(*)$ を考えると，関数等式が成り立つようなゼータ関数を得るには，双対概均質ベクトル空間が元の概均質ベクトル空間とよく似ていなくてはならないであろう．だが，一般には概均質ベクトル空間の双対はもとの概均質ベクトル空間の性質を受け継がない．例えば，

- 概均質ベクトル空間の双対は，概均質ベクトル空間になるとは限らない．
- 相対不変式を持つ概均質ベクトル空間の双対が概均質ベクトル空間であっても，
  - 双対は相対不変式を持たないかもしれない．
  - また，どちらも相対不変式を持っていたとしても，基本相対不変式の個数が同じとは限らない．言い換えれば，概均質ベクトル空間としてのランクは等しいとは限らない．

例 1.2.1　r, s を正整数とし，$G_1 \subset GL_r(\mathbb{C})$, $G_2 \subset GL_s(\mathbb{C})$ を体 F 上定義された線型代数群とする．ρ_1, ρ_2 で，それぞれ，この包含関係による G_1, G_2 の自然な $V_1 := \mathbb{C}^r$, $V_2 := \mathbb{C}^s$ 上の表現を表す．

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_3 & g_2 \end{pmatrix} \in GL_{r+s}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{matrix} g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, \\ g_3 \in M_{s,r}(\mathbb{C}) \end{matrix} \right\}, \quad V = V_1 \oplus V_2 = \mathbb{C}^{r+s}$$

とおく．G の自然な V 上の表現 ρ，すなわち，$\rho(g)v = gv$ $(g \in G,\ v \in V)$ で定まる表現を考える．V の双対空間 V^* を内積 $\langle v, v^* \rangle = \sum_{i=1}^{r+s} v_i v_i^*$ によって $V = \mathbb{C}^{r+s}$ と同一視すると，ρ の反傾表現 ρ^* は $\rho^*(g)v^* = {}^t g^{-1} v^*$ $(g \in G,\ v^* \in V^*)$ で与えられる．このとき，

$$(G,\rho,V) \text{ が概均質ベクトル空間} \iff (G_1,\rho_1,V_1) \text{ が概均質ベクトル空間}$$

であり，これが成り立つとき，(G_1,ρ_1,V_1) の特異集合を S_1 とすると，(G,ρ,V) の特異集合 S は $S = S_1 \times V_2$ で与えられる．したがって，その F 上の基本相対不変式は (G_1,ρ_1,V_1) の F 上の基本相対不変式を V_2 に属す変数を含まぬ V 上の多項式とみなしたもので与えられる．同様に，

$$(G,\rho^*,V^*) \text{ が概均質ベクトル空間} \iff (G_2,\rho_2^*,V_2^*) \text{ が概均質ベクトル空間}$$

であり，これが成り立つとき，(G_2,ρ_2^*,V_2^*) の特異集合を S_2^* とすると，(G,ρ^*,V^*) の特異集合 S^* は $S^* = V_1^* \times S_2^*$ で与えられる．したがって，F 上の基本相対不変式は (G_2,ρ_2^*,V_2^*) の F 上の基本相対不変式を V_1^* に属す変数を含まぬ V^* 上の多項式とみなしたもので与えられる．

これより，(G_1,ρ_1,V_1) が概均質ベクトル空間だが，(G_2,ρ_2^*,V_2^*) が概均質ベクトル空間でなければ，(G,ρ,V) は概均質ベクトル空間だが，その双対 (G,ρ^*,V^*) は概均質ベクトル空間ではない．例えば，

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ b & 1\end{pmatrix}\;\middle|\; a\in\mathbb{C}^\times,\ b\in\mathbb{C}\right\}$$

が具体例である．

次に (G,ρ,V)，(G,ρ^*,V^*) がともに概均質ベクトル空間だったとしよう．このとき，(G_1,ρ_1,V_1) が非自明な相対不変式を持つが，(G_2,ρ_2^*,V_2^*) は非自明な相対不変式を持たないならば，(G,ρ,V) は非自明な相対不変式を持つが，その双対 (G,ρ^*,V^*) は非自明な相対不変式を持たない．例えば，

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ b & c\end{pmatrix}\;\middle|\; a\in\mathbb{C}^\times,\ b\in\mathbb{C}^s,\ c\in GL_s(\mathbb{C})\right\}\quad(s\geq 2)$$

が具体例である．

最後に，(G_1,ρ_1,V_1) の F-ランクと (G_2,ρ_2^*,V_2^*) の F-ランクが異なれば，(G,ρ,V) の F-ランクと (G,ρ^*,V^*) の F-ランクも異なる．例えば，

$$G=\left\{\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & & \text{\Large 0} & & & \\ & \ddots & & & \text{0} & \\ \text{\Large 0} & & a_r & & & \\ \hline b_{11} & \cdots & b_{1r} & c_1 & & \text{\Large 0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ b_{s1} & \cdots & b_{sr} & \text{\Large 0} & & c_s \end{array}\right)\;\middle|\;\begin{array}{l} a_1,\dots,a_r,c_1,\dots,c_s\in\mathbb{C}^\times,\\ b_{ij}\in\mathbb{C}\ (1\leq i\leq s,\ 1\leq j\leq r)\end{array}\right\},\quad V=V^*=\mathbb{C}^{r+s}$$

が具体例である．この空間は $\mathbb{Q}$ 上定義されており，(G,ρ,V) の $\mathbb{Q}$-ランクは r，(G,ρ^*,V^*) の $\mathbb{Q}$-ランクは s で $r\neq s$ ならば，ランクは異なっている．（この例では $\mathbb{Q}$-ランクと $\mathbb{C}$-ランクは等しい．）

このような例を見ると，概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数の関数等式の理論を展開するには，双対概均質ベクトル空間もよい性質を持つための条件が必要となることが容易に想像されるだろう．それが正則という条件である．

定義 1.2.2　概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) が**正則**

$\overset{\text{def}}{\iff}$　相対不変式 $P(v)$ で $\phi_P:V\to V^*,\ \phi_P(v)=\frac{1}{P(v)}\mathrm{grad}P(v)$ が双有理写像となるものが存在する．

ただし，$\mathrm{grad}P(v)$ は

$$\langle x,\mathrm{grad}P(v)\rangle=\left.\frac{d}{dt}P(v+tx)\right|_{t=0}\quad(v,x\in V)$$

で定義される V^* の元を表す．ϕ_P が双有理写像を与えるような相対不変式 P は**非退化**といわれる．

このとき，ϕ_P は G の作用について同変，すなわち，

$$\phi_P(\rho(g)v)=\rho^*(g)\left(\phi_P(v)\right)\quad(g\in G,\ v\in V)$$

が成立つ．実際，任意の $x \in V$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle \rho(g)x, \phi_P(\rho(g)v)\rangle &= \frac{\frac{d}{dt}P(\rho(g)v + t\rho(g)x)|_{t=0}}{P(\rho(g)v)} \\ &= \frac{\chi(g)\frac{d}{dt}P(v+tx)|_{t=0}}{\chi(g)P(v)} \\ &= \frac{\frac{d}{dt}P(v+tx)|_{t=0}}{P(v)} = \langle x, \phi_P(v)\rangle\end{aligned}$$

が成立つから，$\phi_P(\rho(g)v) = \rho^*(g)\,(\phi_P(v))$ である．この ϕ の G-同変性に基づいて，正則概均質ベクトル空間とその双対とが次の諸性質を持つことが証明される．

命題 1.2.3 (G, ρ, V) が体 F 上定義された正則概均質ベクトル空間だとする．このとき，次が成り立つ．

(1) 双対 (G, ρ^*, V^*) も体 F 上定義された正則概均質ベクトル空間である，

(2) $\det\rho(g)^2 \in X_\rho(G)_F$ で， $\det\rho(g)^2$ に対応する相対不変式 P_0 は非退化である．

(3) $P(v)$ を (G, ρ, V) の非退化相対不変式だとすると，$\phi_P : \Omega \longrightarrow V^*$ の像 $\phi_P(\Omega)$ は (G, ρ^*, V^*) の開軌道 Ω^* であり，ϕ_P によって Ω と Ω^* とは双正則同型である, 特に, $P = P_0$ ととれば，ϕ_{P_0} は F 上定義された双有理写像で，Ω と Ω^* とは F 上で双正則同型である，

(4) 相対不変式に対応する G の指標の群も一致，すなわち，$X_\rho(G)_F = X_{\rho^*}(G)_F$．したがって，$F$ 上の基本相対不変式の個数である F-ランクは，(G, ρ, V) と (G, ρ^*, V^*) とで一致している．

(5) とくに，$F = \mathbb{R}$ の場合，$\Omega(\mathbb{R})$ と $\Omega^*(\mathbb{R})$ の連結成分の個数は一致している．

（証明は，Sato-Kimura [47, §4], Sato [49], Kimura [15, §2.3] を見よ．P_0 が非退化であることは，これらには書かれていないが，[49, §4, Corollary to Theorem 1] から直ちに従う．また，これらの文献では，定義体はあまり考慮されていないが，相対不変式が F 係数有理関数の定数倍であることと対応する指標が F 上定義されていることが同値であることに注意すればよい．

命題 1.2.3 は，正則概均質ベクトル空間とその双対とが，多くの基本的性質を共有していることを示している．ただし，正則概均質ベクトル空間において (G, ρ, V) と (G, ρ^*, V^*) とは似てはいても，うり二つとまでは言えないことを注意しておく．例えば，

- 正則概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) とその双対 (G, ρ^*, V^*) に対し，基本相対不変式の次数は一致しているとは限らない．

例 1.2.4 次の群 G とベクトル空間 V を考えよう:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_5 \end{pmatrix} \middle|\ b_1, b_4, b_5 \in \mathbb{C}^\times,\ b_2, b_3 \in \mathbb{C} \right\}, V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_4 & 0 \\ v_3 & 0 & v_5 \end{pmatrix} \middle|\ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{C} \right\}.$$

G の V 上の有理表現を $\rho(g)v = gv\,{}^tg$ $(g \in G,\ v \in V)$ によって定めると，(G, ρ, V) は

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_4 & 0 \\ v_3 & 0 & v_5 \end{pmatrix} \in V \,\middle|\, v_4 \cdot v_5 \cdot \det v \neq 0 \right\}$$

を開軌道とする正則概均質ベクトル空間となる．これより，基本相対不変式は $P_1(v) = v_4, P_2(v) = v_5, P_3(v) = \det v$ で，その次数は $1, 1, 3$ である．

一方，3 次対称行列の空間 $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{C})$ の内積 $\langle v, v^* \rangle := \mathrm{tr}(vv^*)$ を V に制限することにより，V の双対空間 V^* を $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{C})/Z$ と同一視することができる．ここで，$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{C} \right\}$ である．このとき，G の V^* への作用は $\rho^*(g)(v^* + Z) = {}^tg^{-1}v^*g^{-1} + Z$ で与えられるから，基本相対不変式は

$$P_1(v^*) = v_1^*, \quad P_2(v^*) = \det\begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* \\ v_2^* & v_4^* \end{pmatrix}, \quad P_3(v^*) = \det\begin{pmatrix} v_1^* & v_3^* \\ v_3^* & v_5^* \end{pmatrix} \qquad \left(v^* = \begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* & v_3^* \\ v_2^* & v_4^* & 0 \\ v_3^* & 0 & v_5^* \end{pmatrix} + Z \right)$$

であり，その次数は $1, 2, 2$ である．$\Omega^*(\mathbb{R})$ の連結成分の一つである

$$\Omega_+^* = \{ v^* \in V_{\mathbb{R}}^* \mid P_1(v^*), P_2(v^*), P_3(v^*) > 0 \}$$

は対称錐でない等質凸錐の最初の例であり "Vinberg cone" と呼ばれている ([62])．この空間に対する 3 変数ゼータ関数の関数等式については， Nakashima [30, §6] を見よ．一般に等質凸錐は $\mathbb{R}$ 上定義されたある正則概均質ベクトル空間の開軌道の $\mathbb{R}$-有理点集合の連結成分として表される（例えば、[30] を見よ)。このタイプの正則概均質ベクトル空間については、基本相対不変式の次数が、その双対の基本相対不変式の次数と異なることはよく見られる現象である。

注意 1.2.5　(G, ρ, V) とその双対 (G, ρ^*, V^*) がうり二つとなるための条件は,

$$G \text{ が簡約群 (reductive group)}$$

となることである．G が簡約群のとき，$\rho(G)$ も簡約群であるから，Mostow の定理 ([29]) により，V の基底をとって $\mathbb{C}^n$ と同一視したとき，$\rho(G)$ が $GL(n; \mathbb{C})$ の随伴写像 $g \mapsto {}^t\overline{g}^{-1}$ で stable な部分群となるように，基底を選ぶことができる．そのとき，$V = \mathbb{C}^n$ の標準的な内積 $\langle v, v' \rangle = \sum_{i=1}^n v_i v_i'$ によって，V^* を $\mathbb{C}^n$ と同一視すれば, 反傾表現は $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$ で与えられる．したがって，$\rho^*(G) = \overline{\rho(G)}$ であるから，(G, ρ, V) が S $(\subset V = \mathbb{C}^n)$ を特異集合とする概均質ベクトル空間ならば，(G, ρ^*, V^*) は $\overline{S}$ $(\subset V^* = \mathbb{C}^n)$ を特異集合とする概均質ベクトル空間である．また，$P(v)$ が指標 χ に対応する (G, ρ, V) の相対不変式とすると，$\bar{P}(v^*)$ は指標 χ^{-1} に対応する (G, ρ^*, V^*) の相対不変式となる．(G, ρ, V) が体 F 上定義されているとき，上の自己随伴的な行列実現は F 上定義されているとは限らないが，以上を根拠として，(G, ρ, V) の F 上の基本相対不変式 $P_1, \ldots, P_n$ に対応する指標を $\chi_1, \ldots, \chi_n$ としたとき，$\chi_1^{-1}, \ldots, \chi_n^{-1}$ に対応する (G, ρ^*, V^*) の相対不変式 $P_1^*, \ldots, P_n^*$ が存在し，それらが F 上の基本相対不変式となることが分かる．とくに，$\deg P_i = \deg P_i^*$ $(1 \leq i \leq n)$ である．

このように, G が簡約群のときは, 正則性を仮定せずとも, (G,ρ,V) とその双対 (G,ρ^*,V^*) とは概均質ベクトル空間としてのすべての性質を共有する．そして, 局所関数等式の理論は, 行者 [11] によって正則性の仮定なしに展開されている．しかし，大域ゼータ関数（Dirichlet 級数としてのゼータ関数）の理論は，いまのところ，正則性なしには不十分な状態であるので，本稿では，常に正則性を仮定することになる．

1.3 ゼータ関数の関数等式の根拠 (1 変数の場合の復習)

ゼータ関数を一般化する前に，ゼータ関数の関数等式が成り立つ仕組みを整理しておこう．ここでは，杉山 [57] の設定と記号を踏襲する．そこで解説されているように，ゼータ関数の収束を前提にすると，関数等式の証明は

(α) ゼータ積分（ゼータ関数の積分表示）

(β) ゼータ積分の関数等式 （Poisson の和公式から導かれる）

(γ) $\mathbb{R}$ 上の局所関数等式

(δ) b-関数

という 4 つの構成要素を次の図 1.3.1 のように組み合わせることによってなされた.

$$
\begin{array}{ccc}
Z(f,L;s) & \overset{(\alpha)}{=\!=\!=\!=\!=\!=} & \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu}\xi_j(L;s)\times\underbrace{\Phi_j(f;s)}_{} \\
\| & & \\
\displaystyle\int_{G^+/\Gamma}|\chi(g)|^s\sum_{v\in L\cap\Omega}f(\rho(g)v)\,dg & & (\gamma)\ \Big\| \\
(\beta)\ \Big\|\ \ (+\ (\delta)) & & \\
\displaystyle v(L^*)\int_{G^+/\Gamma}|\chi^*(g)|^{s^*}\sum_{v^*\in L^*\cap\Omega^*}\widehat{f}(\rho^*(g)v^*)\,dg & & \displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}\gamma_{ij}(s) \\
\| & & \times \\
v(L^*)Z^*(\widehat{f},L^*;s^*) & \overset{(\alpha)}{=\!=\!=\!=\!=\!=} & \displaystyle v(L^*)\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^*(L^*;s^*)\times\overbrace{\Phi_i^*(\widehat{f};s^*)}^{}
\end{array}
$$

$s^*=\frac{\dim V}{\deg P}-s$: 1 変数の場合

— 図 1.3.1 —

ここで，水平の等号 (α) はゼータ積分を用いたゼータ関数の積分表示であり，上段は (G,ρ,V) に対するもの，下段は (G,ρ^*,V^*) に対するものである（杉山 [57, 命題 3.2]）．左側の垂直方向の等号は，ゼータ積分の定義，および，ゼータ積分の関数等式 (β) である（杉山 [57, 命題 4.1]）．以

上により，右列上段の式と右列下段の式とが等しくなるが，ここで $f, \widehat{f}$ を含む局所ゼータ関数 Φ_j, Φ_i^* を消去するために，四角で囲った等式 (γ)，すなわち，局所関数等式を利用することができ，ゼータ関数 ξ_j と ξ_i^* とを結ぶ関数等式

$$v(L^*)\xi_i^*(L^*;s^*) = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s)\xi_j(L;s)$$

が示されたのであった（[57, 定理 4.2] の証明 (3) を見よ． そこでは，$\gamma_{ij}(s)$ をガンマ因子 $\gamma(s)$ と指数関数因子 $c_{ij}(s)$ とに分解して記述している）．

ただし， [57, 命題 4.1] が適用できるためには，急減少関数 f とそのフーリエ変換 $\hat{f}$ に，それぞれ，(G,ρ,V) の特異集合 S と (G,ρ^*,V^*) の特異集合 S^* 上で消えるという条件が必要であった．そのようなよい関数として，$f(v) = P(D_v)f_0(v)$ $(f_0 \in C_0^\infty(V_i))$ を利用したが，この f に対して $\Phi_i(f;s) \not\equiv 0$ となることを見るために，b 関数が利用された（[57, 定理 4.2] の証明 (3)）．

また，b 関数は

- 関数等式のガンマ因子 $\gamma(s)$
- ゼータ関数の極（の候補）の位置

という 2 つの情報を担っていることを思い出しておこう．

2 多変数ゼータ関数とその関数等式

本節では，§1.3 で復習した概均質ベクトル空間に付随する 1 変数ゼータ関数の理論の多変数への一般化の要点を [35] に従って，解説する．

2.1 多変数ゼータ関数の定義

まずこの §2.1 では，

仮定 1. (G,ρ,V) は $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間，特異集合 S は超曲面，

仮定 2. 開軌道を Ω $(= V - S)$ とするとき，G_v° $({}^\forall v \in \Omega \cap V(\mathbb{Q}))$ は非自明な $\mathbb{Q}$-有理指標を持たない．（ただし，G_v° は $G_v = \{g \in G \mid \rho(g)v = v\}$ の単位元連結成分である．）

という仮定の下で，多変数のゼータ関数を定義しよう（正則性は仮定しない）．$P_1, P_2, \ldots, P_n$ を (G,ρ,V) の $\mathbb{Q}$ 上の基本相対不変式とし，対応する指標を $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ とする．

ここで，記号の簡略化と 1 変数の場合と並行して議論が進むことをはっきりさせるという 2 つの目的のために，

$$(2.1) \qquad |\chi(g)|^s := \prod_{i=1}^{n} |\chi_i(g)|^{s_i}, \quad |P(v)|^s := \prod_{i=1}^{n} |P_i(v)|^{s_i} \quad (s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n)$$

と置こう．G^+ で $G(\mathbb{R})$ の単位元連結成分を表す．L を $V(\mathbb{Q})$ の格子とし， $G(\mathbb{Q}) \cap G^+$ に含まれる数論的部分群 Γ で L を不変にするものを取っておく（このような Γ は存在する．適当な合同

部分群を取ればよい）．このとき，ゼータ積分を

$$Z(f, L; s) = \int_{G^+/\Gamma} |\chi(g)|^s \sum_{v \in L \cap \Omega} f(\rho(g)v)\, d_r g \quad (s \in \mathbb{C}^n,\ f \in \mathcal{S}(V(\mathbb{R}))) \tag{2.2}$$

と定義する．この定義は，(2.1) の記号の約束の下で，1 変数の場合とほとんど同じである．異なっている点は，G を簡約群と仮定していないため，リー群 G^+ は両側不変なハール測度を持つとは限らず，右不変測度 $d_r g$ を考えていることである．ここで，右不変測度は正定数倍を除いて一意的に定まり，$h \in G^+$ を固定したとき，$d_r(hg)$ も右不変測度となるので，$d_r(hg) = \Delta(h) d_r g$ となる正定数 $\Delta(h)$ が存在する．$\Delta : G^+ \to \mathbb{R}_{>0}$ は乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ への連続準同型を与え，**モジュラス指標**といわれる[*1]．さて，仮定 2 から従う重要な性質の一つは，G の任意の $\mathbb{Q}$ 上定義された有理指標は適当な冪を取れば，相対不変式に対応するということである．したがって，

$$|\det \rho(g)/\Delta(g)| = |\chi(g)|^\delta \quad (\exists \delta \in \mathbb{Q}^n) \tag{2.3}$$

と表せる．そこで，開軌道の $\mathbb{R}$-有理点の集合 $\Omega(\mathbb{R})$ 上の G^+-相対不変測度 $\omega(x)$ を

$$\omega(x) := \frac{dx}{|P(x)|^\delta}$$

と定義する．dx は実ベクトル空間 $V(\mathbb{R})$ 上の加法的ハール測度（ルベーグ測度）である．また，仮定 2 により，$G_v^+ := \{h \in G^+ \mid \rho(h)v = v\}$ $(v \in \Omega(\mathbb{R}))$ はユニモジュラーであり両側不変測度 $d\mu_v(h)$ をもつ．$d\mu_v(h)$ には正定数倍の自由度があるが，$\Omega(\mathbb{R})$ を（ユークリッド位相での）連結成分に

$$\Omega(\mathbb{R}) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_\nu$$

と分解しておくと，$v \in \Omega_i$ のとき，積分公式

$$\int_{G^+} \varphi(g)\, d_r g = \int_{\Omega_i} \left(\int_{G_v^+} \varphi(g_x h) d\mu_v(h) \right) \omega(x)$$

が成り立つように正規化することができる．ここで，g_x は $x = \rho(g_x)v$ となる G^+ の元で，$\int_{G_v^+} \varphi(g_x h) d\mu_v(h)$ は $d\mu_v(h)$ の両側不変性により，g_x の取り方によらずに定まる．これが，[57] の (3.2) の一般化である．ここで，n 変数のゼータ関数と局所ゼータ関数を

$$\xi_i(L; s) = \sum_{v \in \Gamma \backslash (L \cap \Omega_i)} \frac{\mu(v)}{|P(v)|^s}, \quad \mu(v) = \int_{G_v^+/\Gamma_v} d\mu_v(h), \tag{2.4}$$

$$\Phi_i(f; s) = \int_{\Omega_i} |P(x)|^s f(x)\, \omega(x) \tag{2.5}$$

と定義しよう．$\mu(v)$ は有限値をとり，ゼータ関数 $\xi_i(L; s)$ は $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の実部がみな十分大きいとき絶対収束する．これは，仮定 1, 2 により Saito [34] から従う．また，$f \in \mathcal{S}(V(\mathbb{R}))$ に対し

---

*1 『岩波数学辞典』などでは Δ を「モジュラ—関数」と言っているが，保型関数論における「モジュラー関数」と区別するため，「モジュラス指標」ということにする．

て，局所ゼータ関数 $\Phi_i(f;s)$ は $\Re(s_j) > \delta_j$ $(1 \le j \le n)$ のとき絶対収束していることは f の急減少性より直ちに従う．さらに，多項式の複素冪の一般論により，$\Phi_i(f;s)$ は $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の有理型関数として，$\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続される（例えば，[2] を見よ）．

さて，このように準備しておけば，[57, §3] の議論はまったくそのまま一般化されて，次の命題が得られる．

命題 2.1.1（ゼータ関数の積分表示） ゼータ積分 $Z(f,L;s)$ $(s \in \mathbb{C}^n,\ f \in \mathcal{S}(V(\mathbb{R})))$ は $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の実部がみな十分大きいとき絶対収束し，

$$Z(f,L;s) = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(L;s)\Phi_i(f;s)$$

が成立つ．

2.2 多変数ゼータ関数の関数等式

§2.1 では，§1.3 で整理した関数等式の証明の 4 つの構成要素のうち，ゼータ積分の一般化を説明したが，この §2.2 では，§2.1 における仮定 1, 2 に加えて，

仮定 3. (G,ρ,V) は正則

を仮定した上で，残る 3 つの構成要素を一般化する．

まず，(G,ρ,V) が仮定 1,2,3 を満たすならば，双対 (G,ρ^*,V^*) も仮定 1,2,3 をすべて満たすことに注意しよう．以下，§2.1 で (G,ρ,V) に対して定義された諸概念の (G,ρ^*,V^*) に対する対応物は，同じ記号に上付きの $*$ を付けることによって表さすことにする．例えば，Ω^* は $\rho^*(G)$ による開軌道であり，その $\mathbb{R}$-有理点の集合 $\Omega^*(\mathbb{R})$ の連結成分への分解は $\Omega^*(\mathbb{R}) = \Omega_1^* \cup \cdots \cup \Omega_\nu^*$ と表される．ここで，連結成分の個数は $\Omega(\mathbb{R})$ のそれと一致するのであった（命題 1.2.3 (5)）．また，$P_1^*, \ldots, P_n^*$ と書けば，(G,ρ^*,V^*) の $\mathbb{Q}$ 上の基本相対不変式を表し，$\chi_1^*, \ldots, \chi_n^*$ は対応する G の指標である．

2.2.1 多変数 b 関数

b 関数の多変数化から始めよう．$\chi \in X_\rho(G)_\mathbb{Q} = X_{\rho^*}(G)_\mathbb{Q}$ に対して，$\delta : X_\rho(G)_\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^n$, $\delta^* : X_\rho(G)_\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^n$ を

$$\chi = \chi_1^{\delta(\chi)_1}\chi_2^{\delta(\chi)_2}\cdots\chi_n^{\delta(\chi)_n} = (\chi_1^*)^{\delta^*(\chi)_1}(\chi_2^*)^{\delta^*(\chi)_2}\cdots(\chi_n^*)^{\delta^*(\chi)_n}$$

によって定める．そして，

$$P_\chi(v) = P_1(v)^{\delta(\chi)_1}P_2(v)^{\delta(\chi)_2}\cdots P_n(v)^{\delta(\chi)_n}, \quad P_\chi^*(v^*) = P_1^*(v^*)^{\delta^*(\chi)_1}P_2^*(v^*)^{\delta^*(\chi)_2}\cdots P_n^*(v^*)^{\delta^*(\chi)_n}$$

と定義する．P_χ, P_χ^* は，それぞれ，χ に対応する (G,ρ,V), (G,ρ^*,V^*) の相対不変式である．$\delta^*(\chi)_i \ge 0$ $(\forall i)$ のとき，$\delta^*(\chi) \ge 0$ と書くことにする．これは P_χ^* が多項式であることを意味す

る．$\delta^*(\chi) \geq 0$ のとき，$P^*_\chi(\partial_v)$ を

$$P^*_\chi(\partial_v)\exp(\langle v, v^*\rangle) = P^*_\chi(v^*)\exp(\langle v, v^*\rangle)$$

を満たす V^* 上の定数係数偏微分作用素と定義する．

定理 2.2.1 (1) $\delta^*(\chi) \geq 0$ のとき，

$$P^*_\chi(\partial_v)P^s(v) = b_\chi(s)P^{s+\delta(\chi)}(v)$$

を満たす s の多項式 $b_\chi(s)$ が存在する．

(2) $\delta^*(\chi), \delta^*(\psi) \geq 0$ のとき，

$$b_{\chi\psi}(s) = b_\chi(s)b_\psi(s+\delta(\chi))$$

が成立し，この関係式を利用して，すべての $\chi \in X_\rho(G)_\mathbb{Q}$ に対し s の有理関数 $b_\chi(s)$ を定義することができる．

(3) 群準同型写像 $c : X_\rho(G)_\mathbb{Q} \to \mathbb{C}^\times$, $e^{(i)} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$，および，

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{d_i}\Gamma(e^{(i)}(s) - \alpha_{ij})^{m_{ij}} \quad (d_i > 0, m_{ij} \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \alpha_{ij} \in \mathbb{C})$$

の形のガンマ因子が存在し，

$$b_\chi(s) = c(\chi)\cdot\frac{\gamma(s)}{\gamma(s-\delta(\chi))}$$

と表される．ここで，$e^{(i)}(s)$ は $e^{(i)}$ を $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ と $\mathbb{C}$-線型に拡張した線型形式である．

注意 2.2.2 G が簡約代数群ならば，$\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$ であることが示せる．一般に成立つと思われるが，筆者は厳密な証明を知らない（いわゆる Bernstein 多項式とここでいう b 関数の間の関係が問題である）．

2.2.2 関数等式

(2.1) と同様に，

$$|\chi^*(g)|^s = \prod_{i=1}^{n}|\chi_i^*(g)|^{s_i}, \quad |P^*(v^*)|^s = \prod_{i=1}^{n}|P_i^*(v^*)|^{s_i}$$

と略記すると，双対のゼータ関数，局所ゼータ関数は

$$\xi_i^*(L^*; s) = \sum_{v^*\in\Gamma\backslash(L^*\cap\Omega_i^*)}\frac{\mu(v^*)}{|P^*(v^*)|^s}, \quad \Phi_i^*(f^*; s) = \int_{\Omega_i^*}|P^*(v^*)|^{s-\delta^*}f^*(v^*)\,dv^* \tag{2.6}$$

となる．ここで，δ^* は

$$|\det\rho^*(g)/\Delta(g)| = |\chi^*(g)|^{\delta^*}, \quad \delta^* \in \mathbb{Q}^n$$

で与えられる．ゼータ関数の積分表示も命題 2.1.1 を (G, ρ^*, V^*) に適用すれば，

$$Z^*(L^*, f^*; s) := \int_{G^*/\Gamma} |\chi^*(g)|^s \sum_{v^* \in L^* \cap \Omega^*} f^*(\rho^*(g)v^*)\, d_r g = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^*(L^*; s)\Phi_i^*(f^*; s) \tag{2.7}$$

と得られる．ここで，積分表示自体は L^* は任意の $V_{\mathbb{Q}}$ の格子，Γ は L^* を不変にし $G(\mathbb{Q}) \cap G^+$ に含まれる任意の数論的部分群でよいが，関数等式を成り立たせるため，L^* は L の双対格子，すなわち，

$$L^* = \{\, v^* \in V_{\mathbb{Q}} \mid \langle v, v^* \rangle \in \mathbb{Z}\ (\forall v \in L)\}$$

ととる．そして，Γ は $Z(f, L; s), Z^*(f^*, L^*; s)$ で共通にとることにする．

さて，命題 1.2.3 (2) より，$\det \rho(g)^2 \in X_\rho(G)_{\mathbb{Q}}$ であるから，

$$|\det \rho(g)| = |\chi(g)|^\lambda \quad (\lambda \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}^n) \tag{2.8}$$

を満たす λ が存在する．また，$X_\rho(G)_{\mathbb{Q}} = X_{\rho^*}(G)_{\mathbb{Q}}$ である（命題 1.2.3 (4)）から，この同じ自由アーベル群の 2 つの基底である $\chi_1, \ldots, \chi_n$ と $\chi_1^*, \ldots, \chi_n^*$ とは次のような関係で結ばれている：

$$\chi_i(g) = \chi_1^*(g)^{u_{i1}} \chi_2^*(g)^{u_{i2}} \cdots \chi_n^*(g)^{u_{in}}, \quad U = (u_{ij}) \in GL(n; \mathbb{Z}). \tag{2.9}$$

関数等式における変数変換は，1 変数の場合には，$s \mapsto \frac{\dim V}{\deg P} - s$ であったが，一般には，いま定義した λ, U を用いて，$s \mapsto (s - \lambda)U$ と記述される．すなわち，次の局所関数等式とゼータ積分の関数等式が成り立つ．

命題 2.2.3 **（局所関数等式）**　$f \in \mathcal{S}(V(\mathbb{R}))$ のフーリエ変換を $\widehat{f}$ とすると，局所ゼータ関数は次の関数等式を満たす：

$$\Phi_j(f; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s)\Phi_i^*(\widehat{f}; (s - \lambda)U).$$

ここで，$\gamma_{ij}(s)$ はガンマ関数と指数関数を用いて表される f と無関係な $s \in \mathbb{C}^n$ の有理型関数である．

定理 2.2.4　C, C^* を，それぞれ，ゼータ積分 $Z(f, L; s)$, $Z^*(f^*, L^*; s)$ の絶対収束域とする．また，$f \in \mathcal{S}(V(\mathbb{R}))$ が特異集合 $S_{\mathbb{R}}$ 上 0 となり，また，そのフーリエ変換 $\widehat{f}$ が特異集合 $S_{\mathbb{R}}^*$ 上 0 となるような，f をとる．このとき，ゼータ積分 $Z(f, L; s)$, $Z^*(f^*, L^*; s)$ は，それぞれ，$C \cup (C^*U^{-1} + \lambda)$，$C^* \cup (C - \lambda)U$ の凸包上の正則関数として解析接続され，次の関数等式を満たす：

$$Z(f.L; s) = v(L^*)Z(\widehat{f}; L^*; (s - \lambda)U).$$

以上を用いるならば，§1.3 で復習した 1 変数ゼータ関数の関数等式の証明をほぼ逐語的に多変数ゼータ関数の場合に移植でき，次の定理 2.2.5 が得られる．

定理 2.2.5 ([35])

$$v(L^*)\xi_i^*(L^*; (s - \lambda)U) = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s)\xi_j(L; s).$$

$\xi_j(L;s)$ の絶対収束域 D，$\xi_i^*(L^*;s)$ の絶対収束域 D^* に対し，両辺は $D\cup(D^*U^{-1}+\lambda)$ の凸包上の有理型関数として解析接続される．

この証明で b 関数を用いる部分について注意しておこう．双対概均質ベクトル空間の基本相対不変式に対応する指標の積を考え，

$$\chi_0^* = \chi_1^*\chi_2^*\cdots\chi_n^*$$

とおく．このとき，$P_{\chi_0^*}^*(v^*) = P_1^*(v^*)P_2^*(v^*)\cdots P_n^*(v^*)$ である．$f_0\in\mathbb{C}_0^\infty(\Omega_i)$ をとって，$f(v) = P_{\chi_0^*}^*(\partial_v)f_0(v)$ とおく．この f に対して，ゼータ積分の関数等式（定理 2.2.4）が適用でき，[57, 定理 4.2] の証明と全く同様に証明が進行するのである．また，この証明から，

$$b_{\chi_0^*}(s-\delta)\xi_i(L;s) \text{ が } D\cup(D^*U^{-1}+\lambda) \text{ の凸包上で正則である}$$

ことも示される．

2.3 関数等式の例：$(SO_Y\times B_2,\rho,M_{3,2})$ = 例 1.1.3 で $m=3$ の場合

例 1.1.3 の空間のゼータ関数に対し，定理 2.2.5 の関数等式を書いてみよう．簡単のため，$m=3$ とし，さらに，Y は正定値と仮定する．Y は正定値であることから，$\Omega(\mathbb{R}) = \{v\in M_{3,2}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rank}(v)=2\}$ は連結となる．

$$L = L^* = M_{3,2}(\mathbb{Z}),\quad \Gamma = \{I_3\}\times(B_2\cap GL_2(\mathbb{Z}))$$

とすると，$(SO_Y\times B_2,\rho,M_{3,2})$ とその双対の基本相対不変式，および，対応する有理指標は

$$\begin{aligned}
&P_1(v) = ({}^t vYv)_{11}, && P_2(v)=\det({}^t vYv), && \chi_1(g,b)=b_1^{-2}, && \chi_2(g,b)=(b_1b_2)^{-2}\\
&P_1^*(v) = ({}^t vY^{-1}v)_{22}, && P_2^*(v)=\det({}^t vY^{-1}v), && \chi_1^*(g,b)=b_2^{2}, && \chi_2^*(g,b)=\chi_2(g,b)^{-1}
\end{aligned}$$

となる．よって，ゼータ関数は

$$\xi_1(Y;s_1,s_2) = \sum_{\substack{v\in M_{3,2}(\mathbb{Z})/\Gamma\\ \mathrm{rank}(v)=2}} \big(({}^t vYv)_{11}\big)^{-s_1}\det({}^t vYv)^{-s_2},$$

$$\xi_1^*(Y;s_1,s_2) = \sum_{\substack{v\in M_{3,2}(\mathbb{Z})/{}^t\Gamma\\ \mathrm{rank}(v)=2}} \big(({}^t vY^{-1}v)_{22}\big)^{-s_1}\det({}^t vY^{-1}v)^{-s_2}$$

と与えられる．関数等式を記述するデータ λ, U は

$$\det\rho(g,b) = \chi_2(g,b)^{3/2},\quad \therefore\ \lambda=(0,\tfrac{3}{2}),$$
$$\chi_1^*=\chi_1\chi_2^{-1},\ \chi_2^*=\chi_2^{-1},\quad \therefore\ U=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

であるから，関数等式の変数変換は

$$s=(s_1,s_2)\longmapsto(s-\lambda)U=(s_1,\tfrac{3}{2}-s_1-s_2)$$

となる．関数等式は具体的には，

$$\xi_1^*(Y; s_1, \tfrac{3}{2} - s_1 - s_2) = (\det Y)^{-1/2}\phi(s_1 + s_2 - \tfrac{1}{2})\phi(s_2)\xi_1(Y; s_1, s_2),$$
$$\phi(x) = \pi^{-2s}\Gamma(s)^2 \sin \pi x.$$

と計算される．

ここで，ゼータ関数の絶対収束域は

$$D = D^* = \left\{ (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \Re(s_1) > 1,\ \Re(s_2) > 1 \right\}$$

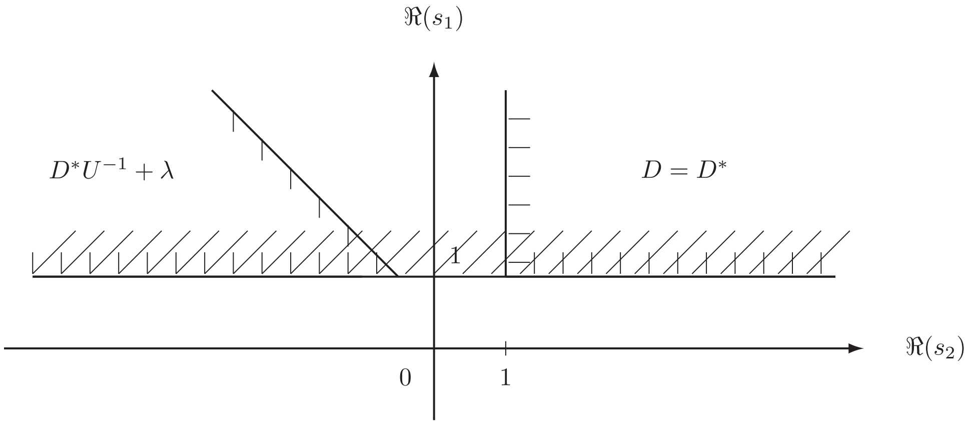
であり，したがって，定理 2.2.5 によって，これらのゼータ関数が解析接続される領域は D と

$$D^*U^{-1} + \lambda = \left\{ (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \Re(s_1) > 1,\ \tfrac{3}{2} - \Re(s_1) - \Re(s_2) > 1 \right\}$$

の合併の凸包で，それは

$$\left\{ (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \Re(s_1) > 1 \right\}.$$

となる（図 2.2.2 を見よ）．



— 図 2.2.2 —

ここで注意すべきは，1 変数ゼータ関数の場合とは異なり，

定理 2.2.5 が与える関数等式だけでは，$\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続できない！

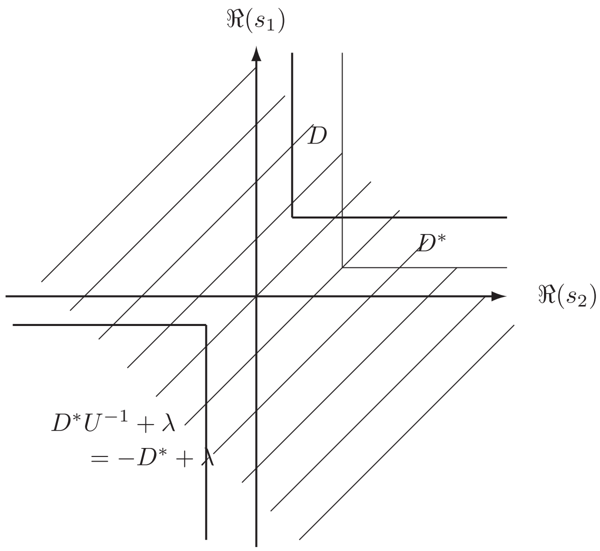
ということである．$\mathbb{C}^2$ 全体への解析接続を行うためには，$s_1 \mapsto c - s_1$ のような関数等式が求められる．より一般に，n 変数ゼータ関数は（それが $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続されるようなよいものであるならば）変数の個数分くらいは関数等式を持つのではないかと期待される．

2.4 $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続できる場合

定理 2.2.5 によって，$\mathbb{C}^n$ 全体への解析接続が証明できる場合として，次がある．

定理 2.4.1 (G, ρ, V) は $\mathbb{Q}$ 上定義され，仮定 1, 仮定 2, 仮定 3 を満たす概均質ベクトル空間だとする．このとき，G が簡約代数群ならば，ゼータ関数 $\xi_i(L; s)$, $\xi_j^*(L^*; s)$ は $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続される．

実際，注意 1.2.5 で述べたように，G が簡約代数群ならば，$U = -I_n$ と取れる．したがって，定理 2,2,5 によりゼータ関数は $D \cap (-D^* + \lambda)$ の凸包まで解析接続されるが，ゼータ関数の絶対収束域 D, D^* は十分大きい $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対し $\{s \in \mathbb{C}^n \mid \Re(s_i) \geq c_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$ の形の領域を含むから，$D \cap (-D^* + \lambda)$ の凸包が $\mathbb{C}^n$ に一致することは明らかである．



例えば，例 1.1.4 の空間（で $n = 3$, Y が正定値の場合）に対して書くと

$$(SO_Y \times GL_2 \times GL_1, \rho, M_{3,2} \oplus M_{2,1})$$

のゼータ関数

$$\xi_2(Y, V_{\mathbb{Z}}; s_1, s_2) = \sum_{v} \left| {}^t v_1 \, {}^t v_2 Y v_2 v_1 \right|^{-s_1} \left| \det({}^t v_2 Y v_2) \right|^{-s_2}$$

は $\mathbb{C}^2$ の全体に解析接続される．ただし，v に関する和は，

$$v \in \rho(\{I_3\} \times GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_1(\mathbb{Z})) \backslash M_{3,2}(\mathbb{Z}) \oplus M_{2,1}(\mathbb{Z}), \quad \mathrm{rank}(v_1) = 1, \ \mathrm{rank}(v_2) = 2$$

を渡る．

注意 2.4.2　G が簡約代数群でないときには，そのゼータ関数は $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続されない可能性がある．$\mathbb{C}^n$ に解析接続できるかどうかを判定するようなできるような理論はいまのところ存在しない．その意味で，非簡約概均質ベクトル空間のゼータ関数の一般論は完全ではない．

2.5　複数の関数等式を満たす例

前節の注意を踏まえると，

> 非簡約代数群が作用している例 1.1.3 $(SO_Y \times B_2, \rho, M_{3,2})$ のゼータ関数 $\xi_1(Y; s_1, s_2)$ は $\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続できないのか？

ということが気になるだろう．だが，

$$\xi_1(Y; s_1, s_2) \text{ も } \mathbb{C}^2 \text{ 全体に解析接続できる！}$$

のである．それは，$\xi_1(Y; s_1, s_2)$ は $\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続できる $\xi_2(Y; s_1, s_2)$ と次のような関係にあるからである．

$$\xi_2(Y; s_1, s_2) = \zeta(2s_1)\xi_1(Y; s_1, s_2).$$

実際，

$$\begin{aligned}
\xi_2(Y; s_1, s_2) &= \sum_{v_1 \bmod GL_2(\mathbb{Z})} \sum_{v_2 \bmod {}^tGL_2(\mathbb{Z})_{v_1}} \left| {}^tv_1 {}^tv_2 Y v_2 v_1 \right|^{-s_1} \left| \det({}^tv_2 Y v_2) \right|^{-s_2} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{v_2 \in M_{3,2}(\mathbb{Z})/{}^tB_2(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{rank}(v_2)=2}} \left| (m, 0)\, {}^tv_2 Y v_2 \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \right|^{-s_1} \left| \det({}^tv_2 Y v_2) \right|^{-s_2} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s_1}} \right) \left(\sum_{\substack{v_2 \in M_{3,2}(\mathbb{Z})/{}^tB_2(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{rank}(v_2)=2}} \left| d_1(v_2 Y v_2) \right|^{-s_1} \left| \det({}^tv_2 Y v_2) \right|^{-s_2} \right) \\
&= \zeta(2s_1)\xi_1(Y; s_1, s_2)
\end{aligned}$$

となっている．

この関係式を見ると，$\xi_2(Y; s_1, s_2)$ には例 1.1.4 の概均質ベクトル空間に定理 2.2.5 を適用して得られる関数等式に加えて，$\xi_1(Y; s_1, s_2)$ の関数等式が組み込まれていることが分かる．変数の変換のされ方だけを書くと次の図のようになっている．

$$
\begin{tikzcd}
(s_1, s_2) \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{例 1.1.3 の関数等式}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{例 1,1,4 の関数等式}"] & & (s_1, \frac{3}{2} - s_1 - s_2) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{例 1,1,4 の関数等式}"] \\
(1 - s_1, 1 - s_2) \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{例 1,1,3 の関数等式}"] & & (1 - s_1, s_1 + s_2 - \frac{1}{2})
\end{tikzcd}
$$

2.6　複数の関数等式を満たす仕組み

では，上の例のように複数の関数等式が得られる仕組みはどのようなものか，考察してみよう．一般に，n 変数ディリクレ級数を

$$
\begin{aligned}
\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) &= \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n = 1}^{\infty} \frac{a(m_1, m_2, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_n^{s_n}} \\
&= \sum_{m_{i+1}, \ldots, m_n = 1}^{\infty} \frac{1}{m_{i+1}^{s_{i+1}} \cdots m_n^{s_n}} \sum_{m_1, \ldots, m_i = 1}^{\infty} \frac{a(m_1, m_2, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_i^{s_i}}
\end{aligned}
$$

と，二重和にまとめ直したとき，内側の和が

$$
\sum_{m_1, \ldots, m_i = 1}^{\infty} \frac{a(m_1, m_2, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_i^{s_i}} = \gamma_1(s)\, m_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots m_n^{\alpha_n} \sum_{m_1, \ldots, m_i = 1}^{\infty} \frac{a^*(m_1, m_2, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1^*} \cdots m_i^{s_i^*}},
$$
$$
(s_1^*, \ldots, s_i^*) = ((s_1, \ldots, s_i) - (\lambda_1, \ldots, \lambda_i)) U_1
$$

のような形の関数等式を満たしたとしよう．このとき，

$$
\begin{gathered}
\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \gamma_1(s)\, \xi^*(s_1^*, \ldots, s_i^*, s_{i+1} - \alpha_{i+1}, \ldots, s_n - \alpha_n), \\
\xi^*(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n = 1}^{\infty} \frac{a^*(m_1, m_2, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_n^{s_n}}
\end{gathered}
$$

のような関数等式を満たすだろう．このような都合のよい二重和表示がいくつもあれば，複数の関数等式が成立つだろう．概均質ベクトル空間のゼータ関数という設定では，

このような都合のよい二重和表示は，可約な概均質ベクトル空間の**正則な直和因子**から得られる

というのが，概均質ベクトル空間の多変数ゼータ関数の理論である．

2.7　正則直和因子に関する部分的双対と関数等式の証明

線型代数群 G の表現 ρ_1, ρ_2 の直和 ρ を考える：

$$
(G, \rho, V) = (G, \rho_1, V_1) \oplus (G, \rho_2, V_2), \quad \rho(g)(v_1, v_2) = (\rho(g)_1 v_1, \rho_2(g) v_2).
$$

(G, ρ, V) が概均質ベクトル空間 $\Longleftrightarrow$ (1) (G, ρ_1, V_1) が概均質ベクトル空間，かつ，
(2) (G_{v_1}, ρ_2, V_2) $(v_1 \in \Omega_1)$ が概均質ベクトル空間

ここで，$\Omega_1 = (G, \rho_1, V_1)$ の開軌道，$G_{v_1} = \{g \in G \mid \rho_1(g)v_1 = v_1\}$ である．このとき，

$$
\begin{aligned}
&(G,\rho,V)\text{のゼータ関数}\\
&\quad = \sum_{v_1 \bmod \Gamma} \frac{1}{|P_1(v_1)|^{s_1} \cdots |P_i(v_1)|^{s_i}} \underbrace{\sum_{v_2 \bmod \Gamma\cap G_{v_1}} \frac{\mu(v_1,v_2)}{|P_{i+1}(v_1,v_2)|^{s_{i+1}} \cdots |P_n(v_1,v_2)|^{s_n}}}_{(G_{v_1},\rho_2,V_2)\ \text{のゼータ関数}}
\end{aligned}
$$

と二重和にまとめなおせる．

定義 2.7.1　(G_{v_1}, ρ_2, V_2) $(\exists v_1 \in \Omega_1)$ が正則概均質ベクトル空間のとき，(ρ_2, V_2) を $(G, \rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ の**正則直和因子**という．（このとき，$\forall v_1 \in \Omega_1$ に対し，(G_{v_1}, ρ_2, V_2) は正則である．）

(ρ_2, V_2) が $(G, \rho, V) = (G, \rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ の正則直和因子で，(G, ρ, V) に対して仮定 1,2 が満たされていれば，(G_{v_1}, ρ_2, V_2) $(\forall v_1 \in \Omega_1 \cap V_1(\mathbb{Q}))$ のゼータ関数が関数等式を満たし，それは (G, ρ, V) のゼータ関数の関数等式に組み込まれることになろう．これを理論化するには，§1.2 で述べた正則概均質ベクトル空間の性質，§2.2 の関数等式の理論を正則直和因子に一般化すればよい．

実際，$(G, \rho, V) = (G, \rho_1, V_1) \oplus (G, \rho_2, V_2)$ が概均質ベクトル空間で，(ρ_2, V_2) がその正則直和因子であるとする．このとき，部分空間 (ρ_2, V_2) だけを双対に取り換えた**部分的双対** $(G, \rho^*, V^*) = (G, \rho_1, V_1) \oplus (G, \rho_2^*, V_2^*)$ も概均質ベクトル空間となり，命題 1.2.3 はほとんどそのまま部分的双対に拡張される．また，ゼータ関数の関数等式の理論は，フーリエ変換の代わりに，V_2 に関する**部分フーリエ変換**

$$
\widehat{f}(v_1, v_2^*) := \int_{V_{2\mathbb{R}}} f(v_1, v_2) \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle v_2, v_2^* \rangle)\, dv_2
$$

を用いるならば，§2.2 の諸結果がそのまま成立するのである．したがって，ここでその結果を改めて述べることは控え，詳細は [35] に譲ることにしよう．

2.8　例 1.1.4（一般の $(n \geq 2)$）の正則直和因子とゼータ関数の関数等式

では，典型的な例として，例 1.1.4 の空間から得られるゼータ関数と関数等式を一般の $n \geq 2$ に対して（Y は正定値の仮定の下で）書いてみよう．考えている空間は

$$
\begin{aligned}
G &= SO_Y \times GL_{n-1} \times GL_{n-2} \times \cdots \times GL_1,\\
V &= M_{n,n-1} \oplus M_{n-1,n-2} \oplus \cdots \oplus M_{2,1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rho(g_n, g_{n-1}, g_{n-2}, \ldots, g_1)(v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_1)\\
&\quad = (g_n v_{n-1} g_{n-1}^{-1}, g_{n-1} v_{n-2} g_{n-2}^{-1}, \ldots, g_2 v_1 g_1^{-1})
\end{aligned}
$$

であった．この表現空間を

$$V = V_I \oplus V_J, \quad V_I = \bigoplus_{i \in I} M_{i+1,i}, \quad V_J = \bigoplus_{j \in J} M_{j+1,j}, \quad \{1,2,\ldots,n-1\} = I \sqcup J,$$

$$\rho_I(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1)(v_i)_{i\in I} = (g_{i+1} v_i g_i^{-1})_{i\in I}, \quad \rho_J(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1)(v_j)_{j\in J} = (g_{j+1} v_j g_j^{-1})_{j\in J}$$

と直和分解する．このとき，

すべての $J \neq \emptyset$ に対し，(ρ_J, V_j) は正則直和因子

である．そして，V_J に関する部分的双対は

$$(G, \rho^{(J)}, V) = (G, \rho_I, V_I) \oplus (G, \rho_J^*, V_J),$$

$$\rho^{(J)}(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1)(v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_1) \text{ の第 } k \text{ 成分} = \begin{cases} g_{k+1} v_k g_k^{-1} & (k \in I), \\ {}^t g_{k+1}^{-1} v_k \, {}^t g_k & (k \in J). \end{cases}$$

となる．空集合 $\emptyset$ に対しては，$(G, \rho^{(\emptyset)}, V) = (G, \rho, V)$ である．したがって，2^{n-1} 個のゼータ関数

$$\xi^{(J)}(Y, V_{\mathbb{Z}}; s_1, s_2, \ldots, s_n) = (G, \rho^{(J)}, V) \text{ のゼータ関数} \quad (J \subset \{1,2,\ldots,n-1\})$$

を互いに結び付ける関数等式が存在する．(それらを明示的に書き上げることはできるが，面倒なので省略．)

実は，次の等式からわかるように $\xi^{(J)}$ たちは本質的に同じゼータ関数である．

$$\xi^{(J)}(Y, V_{\mathbb{Z}}; s_1, s_2, \ldots, s_n) = \prod_{1 \le i \le j \le n-1} \zeta(2(s_i + \cdots + s_j - j + i)$$
$$\times \begin{cases} (\det Y)^{(n-1)/2} E(Y; s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) & (n-1 \notin J) \\ (\det Y)^{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-(n-1)/2} E(Y; s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, s_1) & (n-1 \in J) \end{cases}$$

$$E(Y; s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) = \sum_{U \in SL_n(\mathbb{Z})/B_n(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{n-1} \Delta_i({}^t UYU)^{-s_i}.$$

したがって，2^{n-1} 個のゼータ関数の間の関数等式は，単独の関数 $E(Y; s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$（同じことだが，$\xi^{(\emptyset)}(Y; s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$）が満たす複数の関数等式にまとめ上げられる．

定理 2.8.1 $\widehat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ として，

$$\widehat{E}(Y; z_1, z_2, \ldots, z_n) := (\det Y)^{z_n} \prod_{1 \le i \le j \le n-1} \widehat{\zeta}(2(z_j - z_i - \tfrac{j-i-1}{2})$$
$$\times E(Y; z_2 - z_1 + \tfrac{1}{2}, z_3 - z_2 + \tfrac{1}{2}, \ldots, z_n - z_{n-1} + \tfrac{1}{2})$$

とおくと，任意の $\sigma \in S_n$ に対して，

$$\widehat{E}(Y; z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(n)}) = \widehat{E}(Y; z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

が成り立つ．

一元集合 $J = \{k\}$ の場合，$\xi^{(\emptyset)}$ と $\xi^{(\{k\})}$ の間の関数等式は，定理 2.8.1 で $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k+1 \\ k+1 & 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$ という巡回置換に対する関数等式を与えている．

注意 2.8.2 $E(Y; s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ は $SL_n(\mathbb{Z})$ の Eisenstein 級数に他ならない．Langlands による Eisenstein 級数の大理論が現れる以前に，定理 2.8.1 は部分級数に対して Poisson の和公式（テータ級数の変換公式）を用いる方法で得られていたが ([50], Godement の unpublished notes, [22], 出版年は少し後だが [28, §17])，概均質ベクトル空間の多変数ゼータ関数の理論は，その一般化と見ることもできる．

ここでは，Y が正定値という仮定の下で関数等式を記述したが，Y が $\mathbb{Q}$-係数不定値対称行列の場合にも，同様の結果を得ることができる．これは，Selberg によって証明抜きで主張されていた ([50], [51]) のだが，きちんとした証明は [36] で与えられた．なお，Y が正定値のときには，定理 2.8.1 は Langlands の Eisenstein 級数の一般論の一例に過ぎないが，不定値の場合はその一般論に含まれるわけではない．

注意 2.8.3 可約な簡約概均質ベクトル空間の分類は木村達雄氏を中心として精力的に研究されているが，未だ未完成である．しかし，ここまで述べてきた多変数ゼータ関数の理論を適用できる大量の例が与えられている．これについては，[16], [17], [21]，および，これらに引用されている文献を見よ．

注意 2.8.4 概均質ベクトル空間に付随する多変数ゼータ関数は，上で説明した一般論から得られる関数等式以外に何らかの関係式が存在し，組み合わせることで，より多くの関数等式を得られることがある．都築氏による報告 [61] で $(B(2), \rho, Sym(2))$ に対する Shintani の 2 変数ゼータ関数（[53], [37] を見よ）に対してそのような現象が解説されている．

3 ゼータ関数の様々な一般化（古典的な例）

ゼータ関数には，以下に例示するように，Dirichlet の L 関数，Epstein の正定値二次形式の球関数付きゼータ関数，Hecke, Maass による量指標（保型形式）付き L 関数などの様々な一般化が存在する．次節以降でそのような一般化が概均質ベクトル空間の理論の立場からどう理解されるか説明するが，それに先立って，一般論のモデルとなったそれらの古典的な例について概観しておこう．

3.1 Dirichlet, および Stark の L 関数

Dirichlet の L 関数が，a, N $(N \geq 2)$ を互いに素な正整数とするとき，$p \equiv a \pmod N$ を満たす素数 p が無限に存在するという，いわゆる Dirichlet の算術級数定理の証明のために導入されたことはよく知られている．法 N の Dirichlet 指標 χ に対し，Dirichlet L 関数 $L(s, \chi)$ は

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad (\Re(s) > 1 \text{ で絶対収束})$$

と定義された．χ が原始的だとすると，$L(s,\chi)$ は s の正則関数として全複素平面 $\mathbb{C}$ に解析接続され，

$$\left(\frac{N}{\pi}\right)^{\frac{s+r}{2}}\Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)L(s,\chi)=\frac{G_\chi}{\sqrt{N}i^r}\left(\frac{N}{\pi}\right)^{\frac{(1-s)+r}{2}}\Gamma\left(\frac{(1-s)+r}{2}\right)L(1-s,\overline{\chi})$$

という関数等式を満たす．ここで，$r=0,1$ は $\chi(-1)=(-1)^r$ によって定まり，

$$G_\chi:=\sum_{\substack{1\le a\le N-1\\(a,N)=1}}\chi(a)e^{2\pi ia/N}\ (\text{ Gauss 和})$$

である．

正定値二次形式の Epstein ゼータ関数に対する Dirichlet L 関数の類似は，類数 1 の虚二次体の決定の研究に示唆されて，H. M. Stark ([56]) によって導入された．$P(x)$ を n 変数整数係数正定値二次形式とし，Y をその行列とする．Y は $P(x)={}^t xYx$ を満たす対称行列で，$P(x)$ が整数係数であるから，Y は半整数（すなわち，非対角成分が $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に属し，対角成分が $\mathbb{Z}$ に属す）である．さて，法 N の Dirichlet 指標 χ に対し，Stark の L 関数は

$$L(s,\chi,P)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{\chi(P(x))}{P(x)^s}$$

と定義される．$L(s,\chi,P)$ は $\Re(s)>\frac{n}{2}$ で絶対収束し，s の有理型関数として $\mathbb{C}$ 全体に解析接続される．

$D=\det(2Y)$ とし，$\overline{P}(y)=\frac{D}{4}\,{}^t yY^{-1}y$ とおく．また，

$$\chi_1(j)=\left(\frac{N'}{j}\right),\quad N'=\begin{cases}(-1)^{(N-1)/2}N & (N\equiv 1\pmod 2),\\ -N & (N\equiv 0\pmod 4),\\ 4N & (N\equiv 2\pmod 4)\end{cases}$$

とし[*2]，

$$\chi'(j)=\begin{cases}\chi(j) & (n\text{ は偶数}),\\ \chi(j)\chi_1(j) & (n\text{ は奇数}).\end{cases}$$

とおく．Stark は

- $(D,N)=1$ であり，n が奇数のときは N も奇数，
- χ,χ' はともに原始的，

という仮定の下で，Stark は，次の関数等式が成立することを示した：

$$\left(\frac{ND^{1/n}}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)L(s,\chi,P)=a\left(\frac{ND^{(n-1)/n}}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}-s}\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)L\left(\frac{n}{2}-s,\overline{\chi}',\overline{P}\right).$$

ここで，a は Gauss 和等を用いて明示的に書ける絶対値 1 の量である．

[*2] χ_1 の定義式の右辺では Kronecker の記号用いている．

Stark による証明のポイントは，上の仮定の下で，

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^n/NZ^n}\chi(Q(x))\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle}{k}\right)=ak^{n/2}\overline{\chi'}(\overline{Q}(y))$$

が成立つことである．左辺は二次形式 $Q(x)$ の Gauss 和とでもいうべきものである．§4 では，この種の等式を概均質ベクトル空間に一般化する (Denef-Gyoja [6], Cluckers-Herremans [5] の仕事) ことにより，概均質ベクトル空間に対して Dirichlet 型の L 関数の関数等式を示せることを紹介する．

3.2 調和多項式係数 Epstein ゼータ関数

$P(x)={}^txYx$ を n 変数正定値二次形式とする．Y は $P(x)$ の行列で，n 次正定値対称行列である．また，$P^*(y)={}^tyY^{-1}y$ として，多項式 $Q(x)$ は微分方程式

$$P^*\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)Q(x)=0,$$

を満たすとき P-**調和多項式**といわれる．$Q(x)$ を d 次斉次 P-調和多項式とし，$Q^*(y)=Q(Y^{-1}y)$ とおく．このとき，$P(x)$, $P^*(y)$ に付随する Epstein のゼータ関数を調和多項式係数に一般化したゼータ関数を

$$\zeta_n(Q;s)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{Q(x)}{P(x)^{s+d/2}},\quad \zeta_n^*(Q^*;s)=\sum_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{Q^*(y)}{P^*(y)^{s+d/2}}$$

と定義することができる．これらのゼータ関数は $\Re(s)>\frac{n}{2}$ で絶対収束し，$\mathbb{C}$ 全体に解析接続されて，関数等式

$$\pi^{-s}\Gamma\left(s+\tfrac{d}{2}\right)\zeta_n(Q;s)=i^{-d}(\det Y)^{-1/2}\pi^{-(\frac{n}{2}-s)}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}-s+\tfrac{d}{2}\right)\zeta_n\left(Q^*;\tfrac{n}{2}-s\right)$$

を満たす．$d=0$ で $Q(x)\equiv 1$ のときが，もともとの Epstein のゼータ関数である．$d>0$ ならば，$\zeta_n(Q;s)$, $\zeta_n^*(Q^*;s)$ は整関数である．この事実の詳しい解説は，Siegel の講義録 [55, §1.5] を見よ．なお，その原型はすでに Epstein [7] にある．これらの文献では，Hurwitz-Lerch タイプに一般化されて論じられている．

このような一般化をするとどのようなご利益があるのかを，付言しておこう．例えば，$Q(x)\equiv 1$ という通常の Epstein ゼータ関数を考えると，

$$\zeta_n(1;s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s},\quad a_m:=\sharp\{x\in\mathbb{Z}^n\mid P(x)=m\}$$

となり，$\zeta_n(1;s)$ は不定方程式 $P(x)=m$ の解の個数という情報を担っていた．ここで，より詳しく，$C:=\{x\in\mathbb{R}^n\mid P(x)=1\}$ という楕円面内に可測集合 $F\subset C$ をとり，錐 $\widehat{F}:=\{rx\mid r>0,\ x\in F\}$ に属す格子点のみに制限した

$$a_m(F):=\sharp\left\{x\in\mathbb{Z}^n\cap\widehat{F}\;\middle|\;P(x)=m\right\}$$

の挙動を調べたいとすると，$\zeta_n(1;s)$ ではそこまで細かい情報を得ることはできない．このようなとき，F の特性関数を球面調和関数（P-調和多項式を C に制限して得られる関数）の一次結合で近似することによって，

$$\zeta_n(F;s) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m(F)}{m^s}$$

の考察が，$\zeta_n(Q;s)$ の考察に帰着させられるのである．

別の例を与える．$a : \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $a^* : \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ に対して，

$$\zeta_n(a,Q;s) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{a(x)Q(x)}{P(x)^{s+d/2}}, \quad \zeta_n^*(a^*,Q^*;s) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{a^*(y)Q^*(y)}{P^*(y)^{s+d/2}}$$

という係数を一般にしたゼータ関数を考える．収束を保証するため，ある $k > 0$ に対して $a(x) = O(P(x)^k)$, $a^*(y) = O(P^*(y)^k)$ という増大度を持っているとする．このとき，これらのゼータ関数の関数等式から a, a^* が決定されるか，という問題を考えてみよう．すべての Q に対して，$\zeta_n(a,Q;s)$, $\zeta_n^*(a^*,Q^*;s)$ が上の関数等式を満たすならば，$a(x)$, $a^*(y)$ は定数関数でその定数は等しくなければならないことが示せる（[39]）．この結果は，Epstein ゼータ関数に対する Hamburger の定理 とでもいうべきものである．実際，$n = 1$ ならば，Riemann ゼータ関数を関数等式で特徴づける Hamburger の定理に他ならない．このようなことは，$\sqrt{m}C$ 上での情報を平均してしまう $\zeta_n(a,1;s)$ だけを考えていては決して得られないことは明らかであろう．

3.3 Hecke, Maass による量指標（保型形式）付きゼータ関数

Hecke による代数的数体の量指標付き L 関数の導入にあたっても §3.2 で述べたような問題意識がその動機の一つとなっていた（量指標付き L 関数についての説明は省略する）．実際，Hecke は論文 [14] の序文で，これまでに導入されたゼータ，L 関数では不十分であるような問題がいろいろあると指摘し，この新しいタイプの L 関数を導入することによって得られる結果のサンプルとして，

> $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ を判別式が平方数ではない整数係数不定値原始的二次形式，$\widehat{C}$ を xy-平面の任意の角領域（原点を始点とする 2 つの半直線に囲まれた領域）とする．(x,y) が動く範囲を $\mathbb{Z}^2$ から $\widehat{C} \cap \mathbb{Z}^2$ に制限しても，$f(x,y)$ は無限に多くの素数を表す

という実 2 次体の量指標付き L 関数の応用を掲げている．

代数的数体の量指標は，現在では，イデール類群の指標，ないしは，代数群 GL_1 の保型形式として理解される．上の Hecke のアイディアを，より大きな代数群に対して，そのまま一般化したのが（Hecke の弟子の）H. Maass である．Maass の考えを説明するために，$m > n \geq 1$ として，m 次の正定値実対称行列 Y に対し，Epstein のゼータ関数を一般化した

$$\zeta_{m,n}(Y;s) = \sum_{v \in M'_{m,n}(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z})} \frac{1}{\det({}^t vYv)^s}$$

というゼータ関数から出発しよう．ただし，階数 n のすべての 実 $m\times n$ 行列の集合を $M'_{m,n}(\mathbb{R})$ とおいた．Y が整数係数ならば，

$$\zeta_{m,n}(Y;s)=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a(Y;t)}{t^s},\quad a(Y;t)=\sharp\left\{v\in M'_{m,n}(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z})\;\middle|\;\det({}^tvYv)=t\right\}$$

となる．このような Epstein ゼータ関数の拡張の可能性は Siegel [54] で指摘され，Koecher [18] によって最初に調べられたので，Koecher のゼータ関数と言われることもある*3．概均質ベクトル空間の立場からは $(SO_Y\times GL_n,\rho,M_{m,n})$, $\rho(k,g)v=kv\,{}^tg$ という概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数を扱っていることになる．さて，Maass は 1950 年代の一連の研究（[25], [26] など）において，$M'_{m,n}(\mathbb{R})$ の部分集合 A で $GL_n(\mathbb{R})$ の右作用で閉じたものと n 次の正定値実対称行列の空間に含まれる $SL_n(\mathbb{Z})$-不変な錐 B を固定して，

$$\zeta_{m,n}(Y,A,B;s)=\sum_{\substack{v\in(A\cap M_{m,n}(\mathbb{Z}))/SL_n(\mathbb{Z})\\ {}^tvYv\in B}}\frac{1}{\det({}^tvYv)^s}=\sum_{\substack{v\in M_{m,n}(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z})\\ \mathrm{rank}(v)=n}}\frac{\phi_A(v)\phi_B({}^tvYv)}{\det({}^tvYv)^s}$$

という Koecher のゼータ関数のさらなる一般化を考察した．ここで，ϕ_A,ϕ_B は，それぞれ，A, B の特性関数である．また，Y が整数係数ならば，

$$\zeta_{m,n}(Y,A,B;s)=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a(Y,A,B;t)}{t^s}$$
$$a(Y,A,B;t)=\sharp\left\{v\in(M_{m,n}(\mathbb{Z})\cap A)/SL_n(\mathbb{Z})\;\middle|\;{}^tvYv\in B,\ \det({}^tvYv)=t\right\}$$

とも書ける．このようなゼータ関数の解析がきちんとできるならば，$a(Y,A,B;t)$ の漸近評価などの数論的情報が得られるということが，導入の動機である．

$\zeta_{m,n}(Y,A,B;s)$ を調べるための Maass の方法は，ϕ_A,ϕ_B を Hecke の量指標に類似したよい関数の一次結合で近似することである．まず，ϕ_A については，A は右 $GL_n(\mathbb{R})$-不変で $A/GL_n(\mathbb{R})\subset M'_{m,n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R})\cong SO_m/(SO_n\times SO_{m-n})$ であるから，調和多項式の理論 ($n=1$ の場合）を一般化した球関数論を $n>1$ の場合にも展開して利用した ([25])．ϕ_B については，実質的に $SO_n\backslash SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ の保型形式にあたるものを Hecke に倣って量指標 (Größenchrakter) と呼んで導入した．この場合には，$SO_n\backslash SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ 上の関数のスペクトル分解が必要なのだが，それは $n=2$ の場合には Maass の学生であった Roelke が実行した ([33])．これらに基づいて，$n=2$ の場合には，[26] で上のプログラムが実行されている． $n>2$ の場合にこのプログラムを完遂することは，当時には無理だったと言えよう．かくして，Maass が調べたゼータ関数は

$$\sum_{\substack{v\in M_{m,n}(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z})\\ \mathrm{rank}(v)=n}}\frac{Q(v)\eta\left(\frac{{}^tvYv}{\det({}^tvYv)^{n/2}}\right)}{\det({}^tvYv)^s}\tag{3.1}$$

*3 Koecher はこのゼータ関数の極における留数の公式も与えているが，その証明は不完全であり，正しく証明したのは荒川恒男氏である．

である．ここで, Q は不変式環 $\mathbb{C}[M_{m,n}]^{SL_n}$ を SO_Y の既約表現に分解した既約因子 ($GL_1 \times SO_Y$ の表現としての重複度は 1 である）に属す多項式，η は $SO_n\backslash SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ の保型形式である．一般の n に対するこのゼータ関数についての Maass の研究の到達点は [28] にまとめられている．

Maass は [27] で不定値二次形式 $P(v) = {}^t vYv$ に対する Siegel のゼータ関数

$$\sum_{\substack{v \in SO_Y(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}^m \\ \mathrm{sgn}(P(v))=\pm 1}} \frac{\mu(v)}{|P(v)|^s}$$

を $K_Y\backslash SO_Y(\mathbb{R})/SO_Y(\mathbb{Z})$ 上の保型形式 η を付けた形に拡張している．ここで K_Y は $SO_Y(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群である．この場合，得られるゼータ関数

$$\sum_{\substack{v \in SO_Y(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}^m \\ \mathrm{sgn}(P(v))=\pm 1}} \frac{c(\eta; v)}{|P(v)|^s}$$

の係数 $c(\eta; v)$ は η を（ちょっとだけひねってから） $SO_Y(\mathbb{R})_v/SO_Y(\mathbb{Z})_v$ 上で平均した，いわゆる，周期積分で与えられる．

3.4　概均質ベクトル空間への一般化に向けて

§1.3 で復習したように，ゼータ関数の収束を前提にすると，関数等式の証明は

(α)　ゼータ積分（ゼータ関数の積分表示）

(β)　ゼータ積分の関数等式 （Poisson の和公式から導かれる）

(γ)　$\mathbb{R}$ 上の局所関数等式

(δ)　b-関数

という 4 つの構成要素を前掲の図 1.3.1 のように組み合わせることによってなされた．したがって，§3.1, 3.2, 3.3 で見たようなゼータ関数を含むような概均質ベクトル空間の理論を作るには，まず，問題となるゼータ関数の積分表示を与えるようなゼータ積分を発見しなければならない．このとき，局所ゼータ関数の部分も一般化されている可能性がある．そして，局所関数等式や b-関数も適切に一般化されねばならない．以下の節で，このことを実行していく．

4　概均質ベクトル空間に付随するディリクレ型の L 関数

この節および次の節では，簡単のため，G は簡約で (G, ρ, V) は §2.1 の仮定 1, 仮定 2 を満たし，さらに,

仮定 4　$\mathbb{Q}$-ランクが 1，すなわち，$\mathbb{Q}$ 上の基本相対不変式が 1 つだけ

という条件を満たしているとする．G が簡約のとき，仮定 1 から §2.2 の仮定 3（正則性）が従うことに注意しておく（[15, Proposition 2.24]）．

さて，Dirichlet の L 関数は，Hurwitz のゼータ関数の一次結合で表され，関数等式も Hurwitz のゼータ関数のそれに帰着して証明されることはよく知られている．そこで，まず，概均質ベクトル空間に対して Hurwitz のゼータ関数の一次結合にあたるものを導入しよう．そのために，次のような $V(\mathbb{Q})$ 上の関数 $\phi : V(\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ を考える：

$V(\mathbb{Q})$ 内の格子 L_1, L_2 $(L_1 \supset L_2)$ が存在し，

$$\phi(v) = 0 \quad (v \notin L_1), \quad \phi(a+v) = \phi(a) \quad (a \in V(\mathbb{Q}),\ v \in L_2)$$

が成立つ．

このような関数 ϕ を $V(\mathbb{Q})$ 上の **Schwartz-Bruhat 関数**と呼び，その全体を $\mathcal{S}(V(\mathbb{Q}))$ と書くことにする．$\phi \in \mathcal{S}(V(\mathbb{Q})$ に対し，上の条件を満たす L_1, L_2 をとり，

$$L_1 = \bigsqcup_i (a_i + L_2)$$

と剰余類分解すると，

$$\phi(v) = \begin{cases} \phi(a_i) & (v \in a_i + L_2) \\ 0 & (v \notin L_1) \end{cases}$$

である．$\phi \in \mathcal{S}(V(\mathbb{Q}))$ に対し，剰余類 $a_i + L_2$ $(1 \leq i \leq [L_1 : L_2])$ をすべて stabilize するような数論的部分群 Γ をとって，

$$\xi_i(\phi; s) = \sum_{v \in \Gamma \backslash (V(\mathbb{Q}) \cap \Omega_i)} \frac{\mu(v)\phi(v)}{|P(v)|^s} = \sum_i \phi(a_i) \sum_{a_i + v \in \Gamma \backslash ((a_i + L_2) \cap \Omega_i)} \frac{\mu(a_i + v)}{|P(a_i + v)|^s} \tag{4.1}$$

と定義する．この最右辺の表示から分かるように，$\xi_i(\phi; s)$ は Hurwitz 型のゼータ関数の線型結合である．

ゼータ関数の積分表示も

$$Z(f, \phi; s) := \int_{G/\Gamma} |\chi(g)|^s \sum_{v \in V(\mathbb{Q}) \cap \Omega} \phi(v) f(\rho(g)v)\, dg = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(\phi; s)\Phi_i(f; s) \tag{4.2}$$

という形で成り立つ．また，$\phi^* \in \mathcal{S}(V^*(\mathbb{Q}))$ に対して，双対概均質ベクトル空間 (G, ρ^*, V^*) のゼータ関数 $\xi_i^*(\phi^*; s)$ も同様に定義され，積分表示

$$Z^*(f^*, \phi^*; s) := \int_{G/\Gamma} |\chi^*(g)|^s \sum_{v^* \in V^*(\mathbb{Q}) \cap \Omega^*} \phi^*(v^*) f^*(\rho^*(g)v^*)\, dg = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^*(\phi; s)\Phi_i^*(f^*; s)$$

が成立つ．ここで，局所ゼータ関数 $\Phi_i(f; s)$, $\Phi_i^*(f^*; s)$ は通常のゼータ関数の場合とまったく同じものである．

さて，ゼータ積分の関数等式は，Poisson の和公式から導かれたが，$Z(f,\phi;s)$ の場合は，$\phi(v)$ 付きの Poisson 和公式

$$\sum_{v\in V(\mathbb{Q})}\phi(v)f(v)=\sum_{v^*\in V^*(\mathbb{Q})}\widehat{\phi}(v^*)\widehat{f}(v^*),\quad \widehat{\phi}(v^*):=v(L_2^*)\begin{cases}\sum_i\phi(a_i)e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle a_i,v^*\rangle} & (v^*\in L_2^*)\\ 0 & (v^*\notin L_2^*)\end{cases}$$

を用いればよい．これは，通常の Poisson の和公式から容易に導かれる．また，$V(\mathbb{Q})$ 上の Schwartz-Bruhat 関数と呼んだものは $V(\mathbb{A}_f)$ （$\mathbb{A}_f$ はアデール環の有限部分）上の Schwartz-Bruhat 関数を $V(\mathbb{Q})$ に制限したものに他ならず，これは，アデール環上の Poisson 和公式の特殊な場合でもある．そして，

> $f\in\mathcal{S}(V^*(\mathbb{R}))$ に対する杉山 [57, 命題 4.1] と同じ仮定の下で，ゼータ積分の関数等式
>
> $$Z(f,\phi;s)=Z^*(\widehat{f},\widehat{\phi};\delta-s),\quad \delta=\frac{\dim V}{\deg P}$$
>
> が成り立つ．（[57, 命題 4.1] の関数等式の右辺の因子 $v(L^*)$ は $\widehat{\phi}$ の中に吸収されていることに注意しておく．）

以上から，ϕ 付きのゼータ関数の解析接続や関数等式

$$\xi_j^*(\widehat{\phi};\delta-s)=\sum_{i=1}^{\nu}\gamma_{ij}(s)\xi_i(\phi;s)$$

が，図 1.3.1 のレシピに従って（[57, 定理 4.2] の関数等式の証明と全く同じに），証明される．この証明の中で，b-関数が用いられるが，それは，局所ゼータ関数を部分積分によって変形する際に登場するので，局所ゼータ関数が通常の場合と同じであるから，b-関数も同じものである．

さて，明らかなことだが，ϕ が格子 L の特性関数のときの $\xi_i(\phi;s)$, $Z(f,\phi;s)$ が，以前に考察された $\xi_i(L;s)$, $Z(f,L;s)$ である．法 N の Dirichlet 指標 χ に対する Dirichlet 型の L 関数を得るには，$P(v)$ を格子 L 上で（必要ならば適当に定数倍し）整数値を取るようにし，

$$\phi_\chi(v)=\begin{cases}\chi(P(v)) & (v\in L)\\ 0 & (v\notin L)\end{cases}$$

ととればよい．このとき，

$$\widehat{\phi_\chi}(v^*)=\frac{v(L^*)}{N^{\dim V}}\sum_{v\in L/NL}\chi(P(v))\exp\left(\tfrac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\langle v,v^*\rangle\right)\quad (P(v)\ \text{の Gauss 和})$$

となる．よって，この右辺を $\mathcal{G}_L(P,\chi;v^*)$ と書くならば，

$$\xi_i(\phi_\chi;s)=\sum_{v\in\Gamma\backslash(L\cap\Omega_i)}\frac{\chi(P(v))\mu(v)}{|P(v)|^s},$$

$$\xi_j^*(\widehat{\phi_\chi};s)=\sum_{v^*\in\Gamma\backslash(L^*\cap\Omega_j^*)}\frac{\mathcal{G}_L(P,\chi;v^*)\mu(v^*)}{|P^*(v^*)|^s}$$

となる．

§3.1 の Dirichlet, Stark の L 関数の場合には，関数等式の相棒となる ξ_j^* は $\overline{\chi}(P^*(v^*))$ の形の係数を持つ L 関数として表されていた．これは，$P(v)$ の Gauss 和 $\mathcal{G}_L(P,\chi;v^*)$ が，定数倍を除いて Dirichlet 指標と $P^*(v^*)$ の合成として書かれるということである．$P(v)$ が二次形式の場合，それが，§3.1 の末尾に記した Stark による関係式である．一般の簡約概均質ベクトル空間の場合には，[6], [5] による次の概均質ベクトル空間のガウス和についての結果から従う．

定理 4.1　χ は原始的で，その導手 N の素因数は十分大きいとする．このとき，

$$\mathcal{G}_L(P,\chi;v^*) = c\cdot a(\chi)\chi(b)\kappa(v^*)\chi^{-1}(P^*(v^*))$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned} b,c &= \text{ 明示的に書ける定数}, \\ a(\chi) &= \chi \text{ の Gauss 和の適当な冪積}, \\ \kappa(v^*) &= \pm 1 : \chi \text{ によらない} \end{aligned}$$

となっている．

この定理は，N が素数の場合は [6]，N が素数冪の場合には [5] で示された．上の定理は，両者を組み合わせた形で書いている．定理で N の素因数がどの程度大きければよいのかということは，扱っている概均質ベクトル空間によりけりである．a,b,c,κ の値は詳しくわかっているが，紙幅の関係で原論文を参照していただきたい．例えば，$\kappa(v^*)$ の本質的な部分は， Legendre 記号を用いて

$$\prod_{\substack{p:\text{素数}\\ p|N}} \left(\frac{P^*(v^*)^{2\dim V/\deg P^*}}{p}\right)$$

と表せる．この結果の L 関数への応用は，筆者による [5] への appendix にある程度詳しく書いてある．

5　概均質ベクトル空間に付随する表現付きゼータ関数

5.1　表現付きゼータ関数への拡張の一般的枠組み

まず，§3.2. §3.3 で例示したようなゼータ関数を合わせて，表現付きということにしよう．そのようなゼータ関数の積分表示は，通常のゼータ積分に対し，

$$Z(\eta,L,f;s) = \int_{G^+/\Gamma} |\chi(g)|^s\,\eta(g) \sum_{v\in L\cap\Omega} f(\rho(g)v)\,dg, \quad \eta : G^+/\Gamma \to \mathbb{C}$$

と，Γ-右不変な付加的な関数 $\eta(g)$ を挿入して得られる．ここで，$\eta(g)$ は G^+ の表現の行列成分のようなものであるが，とりあえず，このような積分が，Dirichlet 級数と局所ゼータ関数の積の一次結合として表せ，適当なゼータ関数の積分表示として機能する条件を見出すために，η に特別な条件を課さず，通常の unfolding の変形を形式的に施してみよう．

$x, v \in \Omega_i$ に対し，$\rho(g_{x,v})v = x$ となる $g_{x,v} \in G^+$ をとる．積分が絶対収束することを仮定する．例えば，$\Re(s)$ は十分に大きく，$\eta(g)$ は G^+ 上有界ならば十分である．このとき，

$$(5.1) \qquad Z(\eta, L, f; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{v \in \Gamma\backslash(L\cap\Omega_i)} \int_{G^+/\Gamma_v} |\chi(g)|^s \, \eta(g) f(\rho(g)v)\, dg$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{v \in \Gamma\backslash(L\cap\Omega_i)} \frac{1}{|P(x)|^s} \int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta} f(x)\, dx \int_{G_v^+/\Gamma_v} \eta(g_{x,v}h)\, d_v h$$

と変形できる．

$$\mathcal{P}_{\eta,v}(g) := \int_{G_v^+/\Gamma_v} \eta(gh)\, d_v h, \quad \mathcal{P}_{\eta,v}(x) := \int_{G_v^+/\Gamma_v} \eta(g_{x,v}h)\, d_v h$$

とおく．ここで，v, x を固定したとき，$\mathcal{P}_{\eta,v}(g_{x,v})$ は $g_{x,v}$ の取り方によらず定まるから，$\mathcal{P}_{\eta,v}(x)$ と書け，$\Omega_i \cong G^+/G_v^+$ 上の関数を定める．

積分の収束がよいならば，次のような η の性質は $\mathcal{P}_{\eta,v}(x)$ に遺伝するであろう：

($\sharp$1) η が従う G^+ の極大コンパクト群の表現,

($\sharp$2) η が満たす G^+-不変微分方程式系.

そこで，$Z(\eta, L, f; s)$ が大域ゼータと局所ゼータの積の<u>有限</u>和を与えるためには，次が成り立っていればよい．

仮定 5 ($\sharp$1), ($\sharp$2) を満たす $\Omega_i \cong G^+/G_v^+$ 上の関数（広義の**球関数**) の空間は有限次元.

このとき，この関数空間の基底を $\Psi_1^{(i)}(x), \Psi_2^{(i)}(x), \ldots, \Psi_{d_i}^{(i)}(x)$ とすると，

$$\mathcal{P}_{\eta,v}(x) = \sum_{j=1}^{d_i} c_j^{(i)}(\eta; v)\Psi_j^{(i)}(x) \quad (c_j^{(i)}(\eta, v) \in \mathbb{C},\ v \text{ について } \Gamma\text{- 不変}).$$

と表せ，

$$Z(\eta, L, f; s) = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{d_i} \xi_j^{(i)}(\eta, L; s)\Phi_j^{(i)}(\eta, f; s),$$
$$\xi_j^{(i)}(\eta, L; s) = \sum_{v \in \Gamma\backslash(L\cap\Omega_i)} \frac{c_j^{(i)}(\eta, v)}{|P(v)|^s},$$
$$\Phi_j^{(i)}(\eta, f; s) = \int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta}\, \Psi_j^{(i)}(x) f(x)\, dx$$

となる．ゼータ積分 $Z(\eta, L, f; s)$ の関数等式は，Poisson の和公式を用いて，通常の場合と全く同じに（[57, 命題 4.1] の証明とまったく同じに）示すことができる．したがって，課題となるのは，

課題 5.1 球関数付き局所ゼータ関数 $\displaystyle\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta}\, \Psi_j^{(i)}(x) f(x)\, dx$ の局所関数等式を示すこと，および，この場合に [57, 定理 4.2] の証明と並行に進んだときに現れる b-関数の類似物を見出しておくこと

である．

仮定 5（球関数空間の有限次元性），課題 5.1(球関数付き局所関数等式の成立) という 2 つの要件をクリアできる典型的な設定として，次の 2 つがある．

(1) Compact Case: $G = GL_1 \times K \times H$,

$K(\mathbb{R}) =$ コンパクト群, $K \times H$ は相対不変式を不変にする,

$\eta(k,h) = \langle \alpha(k)u_1, u_2 \rangle$ $(u_1, u_2 \in \mathcal{H}_\alpha)$: α の行列要素

ここで，α は $K(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現，$\mathcal{H}_\alpha$ は α の表現空間.

例 $(GL_1 \times SO_m \times SL_n, \rho, M_{m,n})$, $\rho(t,k,h)x = tkx\,{}^th$.

(2) Symmetric Case: $\Omega_i \cong G^+/G^+_{v_i} =$ (必ずしも Riemannian とは限らない）対称空間,

すなわち，G の位数 2 の自己同型 σ があって，

G_v と $G^\sigma := \{g \in G \mid \sigma(g) = G\}$ の単位元連結成分が一致,

$\eta =$ 保型形式 (本稿ではアデール的扱いをしていないので，例えば，[13] の意味の).

例 $(GL(m), \rho, Sym(m))$, $(GL(2m), \rho, Alt(2m))$, $\rho(g)x = gx\,{}^tg$.

以下，それぞれのケースについて，概略を説明する．詳細は，Compact Case については [42] を，Symmetric Case については [41] を見てほしい．

5.2 多項式係数ゼータ関数への拡張： Compact Case

上で Compact Case と呼んだのは，$G = GL_1 \times K \times H$ で $K(\mathbb{R})$ がコンパクト群, $K \times H$ は相対不変式を不変にするという条件を満たす場合であった．そして，ゼータ積分に挿入される関数 η としては，$K(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現 α の行列成分，すなわち，

$$\eta(t,k,h) = \langle \pi(k)u_1, u_2 \rangle, \quad (u_1, u_2 \in \mathcal{H}_\alpha := \alpha \text{ の表現空間})$$

をとったのであった．以下では，さらに，

$$\underline{v \in \Omega \text{ に対し } (K \times H)_v \text{ は連結}}$$

を仮定する．また，$K(\mathbb{R})$ がコンパクトとなるとき，K は簡約代数群であり，$K(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現と K の既約有理表現とは 1 対 1 に対応していることに注意しよう．

記号

- 以下，以下，$GL_1 = T$ とし，$T^* = \mathbb{R}_+^\times$, $K^+ = K(\mathbb{R})$, $H^+ = H(\mathbb{R})$ の単位元連結成分とおく．
- $x_i \in \Omega_i$ を $|P(x_i)| = 1$ ととり，
$$K_i := \left\{ k \in K^+ \;\middle|\; \exists h \in H^+ \;\text{ s.t. } \rho(k,h)x_i = x_i \right\}$$
とおく．x_i は $K_1 = \cdots = K_\nu$ $(=: K_0)$ となるように選べる．
- $x \in \Omega_i$ に対し，$\rho(t_x, k_x, h_x)x_i = x$ となる $(t_x, k_x, h_x) \in T^+ \times K^+ \times H^+$ が存在する．
- $\widehat{K}$ で K の既約有理表現の同値類を表す．これは，K^+ の既約ユニタリ表現の同値類とみなすこともできる．
- 相対不変式に対応する $G = T \times K \times H$ の $\mathbb{Q}$ 上定義された指標は，仮定より，$K \times H$ 上で自明となるから，(仮定 2 を考慮すると) $X(G)_{\mathbb{Q}} = X(T)$ であり，$X_\rho(G)_{\mathbb{Q}}$ に対応する $X(T)$ の部分群を $X_\rho(T)$ と（簡単のため $\mathbb{Q}$ を略して）書く．

H-不変式環 $\mathbb{C}[\Omega]^H = (\mathbb{C}[V][1/P])^H$ を $T \times K$-加群として分解する：

$$\mathbb{C}[\Omega]^H = \bigoplus_{\pi:\text{既約}} \mathbb{C}[\Omega]^H_\pi = \bigoplus_{\chi \in X(T)} \bigoplus_{\alpha \in \widehat{K}} \mathbb{C}[\Omega]^H_{\chi\otimes\alpha} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} P(x)^m \left(\bigoplus_{\alpha \in \widehat{K}} \quad \bigoplus_{\psi \in X(T)/X_\rho(T)} \mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha} \right).$$

この最右辺で， $X(T)/X_\rho(T)$ の代表元 ψ は $\mathbb{C}[\Omega]^H_{\psi\otimes\alpha}$ が $\mathbb{C}[V]$ に含まれ，その元が P を共通因数に持たないようにとることにする．その意味で，$\mathbb{C}[\Omega]^H_{\psi\otimes\alpha}$ でなく $\mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha}$ と書いている．このとき，$R(K^+/K_0)_\alpha$ で K^+ の既約ユニタリ表現 α の行列成分で K_0-不変なものが張る空間を表し，$R(K^+/K_0) = \bigoplus_{\alpha\in\widehat{K}} R(K^+/K_0)_\alpha$ とすると，$Q(x) \mapsto Q(kx_i)$ で与えられる写像

$$\bigoplus_{\alpha \in \widehat{K}} \quad \bigoplus_{\psi \in X(T)/X_\rho(T)} \mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha} \xrightarrow{\cong} R(K^+/K_0) = \bigoplus_{\alpha} \underbrace{\bigoplus_{\psi} R(K^+/K_0)^{(\psi)}_\alpha}_{\substack{\shortparallel \\ R(K^+/K_0)_\alpha}} \tag{5.2}$$

は，K^+ の作用と整合的な同型写像である。ここで、$R(K^+/K_0)^{(\psi)}_\alpha$ は、この写像で $\mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha}$ に対応する $R(K^+/K_0)$ の部分空間である。このとき、逆写像は

$$\varphi(kK_0) \longmapsto \varphi(k_x K_0)\,|P|^\psi\,(x) \quad (x \in \Omega_i, Q \in \mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha}, \varphi \in R(K^+/K_0)^{(\psi)}_\alpha)$$

で与えられる．また，関数空間 $R(K^+/K_0)_\alpha$ は，K^+ の既約ユニタリ表現としての α の表現空間 $\mathcal{H}_\alpha$ から

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}^{K_0}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha \otimes \left(\bigoplus_{\psi} \mathcal{H}^{(\psi)}_\alpha \right) & \cong \bigoplus_{\psi} R(K^+/K_0)^{(\psi)}_\alpha = R(K^+/K_0)_\alpha \\ u \otimes w & \longmapsto \quad \langle \alpha(k)^{-1}u, w \rangle \end{array}$$

と構成することができる．

以上を準備として，挿入する $\eta(t,k,h)$ として K^+ の既約ユニタリ表現 α の行列成分をとったゼータ積分を計算してみよう．このとき，§5.1 の (5.1) は,

$$\begin{aligned}
&\int_{T^+\times K^+\times H/\Gamma_H} |\chi(t)|^s \overbrace{\langle\alpha(k)u_1,u_2\rangle}^{\substack{\eta(t,k,h)\\ \shortparallel}} \sum_{v\in L\cap\Omega} f(\rho(tkh)v)\,d^\times t\,dk\,dh \\
&\quad = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{v\in\Gamma_H\backslash L\cap\Omega_i} \frac{1}{|P(v)|^s}\int_{\Omega_i}|P(x)|^{s-\delta} f(x)\,dx \underbrace{\int_{(K^+\times H)_v/\Gamma_{H,v}} \langle\alpha(k_x k_v^{-1}k)u_1,u_2\rangle d_v(k,h)}_{\substack{\shortparallel\\ \mathcal{P}_{\eta,v}(x)}}
\end{aligned}$$

となる．$\mathcal{P}_{\eta,v}(x)$ を与える積分の被積分関数は h と無関係であるから, $\mu_H(v)=\int_{H_v/\Gamma_{H,v}} d\mu_{H,v}(h)$ として,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{P}_{\eta,v}(x)}{\mu_H(v)} &= \int_{K_0}\langle\alpha(k_x k k_v^{-1})u_1,u_2\rangle dk = \left\langle \int_{K_0}\alpha(kk_v^{-1})u_1\,dk, \int_{K_0}\alpha(kk_x^{-1})u_2\,dk\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m(\alpha)} \frac{Q_{\alpha,j}(u_1;v)}{|P|^{\psi_j}(v)}\cdot\frac{Q_{\alpha,j}(u_2;x)}{|P|^{\psi_j}(x)} \qquad \left(m(\alpha)=\dim\mathcal{H}_\alpha^{K_0}\right).
\end{aligned}$$

を得る．ここで，分解 $\mathcal{H}_\alpha^{K_0}=\bigoplus_\psi \mathcal{H}_\alpha^{(\psi)}$ と整合的な $\mathcal{H}_\alpha^{K_0}$ の正規直交基底 $w_{\alpha,1},\ldots,w_{\alpha,m(\alpha)}$ をとり，$w_{\alpha,j}\in\mathcal{H}_\alpha^{(\psi)}$ となる ψ を ψ_j と書いた．また，$|P|^\psi(x)$ は $|P|^\psi(tx)=\psi(t)\,|P|^\psi(x)$ $(t\in T^+)$ となる $|P(x)|$ の有理数冪である．そして，$Q_{\alpha,j}(u;x)$ は $u\otimes w_{\alpha,j}$ に対応する $\mathbb{C}[\Omega]^H_{\psi_j\otimes\alpha}$ の元を表している．これを，上のゼータ積分の計算の右辺に代入すれば,

$$\text{ゼータ積分} = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m(\alpha)}\left(\sum_{v\in\Gamma_H\backslash L\cap\Omega_i}\frac{\mu_H(v)Q_{\alpha,j}(u_1;v)}{|P(v)|^{s+\psi_j}}\right)\left(\int_{\Omega_i}|P(x)|^{s-\psi_j-\delta}Q_{\alpha,j}(u_2;x)f(x)\,dx\right)$$

となる．この右辺の第 1 因子が多項式係数ゼータ関数で，第 2 因子が局所ゼータ関数である．

したがって，問題は，局所ゼータ関数 $\displaystyle\int_{\Omega_j}|P(x)|^{s-\psi-\delta}Q(x)f(x)\,dx$ $(Q\in\mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha})$ に対して，課題 5.1 を解く，すなわち，その関数等式を示し，適切な b-関数の拡張を見出すこととなる．Q に対し，$Q(\partial_y)$ を V^* 上の定数係数線型偏微分作用素で $Q(\partial_y)e^{\langle x,y\rangle}=Q(x)e^{\langle x,y\rangle}$ となるものを取る．このとき，もともとの局所関数等式を用いることで,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_j}|P(x)|^{s-\psi-\delta}Q(x)f(x)\,dx &= (2\pi i)^{-d}\sum_{i=1}^{\nu}\gamma_{ij}(s-\psi)\int_{\Omega_i^*}|P^*(y)|^{(\delta+\psi-s)-\delta^*}Q(\partial_y)\widehat{f}(y)\,dy \\
&= (-2\pi i)^{-d}\sum_{i=1}^{\nu}\gamma_{ij}(s-\psi)\int_{\Omega_i^*}Q(\partial_y)\left(|P^*(y)|^{(\delta+\psi-s)-\delta^*}\right)\widehat{f}(y)\,dy
\end{aligned}$$

とい等式が得られる．ここで,

$$b^*_{\psi\otimes\alpha}(s^*):\mathbb{C}[\Omega]_{\psi\otimes\alpha}\longrightarrow\mathbb{C}[\Omega^*]_{\psi\otimes\alpha},\quad Q\longmapsto\frac{Q(\partial_y)P^*(y)^{s^*-\delta^*}}{P^*(y)^{s^*-\delta^*}}$$

という写像を考えよう．これは，$T\times K$ の作用と整合的な線形写像（絡作用素）であるから，正規直交基底 $w_{\alpha,i}$ を取ったときには，$b^*_{\psi\otimes\alpha}(s^*)$ は，$\dim\mathcal{H}^{(\psi)}_\alpha$ $(=\mathbb{C}[\Omega]_{\psi\otimes\alpha}, \mathbb{C}[\Omega^*]_{\psi\otimes\alpha}$ における $\psi\otimes\alpha$ の重複度）をサイズとする $\mathbb{C}[s^*]$-係数行列とみなすことができる．α が自明な表現 $\mathbf{1}$ のときには，$\mathbb{C}[\Omega]_{\psi\otimes 1}$ はある相対不変式 P^k で張られるから， $\dim\mathcal{H}^{(\psi)}_{\mathbf{1}}=1$ であり，この場合が通常の b-関数である．重複度が >1 のときには，b-行列とでも呼ぶべきものになる．この b-行列を用いると，局所関数等式が

$$\int_{\Omega_j}|P(x)|^{s-\psi-\delta}\,Q(x)f(x)\,dx$$
$$=(-2\pi i)^{-d}\sum_{i=1}^{\nu}\gamma_{ij}(s-\psi)\int_{\Omega_i^*}|P^*(y)|^{(\delta+\psi-s)-\delta^*}\left(b^*_{\psi\otimes\alpha}(\delta+\psi-s)Q\right)(y)\widehat{f}(y)\,dy$$

のように得られる．$b^*_{\psi\otimes\alpha}(\delta+\psi-s)$ の成分は s の多項式であり，しばしば，ガンマ因子 $\gamma_{ij}(s-\psi)$ の変数をシフトすることで取り込まれる．§3.2 で見た調和多項式付き Epstein ゼータ関数の関数等式のガンマ因子における $\frac{d}{2}$ のずれは，このようにして生じている．$b^*_{\psi\otimes\alpha}(s^*)$ の明示的計算は，重複度が 1 より大きいときには，なかなか困難である．

§5.1 で例として掲げた

$$G=GL_1\times SO_m\times SL_n,\quad V=M_{m,n},\rho(t,k,h)v=tkv\,{}^th,\quad K=SO_m,\quad H=SL_n$$

が重複度 1 となる典型的な例であり，[40] で詳しく調べてある．この場合のゼータ関数は，§3.3 で紹介した正定値実対称行列に付随する Maass のゼータ関数で，SL_n の保型形式を定数関数にとって得られるものである．

5.3　保型形式付きゼータ関数への拡張： Symmetric Case

今度は，

Symmetric Case:　$\Omega_i\cong G^+/G^+_{v_i}=$（必ずしも Riemannian とは限らない）対称空間，

すなわち， G は reductive, かつ，

すなわち，G の位数 2 の自己同型 σ があって，

G_v の連結成分と $G^\sigma:=\{g\in G\mid\sigma(g)=G\}$ が一致

を考えよう．そして，$\eta:G^+/\Gamma\longrightarrow\mathcal{H}_\pi$ を タイプ (ω,π) の保型形式，すなわち，次の条件を満たしているとする：

- π は G^+ の極大コンパクト部分群 K^+ の既約ユニタリ表現，$\mathcal{H}_\pi$ はその表現空間で

$$\eta(kg)=\pi(k)\eta(g)\quad(k\in K^+)$$

を満たす．

- η は G^+ 上の両側不変微分作用素の環 $\mathcal{Z}(G^+)$ の緩増加な同時固有関数で，ω はその固有値で定まる環準同型

$$\omega : \mathcal{Z}(G^+) \to \mathbb{C}, \quad D\eta = \omega(D)\eta \quad (D \in \mathcal{Z}(G^+))$$

である．

このとき，Oshima 等による Poisson 変換の理論 ([31], [32]) によって，広義の球関数の空間

$$\left\{ \Psi : \Omega_i \longrightarrow \mathcal{H}_\pi \;\middle|\; \overline{D}(\Psi) = \omega(D)\Psi \ (D \in \mathcal{Z}(G^+)),\ \Psi(kx) = \pi(k)\Psi(x) \right\},$$
（$\overline{D}$ は D が引き起こす Ω_i 上の G^+-不変微分作用素）

の基底 $\Psi_1^{(i)}(x), \ldots, \Psi_{d_i}^{(i)}(x)$ が構成でき，先に述べたゼータ関数の積分表示が得られる．この基底に関して $\mathcal{P}_{\eta,v}(x)$ を

$$\mathcal{P}_{\eta,v}(x) := \int_{G_v^+/\Gamma_v} \eta(g_{x,v}h)\, d_v h. = \sum_{j=1}^{d_i} c_j^{(i)}(\eta; v)\Psi_j^{(i)}(x).$$

と展開するならば，§5.1 のレシピに従って，

$$Z(\eta, L, f; s) = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{d_i}\left(\sum_{v \in \Gamma\backslash(L\cap\Omega_i)} \frac{c_j^{(i)}(\eta, v)}{|P(v)|^s}\right) \cdot \left(\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta}\, \Psi_j^{(i)}(x) f(x)\, dx\right)$$

の形のゼータ関数, 局所ゼータ関数が得られる．この場合も, 局所ゼータ関数 $\displaystyle\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta}\, \Psi_j^{(i)}(x) f(x)\, dx$ に対して，課題 5.1 を解かねばならない．そのポイントは,

> B を G の Borel 部分群としたとき，G の表現 ρ を B に制限して得られる $(B, \rho|_B, V)$ も，概均質ベクトル空間となる

ということである．

一般的な設定での解説は準備が大変すぎるので，例で説明しよう．

● **Symmetric Case の例** (GL_n, ρ, Sym_n)

$$G = GL_n, \quad V = Sym_n, \quad \rho(g)x = gx\,{}^t g$$

で与えられる概均質ベクトル空間を考える．基本相対不変式は $P(v) = \det v$ で与えられ，$\Omega = \{v \in V \mid P(v) \notin 0\}$ である．この空間は，仮定 1, 3, 4 を満足する．$n \geq 3$ としよう．このとき，仮定 2 も満たされる．($n = 2$ のときは，仮定 2 が成立しない点 $v \in \Omega \cap V(\mathbb{Q})$ が存在し，事情が複雑になる．) $v \in \Omega$ に対し,

$$G_v = O(v) := \left\{ g \in G \;\middle|\; {}^t g v g = v \right\} \ : \ (\text{対称行列 } v \text{ の直交群})$$

であり，

$$\sigma_v : G \longrightarrow G, \quad \sigma_v(g) = v^{-1}\,{}^t g^{-1} v$$

とおくと，σ_v は G の位数 2 の自己同型で

$$G_v = O(v) = \{ g \in G \mid \sigma_v(g) = g \}$$

となるから，Symmetric Case の一例である．

$$\Omega_i = \{ v \in V(\mathbb{R}) \mid v \text{ の正固有値は } i \text{ 個，負固有値は } n-i \text{ 個 } \}$$

とおくと，

$$\Omega(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega_i$$

が連結成分への分解である．

保型形式 η は $K^+ = SO_n(\mathbb{R})$ の自明な 1 次元表現に従い，$\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$-不変だとしよう．したがって，$\eta$ は $SO_n(\mathbb{R})\backslash GL_n(\mathbb{R})^+/SL_n(\mathbb{Z})$ 上の $\mathbb{C}$-値関数である．

B を GL_n に含まれるすべての下三角行列のなす群とする．B は GL_n の Berel 部分群である．このとき，ρ の B への制限は概均質ベクトル空間を与え，基本相対不変式と開軌道は

$$\text{基本相対不変式} = \Delta_1(x), \Delta_2(x), \ldots, \Delta_n(x), \quad \Delta_i(x) = i \text{ 次首座小行列式},$$

$$\Omega_B = \rho(B)\text{-開軌道} = \{ x \in V \mid \Delta_1(x) \cdots \Delta_n(x) \neq 0 \},$$

で与えられる．$\Omega_B(\mathbb{R})$ の連結成分への分解は

$$\Omega_B(\mathbb{R}) = \bigcup_{\epsilon \in \{\pm 1\}^n} \Omega_{B,\epsilon}, \quad \Omega_{B,\epsilon} := \{ x \in V(\mathbb{R}) \mid \mathrm{sgn}(\Delta_i(x)) = \epsilon_i \ (1 \leq i \leq n) \}$$

となる．ここで，

$$\mathcal{E}_i := \{ \epsilon \in \{\pm\}^n \mid \sharp\{ j \mid \epsilon_j = +1 \} = i \}$$

とおくと，

$$\bigcup_{\epsilon \in \mathcal{E}_i} \Omega_{B,\epsilon} \overset{\text{open dense}}{\subset} \Omega_i$$

となっている．

さて，このとき，Poisson 変換の理論によって，広義の球関数の空間の基底 $\Psi_1^{(i)}(x), \ldots, \Psi_{d_i}^{(i)}(x)$ が $\Delta_1(x), \Delta_2(x), \ldots, \Delta_n(x)$ から構成できるのである．実際，$\epsilon \in \mathcal{E}_i$ に対し，

$$\Psi_\epsilon(x) = \int_{SO_n(\mathbb{R})} \left| \Delta(kx\,{}^t k) \right|_\epsilon^\lambda dk, \quad |\Delta(x)|_\epsilon^\lambda := \begin{cases} \prod_{j=1}^n |\Delta_j(x)|^{\lambda_j} & (x \in \Omega_{B,\epsilon}) \\ 0 & (x \notin \Omega_{B,\epsilon}) \end{cases}$$

とおくならば，generic な $\lambda \in \mathbb{C}^n$ に対しては，これらが Ω_i 上の広義の球関数空間の基底を与える ($\Psi_j^{(i)}$ の上付きの (i) は ϵ で定まるから，略す)．ここで，パラメータ λ は η の固有値を与える $\omega : \mathcal{Z}(G^+) \longrightarrow \mathbb{C}$ で定まっている．以下，これが成り立つ generic な λ を考えることとする．

ゼータ積分を考えるために，η は G^+ 上で有界だとしよう．（例えば，η が Eisenstein 級数だとすると，非有界であり，ゼータ積分は一般には収束しない．）このとき，

$$Z(\eta, L, f; s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}_i} \left(\sum_{v \in \Gamma \backslash (L \cap \Omega_i)} \frac{c_\epsilon(\eta, v)}{|P(v)|^s} \right) \cdot \left(\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta} \, \Psi_\epsilon(x) f(x) \, dx \right)$$

の形の積分表示が得られる．この場合，課題 5.1 は $\displaystyle\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta} \, \Psi_\epsilon(x) f(x) \, dx$ の満たす球関数付き局所関数等式の証明と適切な b-関数の一般化を考えることである．

球関数付き局所ゼータ関数は

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\frac{n+1}{2}} \, \Psi_\epsilon^{(i)}(x) f(x) \, dx &= \int_{\Omega_i} |\det(x)|^{s-\frac{n+1}{2}} \left(\int_{SO_n(\mathbb{R})} \left| \Delta(kx\,{}^t k) \right|_\epsilon^\lambda dk \right) f(x) \, dx \\
&= \int_{\Omega_i} |\det(x)|^{s-\frac{n+1}{2}} \, |\Delta(x)|_\epsilon^\lambda \left(\int_{SO_n(\mathbb{R})} f({}^t kxk) dk \right) dx \\
&= \underbrace{\int_{\Omega_{B,\epsilon}} |\det(x)|^{s+\lambda_n-\frac{n+1}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} |\Delta_j(x)|^{\lambda_j} \left(\int_{SO_n(\mathbb{R})} f({}^t kxk) dk \right) dx}_{(B,\, \rho|_B,\, V) \text{ の局所ゼータ関数}}
\end{aligned}$$

と変形することができる．ここで，最右辺は $(B, \rho|_B, V)$ に対する §2.2.2 の意味での局所ゼータ関数に他ならないから，その関数等式は定理 2.2.3 に帰着する．b-関数も同じく，$(B, \rho|_B, V)$ に対するそれに一致する．この関数等式の明示形は [38, Theorem 3.2] にある．

注意 (1) 対称空間に付随する概均質ベクトル空間に対する $\mathbb{R}$ 上の局所関数等式は，Bopp-Rubenthaler [3] でより一般に主系列表現の行列成分に対し扱われている．

(2) 議論のカギとなった球関数空間の有限次元性は，対称空間より一般に球等質空間に対して成立する．この場合の局所関数等式の理論（$\mathbb{Q}_p$ 上も含み，表現も一般化されている）は W.-W. Li ([23], [24]) によって展開されている．

(3) 球等質空間に対する大域ゼータの理論はできていないようだが，可能に思われる．

(4) §3.3 で紹介した Maass の保型形式付きゼータ関数 (3.1) は，上で述べた設定そのままではカバーされないが，少し一般化することで，取り扱える．$Q \equiv 1$ のケースは [41] で，$\eta \equiv 1$ のケースは [40] で調べられている．一方，不定値二次形式に対する [27] で扱われた Maass のゼータ関数は，上の Symmetric Case の設定に含まれている．

(5) 鈴木美裕氏の報告 [58] では，2 元 3 次形式の空間への GL_2 の作用で得られる概均質ベクトル空間に Maass 形式を付けた場合に関する Hough の研究，$GL_2 \times GL_2 \times GL_2$ が $M_2 \oplus M_2 \oplus M_2$ に作用して得られる概均質ベクトル空間に保型形式を付けた場合に関する鈴木、若槻両氏の研究が解説され，その数論的応用が与えられている．これらの例では，ゼータ積分そのものを考察の対象としており，関数等式を満たす Dirichlet 級数を取り出すという本節のテーマとはいささか方向性が異なっている．とくに，前者の Hough の研究は，この節で扱った Symmetric Case の枠にははまらず，2 元 3 次形式

の空間の場合に，関数等式を満たす保型形式付きゼータ関数を Dirichlet 級数としてうまく取り出せるかについては，疑問がある．後者の空間を本節の立場で議論したものには，[43] がある．

6　非概均質的関数等式

以上のような局所，大域ゼータ関数の関数等式の理論で，概均質性がうまく効いている（言い換えると，等質空間上の相対不変超関数は対応する指標を定めれば定数倍を除いて一意的だという事実をうまく利用できるような設定である）ことは杉山 [57] でも指摘されているところである．では,

多項式 $P(x)$ で関数等式を満たすような（局所）ゼータ関数を与えるものは，概均質ベクトル空間の相対不変式に限るのだろうか？

という問いを立ててみよう．すると，その答えは,

NO!

である．実際，非概均質的な多項式系 $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ で関数等式を満たす局所ゼータ関数を与えるものが，次のように少なからず存在する．

- ホマロイダル多項式 $P_1(x)$ とその極化 $P_2(x, y)$ ([20])
- 既に存在する局所関数等式から新しい（一般には非概均質的な）局所関数等式を作り出す構成法がある
  (a) 二次写像による関数等式の引き戻し ([44], [19]),
  (b) 2 つの関数等式の貼り合わせ ([46])

だが，これらの結果は，このような例では局所関数等式を証明できると言っているだけで，まだ非概均質的な場合に，関数等式が成立する理由を説明するような理論は今のところ持ち合わせていない．だが，概均質ベクトル空間の枠組みを超えても，よい理論がありそうだという期待もあるので，小木曽岳義氏との共同研究 ([19], [20]) の結果から、2 つの例を紹介しておく．

6.1　ホマロイダル多項式とその極化

定義 6.1　1.　n 変数の斉次有理関数　$P(x) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が**ホマロイダル**であるとは,

$$\phi_P : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \phi_P(x) := \frac{1}{P(x)} \mathrm{grad} P(x)$$

が $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への双有理写像を与えるということである．

2.　ホマロイダル有理関数 $P(x)$ に対して,

$$P^*(\phi_P(x)) = 1/P(x)$$

を満たす有理関数 $P^*(x^*)$ を P の**乗法的ルジャンドル変換**という．このとき，$P^*(x^*)$ もホマロイダルで，その乗法的ルジャンドル変換はもとの $P(x)$ に一致する．

ホマロイダルとは聞きなれない用語だが，Oxford English Dictionary には，

homaloidal, adj. Of or relating to straight lines and planes; satisfying the axioms of Euclidean geometry, flat.

とある．有理写像 ϕ_P の像が $\mathbb{C}^n$ の開集合で flat だという感じなのであろうか．

注意 6.2 概均質ベクトル空間が正則であるとは，ホマロイダルな相対不変式を持つことであった（定義 1.2.1）．

さて，概均質ベクトル空間の相対不変式でないホマロイダルな多項式を探すのは意外と難しい．（だが，小木曽岳義，中島秀斗両氏によって，色々見つかっている．）

とくに，ホマロイダル多項式であって，その乗法的ルジャンドル変換もまた多項式となるものはきわめて珍しく，Etingof-Kazhdan-Polishchuk [8] は，そのようなものは正則概均質ベクトル空間から得られるものに限るか？と問題を立て，多項式の次数が 3 以下ならば，正しいことを示している．しかし，次数 4 では反例があることが明らかになっている ([19], §6.2 を見よ．現時点では，これが唯一の反例である).

定義 6.3 有理関数 $P(x) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の**極化**とは

$$\tilde{P}(x, y) = y_1 \tfrac{\partial P(x)}{\partial x_1} + \cdots + y_n \tfrac{\partial P(x)}{\partial x_n}$$

のことである．$P(x)$ がホマロイダルならば，$\tilde{P}(x, y)$ もホマロイダルである．

さて，$i, j = 0, 1$ に対し，

$$\Omega_{ij} = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;\Big|\; (-1)^i P(x) > 0, (-1)^j \tilde{P}(x, y) > 0 \Big\},$$
$$\Omega^*_{ij} = \Big\{ (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;\Big|\; (-1)^i P^*(x^*) > 0, (-1)^j \tilde{P}^*(x^*, y^*) > 0 \Big\}$$

とおくと，

$P(x) = n$ 変数 d 次斉次ホマロイダル多項式，　$\tilde{P}(x, y) = P(x)$ の極化，
$P^*(x^*) = P(x)$ の乗法的ルジャンドル変換，　$\tilde{P}^*(x^*, y^*) = P^*(x^*)$ の極化

とする．このとき，

$$\int_{\Omega_{ij}} |P(x)|^s \left|\tilde{P}(x, y)\right|^t \overbrace{|H_P(x)|}^{P\text{ の Hessian}} \widehat{f}(x, y) dx\, dy$$
$$= \sum_{k,\ell=0,1} \gamma^{k\ell}_{ij}(s, t) \int_{\Omega^*_{k\ell}} |P^*(y^*)|^{s^*} \left|\tilde{P}^*(y^*, x^*)\right|^{t^*} f(x, y) dx^*\, dy^*,$$
$$s^* = (d-1)s + (d-2)(t+n), \quad t^* = -ds - (d-1)(t+n).$$

という形の局所関数等式が成立する．ここで，$\gamma_{ij}^{k\ell}(s,t)$ は d,n によって明示的に表せる．

6.2 Clifford 4 次形式

[19] では，m 次実対称行列 $S_1,\dots,S_n$ で

$$S_i^2 = I_m \qquad (1 \le i \le n),$$
$$S_iS_j = \begin{cases} -S_jS_i & (1 \le i,j \le p \ \text{または}\ p+1 \le i,j \le n) \\ S_jS_i & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

を満たすものに対し，

$$P(x) = P(x_1,\dots,x_m) := \sum_{i=1}^{p}(xS_i\,{}^tx)^2 - \sum_{j=p+1}^{n}(xS_j\,{}^tx)^2$$

という 4 次形式を考え，**Clifford 4 次形式**と呼んだ．それは，上の S_i たちの関係式が，二次形式 $x_1^2+\cdots+x_p^2$ の Clliford 代数と $x_{p+1}^2-\cdots-x_n^2$ の Clifford 代数のテンソル積の m 次元表現を与えており，逆にそのような Clifford 代数 2 つのテンソル積の m 次元表現からこの種の 4 次形式が無限系列として得られるからである．

> $P(x)$ はホマロイダルで，その乗法的ルジャンドル変換は $2^{-8}P(x^*)$．　そして，$P(x)$ は少数の低次元の例外を除いて（とくに $n \ge 12$ ならば常に），既約な非概均質的多項式である．

これより，Clifford 4 次形式 $P(x)$ は，§6.1 で触れた Etingof-Kazhdan-Polishchuk の問いに対する否定的な例となっていることが分かる．

$P(x)$ に対して，局所ゼータ関数を

$$\Phi_i(f;s) := \int_{(-1)^iP(x)>0} |P(x)|^s f(x)\,dx \quad (i=0,1,\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$$

と定義すると，$p, n-p>0$ のとき，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\Phi_0(\widehat{f};s)\\ \Phi_1(\widehat{f};s)\end{pmatrix} =& 2^{4s+m/2}\pi^{-4s-2-m/2}\Gamma(s+1)\,\Gamma\left(s+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(s+1+\frac{m-2n}{4}\right)\Gamma\left(s+\frac{m}{4}\right)\\ &\times\sin\pi s\begin{pmatrix}\sin\pi\left(s+\frac{n-2p}{2}\right) & -2\sin\frac{\pi p}{2}\cos\frac{\pi(n-p)}{2}\\ -2\sin\frac{\pi(n-p)}{2}\cos\frac{\pi p}{2} & \sin\pi\left(s-\frac{n-2p}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_0\left(f;-\frac{m}{4}-s\right)\\ \Phi_1\left(f;-\frac{m}{4}-s\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

という局所関数等式が成立つ（[19, Theorem 2.13]）．$p=n$ の場合には，$\Phi_1=0$ であり，関数等式は，

$$\begin{aligned}\Phi_0(\widehat{f};s) =& 2^{4s+m/2}\pi^{-4s-2-m/2}\Gamma(s+1)\,\Gamma\left(s+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(s+1+\frac{m-2n}{4}\right)\Gamma\left(s+\frac{m}{4}\right)\\ &\times\sin\pi s\sin\pi\left(s-\frac{n}{2}\right)\Phi_0\left(f;-\frac{m}{4}-s\right)\end{aligned}$$

となる．

Clifford 4 次形式に対しては，2 次形式の Epstein, Siegel の 2 次形式のゼータ関数の種に関する平均に相当する大域ゼータ関数が定義され，関数等式を証明することができる．これは，直交群の保型形式と関連があると予想されるが，その兆候を論じたノートとして [45] をあげておく．

注意 6.4 $p = n$ の場合，上の局所関数等式は，[9, Theorem XVI.4.3] で示された（[4] も見よ）．これが，非概均質的局所関数等式の最初の例である．この場合には，大域ゼータ関数の取り扱いは難しくなく，[1] で論じられている．

参考文献

[1] D.Achab, Zeta functions of Jordan algebras representations *Ann. Inst. Fourier*, **45**(1995), 1283–1303.

[2] I. N. Bernstein and S. I. Gelfand, Meromorphic property of the function P^λ, *Funct. Anal. Appl.* **3**(1969),68–69.

[3] N. Bopp and H. Rubenthaler, *Local zeta functions attached to the minimal spherical series for a class of symmetric spaces*, Memoirs of AMS, vol. 174, N° 821, 2005.

[4] J.-L. Clerc, Zeta distributions associated to a representation of a Jordan algebra, *Math. Z.* **239**(2002), 263-–276.

[5] R. Cluckers and A. Herremans, The fundamental theorem of prehomogeneous vector spaces modulo pm (with an appendix by F. Sato), *Bull. Soc. math. France* **135**(2007), 475=–494.

[6] J. Denef and A. Gyoja, Character sums associated to prehomogeneous vector spaces, *Compositio Math.* **113**(1998), 273—346.

[7] P. Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. II, *Math. Ann.* **63**(1906), 205-–216.

[8] P. Etingof, D. Kazhdan and A. Polishchuk. When is the Fourier transform of an elementary function elementary? *Selecta Math.* **8**(2002), 27—66.

[9] J. Faraut and A. Koranyi, *Analysis of symmetric cones*, Oxford University Press, 1994.

[10] I. M. Gelfand and G. E. Shilov, *Generalized functions* Vol.**1**, Academic Press, New York, 1964.

[11] A. Gyoja, Theory of prehomogeneous vector spaces without regularity condition, *Publ. RIMS.* **27**(1991), 861–922.

[12] A. Gyoja, Bernstein-Sato's polynomial for several analytic functions, *J. Math. Kyoto Univ.* **33**(1993) 399–411

[13] Harich-Chandra, *Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups*, Lect. Notes in Math. No. **62**, Springer, 1968.

[14] E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der

Primzahlen (Erst Mitteilung), *Math. Z.* **1**(1918), 357—376.

[15] T. Kimura, *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 215, 2003, Amer. Math. Soc.

[16] T. Kimura, A classification theory of prehomogeneous vector spaces, *Adv. Stud. Pure Math.* **14**(1988), 223—256.

[17] T. Kimura, K. Ueda and T. Yoshigaki, A classification of 3-simple prehomogeneous vector spaces of nontrivial type, *Japan. J. Math.* **22**(1996), 159–198.

[18] M. Koecher, Über die Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, *J. reine angew. Math.* **192**(1953), 1–23.

[19] T. Kogiso and F. Sato, Clifford quartic forms and local functional equations of non-prehomogeneous type, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **23**(2016), 791–866.

[20] T. Kogiso and F. Sato, Local Functional Equations attached to the polarizations of homaloidal polynomials, *Kyushu J. Math.*, **72**(2018), 307–331.

[21] Y. Kurosawa, A classification of 3-simple prehomogeneous vector spaces with two irreducible components, *Tsukuba J. Math.* **36**(2012), 135—172.

[22] R. P. Langlands, Dirichlet series associated with quadratic forms, *Lect. Note Series of Math.* No. **544**, 236–268, Springer, 1976.

[23] W. -W. Li, *Zeta Integrals, Schwartz Spaces and Local Functional Equations*, Lecture Notes in Math. **2228**, Springer, 2018.

[24] W. -W. Li, Generalized zeta integrals on a certain prehomogeneous vector spaes, *Nagoya Math. J.* **249**(2013), 50–87.

[25] H. Maass, Spherical Functions and Quadratic Forms, *J. Indian Math. Soc.* **20**(1956), 117-–162

[26] H. Maass, Zetafunktionen mit Größencharakteren und Kugelfunktionen, in: *Math. Ann.* **134**(1957), 1—32

[27] H. Maass, Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik, *Math. Ann.* **138**(1959), 287—315

[28] H. Maass, Siegel's modular forms and Dirichlet series, *Lect. Note Series of Math.* No. **216**, Springer, 1971.

[29] G. D. Mostow, Self-adjoint groups, *Ann. of Math.* **62**(1955), 44–55.

[30] H. Nakashima, Functional equations of zeta functions associated with homogeneous cones, *Tôhoku Math. J.* **72**(2020), 349-–378.

[31] T. Oshima, Poisson transformations on affine symmetric spaces, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55**(1979), 323–327.

[32] T. Oshima and J. Sekiguchi, Eigenspaces of Invariant Differential Operators on an Affine Symmetric Space. *Invent. Math.* **57**(1980), 1–82.

[33] W. Roelcke, Über dir Wellengleichung bei Grenzkreisgruppenn eerster Art, *Sitzungsber.*

Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl.. 1953/55, 4, 161–267.

[34] H. Saito, Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces, *Nagoya Math. J.* **170**(2003), 1–31.

[35] F. Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations, *Tôhoku Math. J.* **34**(1982), 437–483.

[36] F. Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneos vector spaces III, *Ann. of Math.* **116**(1982), 177–212.

[37] F. Sato, On zeta functions of ternary zero forms. *J. Fac. SciU̇niv. Tokyo* **28**(1982), 585-–604.

[38] F.Sato: On functional equations of zeta distributions. *Adv. Studies in pure Math.* **15**(1989), 465–508.

[39] F. Sato, The Hamburger theorem for the Epstein zeta functions. *Algebraic Analysis* Vol.II, Academic Press, 1989, 789—807.

[40] F. Sato: The Maass zeta functions attached to positive definite quadratic forms, *Adv. Studies in pure Math.* **21**(1992), 409–443.

[41] F. Sato: Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms, *Proc. Ind. Acad. (K.G.Ramanathan memorial issue)* **104**(1994), 99–135.

[42] F. Sato: Zeta functions with polynomial coefficients associated with prehomogeneous vector spaces, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **45**(1996), 177–211.

[43] F.Sato: Zeta functions of $(\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{GL}_2, \mathbf{M}_2 \oplus \mathbf{M}_2)$ associated with a pair of Maass cusp forms, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **55**(2006), 77-–95.

[44] F. Sato, Quadratic maps and non-prehomogeneous local functional equations, *Comment. Math. Univ. Sact. Pauli* **56**(2007), 163–184.

[45] F. Sato, Hopf mappings and automorphic forms on orthogonal groups, 数理解析研究所講究録 No. 2055(2017), 45-64.

[46] F. Sato, Gluing local functional equations, Preprint, 2023.

[47] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* **65**(1977), 1–155

[48] M. Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, *Ann. of Math.* **100**(1974), 131–170.

[49] M. Sato, note by T. Shintani, translated by M. Muro, Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part) — The English translation of Sato's lecture from Shintani's note, *Nagoya Math. J.* **65**(1990), 1–34.

[50] A. Selberg, A new type of zeta functions connected with quadratic forms, Report of the Institute in the Theory of Numbers, Colorado, 1959, 207-210. (*Collected Paoers*, Vol, 1, Springer, 1989, pp. 473–474.)

[51] A. Selberg, Discontinuous groups and harmonic analysis, *Proc. Int. Congr. Math.*, Stockholm, 1962. (*Collected Paoers*, Vol, 1, Springer, 1989, pp. 493–505.)

[52] T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, *J. Math. Soc. Japan* **24**(1972), 132–188.

[53] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **22**(1976), 25–65.

[54] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen II, *Math. Z.* **44**(1939), 398–426.

[55] C. L. Siegel, *Advanced analytic number theory*, Lecture Notes, Tata Institute of Fundamental Research, 1961 （available online）.

[56] H. M. Stark, L-functions and character sums for quadratic forms (I), *Acta Arith.* **XIV**(1968), 35-–50.

[57] 杉山和成, 概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（1 変数の場合），本報告集，2023.

[58] 鈴木美裕，保型形式付き概均質ゼータ関数，本報告集，2023.

[59] 谷口隆, 例で学ぶ概均質ベクトル空間，本報告集，2023.

[60] 谷口隆, 本論のための準備，本報告集，2023.

[61] 都築正男, 新谷 2 重ゼータ関数，本報告集，2023.

[62] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, *Trans. Moscow Math. Soc.* **12**(1963), 340–403.

新谷 2 重ゼータ関数

都築正男（上智大学理工学部情報理工学科）

概 要

2 変数概均質ゼータ函数の一つの実例である「新谷 2 重ゼータ函数」を一般化し応用を与えた論文 [KTW] のうち, ゼータ函数の定義, 解析接続および函数等式に関わる基礎的な部分を中心に詳しい解説を行う.

1 導入

まず, 新谷 2 重ゼータ函数について紹介する. $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $A(m,n) = \{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid x^2 \equiv n \pmod{m}\}$ とおく. 新谷卓郎は論文 [新谷] において 2 重数列 $\#A(n,m)$ の母函数として, $(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ に関する 4 つの 2 重 Dirichlet 級数

$$\xi_i(s_1, s_2) := \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\#A(4m, (-1)^{i-1}n)}{m^{s_1}n^{s_2}} \quad (i = 1, 2),$$

$$\xi_i^*(s_1, s_2) := \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\#A(m, (-1)^{i-1}n)}{m^{s_1}(4n)^{s_2}} \quad (i = 1, 2)$$

を導入し研究した. この論文では 2 次型式の空間から生じる様々なゼータ函数について, 応用を含めた多彩な側面が扱われているが, 上記の 2 重ゼータの研究はその一部ということになる. ゼータ函数の基本である「解析接続」と「函数等式」という点に限定すれば, 新谷の結果は以下のようになる:

(i) (解析接続と可能な極の位置)

$$\Gamma\left(\tfrac{s_1+1}{2}\right)^{-1} s_1(2s_1-1)\zeta(2s_1) \times (s_2-1)(s_1-1)^2(2s_1+2s_2-3) \times \xi_i(s_1, s_2),$$

$$\Gamma\left(\tfrac{s_1+1}{2}\right)^{-1} s_1(2s_1-1)\zeta(2s_1) \times (s_2-1)(s_1-1)^2(2s_1+2s_2-3) \times \xi_i^*(s_1, s_2)$$

が全空間 $\mathbb{C}^2$ に正則に解析接続される.

(ii) (f_γ-函数等式)[1]

$$\begin{pmatrix} \xi_1\left(s_1, \frac{3}{2}-s_1-s_2\right) \\ \xi_2\left(s_1, \frac{3}{2}-s_1-s_2\right) \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}(s_1,s_2) \begin{pmatrix} \xi_1^*\left(s_1,s_2\right) \\ \xi_2^*\left(s_1,s_2\right) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

ここで, $\mathbf{\Gamma}(s_1,s_2)$ は次ぎで定義される：

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s_1+2s_2}\Gamma(s_2)\Gamma\left(s_1+s_2-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} \sin\pi\left(\frac{s_1}{2}+s_2\right) & \sin\frac{\pi s_1}{2} \\ \cos\frac{\pi s_1}{2} & \cos\pi\left(\frac{s_1}{2}+s_2\right) \end{pmatrix}$$

(iii) ($f_\gamma \circ f_\alpha^3$-函数等式) 4 つの函数

$$\begin{aligned} &(2\pi)^{-s_1}\sin\left(\frac{\pi s_2}{2}\right)^{-1}\Gamma(s_1)\zeta(2s_1)\times\xi_1(s_1,s_2), \\ &(2\pi)^{-s_1}\sin\left(\frac{\pi s_2}{2}\right)^{-1}\Gamma(s_1)\zeta(2s_1)\times\xi_1^*(s_1,s_2), \\ &(2\pi)^{-s_1}\Gamma(s_1)\zeta(2s_1)\times\xi_2(s_1,s_2), \\ &(2\pi)^{-s_1}\Gamma(s_1)\zeta(2s_1)\times\xi_2^*(s_1,s_2), \end{aligned}$$

の変換 $f_\gamma \circ f_\alpha^3 : (s_1,s_2) \to (1-s_1, s_1+s_2-\frac{1}{2})$ による不変性.

1.1 新谷の２重ゼータ函数導入の背景

n 次対称行列全体のベクトル空間 $V^{(n)}$ は代数群 $\mathbf{GL}_n$ の有理的左作用 $\mathbf{GL}_n \times V^{(n)} \ni (g,T) \mapsto gT^tg \in V^{(n)}$ によって概均質ベクトル空間になる. $0 \leqslant i \leqslant n$ に対して, 符号 $(i, n-i)$ の正則実対称行列全体 $V_i^{(n)}$ は $V^{(n)}(\mathbb{R})$ における単位元連結成分 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})^0$ の軌道を与える. 有理点 $x \in V^{(n)}(\mathbb{Q}) \cap V_i^{(n)}$ の「軌道密度」$\mu(x) > 0$ は体積比

$$\mu(x) := \left(\int_{\tilde{T}_x/\Gamma(x)} \mathrm{d}g\right) \Big/ \left(\int_T |\det y|^{-n(n+1)/2}\,\mathrm{d}y\right)$$

で定義される, ただし $T \subset V_i^{(n)}$ は相対コンパクト可側集合, $\widetilde{T}_x := \{g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})^0 \mid gx^tg \in T\}$ はその x による群への持ち上げ, $\Gamma(x) := \mathbf{SO}_n(x) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ は x の単数群であり、$\mathrm{d}g$ は $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ のハール測度 $|\det g|^{-n}\prod_{ij}\mathrm{d}g_{ij}$ を表す. $n \geqslant 3$ ならば $\mu(x)$ は有限な量となって, $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ 不変な $V^{(n)}(\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Z}$ 格子 $L \subset V^{(n)}(\mathbb{Q})$ に対して, 各符号に応じてゼータ函数

$$\zeta_i^{(n)}(s,L) = \sum_{x \in (L \cap V_i^{(n)})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})} \frac{\mu(x)}{|\det x|^s} \tag{1.2}$$

[1] f_γ, f_α などは §6 で定義する affine 変換の名称

が定義される[2]．$n = 2$ の場合でも，$i = 0, 2$ ならば $\mathbf{SO}_2(x)$ はコンパクトなので $\mu(x)$ は有限となりゼータ函数が同じように定義されるが，$i = 1$ のとき $\mathbf{SO}_2(x) \cong \mathbf{SO}(1,1) \cong \mathbb{R}^\times$, $\mu(x) = \infty$ となりこの定義は破綻する．そこで困難を回避するために，新谷が取った方法の背後にあるアイディアは次のようなものであったと思われる：

問題となるゼータ函数に関連するゼータ積分 (*cf.* [杉山, §3])

$$\int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^0/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})} |\det g|^s \sum_{x \in L; \det(x) \neq 0} f(gx^tg)\,\mathrm{d}g \tag{1.3}$$

は $-\det x \in (\mathbb{Q}^\times)^2$ の寄与により発散してしまう．そこで $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^0$ の不分岐 Eisenstein 級数 $E(g, w)$ ($g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^0$, $w \in \mathbb{C}$) で修正した

$$\int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^0/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})} |\det g|^s E(g, w) \sum_{x \in L: \det(x) \neq 0} f(gx^tg)\,\mathrm{d}g \tag{1.4}$$

を考えてみる． これもこのままでは同じ理由で発散するが，w によって (1.3) には無い新たな自由度が獲得された．よく知られているように，$E(g, w)$ は $w = 1$ で 1 位の単純極を有し，$\mathrm{Res}_{w=1} E(g, w)$ は $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^0$ 上の定数函数になるから，2 変数 (s, w) の (1.4) を「然るべく正規化 (発散の繰り込み)」し $w = 1$ で留数を取ると所望の (1.3) の「正しい代替物」が得られるだろう．

この発散積分 (1.4) の「正規化」のひとつ（Eisenstein 級数の「unfolding」= Frobenius 相互律の級数版）の結果が上で定義を振り返った「2 重ゼータ函数」あるいは，もっと正しくは，それをコントロールする「2 変数ゼータ積分」というものになる，という見方ができる．結論をいえば，$\xi_i^*(s_1, s_2)$ は (1.4) で $L = V^{(2)}(\mathbb{Z})$, $s = s_1 + 2s_2$, $w = 2s_1 - 1$ としたものと密接に関連しており，$\mathrm{Res}_{s_1=1}\xi_2^*(s_1, s - \frac{s_1}{2})$(を微修正したもの) が $\zeta_1^{(2)}(s, V^2(\mathbb{Z}))$ の正規化ということになる．詳しくは，§8 を参照のこと．(§8 は本論とは独立.)

(1.4) には，多変数概均質ゼータ ([佐藤 82-2], *cf.* [佐藤]) や保型型式の周期積分付き概均質ゼータ ([佐藤 94], *cf.* [鈴木 (美)]) の原型を見ることが出来る．

1.2 [KTW] の結果の紹介 (有理数体の場合)

次に，このノートの結論部 (§6, §5.3) を，基礎体を $\mathbb{Q}$ の場合に限定したうえで，なるべく初等整数論的な用語で書き直して紹介する．$M \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

[2]後に [伊吹山・齋藤 I] は，このゼータ函数が「簡単なゼータ函数」で明示的に表されることを証明した．この公式発見の経緯なども含めて [伊吹山, §4] 参照.

$S(M)$ を M の素因数全体の集合とする. 自然数 q を与えたとき $M^{(q)}$ を q と互いに素であるような, M の最大の正の約数とする.

$$T_2 := \{1,3,5,7\}, \quad T_p := \{+1,-1\} \quad (p \text{ は奇素数})$$

とおく [3]. N を平方因子をもたない正の整数として, $T_N := \prod_{p\in S(N)} T_p$ とおく. ($N=1$ の場合, $T_N = \emptyset$ である). $N>1$ の場合, $j=1,2$, N の正の約数 Q および $\mathbf{d} = (d_p)_{p\in S(N)} \in T_N := \prod_{p\in S(N)} T_p$ に対して, 次の 2 重級数を考える:

$$\xi_j^N(s_1,s_2,Q,\mathbf{d}) := \sum_{(m,n)\in X_N(j,\mathbf{d})} \frac{\#A(m,nQ)}{m^{s_1}|nQ^{-1}|^{s_2}}, \tag{1.5}$$

$$\widetilde{\xi_j^N}(s_1,s_2,Q,\mathbf{d}) := 2^{1-\#S(N)} \sum_{(m,n)\in X_N} \sum_{0<l|N} \omega_{j,Q,\mathbf{d}}(nl) \frac{\#A(m,nl)}{m^{s_1}|nl^{-1}|^{s_2}} \tag{1.6}$$

ここで, X_N は N と互いに素な整数の対 $(m,n) \in \mathbb{Z}_{>0} \times (\mathbb{Z}-\{0\})$ 全体の集合, $X_N(j,\mathbf{d})$ は $(m,n)\in X_N$ であって次の条件

$$\left(\frac{n}{p}\right) = d_p \quad (p \in S(N)),$$
$$n \equiv d_2 \pmod 8 \quad (\text{if } 2 \in S(N)),$$
$$(-1)^{j-1} n > 0$$

を満たすもの全体の集合であり, $\omega_{j,Q,\mathbf{d}}(n)$ は次で定義される完全乗法的函数である：

$$D := \begin{cases} Q(-1)^{\frac{Q^{(2)}-1}{2}}(-1)^{\frac{d_2-1}{2}} & (2 \mid N), \\ Q(-1)^{\frac{Q-1}{2}} & (2 \nmid N) \end{cases}$$

とおく. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(n,2N)=1$ の場合

$$\omega_{j,Q,\mathbf{d}}(n) = \left(\frac{D}{|n|}\right) \operatorname{sgn}^{j-1}(n) \operatorname{sgn}(n)^{\frac{Q^{(2)}-1}{2}}.$$

素数 $q \in S(N) \cup \{2\}$ に対しては,

$$\omega_{j,Q,\mathbf{d}}(q) = \begin{cases} d_q \left(\frac{D^{(q)}}{q}\right), & (q \neq 2), \\ \left(\frac{2}{Q^{(2)}d_2}\right), & (q=2,\ 2 \mid N), \\ \left(\frac{2}{Q}\right), & (q=2,\ 2 \nmid N) \end{cases}$$

[3] T_2, T_p は然るべく $\mathbb{Z}_p^\times/(\mathbb{Z}_p^\times)^2$ の代表元と対応させられる

$N = Q = 1$ の場合, $T_N = \emptyset$ なので $\mathbf{d}$ は無いが, 記法的に $\mathbf{d}$ を残し $\xi_j^1(s, Q, \delta)$, $\widetilde{\xi_j^1}(s, Q, \mathbf{d})$ を上と同様, $\mathbf{d}$ に関わる条件をすべて除いて定義する. すると,

$$\xi_j^1(s, Q, \mathbf{d}) = 2^{2s_2-1}\,\xi_j^*(s), \quad \widetilde{\xi_j^1}(s, D, \mathbf{d}) = \xi_1^*(s) + (-1)^{j-1}\xi_2^*(s)$$

なので, $\xi_j^N(s, Q, \mathbf{d})$ は新谷の $\xi_j^*(s)$ の一般化であることに注意する. 一般に, $\widetilde{\xi_j^N}(s, Q, \mathbf{d})$ は $\xi_k^N(s, Q', \mathbf{d}')$ 達の交代和で表せることが容易に分かる.

$$P(s) := (s_1 - 1)^2(s_2 - 1)(s_1 + s_2 - \tfrac{3}{2})$$

とする. $\zeta^N(s) = \prod_{(p,N)=1}(1 - p^{-s})^{-1}$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ とする.

定理 1.1 ([KTW]+α, [平本])

(1) 任意の平方因子をもたない整数 $N > 0$, $0 < Q|N$, $\mathbf{d} \in T_N$, $j = 1, 2$ に対して,

$$P(s)\,\xi_j^N(s, Q, \mathbf{d}), \quad P(s)\,\widetilde{\xi_j^N}(s, Q, \mathbf{d})$$

は $\mathbb{C}^2$ 全体に正則に解析接続される.

(2) $2 \mid N$ の場合, ベクトル値函数

$$\boldsymbol{\Xi}^N(s) = \left(\frac{\zeta^N(2s_1)}{\zeta^N(s_1)}\,\widetilde{\xi_j^N}(s, Q, \mathbf{d})\right)_{(j,Q,\mathbf{d})}$$

に対して, 次の 2 つの函数等式が成り立つ:

$$\boldsymbol{\Xi}^N(f_\beta(s)) = \mathsf{B}_N(s)\,\boldsymbol{\Xi}^N(s),, \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{\Xi}^N(f_\gamma(s)) = \mathsf{C}_N(s)\,\boldsymbol{\Xi}^N(s),, \tag{1.8}$$

ただし, f_β, f_γ は

$$f_\beta : (s_1, s_2) \mapsto \left(s_1 + s_2 - \tfrac{1}{2}, 1 - s_2\right), \tag{1.9}$$

$$f_\gamma : (s_1, s_2) \mapsto \left(s_1, \tfrac{3}{2} - s_1 - s_2\right) \tag{1.10}$$

であり, $\mathsf{B}_N(s) = \bigotimes_{p \in S(N) \cup \{\infty\}} \mathsf{B}_p(s)$, $\mathsf{C}_N(s) = \bigotimes_{v \in S(N) \cup \{\infty\}} \mathsf{C}_v(s)$ と次の条件で決まる行列 $\mathsf{B}_v(s)$, $\mathsf{C}_v(s)$ 達のクロネッカー積で書ける行列である：

$$\mathsf{B}_\infty(s)\mathsf{C}_\infty(s)\mathsf{B}_\infty(s) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right], \ \mathsf{B}_\infty(s)\mathsf{C}_\infty(s) = \frac{\pi^{s_1-\frac{1}{2}}}{2}\begin{bmatrix} \frac{\Gamma(\frac{1-s_1}{2})}{\Gamma(\frac{s_1}{2})} & \frac{\Gamma(\frac{1-s_1}{2})}{\Gamma(\frac{s_1}{2})} \\ \frac{\Gamma(\frac{2-s_1}{2})}{\Gamma(\frac{s_1}{2})} & \frac{\Gamma(\frac{2-s_1}{2})}{\Gamma(\frac{s_1}{2})} \end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{B}_p(s)\mathsf{C}_p(s)\mathsf{B}_p(s) &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \left(\frac{-1}{p}\right) & -\left(\frac{-1}{p}\right) \\ 1 & -1 & -\left(\frac{-1}{p}\right) & \left(\frac{-1}{p}\right) \end{bmatrix}, \\
\mathsf{B}_p(s)\mathsf{C}_p(s) &= \operatorname{diag}\left(\tfrac{1-p^{-s_2}}{1-p^{-1+s_2}}, \tfrac{1+p^{-s_2}}{1+p^{-1+s_2}}, p^{-s_1+\frac{1}{2}}, p^{-s_2+\frac{1}{2}}\right), \\
\mathsf{B}_2(s)\mathsf{C}_2(s)\mathsf{B}_2(s) &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \\
\mathsf{B}_2(s)\mathsf{C}_2(s) &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & -b_2 & b_2 & -b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 & b_3 \\ b_2 & -b_2 & b_2 & -b_2 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & b_1 \\ -b_2 & b_2 & -b_2 & b_2 \\ -b_3 & -b_3 & -b_3 & -b_3 \\ b_2 & -b_2 & b_2 & -b_2 \end{bmatrix}, \\
B_{21} &= 8^{\frac{1}{2}-s_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = 8^{\frac{1}{2}-s_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
b_1 = \frac{1-2^{-s_1}}{1-2^{-1+s_1}}, \quad b_2 = 4^{\frac{1}{2}-s_1}, \quad b_3 = \frac{1+2^{-s_1}}{1+2^{-1+s_1}}.
$$

$S(N)$ は N の素因子の集合で, Kronecker 積は添え字 $(j, Q, \mathbf{d})$ を直積集合

$$
\{+1, -1\} \times \prod_{p \in S(N)} (\{0,1\} \times T_p)
$$

の要素 $((-1)^{j-1}, ((\mathrm{ord}_p(Q), d_p))_{p\in S(N)})$ と同一視して定義される.

(3) $2 \mid N$ の場合, $f_\beta \mapsto \mathbf{B}_N(s)$, $f_\gamma \mapsto \mathbf{C}_N(s)$ は $D_{12} = \langle f_\beta, f_\gamma \rangle$ の 1-cocycle に延長される.

定理 1.2 $(j, Q, \mathbf{d})$ に対して, $\mathfrak{D}(j, Q, \mathbf{d})$ を基本判別式 D で次の条件を満たすもの全体の集合とする:

$$
\begin{aligned}
&D \equiv 0 \pmod{Q}, \\
&D \equiv 0 \pmod{4Q}, \quad D^{(2)} \equiv d_2 \pmod{8} \quad (\text{if } 2 \mid N), \\
&\left(\frac{D^{(p)}}{p}\right) = d_p, \quad (p \mid N, p > 2), \\
&(-1)^{j-1} D > 0,
\end{aligned}
$$

ただし, χ_D は D に対応する Kronecker 指標である．このとき, $\mathrm{Re}(s_1) > 1$, $\mathrm{Re}(s_2) > 1$ に対して, $\widetilde{\xi_j^N}(s_1, s_2, Q, \mathbf{d})$ は次ぎの表示に等しい：

$$\zeta^N(s_1)\zeta^N(2s_1+2s_2-1) \sum_{D\in\mathfrak{D}(j,Q,\mathbf{d})} \frac{L^N(s_2,\chi_D)}{L^N(2s_1+s_2,\chi_D)} \frac{1}{(D^{(N)})^{s_1}}. \tag{1.11}$$

$N=1$ の場合, 新谷の $\xi_j^*(s)$ について次を得る：

系 1.3　(1) $P(s)\xi_j^*(s_1,s_2)$ $(j=1,2)$ は $\mathbb{C}^2$ 上の正則函数になる.

(2) $k=1,2$ に対して, 函数

$$\Xi_k(s_1,s_2) := \frac{\zeta(2s_1)}{\zeta(s_1)}\{\xi_1^*(s_1,s_2)+(-1)^{k-1}\xi_2^*(s_1,s_2)\}$$

は次の函数等式を満たす:

$$\Xi_k(s_1+s_2-\tfrac{1}{2}, 1-s_2) = \Xi_k(s_1,s_2)\, 2^{3s_2-1}\pi^{-s_2}\Gamma(s_2) \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi s_2}{2}\right), & (k=1), \\ \sin\left(\frac{\pi s_2}{2}\right), & (k=2). \end{cases}$$

(3) (右辺の収束域において)$j=1,2$ に対して次の表示が成立

$$\xi_j^*(s_1,s_2) = 2^{-2s_2}\zeta(s_1)\zeta(2s_1+2s_2-1) \sum_{D:\text{基本判別式}} \frac{\mathrm{sgn}(D)^{j-1}L(s_2,\chi_D)}{L(2s_1+s_2,\chi_D)\,|D|^{s_1}},$$

注意 1.4　概均質ゼータ函数の定義はベクトル空間の格子に依存する．よって, フーリエ変換由来の函数等式で「結ばれる相手」のゼータ函数は双対格子に依存した別ものになる．新谷の $\xi_j(s)$ は半整数 2 次対称行列の格子 $V(\mathbb{Z})^*$, $\xi_j^*(s)$ は整数 2 次対称行列の格子 $V(\mathbb{Z})$ から作られていて, 函数等式 (1.1) は実際 ξ_j と ξ_j^* をつないでいる．[佐藤 82-1] では, 一般の格子 $M \subset V(\mathbb{Q})$ とその双対格子 $M^* \subset V(\mathbb{Q})$ の組に対して函数等式 (1.1) が拡張されて証明されている。それに際して, [新谷, §1] とは異なる概均質ベクトル空間が使われており, 極の位置に関して新谷の結果 (i) が定理 1.1(1) の形に改善された (系 1.3(1) は [佐藤 82-1] の結果)．その後 [谷口 1] は 3 次環の分布の研究での必要性から, [新谷, §1] の 2 重ゼータに関わる内容を [佐藤 82-1] の枠組みをアデール化することで任意代数体へ拡張した．アデールを使った代数体への一般化は [雪江, Ch.7] にもある．「除外素点」N を設定した (1.5) は格子 $V(\mathbb{Z})$ から作られているが, 実際には S-整数環上の格子 $V(\mathbb{Z}_S)$ のみに依存する, ここで S は N の素因子集合. よって, $2 \mid N$ のときには $V(\mathbb{Z}_S) = V(\mathbb{Z}_S)^*$ となり, 実際, 自己双対的函数等

式 (1.8) が成り立つ. $2 \nmid N$ の場合, (1.8) は [KTW] では考えていない. 函数等式 (1.7) は定理 1.2(3) の表示と Dirichlet の L 函数の関数等式由来なため, 実は $2 \nmid N$ でも成立する (系 1.3(2)). 新谷の $f_\gamma \circ f_\alpha^3$ 函数等式は Eisenstein 級数表示 (*cf.* (1.4)) に由来するものである (注意 6.3 参照. [KTW, pp.491–494] も参照.)

注意 1.5　定理 1.1(3) は $\boldsymbol{\Xi}^N(s)$ が位数 12 の 2 面体群で統制される函数等式系を有することを意味する. 「2 重 Dirichlet 級数」は概均質ゼータとは一見関係ない文脈でも扱われてきた. 例えば, [B] では本質的に $\widetilde{\xi_j^2}(s, D, \mathbf{d})$ と同じものが (新谷の仕事に言及することなく) 導入/研究され, D_{12} 函数等式系が証明されていた. Blomer の函数等式系は定理 1.1 からも出る ([平本]).

注意 1.6　定理 (1.2) の表示式は [新谷] には無い. これは, [伊吹山・齋藤 I] によるゼータ函数 (1.2) の「明示公式」の証明手法を体系的に発展させた [齋藤] の枠組み (概均質ゼータ関数における局所と大域の関係) に見られるような, 比較的新しい視座から得られたものといえる. また, Arthur-Selberg 跡公式の冪単項の「安定化」とも関連する ([LL]). 函数等式 (1.7)(一般の設定では §6.2 参照) はこの表示式 (1.11)(一般設定では §4.6, §5.3) を通じて [KTW] で得られたものであるのに対して, 函数等式 (1.8)(一般設定では §6.3 参照) は概均質ゼータの理論の定型 (*cf.* [杉山, §4]) から得られるもので (1.1) と同じ由来である.

注意 1.7　[伊吹山・齋藤 II, §3.4] では, $\Gamma_0(4)$ 上の半整数重さ Eisenstein 級数の Mellin 変換を利用した, 新谷の函数等式 (1.1) の別証明が与えられている. また [DG, §6] では, 2 変数ゼータに対する逆定理の 1 つの応用として, 新谷ゼータが $\Gamma_0(4)$ 上の半整数重さアイゼンシュタイン級数の線型結合の Mellin 変換であることを示している [4]. また [GH] も参照のこと. 半整数重さアイゼンシュタイン級数との関連は [新谷, p.40 Remark] にも言及がある. (1.4) の Eisenstein 級数は半整数重さではないことに注意. まとめると, 標語的には次の関連が見られるようだ:

$\boxed{\text{新谷 2 重ゼータ函数}}$

$\updownarrow$ ((1.4) の unfolding)

$\boxed{\text{整数重さ Eisenstein 級数のトーラス周期付きゼータ函数}}$

$\updownarrow$ (θ-lifting)

$\boxed{\text{半整数重さ Eisenstein 級数の Mellin 変換}}$

[4] この仕事の存在は杉山和成さんから教えて頂きました.

注意 1.8 §1.1 で述べたように, 応用上は 2 重ゼータの極因子にそった留数や 1 変数への特殊化が重要で, その解析は 2 重ゼータのさらに一段階先にある ([新谷, Ch I 3°], [KTW, §4.6] を参照.) この記事では割愛する. (1.2) を含めた「新谷ゼータ函数」の大事な応用としては, Siegel 保型型式の数値的次元公式 ([新谷], [伊吹山・齋藤 II], [若槻]) や Siegel 保型型式の佐武パラメータの等分布性定理 ([Kim-若槻-山内])[5], 3 次環の密度定理への応用 ([谷口 1]) などがある.

$\boxed{\text{各章の内容}}$: §2 では 2 重ゼータに関連した概均質ベクトル空間の基礎事項を述べた. §3 では任意の標数 0 の局所体においてゼータ積分の性質をまとめた. §4 では一般の代数体のアデール化でゼータ積分を導入し基本性質を調べる. [KTW, §4.4] では簡潔に済ませた特異部分の解析について §4.5 で詳述した. §4.6 では定理 1.2 を特別な場合に含む公式を一般の代数体で説明した. ([KTW] の新規性はここにあるため §4.6 は詳しく書いた.) §5 では新谷 2 重ゼータ函数を一般の代数体の場合に導入する. [KTW] の定義をイデアルの言葉で書き直したのでより original との類似性がはっきりしたのではと思う. §6 ではそれまでの結果を使って 2 重ゼータの函数等式と解析接続を導く議論を詳述した. §5.4 の結果を使うことで [KTW] に比べて解析接続の議論は簡易化されている. §7 では, $\mathbb{Q}$ の場合に限定して, 2 重ゼータの D_{12} 函数等式系について説明し, 定義を初等的な言葉で翻訳し定理 1.1 に繋げた. §8 は付録で, §1.1 と注意 1.7 を補完する内容. 全体として [KTW] と相補的に成るように心掛けたので, 証明を省略して引用で済ませた部分もある一方で本筋で大事なことは証明を詳述した. アデールの必要事項も最低限は加えたが詳細は [W], [RV] などを参照ください.

2 基本事項

集合 X とその部分集合 Z について, X での Z の特性函数を $\mathbb{1}_Z$ と書く. 位相群 H に対して, H から $\mathbb{C}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ への連続準同型写像を指標といい, H の指標全体の集合を $\widehat{H}$ と書く. ガンマ函数 $\Gamma(s)$ に関連して, 次の記法はよく用いられる:

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \qquad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s).$$

「倍角公式」から $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)$ に注意する.

[5] [Kim-若槻-山内] で与えられた応用が [KTW] の直接の motivation でした.

2.1 概均質ベクトル空間

代数群 G を

$$G := \mathbf{GL}_1 \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \in \mathbf{GL}_2 \right\}$$

で定義する．明らかに G は $\mathbb{Q}$ 上定義される．G の一般の元を

$$g = (a, h), \quad h = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right] \tag{2.1}$$

と表す．2次対称行列全体のなす線型空間は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群 V を定める：

$$V = \left\{ X \in \mathbf{Mat}_2 \mid X = {}^t X \right\}.$$

V の一般の元を

$$X = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right] \tag{2.2}$$

と表す．しばしば，G および V は $\mathbb{Z}$ 上のスキームとして扱う．G の V への有理表現 $\rho : G \times V \longrightarrow V$ を

$$\rho(a, h)X := a\, hX^t h, \qquad (a, h) \in G,\, X \in V$$

で定義する．

$$\begin{aligned} P_1(X) &= x_1, & P(X) &= -\det X = x_{12}^2 - x_1 x_2, \quad X = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right] \in V, \\ \tau_1(g) &= a, & \tau(g) &= (ac)^2, \quad g = \left(a, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right]\right) \in G \end{aligned}$$

とおくと，$P_1(X)$ および $P(X)$ は V の正則関数，τ_1 および τ は G の有理指標であって

$$P_1(\rho(g)X) = \tau_1(g)\, P_1(X), \quad P(\rho(g)X) = \tau(g)\, P(X), \quad ,g \in G\, X \in V \tag{2.3}$$

が容易に確かめられる．つまり，$P_1(X)$, $P(X)$ はそれぞれ指標 τ_1, τ に対応する V の相対不変式である．V の Zariski 開集合 V^0 を

$$V^0 := \{X \in V \mid P_1(X) \neq 0,\, P(X) \neq 0\}$$

で定義する．(2.3) から，V は G 作用で安定な集合である．任意の体 K と $\delta \in K^\times$ に対して，

$$V^0(K,\delta) := \{X \in V^0(K) \mid P(X) \in \delta(K^\times)^2\} \tag{2.4}$$

$$X_\delta := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta \end{smallmatrix}\right] \in V(K), \tag{2.5}$$

$$G(K)^{X_\delta} := \{g \in G(K) \mid \rho(g)X_\delta = X_\delta\} \tag{2.6}$$

とおく．乗法群 $K^\times$ の部分群 $(K^\times)^2$ による商群を $[K^\times]_2$ と定義する：

$$[K^\times]_2 := K^\times/(K^\times)^2. \tag{2.7}$$

$G(K)$-空間 $V^0(K)$ の軌道分解は次のようになる．

補題 2.1 (1) 対角行列 $X_\delta\,(\delta \in [K^\times])$ 全体の集合は $V^0(K)$ の $G(K)$ 軌道の代表系をなす．K が代数的閉体ならば $V^0(K)$ は単一 $G(K)$-軌道である．特に，(V,G,ρ) は $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間になる．

(2) X_δ の $G(K)$-軌道は $V^0(K,\delta)$ と一致する．

(3) $G(K)^{X_\delta} = \{(1,1_2),(1,\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right])\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

証明 (1), (2) を示すため，$X = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right] \in V(K)$ を K 係数 2 次型式

$$(u,v)X\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = x_1u^2 + 2x_{12}uv + x_2v^2$$

と同一視する．$X \in V^0(K)$ とすると $x_1 \neq 0$, $P(X) = x_{12}^2 - x_1x_2 \neq 0$ であるから次のように平方完成される：

$$x_1 \times \left\{\left(u + \frac{x_{12}}{x_1}v\right)^2 - \frac{P(X)}{x_1^2}v^2\right\}$$

ここで $P(X) = \delta c^2$ $(\delta \in K^\times/(K^\times)^2, c \in K^\times)$ と分解して，

$$g = \left(x_1, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x_{12}}{x_1} & \frac{c}{x_1} \end{smallmatrix}\right]\right) \in G(K)$$

とおくと，$\rho(g)X_\delta = X$ が分かる．よって $V^0(K)$ は $\rho(G(K))X_\delta\,(\delta \in [K^\times]_2))$ の合併集合である．これらが互いに素であることは，(2.3) と $P(X_\delta) = \delta$ より「$X \in \rho(G(K))X_\delta$ ならば $P(X)(K^\times)^2 = \delta(K^\times)^2$ である」ことから従う．$V^0(K)$ は明らかに $V^0(K,\delta)\,(\delta \in [K^\times]_2)$ の互いに素な合併となるから，包含 $\rho(G(K))X_\delta \subset V^0(K,\delta)$ は等号となる．K が代数閉体ならば $[K^\times]_2 = \{1\}$ だから (1) の最後の主張が従う．

(3) 直接計算によって $\rho(g)X_\delta = X_\delta$ は $a = 1, b = 0, c = \pm 1$ と同値なことが分かる．$\square$

注意 2.2 $P_1(X)$, $P(X)$ は (V, G, ρ) の基本相対不変式である．

実際, 特異集合 $S = V - V^0$ は 2 つの超曲面 $S_1 = \{P_1(X) = 0\}$ 及び $S_2 = \{P(X) = 0\}$ の合併である．$P_1(X) = x_1$, $P(X) = x_{12}^2 - x_1 x_2$ は $\mathbb{C}[x_{12}, x_1, x_2]$ の既約元なので, S_1, S_2 は S の余次元 1 の既約成分全体となる。一般論 ([木村, 補題 2.12]) から, 結論が出る．

2.1.1 反傾表現

行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ の余因子行列を, $A^\dagger = \left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$ で表す．$V \times V$ 上の双線型型式を

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(XY^\dagger) = x_1 y_2 - 2x_{12} y_{12} + x_2 y_1, \quad X = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_2 & d \end{smallmatrix}\right], Y = \left[\begin{smallmatrix} y_1 & y_{12} \\ y_{12} & y_2 \end{smallmatrix}\right] \in V \tag{2.8}$$

で定義する．これは, 非退化なので $X \in V$ に線型型式 $X \mapsto \langle X, Y \rangle$ を対応させることで V から双対空間 V^* の上への線型同型写像が得られる．これにより V と V^* を同一視する．そこで, (ρ, V) の反傾表現の V での実現を $(\widehat{\rho}, V)$ とする：つまり,

$$\langle \rho(g)X, \widehat{\rho}(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad g = (a, h) \in G,\ X, Y \in V. \tag{2.9}$$

計算によって

$$\widehat{\rho}(a, h) = a^{-2} (\det h)^{-2} \rho(a, h), \quad (a, h) \in G \tag{2.10}$$

が確かめられる．$(G, V, \widehat{\rho})$ は $S = V - V^0$ を特異集合とする概均質ベクトル空間で, 基本相対不変式は $P_1(X)$, $P(X)$ である．実際, $P_1(X)$, $P(X)$ はそれぞれ有理指標 $\widehat{\tau}_1 : (a, h) \mapsto a^{-1} c^{-2}$, $\widehat{\tau} : (a, h) \mapsto a^{-2} c^{-2}$ に対応する相対不変式になる：

$$P_1(\widehat{\rho}(g)X) = \widehat{\tau}_1(g)\, P_1(X), \quad P(\widehat{\rho}(g)X) = \widehat{\ }(g)\, P(X).$$

3 局所ゼータ積分

F を標数 0 の局所体とする．F の乗法的正規付置を $|\cdot|_F$ と書く．F が非アルキメデス的の場合, $\mathfrak{O}$ を F の極大整環, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{O}$ の極大イデアルとし, 剰余体 $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ の位数を q とする．非零分数イデアル $\mathfrak{a} \subset F$ の位数 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}$ を $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}(\mathfrak{a})}$ で定義すると, $|a|_F = q^{-\mathrm{ord}(a\mathfrak{O})}$ が成立する．F のハール測度を $\mathfrak{O}$ の測度が 1

になるように正規化する．F がアルキメデス的の場合, F は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に同型である．$F \cong \mathbb{R}$ (resp. $F \cong \mathbb{C}$) なら, F のハール測度を $\mathbb{R}$ のルベーグ測度 (resp. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ のルベーグ測度の 2 倍) を移送することで定義する．乗法群 $F^\times$ のハール測度 $\mathrm{d}^\times x$ を, 加法群 F のハール測度 $\mathrm{d}x$ に依存して

$$\mathrm{d}^\times x := |x|_F^{-1}\,\mathrm{d}x \times \begin{cases} (1-q^{-1})^{-1} & (F \text{ が非アルキメデス的}), \\ 1 & (F \text{ がアルキメデス的}) \end{cases}$$

で定義する．F が非アルキメデス的のとき, $\mathrm{vol}(\mathfrak{O}^\times) = 1$ に注意する．

補題 3.1 $(F^\times)^2$ は $F^\times$ の指数有限の閉部分群であり

$$\#[F^\times]_2 = 4|2|_F^{-1}$$

証明 $F \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$ なら容易, それ以外は [W, ChII §3 Corollary(p.34)] の特別な場合. □

有限次 F-線型空間 U に対して, $\mathscr{S}(U)$ を Schwartz-Bruhat 関数全体のなす $\mathbb{C}$-線型空間とする．即ち, $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ならば $\mathscr{S}(U)$ は $U \cong \mathbb{R}^n$ あるいは $U \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ の Schwartz 空間であり, F が非アルキメデス的ならば $\mathscr{S}(U)$ は U 上のコンパクト台を持つ複素数値局所定数関数全体の空間を表す[6].

補題 3.2 $U = F^n$ とする．F が非アルキメデス的ならば, $\mathscr{S}(V(F))$ は

$$U(F) \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \prod_{j=1}^n \phi_j(x_j)$$

ただし, $\phi_j \in \mathscr{S}(F)\,(1 \leqslant j \leqslant n)$, の形の函数全体によって生成される．$F \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ならば, 任意の $\Phi \in \mathscr{S}(U(F))$ に対して, 非負函数系 $\phi_j \in \mathscr{S}(F)\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ があって

$$|\Phi(x)| \leqslant \prod_{j=1}^n \phi_j(x_j), \quad x \in U(F).$$

証明 F が非アルキメデス的のとき, $\mathscr{S}(U(F))$ は $\mathfrak{p}^m U(\mathfrak{O}) + a\,(m \in \mathbb{Z}_{>0}, a \in U(F))$ の形の集合の特性函数で生成される．$a = (a_j)_j$ とすれば, $\mathbb{1}_{\mathfrak{p}^m U(\mathfrak{O})+a}(x) = \prod_j \mathbb{1}_{\mathfrak{p}^m + a_j}(x_j)$ なので最初の主張が従う．$F \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に対する主張は, [雪江, Lemma(1.2.5)] に証明がある. □

[6] F が非アルキメデス的のとき $\mathscr{S}(U)$ には位相は考えない．$F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のとき $\mathscr{S}(U)$ には半ノルム系を付与してフレッシェ空間にするのが通例 ([木村, §3.2])

3.1 2 次 Hilbert 記号と実指標

$a, b \in F^\times$ に対して $(a,b)_F \in \mu_2 := \{1, -1\}$ を 2 次 Hilbert 記号とする (*cf.* [志村, §26]). これは, 有限アーベル群 $[F^\times]_2$ に対する非退化 pairing $[F^\times]_2 \times [F^\times]_2 \longrightarrow \mu_2$ を導く. 即ち, $\delta \in [F^\times]_2$ に指標 $\omega_\delta : \xi \mapsto (\xi, \delta)_F$ を対応させることにより群同型写像 $[F^\times]_2 \cong \widehat{[F^\times]_2}$ が得られる. 指標 $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ は $F^\times$ の実数値指標と同一視される.

$F \cong \mathbb{C}$ の場合, $[F^\times]_2 = \{1\}$ で χ_1 は自明指標となる. $F \cong \mathbb{R}$ の場合, $[F^\times]_2 = \{+1, -1\}$ で ω_1 は自明指標, ω_{-1} は符号函数 $\mathrm{sgn}(x) := x/|x|$ になる: $\delta_\omega \in \{0, 1\}$ を $\omega(x) = (x/|x|)^{\delta_\omega}$ として定義する. F が非アルキメデス的かつ $(q, 2) = 1$ な場合, $u \in \mathfrak{O}^\times - (\mathfrak{O}^\times)^2$ を一つ選択し, ϖ を F の素元とすると $[F^\times]_2 = \{1, \varpi, u, u\varpi\}$ である. よって, $\widehat{[F^\times]_2} = \{\omega_1, \omega_\varpi, \omega_u, \omega_u\chi_\varpi\}$.

F が非アルキメデス的の場合, 指標 $\chi : F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^1$ の導手 $\mathfrak{f}_\chi$ を, $\chi|\mathfrak{O}^\times = 1$ ならば $\mathfrak{f}_\chi = \mathfrak{O}$, $\chi|\mathfrak{O}^\times \neq 1$ ならば $\chi|(1 + \mathfrak{a}) = 1$ となる最大のイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{O}$ として定義する. F のゼータ関数を $\zeta_F(s) := L(s, \mathbf{1}) = (1 - q^{-s})^{-1}$ と定義する. 非零イデアル $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{O}$ のノルム $\mathrm{N}(\mathfrak{a})$ を $\#(\mathfrak{O}/\mathfrak{a})$ で定義する.

3.2 局所 Iwasawa-Tate 理論の復習

この記事では $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ の場合のみが必要なので, 以下このケースに限定して必要事項を復習する. (詳細は原論文 [T] あるいは [RV, §7] を参照.)

3.2.1 指標型

指標 $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ と複素数 $\mathrm{Re}(s) > 0$ に依存して, $\mathscr{S}(F)$ 上の (連続) 線型汎関数 $\widetilde{\zeta_F}(s, \chi)$ を

$$\widetilde{\zeta_F}(s, \chi) : \phi \longmapsto \widetilde{\zeta}(s, \chi, \phi) := \int_{F^\times} \phi(x)\chi(x)|x|_F^s \, \mathrm{d}^\times x, \quad \phi \in \mathscr{S}(F)$$

で定義する. 積分は s に関して広義一様絶対収束して, $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に解析接続される ([RV, 7-2 Theorem]). 局所 L-函数 $L(s, \chi)$ は, F が非アルキメデス的な場合

$$L(s, \chi) = \begin{cases} 1 & (\chi|\mathfrak{O}^\times \neq 1), \\ (1 - \chi(\varpi)q^{-s})^{-1} & (\chi|\mathfrak{O}^\times = 1) \end{cases} \tag{3.1}$$

となり, F がアルキメデス的な場合

$$L(s,\chi) := \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\delta_\chi), & (F \cong \mathbb{R}), \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s), & (F \cong \mathbb{C}) \end{cases}$$

となる. L 因子の定義から, $s \mapsto L(s,\chi)^{-1}\,\widetilde{\zeta}(s,\chi,\phi)$ は $\mathbb{C}$ 上正則になる.

ψ_F を加法群 F の非自明連続指標とする.

- $F \cong \mathbb{R}$ の場合, $\psi_F(x) := \exp(2\pi i x)\,(x \in \mathbb{R})$,
- $F \cong \mathbb{C}$ の場合, $\psi_F(z) := \exp(4\pi i \mathrm{Re}(z))\,(z \in \mathbb{C})$

と選ぶ. F が非アルキメデス的な場合, 連続性から ψ_F は F のある可逆分数イデアル上で自明になる: そこで, $d = d(\psi_F) \in \mathbb{Z}$ を $\psi_F|\mathfrak{p}^{-d} = 1$ となる最大の整数とする.

$\phi \in \mathscr{S}(F)$ のフーリエ変換を, (§3 の最初で決めた)F のハール測度によって

$$\widehat{\phi}(y) := \int_F \phi(x)\,\psi_F(xy)\,\mathrm{d}x, \quad y \in F \tag{3.2}$$

で定義すると,

$$\widehat{\widehat{\phi}}(x) = C_{\psi_F}\,\phi(-x), \qquad C_{\psi_F} := \begin{cases} q^d & (F \text{ が非アルキメデス的}), \\ 1 & (F \text{ がアルキメデス的}) \end{cases} \tag{3.3}$$

であること [7] と, 更に $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ より $\chi^{-1} = \chi$ に注意すると, 局所函数等式は

$$C_{\psi_F}^{1/2} \times \frac{\widetilde{\zeta_F}(1-s,\chi,\phi)}{L(1-s,\chi)} = \varepsilon(s,\chi,\psi_F)\,\frac{\widetilde{\zeta_F}(s,\chi,\widehat{\phi})}{L(s,\chi)} \tag{3.4}$$

となる. ここで, $\varepsilon(s,\chi,\psi_F) \in \mathbb{C}^\times$ は局所 epsilon 因子である.

$$\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s,\chi) := \frac{L(s,\chi)}{L(1-s,\chi)}\varepsilon(s,\chi,\psi_F)^{-1}\,C_{\psi_F}^{1/2} \tag{3.5}$$

と定義すると, この函数の明示公式は次のようになる.

- $F = \mathbb{R}$ のとき,

$$i^{\delta_\chi}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\delta_\chi)\Gamma_{\mathbb{R}}(1-s+\delta_\chi)^{-1}$$

[7] ψ_F に関して自己双対的な F のハール測度 $C_{\psi_F}^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ によってフーリエ変換を定義し理論を展開するのが普通.

- $F = \mathbb{C}$ のとき,

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(1-s)^{-1}$$

- F が非アルキメデス的なとき,

$$q^{ds} \times \begin{cases} (1-\chi(\varpi)q^{-1+s})/(1-\chi(\varpi)q^{-s}) & (\mathfrak{f}_\chi = \mathfrak{O}), \\ \varrho_\chi \, \mathrm{N}(\mathfrak{f}_\chi)^{s-1/2} & (\mathfrak{f}_\chi \subset \mathfrak{p}) \end{cases}$$

ここで

$$\varrho_\chi := \mathrm{N}(\mathfrak{f}_\chi)^{-1/2} \sum_{u \in \mathfrak{O}^\times/(1+\mathfrak{f}_\chi)} \chi(u)\psi_F(u\varpi^{-d-\mathrm{ord}(\mathfrak{f}_\chi)}).$$

3.2.2 軌道型

$\delta \in [F^\times]_2$, $\mathrm{Re}(s) > 0$ について

$$\zeta_F(s,\delta,\phi) := \int_{\delta(F^\times)^2} \phi(x)\,|x|_F^s\,\mathrm{d}x, \quad \phi \in \mathscr{S}(F)$$

と定義する. 明らかに,

$$\sum_{\delta \in [F^\times]_2} \chi(\delta)\,\zeta_F(s,\delta,\phi) = \widetilde{\zeta_F}(s,\chi,\phi), \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{3.6}$$

である. 有限群 $[F^\times]_2$ のフーリエ反転公式 (指標の直交関係式) から

$$\zeta_F(s,\delta,\phi) = \frac{1}{\#([F^\times]_2)} \sum_{\chi \in \widehat{[F^\times]_2}} \chi(\delta)\,\widetilde{\zeta_F}(s,\chi,\phi), \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{3.7}$$

となる. これにより, $\zeta_F(s,\delta,\phi)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続されることが分かる. また (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) を組み合わせることで, 次の函数等式が得られる：

$$\zeta_F(s,\delta,\widehat{\phi}) = \frac{1}{\#([F^\times]_2)} \sum_{\epsilon \in [F^\times]_2} \gamma_{\psi_F}(s,\epsilon\delta)\,\zeta_F(1-s,\epsilon,\phi)$$

ただし,

$$\gamma_{\psi_F}(s,\delta) := \sum_{\chi \in \widehat{[F^\times]_2}} \chi(\delta)\,\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s,\chi), \quad \delta \in F^\times.$$

3.3 局所ゼータ積分の定義 (収束性)

$X \in V(F)$ の成分 (2.2) により, $V(F)$ の加法的ハール測度を

$$\mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_{12}\,\mathrm{d}x_2 \tag{3.8}$$

で定義する. $g \in G(F)$ の成分 (2.1) により, $G(F)$ の測度を

$$\mathrm{d}g = \mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}^\times c \tag{3.9}$$

で定義すると, これは $G(F)$ の右不変ハール測度であることが確かめられる [8]. 補題 2.1 から, $V(F)$ は $G(F)$-軌道 $F^0(F,\delta)$ ($\delta \in [F^\times]_2$) に分割される. ここで, 補題 3.1 から, $G(F)$ 軌道の個数は有限であり, $V^0(F,\delta)$ は $V(F)$ の開かつ閉なる集合となる.

定義 3.3 $\delta \in [F^\times]_2$, $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ とする. $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$, $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して,

$$Z_F(\Phi, s, \delta) = \int_{V^0(F,\delta)} \Phi(X)\,|P_1(X)|_F^{s_1-1}|P(X)|_F^{s_2-1}\,\mathrm{d}X \text{ (軌道型)},$$
$$\widetilde{Z}_F(\Phi, s, \chi) = \int_{V(F)} \Phi(X)\,|P_1(X)|_F^{s_1-1}\chi(P(X))|P(X)|_F^{s_2-1}\,\mathrm{d}X \text{ (指標型)}.$$

$\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ に対して, (2.2) で成分が与えられる $X \in V(F))$ での函数の値を $\Phi(x_1, x_{12}, x_2)$ のようにも書く.

補題 3.4 積分 $Z_F(\Phi, s, \delta)$, $\widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi)$ は領域

$$\mathrm{Re}(s_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(s_2) > 0, \quad \mathrm{Re}(s_1 + s_2) > \tfrac{1}{2} \tag{3.10}$$

において広義一様に絶対収束する.

証明 *cf.* [KTW, Lemma3.1]. □

補題 2.1(1),(2) および $[F^\times]_2$ での指標の直交関係式から, 領域 (3.10) において次の等式が成り立つ：

$$\widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi) = \sum_{\delta \in [F^\times]_2} Z_F(\Phi, s, \delta)\,\chi(\delta), \tag{3.11}$$

$$Z_F(\Phi, s, \delta) = \frac{1}{\#([F^\times]_2)} \sum_{\chi \in \widehat{[F^\times]_2}} \widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi)\,\chi(\delta). \tag{3.12}$$

[8] G はユニモジュラーではないことに注意. $|\tau_1(g)^{-2}\tau(g)|^{-1/2}\,\mathrm{d}g$ は左不変ハール測度になる.

補題 3.5 絶対収束域 (3.10) において, 次の等式が成立する:

$$
\begin{aligned}
& Z_F(\Phi, s, \delta) \\
&= (1-q^{-1})^2 2^{-1} |2|_F |\delta|_F^{s_2} \iiint_{F^\times \times F \times F^\times} |a|_F^{s_1} |a^2c^2|_F^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2-\delta c^2))\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c \qquad (3.13) \\
&= (1-q^{-1})^2 2^{-1} |2|_F \int_{G(F)} \Phi(gX_\delta) |P_1(gX_\delta)|_F^{s_1} |P(gX_\delta)|_F^{s_2}\, \mathrm{d}g, \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

ここで, $\mathrm{d}g$ は (3.9) で定義した $G(F)$ の右不変ハール測度である.

$$
\widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi) = (1-q^{-1})^2 \int_{F^\times} \int_F \int_{F^\times} |a|_F^{s_1} |a^2c|_F^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2-c)) \chi(c)\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c \qquad (3.15)
$$

証明 補題 2.1(2),(3) から, 写像 $j : G(F) \ni g \longmapsto gX_\delta \in V^0(F, \delta)$ は $2:1$ の全射となる. (2.1), (2.2) のように $g \in G(F)$, $X \in V^0(F, \delta)$ を成分で表すと, $X = j(g)$ は

$$
x_1 = a, \quad x_{12} = ab, \quad x_2 = a(b^2 - \delta c^2)
$$

と書きなおせる. これより,

$$
j^*(dx_1 \wedge dx_{12} \wedge dx_2) = -2\delta\, a^3 c^2 \, \frac{da}{a} \wedge db \wedge \frac{dc}{c}
$$

となるので, $j : G(F) \to V^0(F, \delta)$ は F-解析多様体の submersive な射になる. F および $F^\times$ のハール測度の決め方と, 積分の変数変換公式から $V^0(F, \delta)$ 上の可積分関数 $f(X) = f(x_1, x_{12}, x_2)$ に対して,

$$
\tfrac{(1-q^{-1})^2}{2} |2\delta|_F \iiint_{F^\times \times F \times F^\times} f(a, ab, a(b^2-\delta c^2))\, |a^3c^2|_F\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c = \int_{V^0(F,\delta)} f(X)\, \mathrm{d}X
$$

であり, $G(F)$ のハール測度の定義 (3.9) から

$$
\int_{G(F)} f(gX_\delta) \mathrm{d}g = \int_{F^\times} \int_F \int_{F^\times} f(a, ab, a(b^2-\delta c^2))\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c
$$

である. $P_1(gX_\delta)P(gX_\delta) = a^3c^2\delta$ に注意して, $f(X) = \Phi(X)|P_1(X)|_F^{s_1-1}|P(X)|_F^{s_2-1}$ に対してこれらの公式を使えば等号 (3.13), (3.14) が従う.

式 (3.11) の右辺に (3.13) を代入し, c に関する積分に対して $c' = \delta c^2$ と変数

変換を行う：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\delta \in [F^\times]_2} \chi(\delta)(1-q^{-1})^2 2^{-1} |2|_F \\
&\qquad \times \int_{F^\times} \int_F \left\{ \int_{\delta (F^\times)^2} |a|_F^{s_1} |a^2 c'|_F^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2-c'))\, 2|2|_F^{-1} \mathrm{d}^\times c' \right\} \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b \\
&= (1-q^{-1})^2 \int_{F^\times} \int_F \left\{ \sum_{\delta \in [F^\times]_2} \chi(\delta) \int_{\delta (F^\times)^2} |a|_F^{s_1} |a^2 c'|_F^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2-c'))\, \mathrm{d}^\times c' \right\} \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b \\
&= (1-q^{-1})^2 \int_{F^\times} \int_F \int_{F^\times} \chi(c')\, |a|_F^{s_1} |a^2 c'|_F^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2-c'))\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c'
\end{aligned}
$$

となり, (3.15) が示された. □

3.4 不分岐局所ゼータ積分の明示公式

この節では F は非アルキメデス的とする.

命題 3.6 (1) 任意の指標 $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ に対して,

$$\widetilde{Z_F}(\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O})}, s, \chi) = (1-q^{-1})^2 \times \frac{\zeta_F(s_1)\, \zeta_F(2s_1+2s_2-1)\, L(s_2, \chi)}{L(2s_1+s_2, \chi)\, \mathrm{N}(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}}$$

(2) $2 \in \mathfrak{O}^\times$ とする. 任意の $\delta \in [F^\times]_2$ に対して,

$$Z_F(\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O})}, s, \delta) = \frac{(1-q^{-1})^2}{2} \times \frac{\zeta_F(s_1)\, \zeta_F(2s_2)\, \zeta_F(2s_1+2s_2-1)\, L(s_1, \chi_\delta)}{\zeta_F(2s_1)\, L(s_1+2s_2, \chi_\delta)\, \mathrm{N}(\mathfrak{f}_{\chi_\delta})^{s_2}}$$

ただし, χ_δ は $F^\times$ の指標 $x \mapsto (x, \delta)_F$ を表す.

証明 [KTW, Theorem 3.11, Corollary 3.12]. □

3.5 局所ゼータ積分の線型独立性

$V^0(F, \delta')$ ($\delta' \in [F^\times]_2$) は $V^0(F)$ の互いに素な開集合からなる被覆である. 定義 3.3 から $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ の台が $V^0(F)$ に含まれるならば $Z_F(\Phi, s)$ は任意の $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ で絶対収束する. これらから次の補題は容易に従う.

補題 3.7 $\delta \in [F^\times]_2$, $s \in \mathbb{C}^2$ に対して, $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ で次の 2 条件を満たすものが存在する：

- $\mathrm{Supp}(\Phi) \subset V^0(F, \delta)$,

- $Z_F(\Phi, s, \delta) \neq 0$ であり, しかも, $\delta' \neq \delta$ ならば $Z_F(\Phi, s, \delta') = 0$.

系 3.8 $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$, $s \in \mathbb{C}$ に対して, $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ で 2 つの条件

$$\text{(i) } \widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi) \neq 0, \text{ (ii) } \omega \neq \chi \text{ ならば } \widetilde{Z_F}(\Phi, s, \omega) = 0$$

を満たすものが存在する.

証明 補題 3.7 より各 $\delta \in [F^\times]_2$ について $\Phi_\delta \in \mathscr{S}(V(F))$ を $Z_F(\Phi_\delta, s, \delta) = 1$, $Z_F(\Phi_\delta, s, \delta') = 0\,(\delta' \neq \delta)$ となるようにとり,

$$\Psi_\chi(X) := \sum_{\delta \in [F^\times]_2} \Phi_\delta(X)\,\chi(\delta), \quad X \in V(F)$$

と定義すると, (3.11) と指標の直交性より $\widetilde{Z_F}(\Psi_\chi, s, \omega) = \#([F^\times])\,\delta_{\chi,\omega}$. □

3.6 解析接続と局所函数等式

3.6.1 フーリエ変換

(2.8) で定義した pairing $\langle\cdot,\cdot\rangle : V(F) \times V(F) \to F$ を想起する. $Y \in V(F)$ に対して, $V(F)$ の指標 $X \mapsto \psi_F(\langle X, Y\rangle)$ を対応させることで, $V(F) \cong \widehat{V(F)}$.

定義 3.9 $\Phi \in \mathscr{S}(V(F)))$ のフーリエ変換 $\widehat{\Phi} \in \mathscr{S}(V(F))$ を次で定義する:

$$\widehat{\Phi}(Y) := \int_{V(F)} \Phi(X)\,\psi_F(\langle Y, X\rangle)\,\mathrm{d}X, \quad Y \in V(F).$$

この節の残りの部分では F は非アルキメデス的と仮定する. $V(F)$ の閉部分群 L に対して, 位相的直交

$$L^\vee := \{Y \in V(F) \mid \psi_F(\langle X, Y\rangle) = 1\,(\forall X \in L)\}$$

は $V(F)$ の閉部分群になり, $(L^\vee)^\vee = L$ が成り立つ. $V(F)$ の部分 $\mathfrak{O}$-加群 L が $V(F)$ の F-基底で生成されるとき $\mathfrak{O}$-格子と呼ぶ. $\mathfrak{O}$-格子は $V(F)$ のコンパクト部分群, 特に閉部分群である. $\mathfrak{O}$-公式 L の代数的な双対 $\mathfrak{O}$-格子は

$$L^* := \{X \in V(F) \mid \langle X, L\rangle \subset \mathfrak{O}\}$$

で定義される. 整数 $d = d(\psi_F)$ を想起する (§3.2.1).

補題 3.10 (1) 任意の $\mathfrak{O}$-格子 $L \subset V(F)$ について,

$$\widehat{\mathbb{1}_L} = \mathrm{vol}(L)\ \mathbb{1}_{L^\vee},$$
$$L^\vee = \varpi^{-d}L^*, \qquad \mathrm{vol}(L)\,\mathrm{vol}(L^\vee) = q^{3d}|2|_F^{-1}$$

(2) 任意の $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ に対して, $\widehat{\widehat{\Phi}}(X) = |2|_F^{-1}q^{3d} \times \Phi(-X)$ が成り立つ.

証明 コンパクト群 L の指標の直交関係式から

$$\widehat{\mathbb{1}_L}(Y) = \int_L \psi_F(\langle X, Y\rangle)\,\mathrm{d}Y = \mathrm{vol}(L)\,\mathbb{1}_{L^\vee}(Y)$$

となり最初の等式が従う. $\mathfrak{d}^{-1} := \{x \in F \mid \psi_F(x\mathfrak{O}) = \{1\}\}$ と定義すると, d の定義から $\mathfrak{d} = \varpi^d\mathfrak{O}$ である. よって

$$\begin{aligned} X \in L^\vee \quad &\iff \quad \psi_F(\langle X, Y\rangle) = 1\,(\forall Y \in L) \\ &\iff \quad \langle X, L\rangle \subset \mathfrak{d}^{-1} \\ &\iff \quad \langle \varpi^d X, L\rangle \subset \mathfrak{O} \quad \iff \quad \varpi^d X \in L^* \end{aligned}$$

となるから, $L^\vee = \varpi^{-d}L^*$ である. $\widehat{\mathbb{1}_L} = \mathrm{vol}(L)\,\mathbb{1}_{L^\vee}$ は任意の $\mathfrak{O}$-格子で成立し, $(L^\vee)^\vee = L$ だから,

$$\widehat{\widehat{\mathbb{1}_L}} = \mathrm{vol}(L)\,\widehat{\mathbb{1}_{L^\vee}} = \mathrm{vol}(L)\,\mathrm{vol}(L^\vee)\ \mathbb{1}_L$$

フーリエ反転公式からある正の定数 C が存在して, 任意の $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ について $\widehat{\widehat{\Phi}}(X) = C\Phi(-X)$ となる. よって, $C = \mathrm{vol}(L)\,\mathrm{vol}(L^\vee)$ となる. $L = V(\mathfrak{O})$ とすると,

$$V(\mathfrak{O})^* = \{X \in V(F) \mid x_1, x_2 \in \mathfrak{O},\, x_{12} \in 2^{-1}\mathfrak{O}\}$$

より, (測度の決め方 (3.8) から)$\mathrm{vol}(V(\mathfrak{O})) = 1$, $\mathrm{vol}(V(\mathfrak{O})^*) = |2|_F^{-1}$. よって,

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(L)\mathrm{vol}(L^\vee) = C &= \mathrm{vol}(V(\mathfrak{O}))\mathrm{vol}(V(\mathfrak{O})^\vee) \\ &= \mathrm{vol}(V(\mathfrak{O}))\mathrm{vol}(\varpi^{-d}V(\mathfrak{O})^*) = |\varpi^{-d}|_F^3|2^{-1}|_F \end{aligned}$$

□

系 3.11 $V(\mathfrak{O}) = V(\mathfrak{O})^\vee$ は $d = 0$ かつ $2 \in \mathfrak{O}^\times$ と同値である.

証明 $V(\mathfrak{O}) \subset V(\mathfrak{O})^\vee$ だから, $\mathrm{vol}(V(\mathfrak{O})) = \mathrm{vol}(V(\mathfrak{O})^\vee)$ と $V(\mathfrak{O}) = V(\mathfrak{O})^\vee$ は同値. □

3.6.2 Weil 定数

$a \in F^\times$ に対して, 定数 $\alpha_{\psi_F}(a) \in \mathbb{C}^\times$(Weil 定数という) が存在して, 任意の $\phi \in \mathscr{S}(F)$ に対して等式

$$\int_F \phi(x)\,\psi_F(ax^2)\,\mathrm{d}x = \alpha_{\psi_F}(a)|2a|_F^{-1/2}\int_F \widehat{\phi}(x)\,\psi_F\left(-\tfrac{x^2}{4a}\right)\,\mathrm{d}x$$

が成立することが知られている (*cf.* [池田]). この定義から, $\alpha_{\psi_F}(a)$ は平方類 $a(F^\times)^2$ のみに依存することが分かる. また

$$\frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(ab)} = \frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(a)}\frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(b)}(a,b)_F, \quad a,b \in F^\times, \tag{3.16}$$

$$\alpha_{\psi_F}(a)^4 = (-1,-1)_F, \quad a \in F^\times, \tag{3.17}$$

$$\overline{\alpha_{\psi_F}(a)} = \alpha_{\psi_F}(-a), \quad a \in F^\times$$

などが成り立つ. とくに, (3.17) から $\alpha_F(a)$ は 1 の 8 乗根である.

3.6.3 定理

$\gamma_{\psi_F}(s,\delta)$ (§3.2.2), $\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s,\chi)$ (§3.2.1) を思い出そう.

定義 3.12 (1) $\delta,\varepsilon \in [F^\times]_2$ に対して, $G_{\psi_F}(s,\delta,\varepsilon) :=$

$$\frac{1}{|2|_F^{1/2}\#([F^\times]_2)}\sum_{\eta\in[F^\times]_2}\alpha_{\psi_F}(-\eta)\,\gamma_{\psi_F}(s_2\delta\eta)\,\gamma_{\psi_F}(s_1+s_2-\tfrac{1}{2},\varepsilon\eta)$$

とおく.

(2) $\chi,\omega \in \widehat{[F^\times]_2}$ に対して, $\widetilde{G_{\psi_F}}(s,\chi,\omega) :=$

$$\frac{1}{|2|_F^{1/2}\#([F^\times]_2)}\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s_2,\chi)\,\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s_1+s_2+\tfrac{1}{2},\omega)\sum_{\eta\in[F^\times]_2}\alpha_{\psi_F}(-\eta)\,(\chi\omega)(\eta)$$

とおく.

§3.1 から, $\widehat{\{F^\times]_2} = \{\omega_a \mid a \in [F^\times]_2\}$ を思い出す. $\widetilde{G_{\psi_F}}(s,\chi,\omega)$ については, 次の簡明な表示ができる:

補題 3.13 $a,b \in [F^\times]_2$ とすると,

$$\widetilde{G_{\psi_F}}(s,\omega_a,\omega_b) = \frac{\alpha_{\psi_F}(-1)\alpha_{\psi_F}(-ab)^{-1}}{\sqrt{|2|_F\,\#([F^\times]_2)}}\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s_2,\chi_a)\,\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s_1+s_2+\tfrac{1}{2},\chi_b)$$

証明 $c_F := \#([F^\times]_2)$ とおく. 次の等式を示せばよい：

$$\sum_{\eta\in[F^\times]_2} \alpha_{\psi_F}(-\eta)\,\omega_a\omega_b(\eta) = c_F^{1/2}\,\frac{\alpha_{\psi_F}(-1)}{\alpha_{\psi_F}(-ab)} \tag{3.18}$$

[池田, 命題 1.9](を関係 $\gamma(2a) = \alpha_{\psi_F}(a)$ で補正した) より

$$\sum_{\eta\in[F^\times]_2} \alpha_{\psi_F}(\eta)(\eta, a)_F = c_F^{1/2}\frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(a)}, \quad a \in F^\times$$

である. これを使うと, (3.18) の右辺は次のように計算される:

$$\begin{aligned}\sum_{\eta\in[F^\times]_2} \alpha_{\psi_F}(\eta)\,(ab, -\eta)_F &= (ab, -1)_F \sum_{\eta\in[F^\times]_2} \alpha_{\psi_F}(\eta)\,(ab, \eta)_F \\ &= (ab, -1)_F \times c_F^{1/2}\frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(ab)}.\end{aligned}$$

さらに, (3.16) を使うと, $\frac{\alpha_F(-1)}{\alpha_{\psi_F}(-ab)} = (ab, -1)_F\frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(ab)}$ なので, 等号 (3.18) が分かる. □

(6.3) で定義されるアフィン変換 $f_\gamma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を考える.

命題 3.14 任意の $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ に対して, (3.10) 上で定義された正則函数 $s \mapsto Z_F(\Phi, s, \delta)$ および $s \mapsto \widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi)$ は $\mathbb{C}^2$ 上の有理型函数に解析接続されて次の函数等式を満たす：

$$Z_F(\widehat{\Phi}, s, \delta) = \sum_{\varepsilon\in[F^\times]_2} G_{\psi_F}(s, \delta, \varepsilon)\, Z_F(\Phi, f_\gamma(s), \varepsilon), \tag{3.19}$$

$$\widetilde{Z_F}(\widehat{\Phi}, s, \chi) = \sum_{\omega\in\widehat{[F^\times]_2}} \widetilde{G_{\psi_F}}(s, \chi, \omega)\, \widetilde{Z_F}(\Phi, f_\gamma(s), \omega). \tag{3.20}$$

証明 最初の等式 (3.19) は [佐藤 89] の特別な場合. ($F \cong \mathbb{R}$ の場合は [新谷, Lemma 1(i)] で得られている.) 2 番目の等式 (3.20) は最初の等式と (3.11) および (3.12) から従う. □

系 3.15 (1) 任意の類 $\delta, \eta \in [F^\times]_2$ に対して,

$$\sum_{\varepsilon\in[F^\times]_2} G_{\psi_F}(s, \delta, \varepsilon)\, G_{\psi_F}(f_\gamma(s), \varepsilon, \eta) = \begin{cases} 1 & (\delta = \eta) \\ 0 & (\delta \neq \eta) \end{cases}$$

(2) 任意の指標 $\xi, \chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ に対して,

$$\sum_{\omega \in [F^\times]_2} \widetilde{G_{\psi_F}}(s, \xi, \omega)\, \widetilde{G_{\psi_F}}(f_\gamma(s), \omega, \chi) = \begin{cases} 1 & (\xi = \chi) \\ 0 & (\xi \neq \chi) \end{cases}$$

証明 函数等式 (3.19) を 2 回連続して適用し, 補題 3.7 を使えば (1) 従う. 同様の議論で, (2) は函数等式 (3.20) と系 3.8 から従う. □

4 大域ゼータ積分

4.1 代数体とアデール

F を代数体, その整数環を $\mathfrak{O}_F$ とする. F の有限素点全体の集合を Σ_{fin}, 無限素点全体の集合を Σ_∞ として $\Sigma := \Sigma_\infty \cup \Sigma_{\mathrm{fin}}$ とおく. $\Sigma_{\mathbb{R}}$ を F の実素点全体の集合とし $r_1 := \#\Sigma_{\mathbb{R}}$ をその要素数, F の複素素点全体の集合を $\Sigma_{\mathbb{C}}$ とし $r_2 = \#\Sigma_{\mathbb{C}}$ をその要素数とすれば,

$$\Sigma_\infty = \Sigma_{\mathbb{R}} \cup \Sigma_{\mathbb{C}}, \quad [F : \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$$

となる. 有理数体 $\mathbb{Q}$ の素点 2 の上にある $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ 全体の集合を Σ_2 とおく. 任意の $v \in \Sigma$ に対して, v での F の完備化を F_v とする. F_v は標数 0 の局所体だから §3 で導入した記号や定義が適用される. F_v の乗法的正規付置 $|\cdot|_{F_v}$ を $|\cdot|_v$ と略記する. v が有限素点の場合には, $\mathfrak{O}_v$ を F_v の整数環, $\mathfrak{O}_v$ の極大イデアルを $\mathfrak{p}_v$ とおき, 剰余体 $\mathfrak{O}_v/\mathfrak{p}_v$ の位数を q_v とする.

$\mathbb{A}$ を F のアデール環, F の有限アデール全体を $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ とおく. 従って $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \times F_\infty$ と直積に分解される. $\mathbb{A}$ のハール測度を基本領域 $\mathbb{A}/F$ の測度が 1 となるようにとる.

$U \cong F^n$ を有限次元 F-線型空間とする. F-代数 R に対して, $U(R) := U \otimes_F R$ とおく. $\mathfrak{O}_F$-格子 $L \subset U$ に対して, $\mathfrak{O}_v$-格子 $U(\mathfrak{O}_v) = L \otimes_{\mathfrak{O}_F} \mathfrak{O}_v$ は有限個の例外を除いて L に依存しない. 有限個の v を除いて $\phi_v = \mathbb{1}_{U(\mathfrak{O}_v)}$ であるような $\mathscr{S}(U(F_v))$ の関数 ϕ_v に対して

$$\phi(x) = \prod_{v \in \Sigma} \phi_v(x_v), \quad x = (x_v)_v \in U(\mathbb{A}) \tag{4.1}$$

で定義される関数を $\otimes_v \phi_v$ と書く. このような函数の有限線型結合で表せる $U(\mathbb{A})$ 上の関数を $U(\mathbb{A})$ の Schwarts-Bruhat 関数といい, その全体の集合を $\mathscr{S}(U(\mathbb{A}))$ で表す. 次の補題は積分や級数の収束の議論でしばしば有用である.

補題 4.1 $U = F^n$ とする．任意のコンパクト集合 $\mathcal{N} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ に対して，$\Phi_1 \in \mathscr{S}(U(\mathbb{A}))$, $\Phi_1 \geqslant 0$ なる函数 Φ_1 が存在して，$|\Phi(xu)| \leqslant \Phi_1(x)$ $(x \in U(\mathbb{A}), u \in \mathcal{N})$ が成り立つ．

証明 [雪江, Proposition (1.2.3)] に証明がある． □

$\mathbb{Q}$ のアデール環 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ の基本指標 (basic character) を ψ とする．この指標は $\psi(a) = 1\,(a \in \mathbb{Q})$, $\psi(x_\infty) = e^{2\pi i x_\infty}$ $(x_\infty \in \mathbb{R})$ で特徴付けられる．$\mathbb{A}$ の加法指標を $\psi_F = \psi_{\mathbb{Q}} \circ \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}$ で定義する．$\psi_{F_v} := \phi_F|F_v$ とおくと，

$$\psi_F(x) = \prod_{v \in \Sigma} \psi_{F_v}(x_v), \quad x = (x_v)_v \in \mathbb{A}$$

となる．$v \in \Sigma_\infty$ に対して，ψ_{F_v} は §3.2.1 で考えた標準的なものに一致する．F の可逆分数イデアル $\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}}$ を $\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}}^{-1} := \{a \in F \mid \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}(a\mathfrak{O}_F) \subset \mathbb{Z}\}$ で定義すると，$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ について，$d(\psi_{F_v}) = \mathrm{ord}_v(\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}})$ となる．$F/\mathbb{Q}$ の判別式 Δ_F は $\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}}$ のノルムで定義される[9]: $\Delta_F = \mathbf{N}(\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}})$. 上で固定した $\mathbb{A}$ のハール測度は ψ_F に関して自己双対的である．つまり, Schwartz-Bruhat 関数 $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{A})$ のフーリエ変換を

$$\widehat{\phi}(y) := \int_{\mathbb{A}} \phi(x)\,\psi_F(xy)\,\mathrm{d}y$$

で定義すると，$\widehat{\widehat{\phi}}(x) = \phi(-x)$ が成立する．同様に $\phi_v \in \mathscr{S}(F_v)$ のフーリエ変換は §3 で固定した F_v のハール測度と指標 ψ_{F_v} によって (3.2) で定義される．(3.3) によれば, $\mathbb{A}$ のハール測度 $\mathrm{d}x$, 局所化 F_v のハール測度 $\mathrm{d}x_v$ の制限直積測度の間には

$$\mathrm{d}x = \Delta_F^{-1/2} \prod_{v \in \Sigma} \mathrm{d}x_v \tag{4.2}$$

という関係があることが分かる ([W,]).

$\mathbb{A}^\times$ をイデール群とする．$t = (t_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ のイデールノルム $|t|_{\mathbb{A}}$ は, 任意のボレル集合 $B \subset \mathbb{A}$ に対して $\mathrm{vol}(tB) = |t|_{\mathbb{A}}\,\mathrm{vol}(B)$ なる関係で定義され, $|t|_{\mathbb{A}} = \prod_{v \in \Sigma} |t_v|_v$ で与えられる．イデール群 $\mathbb{A}^\times$ のハール測度 $\mathrm{d}^\times t$ を, §3 で決めた $F_v^\times$ のハール測度 $\mathrm{d}^\times t_v$ の制限直積の $\Delta_F^{-1/2}$ 倍で定義する:

$$\mathrm{d}^\times t = \Delta_F^{-1/2} \prod_{v \in \Sigma} \mathrm{d}^\times t_v \tag{4.3}$$

[9] Δ_F の代わりに, $\mathrm{D}(F)$ や $\mathrm{Disc}(F)$ も良く使われる．

$\mathbb{A}^1 := \{t \in \mathbb{A}^\times \mid |t|_\mathbb{A} = 1\}$ は $\mathbb{A}^\times$ の $F^\times$ を含む閉部分群で $\mathbb{A}^1/F^\times$ はコンパクトである．$t \mapsto |t|_\mathbb{A}$ は $\mathbb{A}^\times/\mathbb{A}^1$ から $\mathbb{R}_{>0}$ の上への位相群同型を引き起こす．これにより, $\mathbb{A}^\times$ のハール測度を $\mathbb{A}^\times/\mathbb{A}^1$ の商測度が $\mathbb{R}_{>0}$ のハール測度 $\mathrm{d}t/t$ に対応するように定義する．$\mathbb{A}^\times/\mathbb{A}^1 \to \mathbb{R}_{>0}$ の section が次ぎのように構成できる．$t \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して, $\underline{t} = (t_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ を $t_v = t^{1/[F:\mathbb{Q}]}$ $(v \in \Sigma_\mathbb{R})$, $t_v = t^{1/2[F:\mathbb{Q}]}$ $(v \in \Sigma_\mathbb{C})$, $t_v = 1\,(v \in \Sigma_{\mathrm{fin}})$ で定義し, $\underline{\mathbb{R}_{>0}} = \{\underline{t} \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$ とおく．$|\underline{t}|_\mathbb{A} = t$ となる．これにより, $\mathbb{A}^\times = \mathbb{A}^1\,\underline{\mathbb{R}_{>0}}$ と直積に分解される．

4.2 S-整数環とそのイデアル

S を Σ の有限部分集合で $\Sigma_\infty \subset S$ となるものとする．

$$F_S = \prod_{v \in S} F_v \qquad (\text{直積環})$$

と定義し, $F_\infty := F_{\Sigma_\infty}$ とおく．$(t_v)_{v\in S} \in F_S^\times$ を $t_v = 1\,(v \in \Sigma - S)$ としてイデール $t = (t_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ と見做すことで $F_S^\times \subset \mathbb{A}^\times$ と埋め込む．$(\mathbb{A}^\times)^S$ を S 成分が 1 であるイデール全体のなす部分群とすると, $\mathbb{A}^\times = F_S^\times\,(\mathbb{A}^\times)^S$ となる．$t \in \mathbb{A}^\times$ に対して, $|t|_S := \prod_{v\in S} |t_v|_v$ と定義する．イデール $t \in \mathbb{A}^\times$ に対して, $t_S \in F_S^\times$, $t^S \in (\mathbb{A}^\times)^S$ を t の $F_S^\times$, $(\mathbb{A}^\times)^S$ への射影とする．従って, $t_S \in F_S^\times$, $t^S \in (\mathbb{A}^\times)^S$, $t = t_S t^S$ である． 同様に, $g \in G(\mathbb{A})$ について $g_S \in G(F_S)$, $g^S \in G(\mathbb{A})^S$ を定義する．

$\mathfrak{O}_F(S)$ を S-整数環とする, i.e.,

$$\mathfrak{O}_F(S) := \{x \in F \mid \mathrm{ord}_v(x\mathfrak{O}_v) \geqslant 0\,(\forall v \in \Sigma - S)\} = F \cap (F_S \prod_{v \notin S} \mathfrak{O}_v).$$

$\mathfrak{O}_F(S)$ は F の Dedekind 部分環で $\mathfrak{O}_F\ (= \mathfrak{O}_F(\Sigma_\infty))$ を部分環に含む．$\mathfrak{O}_F(S)$ の可逆 (i.e., 零でない) イデアル $\mathfrak{a}$ のノルムは

$$\mathbf{N}_S(\mathfrak{a}) = \#(\mathfrak{O}_F(S)/\mathfrak{a})$$

で定義される．($S = \Sigma_\infty$ のとき, $\mathbf{N}_S(\mathfrak{a})$ を単に $\mathbf{N}(\mathfrak{a})$ と書く．) 可逆イデアル $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{O}_F(S)$ に対してイデール $\alpha = (\alpha_v)_v$ を, $\alpha_v = \varpi_v^{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{a}\mathfrak{O}_v)}$ $(v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - S)$, $\alpha_v = 1\,(v \in S)$ で定義すると, 対応 $\mathfrak{a} \mapsto \alpha$ は積を保ち, $\mathbf{N}_S(\mathfrak{a}) = \prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - S} |\alpha_v|_v^{-1}$ となる． これより, $\mathbf{N}_S(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathbf{N}_S(\mathfrak{a})\mathbf{N}_S(\mathfrak{b})$ となる．$\nu \in \mathfrak{O}_F(S) - (0)$ に対して, $\mathbf{N}_S(\nu) := \mathbf{N}_S(\nu\mathfrak{O}_F(S))$ とおく．$\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\nu)$ を体のノルム写像とすると,

$$\mathbf{N}_S(\nu) = |\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\nu)|_S, \quad \nu \in \mathfrak{O}_F(S) - (0)$$

となることが分かる．対応 $\mathfrak{a} \mapsto \alpha$ は $\mathfrak{O}_F(S)$ のイデアル類群から，イデール群の商

$$\mathrm{Cl}(F,S) := \mathbb{A}^\times / F^\times F_S^\times \prod_{v \notin S} \mathfrak{O}_v^\times$$

の上への同型を導く．これは有限群なのでその位数を $h_F(S)$ とおく．$S \subset S'$ ならば全射準同型 $\mathrm{Cl}(F,S) \to \mathrm{Cl}(F,S')$ があるから，$h_F(S') \mid h_F(S)$ である．$\mathrm{Cl}(F,\Sigma_\infty)$ は通常のイデアル類群であるから，もし F の類数が 1 ならば $h_F(S) = 1$ である．F が一般でも S が十分大きければ $h_F(S) = 1$ となる．

4.3 Iwasawa-Tate 理論 (大域)

χ をイデール類群 $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の連続指標で $\chi|\underline{\mathbb{R}_{>0}} = 1$ なるものとする．各 $v \in \Sigma$ に対して $\chi_v := \chi|F_v^\times$ とおくと，$\chi(x) = \prod_v \chi_v(x_v)$, $x = (x_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ となる．$\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{A})$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ について

$$\zeta(s,\chi,\phi) := \int_{\mathbb{A}^\times} \phi(x)\chi(x)|x|_{\mathbb{A}}^s \,\mathrm{d}^\times x,$$
$$\zeta_+(s,\chi,\phi) := \int_{\substack{\mathbb{A}^\times \\ |t|_{\mathbb{A}} \geqslant 1}} \phi(x)\chi(x)|x|_{\mathbb{A}}^s \,\mathrm{d}^\times x$$

とおく．$\zeta(s,\chi,\phi)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ において，$\zeta_+(s,\chi,\phi)$ は任意の $s \in \mathbb{C}$ で広義一様に絶対収束してその領域で正則函数を定める．Poisson 和公式を使うことで示される次の等式によって $\zeta(\phi,\chi,s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に $s = 0, 1$ で高々 1 位の極を除いて正則に解析接続される:

$$\zeta(s,\chi,\phi) = \zeta_+(s,\chi,\phi) + \zeta_+(1-s,\chi^{-1},\widehat{\phi}) - \mathrm{vol}(\mathbb{A}^1/F^\times)\delta_{\chi,\mathbf{1}}\left(\tfrac{1}{s}\phi(0) + \tfrac{1}{1-s}\widehat{\phi}(0)\right). \tag{4.4}$$

完備ヘッケの L-函数 $L(s,\chi)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ においては次の絶対収束するオイラー積で定義される:

$$L(s,\chi) := \prod_{v \in \Sigma} L(s,\chi_v), \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

$\phi = \otimes_v \phi_v$, $\phi_v \in \mathscr{S}(F_v)$, S は Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合で $v \notin S$ ならば $\mathfrak{f}_{\chi_v} = \mathfrak{O}_v$, $\phi_v = \mathbb{1}_{\mathfrak{O}_v}$, $d(\psi_{F_v}) = 0$ となるものとすると

$$\widetilde{\zeta_{F_v}}(s,\chi_v,\mathbb{1}_{\mathfrak{O}_v}) = L(s,\chi_v), \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

であり，(4.3) より

$$\zeta(s,\chi,\phi) = \Delta_F^{-1/2}\, L(s,\chi) \prod_{v \in S} \frac{\widetilde{\zeta_{F_v}}(s,\chi_v,\phi_v)}{L(s,\chi_v)} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

と分解される, ただし S は Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合である. 以上のことから, 函数 $L(s,\chi)$ は $\mathbb{C}$ 全体上の有理型函数に解析接続されて, $s=0,1$ での高々 1 位の極以外では正則となること, $s=0,1$ が極になる条件は χ が自明指標になることが示される. $\chi=\mathbf{1}$ のとき, $L(s,\mathbf{1})$ はガンマ因子で完備化された Dedekind ゼータ函数 $\zeta_F(s)$ である. 有限集合 $S\subset\Sigma$ に対して, $L^S(s,\chi)$ を $\Sigma-S$ 上での部分積で定義する. $S(\chi):=\{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}\mid \chi_v|\mathfrak{O}_v^\times\neq\mathbf{1}\}$ とおき, χ の導手 $\mathfrak{f}_\chi$ を $\mathfrak{O}_F$ のイデアル $\mathfrak{f}_{\chi_v}\cap\mathfrak{O}$ の $v\in S(\chi)$ に亘る積として定義する.

$$\Lambda(s,\chi):=(\Delta_F\mathbf{N}(\mathfrak{f}_\chi))^{s/2}\,L(s,\chi),\qquad W(\chi):=\prod_{v\in S(\chi)\cup\Sigma_\infty}\varrho_{\chi_v}$$

とおくと, 函数等式 $\Lambda(s,\chi)=W(\chi)\Lambda(1-s,\chi)$ が成り立つ. さらに, $|W(\chi)|=1$ であり, $\chi^2=\mathbf{1}$ ならば $W(\chi)=1$ であることもいえる ([RV, p.303, Excercise 11]). とくに $\chi=\mathbf{1}$ のときを考えると, $\Lambda_F(s):=\Delta_D^{s/2}\zeta_F(s)$ は函数等式 $\Lambda_F(1-s)=\Lambda_F(s)$ を満たす. これより, $\zeta_F^{\Sigma_\infty}(s)$ の非対称的な函数等式：

$$\zeta_F^{\Sigma_\infty}(1-s)=\Delta_F^{s-1/2}\cos\left(\tfrac{\pi s}{2}\right)^{t+r_2}\sin\left(\tfrac{\pi s}{2}\right)^{r_1-t+r_2}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2+2r_2}\,\zeta_F^{\Sigma_\infty}(s)\quad(4.5)$$

を得る.

4.3.1 凸評価 (Convexity bound)

$\kappa(\sigma)=0\,(\sigma\geqslant 1)$, $\kappa(\sigma)=\frac{1-\sigma}{2}\,(0\leqslant\sigma\leqslant 1)$, $\kappa(\sigma)=\frac{1}{2}-\sigma\,(\sigma\leqslant 0)$ とおくと, 函数等式とガンマ因子の評価 (Stirling 公式), Phragmen-Lindelöf の凸性原理を使うと次の評価が得られる ([IK, Excercise 3])：任意の $\varepsilon>0$ に対して定数 $C_\varepsilon>0$ が存在して, $\mathbb{C}$ 上で [10]

$$|s(1-s)\,L^{\Sigma_\infty}(s,\chi)|\leqslant C_\varepsilon\,(1+|s|)^2\,\{(3+|\mathrm{Im}(s)|)^{[F:\mathbb{Q}]}\mathbf{N}(\mathfrak{f}_\chi)\}^{\kappa(\mathrm{Re}(s))+\varepsilon}.\quad(4.6)$$

4.3.2 実 Hecke 指標とその類体論による記述

$\mathfrak{C}_F$ をイデール類指標 $\chi=\prod_v\chi_v\in\widehat{\mathbb{A}^\times/F^\times\underline{\mathbb{R}_{>0}}}$ であって $\chi^2=\mathbf{1}$ を満たすものとする. S を Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合とする. $\chi\in\mathfrak{C}_F$ について, $\chi_S:=\otimes_{v\in S}\chi_v\in\widehat{[F_S^\times]_2}$ とおく. $\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}$ に対して, $\mathfrak{C}_F(\omega_S)$ をイデール類指標 $\chi\in\mathfrak{C}_F$ で $\chi_S=\omega_S$ を満たすもの全体の集合とする. $\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)$ に対し

[10] (4.6) 左辺の $s(1-s)$ は $\chi=\mathbf{1}$ のときに極を解消するためにかけてある. 右辺の最初の $1+|s|)^2$ で $s(1-s)$ の影響はキャンセルされる.

て, $\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi \mathfrak{O}_F(S))$ を $\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)$ と略記する, ここで $\mathfrak{f}_\chi \subset \mathfrak{O}_F$ は χ の導手である. つまり, $\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi) = \prod_{v \notin S} \mathrm{N}(\mathfrak{f}_{\chi_v}) = \prod_{v \notin S} \#(\mathfrak{O}_v/\mathfrak{f}_{\chi_v})$.

$\delta \in [F^\times]_2$ に対して, $\chi_\delta \in \mathfrak{C}_F$ を

$$\chi_\delta(x) := \prod_{v \in \Sigma} (\delta, x_v)_{F_v}, \quad x = (x_v)_v \in \mathbb{A}^\times$$

で定義する. (殆どすべての素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ で $\delta, x_v \in \mathfrak{O}_v^\times$ かつ $v \notin \Sigma_2$ なので $(\delta, x_v)_{F_v} = 1$ に注意する.) $\delta \notin (F^\times)^2$ ならば, χ_δ の核は大域類体論で F の 2 次拡大 $F(\sqrt{\delta})/F$ に対応する開部分群に一致する. このことから, 群準同型写像 $[F^\times]_2 \ni \delta \longmapsto \chi_\delta \in \mathfrak{C}_F$ は同型になる. χ_δ の導手は $\mathfrak{f}_{\chi_\delta} = \mathrm{N}_{F(\sqrt{a})/F}(\mathfrak{d}_{F(\sqrt{a})/F})$(相対判別式) で与えられる.

4.3.3 実 Hecke 指標の L-函数

$\omega_S = \otimes_{v \in S} \omega_v \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ に対して, $t = t(\omega_S) := \#\{v \in \Sigma_{\mathbb{R}} \mid \omega_v = \mathbf{1}\}$,

$$\begin{aligned} \Gamma_S(s, \omega_S) := {} & \Delta_F^{s-1/2} \cos\left(\tfrac{\pi s}{2}\right)^{t+r_2} \sin\left(\tfrac{\pi s}{2}\right)^{r_1-t+r_2} \Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{[F:\mathbb{Q}]} \\ & \times \prod_{v \in S \cap \Sigma_{\mathrm{fin}}} \mathrm{N}(\mathfrak{f}_{\omega_v})^{s-1/2} \frac{L(s, \omega_v)}{L(1-s, \omega_v)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

とおく.

補題 4.2 $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ とする. $\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)$ に対して, $L^S(s, \chi)$ は次の函数等式を満たす：

$$L^S(1-s, \chi) = \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s-1/2} \, \Gamma_S(s, \omega_S) \, L^S(s, \chi). \tag{4.8}$$

証明 $\chi = \mathbf{1}$ の場合, $L^S(s, \chi) = \zeta_F^S(s)$ だから結果は (4.5) から従う. 以下 χ が非自明とし, E/F を大域類体論で $\mathbb{A}^\times/F^\times F_\infty^0$ の指数 2 の開部分群 $\ker(\chi)$ に対応する 2 次拡大とする. すると E の実素点の個数は $2t = 2t(\omega_S)$, E の複素素点の個数は $r_1 - t + 2r_2$ となる. $\zeta_E^{\Sigma_\infty^E}(s)$, $\zeta_F^{\Sigma_\infty}(s)$ の函数等式 (4.5) および関係式 $\zeta_E^{\Sigma_\infty^E}(s) = L^{\Sigma_\infty}(s, \chi)\zeta_F^{\Sigma_\infty}(s)$, $\Delta_E = \Delta_F^2 \, \mathbf{N}(\mathfrak{f}_\chi)$ から, $S = \Sigma_\infty$ の場合の函数等式が従う. 一般の S では $L^S(s, \chi) = L^{\Sigma_\infty}(s, \chi) \prod_{v \in S \cap \Sigma_{\mathrm{fin}}} L(s, \omega_v)^{-1}$ に注意すれば $S = \Sigma_\infty$ のときの結果から従う. □

補題 4.3 $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ について, $\Gamma_S(s, \omega_S) \, \Gamma_S(1-s, \omega_S) = 1$.

証明 これは直接計算で出る. 或いは $\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)$ を一つ選び, $L^S(s, \chi)$ に函数等式 (4.8) を 2 回使い, $L^S(s, \chi)$ が函数として 0 でないことを使っても従う. □

4.4 大域ゼータ積分の定義 (収束性)

$$\mathcal{D} := \{s \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(s_1) > 1,\ \mathrm{Re}(s_2) > 1\} \tag{4.9}$$

とおく. $G(\mathbb{A})$ の右ハール測度を $g \in G(\mathbb{A})$ の成分 (2.1) によって

$$\mathrm{d}g = \mathrm{d}^{\times} a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^{\times} c \tag{4.10}$$

で定義する.

定義 4.4 $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$, $s = (s_1, s_2) \in \mathcal{D}$ に対して,

$$Z(\Phi, s) := \int_{G(\mathbb{A})/G(F)} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Big\{ \sum_{X \in V^0(F)} \Phi(\rho(g)X) \Big\}\, \mathrm{d}g$$

命題 4.5 $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ とする. 領域 $\mathcal{D}$ 上で

$$\int_{G(\mathbb{A})/G(F)} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s_1)} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s_2)} \sum_{X \in V^0(F)} |\Phi(\rho(g)X)|\, \mathrm{d}g < +\infty$$

であり, 函数 $s \mapsto Z(\Phi, s)$ は $\mathcal{D}$ 上で正則になる。

証明 補題 5.3 および補題 3.4 を使うと, 命題 5.6 の議論から従う. □

4.5 大域ゼータ積分の函数等式

概要は [KTW, §4] で述べたが, ようするに [新谷, Lemma 4] の議論 [11] をアデール上で展開しなおすことに尽きるため証明は殆ど省略した. ここでは読者の便を考えなるべく細部を補うことにする. $\mathcal{D}$ を含む次の領域を考える:

$$\mathcal{D}_1 := \{s \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(s_1) > 1\}. \tag{4.11}$$

補題 4.6 $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$, $s = (s_1, s_2) \in \mathcal{D}_1$ に対して, truncate された大域ゼータ積分

$$Z_+(\Phi, s) := \int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F) \\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}} > 1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Big\{ \sum_{X \in V^0(F)} \Phi(\rho(g)X) \Big\}\, \mathrm{d}g$$

は $\mathcal{D}_1$ において広義一様に絶対収束して, $\mathcal{D}_1$ 上の正則函数を定義する.

[11] ゼータ積分の特異部分の解析は [杉山, §1] も参照. [杉山, 注意 4.3 (2)] にあるように, 「難しさ」はテスト函数 Φ とそのフーリエ変換 $\widehat{\Phi}$ の台が特異軌道と交わることから生じている. 議論の原型は (4.4) の証明にある.

証明 $Z_+(|\Phi|, \mathrm{Re}(s)) \leqslant Z(|\Phi|, \mathrm{Re}(s))$ なので, $s \in \mathcal{D}$ ならば収束性は命題 4.5 から従う． 領域 $\mathrm{Re}(s_1) > 1$, $\mathrm{Re}(s_2) < 2$ においては, $|\tau(g)|_{\mathbb{A}} > 1$ ならば $|\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s_2)} \leqslant |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^2$ なので, $Z_+(|\Phi|, \mathrm{Re}(s)) \leqslant Z_+(|\Phi|, \mathrm{Re}(s_1), 2) < +\infty$ となり収束が従う． □

$\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ に対して,

$$T(\Phi, s) := \int_{\mathbb{A}^\times} \int_{\mathbb{A}} |a|_{\mathbb{A}}^{s-1} \Phi(a, b, a^{-1}b^2)\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times a \quad \mathrm{Re}(s) > 1 \tag{4.12}$$

任意の素点 $v \in \Sigma$ と $\Phi_v \in \mathscr{S}(V(F_v))$ に対して,

$$T_v(\Phi_v, s) := \int_{F_v^\times} \int_{F_v} |a|_v^{s-1} \Phi_v(a, b, a^{-1}b^2)\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times a, \quad \mathrm{Re}(s) > 1/2$$

補題 4.7 (1) $T_v(\Phi_v, s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ で局所一様絶対収束して正則函数を定める． $s \mapsto T_v(\Phi_v, s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に解析接続され, $\zeta_{F_v}(2s-1)^{-1}\, T_v(\Phi_v, s)$ は $\mathbb{C}$ 上正則になる．

(2) $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ について

$$T_v(\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}, s) = \frac{1 - q_v^{-2s}}{(1 - q_v^{-s})(1 - q_v^{-2s+1})}$$

(3) $T(\Phi, s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で局所一様に絶対収束して正則函数を定める． $\Phi = \otimes_v \Phi_v$ のとき, 任意の Σ_∞ を含む有限集合 $S \subset \Sigma$ について,

$$T(\Phi, s) = \frac{\zeta_F^S(s)\zeta_F^S(2s-1)}{\zeta_F^S(2s)} \prod_{v \in S} T_v(\Phi_v, s) \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

が成立する． この式の右辺の表示によって $T(\Phi, s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型函数に解析接続される．

証明 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ の場合の概略． $\Phi_v \in \mathscr{S}(V(F_v))$ について

$$\widetilde{\Phi}_v(a) := \int_{F_v} \Phi\left(a \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ b & b^2 \end{smallmatrix}\right]\right) \mathrm{d}b, \quad a \in F_v$$

と定義する． これは絶対収束して, 函数 $a \mapsto \widetilde{\Phi}_v(a)$ は $\mathscr{S}(F_v)$ に属する． あとは Iwasawa-Tate の局所ゼータの性質を使う． □

$\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ のフーリエ変換 $\widehat{\Phi} \in \mathscr{S}(\mathbb{A})$ を

$$\widehat{\Phi}(Y) := \int_{V(\mathbb{A})} \Phi(X)\psi_F(\langle X, Y\rangle)\,\mathrm{d}X, \quad Y \in V(\mathbb{A}) \tag{4.13}$$

で定義する, ここで $\mathrm{d}X$ は $V(\mathbb{A})$ のハール測度で, $X \in V(\mathbb{A})$ の成分 (2.2) によって $\mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_{12}\,\mathrm{d}x_2$ で定義されるものとし, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は (2.8) で定義される pairing $V(\mathbb{A}) \times V(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}$ である.

定理 4.8 $s \in \mathcal{D}$, $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ に対して,

$$\begin{aligned} Z(\Phi, s) = Z_+(\Phi, s) + Z_+(\widehat{\Phi}, f_\gamma(s)) + \frac{c_F}{2s_1+2s_2-3}\,T(\widehat{\Phi}, s_1) - \frac{c_F}{2s_2}\,T(\Phi, s_1) \\ + \frac{c_F}{2s_2-2}\,\zeta(\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,\cdot), s_1) - \frac{c_F}{2s_1+2s_2-1}\,\zeta(\Phi^{(3)}(0,0,\cdot), s_1) \end{aligned}$$

ここで, $f_\gamma \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ は (6.3) で定義される affine 変換, $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ の部分フーリエ変換 $\Phi^{(3)}\mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ は

$$\Phi^{(3)}(x_1, x_{12}, y_2) := \int_{\mathbb{A}} \Phi(x_1, x_{12}, x_2)\psi_F(x_2y_2)\,\mathrm{d}x_2 \tag{4.14}$$

で定義され, $c_F := \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F(s) = \mathrm{vol}(\mathbb{A}^1/F^\times)$ とおいた.

$f_\gamma(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1$ に注意しよう.

系 4.9 $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ とする. $s \mapsto (s_2-1)(2s_1+2s_2-3)Z(\Phi, s)$ ($s \in \mathcal{D}$) は領域 $\mathcal{D}_1$ まで正則函数に解析接続され, 次の函数等式を満たす：

$$Z(\Phi, f_\gamma(s)) = Z(\widehat{\Phi}, s), \quad s \in \mathcal{D}_1.$$

4.5.1 証明の準備

ρ の反傾表現 $\hat{\rho}$ を想起する (§2.1.1). 式 (2.10) より, $\hat{\rho}(g) = \tau(g)^{-1}\rho(g)$ ($g \in G(\mathbb{A})$) であることに注意する.

補題 4.10 任意の $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$, $g \in G(\mathbb{A})$ に対して

$$\sum_{X \in V(F)} \Phi(\rho(g)X) = |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{-3/2} \sum_{Y \in V(F)} \widehat{\Phi}(\hat{\rho}(g)Y), \quad g \in G(\mathbb{A}).$$

証明 $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ と $g \in G(\mathbb{A})$ に対して, 函数 $\Phi^{\rho(g)}, \Phi^{\hat{\rho}(g)} \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ を $\Phi^{\rho(g)}(X) := \Phi(\rho(g)X)$, $\Phi^{\hat{\rho}(g)}(X) := \Phi(\hat{\rho}(g)X)$ で定義する. これと, $V(\mathbb{A})$ のハール測度の変数変換法則

$$\mathrm{d}(\rho(g)X) = |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{3/2}\,\mathrm{d}X$$

および pairing の不変性 (2.9) を組み合わせると容易に次の公式が示せる:

$$\widehat{(\Phi^{\rho(g)})} = |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{-3/2}\,(\widehat{\Phi})^{\hat{\rho}(g)}, \quad g \in G(\mathbb{A}). \tag{4.15}$$

Poisson の和公式を $\Phi^{\rho(g)} \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ に適用して, (4.15) を用いれば所望の公式が従う. □

$g = (a, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & x \end{smallmatrix}\right]) \in G(\mathbb{A})$ に対して,

$$g' := (a^{-1}c^{-2}, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & x \end{smallmatrix}\right]) \in G(\mathbb{A})$$

とおく. 単純計算により次の補題が分かる:

補題 4.11 $g \mapsto g'$ は $G(\mathbb{A})$ の位数 2 の位相群自己同型写像であり, ハール測度 (4.10) を不変にする. さらに,

$$\hat{\rho}(g) = \rho(g'), \quad \tau_1(g) = \tau_1\tau^{-1}(g'), \quad \tau(g) = \tau^{-1}(g')$$

$V^0(F)$ は一つの $G(F)$-軌道だったから, 補集合 $S(F) := V(F) - V^0(F)$ は $G(F)$ 安定である. 簡単な計算で次が分かる:

補題 4.12 集合

$$\mathscr{O} := \{X \in V(F) \mid P_1(X) \neq 0,\, P(X) = 0\}$$

は $V(F) - V^0(F)$ の点 $Z := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ の $G(F)$-軌道に一致する. Z の固定部分群は次のようになる：

$$G(F)^Z = \left\{(1, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right]) \mid c \in F^\times\right\}.$$

注意 4.13 補集合 $V(F) - (V^0(F) \cup \mathscr{O})$ は 3 つの $G(F)$-軌道 $\{x_1 = 0, x_{12} \neq 0\}$, $\{x_1 = x_{12} = 0, x_2 \neq 0\}$, $\{0\}$ の合併であることが簡単に分かる. 以下では, これら 3 個の軌道を「まとめて」扱うためこの軌道構造の詳細は不要.

4.5.2 定理 4.8 の証明

(*cf.* [新谷, Lemma 4]. [谷口 2, §2.3] も参照) 補題 4.10 より,

$$\sum_{X\in V^0(F)} \Phi(\rho(g)X) = \boldsymbol{\Sigma}_1(g) + \boldsymbol{\Sigma}_2(g) + \boldsymbol{\Sigma}_3(g),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1(g) := |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{-3/2} \sum_{Y\in V^0(F)} \widehat{\Phi}(\hat{\rho}(g)Y)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(g) := |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{-3/2} \sum_{Y\in\mathscr{O}} \widehat{\Phi}(\hat{\rho}(g)Y) - \sum_{X\in\mathscr{O}} \Phi(\rho(g)X),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_3(g) := |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{-3/2} \sum_{Y\in V(F)-(V^0(F)\cup\mathscr{O})} \widehat{\Phi}(\hat{\rho}(g)Y) - \sum_{X\in V(F)-(V^0(F)\cup\mathscr{O})} \Phi(\rho(g)X).$$

となる. よって形式的には

$$I_j(\Phi, s) := \int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F)\\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}}<1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2}\, \boldsymbol{\Sigma}_j(g)\, \mathrm{d}g, \quad (j=1,2,3) \tag{4.16}$$

として,

$$Z(\Phi, s) = Z_+(\Phi, s) + I_1(\Phi, s) + I_2(\Phi, s) + I_3(\Phi, s) \tag{4.17}$$

が成り立つ. 以下の議論のなかで, 各 j に対して $s\in\mathcal{D}$ ならば積分 $I_j(\Phi, s)$ が絶対収束することが示されるため, 等式 (4.17) は $s\in\mathcal{D}$ で成立している. この点も含め, 定理の主張は以下の 3 つの補題 4.14, 4.15 および 4.16 と等式 (4.17) から従う.

補題 4.14 $I_1(\Phi, s)$ は $s\in\mathcal{D}$ 上絶対収束して

$$I_1(\Phi, s) = Z_+(\widehat{\Phi}, s_1, \tfrac{3}{2} - s_1 - s_2), \quad s\in\mathcal{D}$$

証明 $I_1(\Phi, s)$ の積分で変数変換 $g\to g'$ を行い補題 4.11 を使う. □

補題 4.15 $I_2(\Phi, s)$ は $s\in\mathcal{D}$ 上絶対収束して

$$I_2(\Phi, s) = \frac{c_F}{2s_1 + 2s_2 - 3} T(\widehat{\Phi}, s_1) - \frac{c_F}{2s_2} T(\Phi, s_1).$$

証明 $I_2(\Phi, s)$ の $\widehat{\Phi}$ を含む方の積分を変数変換 $g\to g'$ で補題 4.11 を使い書き直す. $I_2(\Phi, s)$ は次の 2 つの積分の和になる:

$$\int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F)\\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}}>1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{3/2-s_1-s_2} \sum_{Y\in\mathscr{O}} \widehat{\Phi}(\rho(g)Y)\, \mathrm{d}g, \tag{4.18}$$

$$-\int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F)\\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}}<1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \sum_{X\in\mathscr{O}} \Phi(\rho(g)Y)\, \mathrm{d}g \tag{4.19}$$

補題 4.12 から $\mathscr{O} = \{\rho(\gamma)Z \mid \gamma \in G(F)/G(F)^Z\}$, $G(\mathbb{A})/G(F)^Z = \{(a, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right]) \mid a \in \mathbb{A}^\times,\ b \in \mathbb{A},\ c \in \mathbb{A}^\times/F^\times\}$ だから (4.19) $=$

$$
\begin{aligned}
& -\int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F)^Z \\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}}<1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Phi(\rho(g)Z)\,\mathrm{d}g \\
&= -\int_{a\in\mathbb{A}^\times}\int_{b\in\mathbb{A}}\int_{\substack{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |ac|_{\mathbb{A}}<1}} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1} |(ac)^2|_{\mathbb{A}}^{s_2}\,\Phi(a, ab, ab^2)\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}^\times c \\
&= -\int_{a\in\mathbb{A}^\times}\int_{b\in\mathbb{A}} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1}\,\Phi(a, ab, ab^2)\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b \times \int_{\substack{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |c|_{\mathbb{A}}<1}} |c|_{\mathbb{A}}^{2s_2}\mathrm{d}^\times c.
\end{aligned}
$$

最初の a, b についての積分は $T(\Phi, s)$ で $\mathrm{Re}(s_1) > 1$ で絶対収束する (補題 4.7). $c = u\underline{t}$ ($u \in \mathbb{A}^1/F^\times$, $t > 0$) と分解すると,

$$
\int_{\substack{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |c|_{\mathbb{A}}<1}} |c|_{\mathbb{A}}^{2s_2}\mathrm{d}^\times c = \int_0^1 |t|^{2s_2}\mathrm{d}^\times t \times \mathrm{vol}(\mathbb{A}^1/F^\times) = \frac{c_F}{2s_2}
$$

となる. よって (4.19) は $\frac{-c_F}{2s_2}T(\Phi, s)$ と計算された. 同様して, (4.18) は $\mathrm{Re}(s_1) > 1$ で絶対収束して $\frac{c_F}{2s_1+2s_2-3}T(\widehat{\Phi}, s_1)$ に等しいことが分かる. □

補題 4.16 $I_3(\Phi, s)$ は $s \in \mathcal{D}$ 上絶対収束して

$$
I_3(\Phi, s) = \frac{c_F}{2s_2-2}\,\zeta(\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,\cdot), s_1) - \frac{c_F}{2s_1+2s_2-1}\,\zeta(\Phi^{(3)}(0,0,\cdot), s_1).
$$

証明 $I_3(\Phi, s)$ は次の 2 つの項の和である:

$$
\int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F) \\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}}<1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2-3/2} \sum_{y_{12}, y_2\in F} \widehat{\Phi}(\hat{\rho}(g)\left[\begin{smallmatrix} 0 & y_{12} \\ y_{12} & y_2 \end{smallmatrix}\right])\,\mathrm{d}g, \tag{4.20}
$$

$$
-\int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F) \\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}}<1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \sum_{x_{12}, x_2\in F} \Phi(\rho(g)\left[\begin{smallmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right])\,\mathrm{d}g \tag{4.21}
$$

$G(\mathbb{A})/G(F)$ の基本領域として

$$
g = \left(a, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right]\right), \quad a, c \in \mathbb{A}^\times/F^\times,\ b \in \mathbb{A}/F
$$

の形の点全体が取れる. (a, b, c) を「座標」として $G(\mathbb{A})$ のハール測度を書くと $\mathrm{d}g = \mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b\,|c|_{\mathbb{A}}\mathrm{d}^\times c$ となる. 上の g に対して

$$
\rho(g)\left[\begin{smallmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right] = a\left[\begin{smallmatrix} 0 & cx_{12} \\ cx_{12} & c^2x_2+2bc^2x_{12} \end{smallmatrix}\right]
$$

だから (4.21) =

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{\substack{(a,c)\in\mathbb{A}^\times/F^\times\times\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |ac|_{\mathbb{A}}<1}} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1+2s_2}|c|_{\mathbb{A}}^{2s_2+1} \\
&\quad\times\int_{\mathbb{A}/F}\left\{\sum_{x_{12}\in F^\times,x_2\in F}\Phi(0,acx_{12},ac^2(x_2+2bx_{12})+\sum_{x_2\in F}\Phi(0,0,ac^2x_2)\right\}\mathrm{d}b\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^\times c \\
&=-\iint_{\substack{(a,c)\in\mathbb{A}^\times/F^\times\times\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |ac|_{\mathbb{A}}<1}} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1+2s_2}|c|_{\mathbb{A}}^{2s_2+1} \\
&\quad\times\left\{\int_{\mathbb{A}}\sum_{x_{12}\in F^\times}\Phi(0,acx_{12},ac^2u)\,\mathrm{d}u+\sum_{x_2\in F}\Phi(0,0,ac^2x_2)\right\}\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^\times c
\end{aligned}
$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
(4.21)=&\iint_{\substack{(a,c)\in\mathbb{A}^\times/F^\times\times\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |ac|_{\mathbb{A}}<1}} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1+2s_2}|c|_{\mathbb{A}}^{2s_2+1}|ac|_{\mathbb{A}}^{-3} \\
&\times\left\{\int_{\mathbb{A}}\sum_{x_{12}\in F^\times}\widehat{\Phi}(0,(ac)^{-1}x_{12},a^{-1}u)\,\mathrm{d}u+\sum_{x_2\in F}\widehat{\Phi}(0,0,ac^2x_2)\right\}\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^\times c.
\end{aligned}
$$

ここで, $\Phi\in\mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$, $a,c\in\mathbb{A}^\times$ に対して

$$
\Phi_{a,c}(X):=\Phi(ax_1,acx_{12},ac^2x_2),\quad X\in V(\mathbb{A})
$$

と定義すると, 簡単な計算で

$$
\widehat{\Phi_{a,c}}(Y)=|ac|_{\mathbb{A}}^{-3}(\widehat{\Phi})_{a^{-1}c^{-2},c}(Y)
$$

が確かめられる. この記号で上の計算結果を書きなおすと,

$$
I_3(\Phi,s)=\iint_{\substack{(a,c)\in\mathbb{A}^\times/F^\times\times\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |ac|_{\mathbb{A}}<1}} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1+2s_2}|c|_{\mathbb{A}}^{2s_2+1}\{\sum_{i=1}^{4}J_i(a,c)\}\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^\times c, \tag{4.22}
$$

$$
J_1(a,c):=\sum_{x_{12}\in F^\times}\int_{\mathbb{A}}\widehat{\Phi_{a,c}}(0,x_{12},u)\,\mathrm{d}u,\qquad J_2(a,c):=\sum_{x_2\in F}\widehat{\Phi_{a,c}}(0,0,x_2),
$$

$$
J_3(a,c):=-\sum_{x_{12}\in F^\times}\int_{\mathbb{A}}\Phi_{a,c}(0,x_{12},u)\,\mathrm{d}u,\qquad J_4(a,c):=-\sum_{x_2\in F}\Phi_{a,c}(0,0,x_2)
$$

となる．$J_1(a,c)$ は次のように変形される：$J_1(a,c) =$

$$\sum_{x_{12}\in F^\times}\int_{\mathbb{A}} \mathrm{d}u \int_{\mathbb{A}^3} \Phi_{a,c}(y_1,y_{12},y_2)\,\psi(-2y_{12}x_{12}+uy_1)\,\mathrm{d}Y$$
$$= \sum_{x_{12}\in F^\times}\int_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(0,y_{12},y_2)\,\psi(-2y_{12}x_{12})\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2$$
$$= \sum_{x_{12}\in F}\int_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(0,y_{12},y_2)\,\psi(-2y_{12}x_{12})\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 - \int_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(0,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2$$
$$= \sum_{\alpha\in F}\int_{\mathbb{A}} \Phi_{a,c}(0,\alpha,y_2)\,\mathrm{d}y_2 - \int_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(0,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 \quad (\because \text{Poisson 和公式})$$
$$= -J_3(a,c) + \int_{\mathbb{A}} \Phi_{a,c}(0,0,y_2)\,\mathrm{d}y_2 - \int_{\mathbb{A}} \Phi_{a,c}(0,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2,$$

$J_2(a,c)$ は次のように変形される：

$$J_2(a,c) = \iint_{\mathbb{A}^2} \{\sum_{x_2\in F}\int_{\mathbb{A}^3} \Phi_{a,c}(y_1,y_{12},y_2)\,\psi(y_1x_2)\,\mathrm{d}y_1\}\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2$$
$$= \iint_{\mathbb{A}^2} \sum_{\alpha\in F} \Phi_{a,c}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,dy_2 \quad (\because \text{Poisson 和公式}),$$

$J_4(a,c)$ は次のように変形される：

$$J_4(a,c) = -\sum_{x_2\in F} \widehat{\widehat{\Phi_{a,c}}}(0,0,-x_2)$$
$$= \sum_{\alpha\in F}\iint_{\mathbb{A}^2} \widehat{\Phi_{a,c}}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_3 \qquad (\because J_2(a,c) \text{ の変形と同様の議論})$$
$$= \sum_{\alpha\in F^\times}\iint_{\mathbb{A}^2} \widehat{\Phi_{a,c}}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 + \int_{\mathbb{A}} \Phi_{a,c}(0,0,x_2)\,\mathrm{d}x_2$$

以上から,

$$\sum_{i=1}^4 J_i(a,c) = \sum_{\alpha\in F^\times}\iint_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 - \sum_{\alpha\in F^\times}\iint_{\mathbb{A}^2} \widehat{\Phi_{a,c}}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2$$

更に $\Phi^{(3)}$ の定義を使うと,

$$\iint_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 = (\widehat{\Phi_{a,c}})^{(3)}(0,0,\alpha) = |ac|_{\mathbb{A}}^{-3}|a|_{\mathbb{A}}\,\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,a\alpha),$$
$$\iint_{\mathbb{A}^2} \widehat{\Phi_{a,c}}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 = \Phi_{a,c}^{(3)}(0,0,\alpha) = |ac^2|_{\mathbb{A}}^{-1}\Phi^{(3)}(0,0,a^{-1}c^{-2}\alpha).$$

よって

$$\sum_{i=1}^{4} J_i(a,c) = \sum_{\alpha\in F^\times} |ac|_{\mathbb{A}}^{-3}|a|_{\mathbb{A}}\,\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,a\alpha) - \sum_{\alpha\in F^\times} |ac^2|_{\mathbb{A}}^{-1}\Phi^{(3)}(0,0,a^{-1}c^{-2}\alpha).$$

これを (4.22) に代入して, 少し変形すると

$$\begin{aligned} I_3(\Phi,s) &= \int_{\mathbb{A}^\times} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1}\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,a)\,\mathrm{d}^\times\Bigg(\int_{\substack{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times\\ |c|_{\mathbb{A}}<1}} |c|_{\mathbb{A}}^{2s_2-2}\,\mathrm{d}^\times c\Bigg)\\ &\quad - \int_{\mathbb{A}^\times} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1-2s_2+1}\Phi^{(3)}(0,0,a)\Bigg(\int_{\substack{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times\\ |c|_{\mathbb{A}}>|a|_{\mathbb{A}}}} |c|_{\mathbb{A}}^{-2s_1-2s_2+1}\,\mathrm{d}^\times c\Bigg)\,\mathrm{d}^\times a\\ &= \tfrac{c_F}{2s_2-2}\int_{\mathbb{A}^\times} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1}\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,a)\,\mathrm{d}^\times a - \tfrac{c_F}{2s_1+2s_2-1}\int_{\mathbb{A}^\times} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1}\Phi^{(3)}(0,0,a)\,\mathrm{d}^\times a. \end{aligned}$$

□

4.6 大域ゼータ積分の分解 (局所/大域原理)

S を Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合, $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ とする.

定理 4.17 $\Phi\in\mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ とする. $s\in\mathcal{D}$ について等式

$$Z(\Phi,s) = \frac{1}{2}\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F}\int_{\mathbb{A}^\times}\int_{\mathbb{A}}\int_{\mathbb{A}^\times} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1+2s_2}|c|_{\mathbb{A}}^{s_2}\chi(c)\Phi(a,ab,ab^2-ac)\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^\times b\,\mathrm{d}^\times c$$

が成り立つ. $\Phi=\otimes_v\Phi_v$ で S が (5.7) を満たすとき,

$$\begin{aligned} Z(\Phi,s) &= \frac{1}{2}\Delta_F^{-3/2}\prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}}(1-q_v^{-1})^{-2}\\ &\quad\times\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F}\prod_{v\in S}\widetilde{Z_v}(\Phi_v,s,\chi_v)\prod_{v\notin S}\frac{\zeta_{F_v}(s_1)\,\zeta_{F_v}(2s_1+2s_2-1)\,L(s_2,\chi_v)}{L(2s_1+s_2,\chi_v)\,\mathrm{N}(\mathfrak{f}_{\chi_v})^{s_1}}. \end{aligned}$$

4.6.1 証明の準備

補題 4.18 $\sigma>1$ ならば

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)}\frac{1}{\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^\sigma} < +\infty$$

証明 可逆イデアル $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{O}_F$ に対して, $S(\mathfrak{f}) := \{v \in \Sigma_{\rm fin} \mid {\rm ord}_v(\mathfrak{f}\mathfrak{O}_v) > 0\}$,

$$U(\mathfrak{f}) := \prod_{v \in S(\mathfrak{f})} (1 + \mathfrak{f}\mathfrak{O}_v) \prod_{v \in \Sigma_{\rm fin} - S(\mathfrak{f})} \mathfrak{O}_v^\times$$

とおき, $C(\mathfrak{f}) := F^\times (\mathbb{A}^\times)^2 U(\mathfrak{f}) \backslash \mathbb{A}^\times$ と定義する.
すると, $C(\mathfrak{f})$ は有限群 $\mathbb{A}^\times / F^\times U(\mathfrak{f})(F_\infty)^0$ の商なので再び有限であって, 任意の $\varepsilon > 0$ に関して $\#(C(\mathfrak{f})) \ll_\varepsilon \mathbf{N}(\mathfrak{f})^\varepsilon$ が成り立つ. $\mathfrak{f}_\chi = \mathfrak{f}$ なる $\chi \in \mathfrak{C}_F$ は $C(\mathfrak{f})$ の指標と同一視される. $\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)$ ならば, $\mathbf{N}(\mathfrak{f}_\chi) = \prod_{v \in S} {\rm N}(\mathfrak{f}_{\omega_v}) \times \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)$ なので, 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)} \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{-\sigma} = \prod_{v \in S} {\rm N}(\mathfrak{f}_{\omega_v})^\sigma \sum_{\mathfrak{f} \subset \mathfrak{O}_F} \#(C(\mathfrak{f})) \mathbf{N}(\mathfrak{f})^{-\sigma} \ll_\varepsilon \zeta_F^{\Sigma_\infty}(\sigma - \varepsilon).$$

よって, Dedekind zeta 函数が $\sigma > 1$ で収束することから結論が従う. □

補題 4.19 無限級数

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)} \frac{L^S(s_2, \chi)}{L^S(2s_1 + s_2, \chi)\, \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}}$$

は領域

$$\mathcal{D}_2 := \{s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \mid {\rm Re}(2s_1 + s_2) > 2 + \max({\rm Re}(s_2), 1 - {\rm Re}(s_2), 1)\} \tag{4.23}$$

で広義一様絶対収束して $\mathcal{D}_2$ 上の正則函数を定める.[12]

証明 ${\rm Re}(z) \geqslant 3$ 上で一様に $|L^S(z, \chi)^{-1}| \ll 1$ であるから, $\mathcal{D}_2$ 上一様に

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)} \left| \frac{L^S(s_2, \chi)}{L^S(2s_1 + s_2, \chi)\, \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}} \right| \ll \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)} \frac{|L^S(s_2, \chi)|}{\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{{\rm Re}(s_1)}} \tag{4.24}$$

が成り立つ. $\varepsilon > 0$ を任意の微小な正数とする. U を $\mathbb{C}$ の任意のコンパクト集合とすると, (4.6) から

$$|(s_2 - 1) L^S(s_2 \chi)| \ll_\varepsilon \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{\kappa({\rm Re}(s_2)) + \varepsilon}, \quad s \in U$$

[12] [KTW, Theorem 4.3] では $\mathcal{D}$ に限定して収束性を示しているが, [KTW, Theorem 4.20](函数等式) につなげるためにはここに書いたようにより広い領域での収束が必要とされる. $\mathcal{D}_2$ の定義は [KTW] とは異なる.

が成り立つ．よって, (4.24) は U 上で一様に次の級数で上から評価される:

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)} \frac{\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{\kappa(\mathrm{Re}(s_2))+\varepsilon}}{\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{\mathrm{Re}(s_1)}}$$

補題 4.18 から, この級数は $\mathrm{Re}(s_1)-\kappa(\mathrm{Re}(s_2))>1$ なら収束する．$s\in\mathcal{D}_2$ は $\mathrm{Re}(s_1)-\kappa(\mathrm{Re}(s_2))>1$ と同値である． □

補題 4.20 [13] 連続函数 $\phi:\mathbb{A}\to\mathbb{C}$ および $s\in\mathbb{C}$ が次の条件を満たすとする．

(i) 任意のコンパクト集合 $N\subset\mathbb{A}^\times$ について非負連続函数 $\phi_1:\mathbb{A}\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ が存在して

$$\phi(xu)\leqslant\phi_1(x),\ (x\in\mathbb{A},\, u\in N)\ \text{かつ}\ |c|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s)}\phi_1(c)\ \text{は}\ \mathbb{A}^\times\ \text{上可積分}$$

(ii) $\displaystyle\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F}\left|\int_{\mathbb{A}^\times}|c|_{\mathbb{A}}^s\chi(c)\phi(c)\,\mathrm{d}^\times c\right|<+\infty.$

このとき, 次の等式が成立する:

$$\int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times}|c^2|_{\mathbb{A}}^s\sum_{z\in F^\times}\phi(c^2z)\,\mathrm{d}^\times c=\frac{1}{2}\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F}\int_{\mathbb{A}^\times}\chi(c)|c|_{\mathbb{A}}^s\phi(c)\,\mathrm{d}^\times c.$$

証明 $U=F^\times\backslash\mathbb{A}^1$ とおく．U はコンパクトアーベル群だから, $\iota:U\ni u\longmapsto u^2\in U$ は連続準同型写像となる．$U^2:=\iota(U)$ とおくと, U^2 はコンパクトとくに閉なる部分群であり, $U/U^2\cong\mathbb{A}^\times/F^\times(\mathbb{A}^\times)^2$．写像 $t\mapsto t^2$ は $\underline{\mathbb{R}_{>0}}$ 上では同型なので, $F^\times(\mathbb{A}^\times)^2\backslash\mathbb{A}^\times\cong U^2\backslash U$ となる． $\mathbb{A}^\times$, $\mathbb{A}^1$ にはハール測度が決められている (*cf.* §4.1)．定義から, $a\in\mathbb{A}^\times$, $a=u\underline{t}\,(u\in\mathbb{A}^1,\, t\in\mathbb{R}_{>0}$ のとき, $\mathrm{d}^\times a=\mathrm{d}u\otimes\frac{\mathrm{d}t}{t}$ となる．U^2 のハール測度 $\mathrm{d}x$ を, U^2 上の任意の連続函数 f に対して

$$\int_{U^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_U f(u^2)\,\mathrm{d}u$$

と成るように定義できる．これにより, $\mathrm{vol}(U^2)=\mathrm{vol}(U)$ となるので, U/U^2 上の商測度に関して $\mathrm{vol}(U/U^2)=1$ となる．

$$f(c):=\sum_{z\in F^\times}\phi(zc),\quad c\in\mathbb{A}^\times$$

とおくと, 仮定から任意のコンパクト集合 $\mathcal{N}\subset\mathbb{A}^\times$ に対して, $|\phi(xy)|\leqslant\phi_1(x)\,(x\in\mathbb{A},\, y\in\mathcal{N})$ を満たす非負値函数 $\phi_1\in\mathscr{S}(\mathbb{A})$ を選べる．対応す

[13] [KTW, §4.2] での議論のなかで $\widetilde{f}(c)$ の連続性を確保するには条件 (i) が必要のようです.

る $f_1(c) := \sum_{z\in F^\times}\phi_1(cz)$ を考えると, $|f(cy)| \leqslant f_1(c)\,(c\in\mathbb{A}^\times,\, y\in\mathcal{N})$ となる. これより, $f(c)$ が $\mathbb{A}^\times$ 上広義一様に絶対収束して $\mathbb{A}^\times/F^\times$ 上の連続函数を定義することが分かる. 仮定 (i) から $|c|_{\mathbb{A}}^s\,f(c)$ は $\mathbb{A}^\times/F^\times$ 上の可積分函数になる. 任意の $\chi\in\mathfrak{C}_F$ は $\mathbb{A}^\times/F^\times(\mathbb{A}^\times)^2\cong U/U^2$ の指標と同一視される. U/U^2 上の函数 $\widetilde{f}$ を

$$\widetilde{f}(x) := 2\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}|c^2|_{\mathbb{A}}^s\,f(xc^2)\,\mathrm{d}^\times c,\qquad x\in U/U^2 \tag{4.25}$$

と定義する. U における U/U^2 の基本領域 $\mathcal{U}$ をとり, さらに U の単位元のコンパクト近傍 $\mathcal{N}_1$ との積 $\mathcal{N}=\mathcal{U}^{-1}\mathcal{N}_1$ に対して f_1 を構成すると, $|f(au^{-1}y)|\leqslant f_1(a)$ $(a\in\mathbb{A}^\times, u\in\mathcal{U}, y\in\mathcal{N}^1)$ だから $|f(ay)|\leqslant f_1(au)$ となる. $a=xc^2$ として $c\in\mathbb{A}^\times/F^\times$, $u\in\mathcal{U}$ で積分をとると

$$\widetilde{f}(x)\leqslant\int_{U/U^2}\widetilde{f_1}(xu)\,\mathrm{d}u\quad(x\in U) \tag{4.26}$$

が得られる. 以下の計算を f の代わりに f_1 で「絶対値付き」で行うと, (4.26) と仮定 (i) から積分 (4.25) が U 上広義一様絶対収束することが分かり, とくに $\widetilde{f}(x)$ は U/U^2 上の連続函数となる.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\chi(c)\,|c|_{\mathbb{A}}^s f(c)\,\mathrm{d}^\times c &= \int_{\mathbb{R}_{>0}} t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_U \chi(u)\,f(u\underline{t})\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{\mathbb{R}_{>0}} t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{U/U^2}\chi(u)\int_{U^2} f(u\underline{t}x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{\mathbb{R}_{>0}} t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{U/U^2}\chi(u)\int_{U} f(u\underline{t}y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u\\ &= 2\int_{\mathbb{R}_{>0}} (t^2)^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{U/U^2}\chi(u)\int_{U} f(u(\underline{t}y)^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u\\ &= 2\int_{U/U^2}\chi(u)\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}|c^2|_{\mathbb{A}}^s\,f(uc^2)\,\mathrm{d}^\times c\end{aligned}$$

この計算により, $\widetilde{f}$ の χ-フーリエ成分が $\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\chi(c)\,|c|_{\mathbb{A}}^s f(c)\,\mathrm{d}^\times c$ で与えられることが分かる. そこで,

$$\widetilde{f_1}(x) := \sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F}\chi(x)\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\chi(c)\,|c|_{\mathbb{A}}^s f(c)\,\mathrm{d}^\times c,\quad x\in U/U^2$$

と定義すると, (ii) からこの級数は U 上で一様に絶対収束し, $\widetilde{f_1}$ は U/U^2 上の連続函数を定義する. $\widetilde{f}$ と $\widetilde{f_1}$ はすべてのフーリエ係数が同じなので, 2 つの函数の連続性から各点 $x\in U/U^2$ において $\widetilde{f}(x)=\widetilde{f_1}(x)$ が結論される. 特に $x=1$ とすれば所望の結果を得る. □

補題 4.21 [14] $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ および $w \in \mathbb{C}$ に対して

$$\phi_w(c) := \int_{\mathbb{A}^\times} \int_{\mathbb{A}} |a|^w \, \Phi(a, b, a^{-1}b^2 - ac) \, \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b, \qquad c \in \mathbb{A}^\times$$

とおく. $\mathrm{Re}(w) > 1$ においてこの積分は広義一様に絶対収束して $\mathbb{A}^\times$ 上の連続函数を定める. この函数は

$$1 < \mathrm{Re}(s), \quad \mathrm{Re}(s) + 1 < \mathrm{Re}(w), \quad 2\mathrm{Re}(s) - 1 < \mathrm{Re}(w) \tag{4.27}$$

を満たすとき, s に対する補題 4.20 の条件 (i) を満たす.

証明 N を $\mathbb{A}^\times$ の任意のコンパクト集合とする. 十分大きな素点の有限集合 $\Sigma_\infty \subset S$ にたいして, $\Phi = \otimes_v \Phi_v$, $\Phi_v \in \mathscr{S}(F_v)$, $\Phi_v = \mathbb{1}_{\mathfrak{O}_v}$, $N = \prod_{v \in S} N_v \prod_{v \notin S} \mathfrak{O}_v^\times$ ($N_v \subset F_v^\times$ はコンパクト) の形であるとしても良い. 各 Φ_v に対して,

$$\Phi_v^{(w)}(c) := \int_{F_v^\times} \int_{F_v} |a|_v^s \, \Phi_v(a, b, a^{-1}b^2 - ac) \, \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b, \qquad c \in F_v^\times$$

とおく. $v \notin S$ のとき, $\Phi_v^{(w)}(c)$ は函数 $|a|_v^w$ を $\mathfrak{O}_v \cap F_v^\times \times \mathfrak{O}_v$ の条件 $b^2 - a^2 c \in a\mathfrak{O}_v$ で定義される部分集合 X 上で積分したものになる. $(a, b) \in X$ ならば $a^2 c \in b^2 + a\mathfrak{O}_v \subset \mathfrak{O}_v$ だから, 次の不等式が成り立つ：

$$|\Phi_v^{(w)}(c)| \leqslant \int_{\substack{(a,b) \in (\mathfrak{O}_v - \{0\}) \times \mathfrak{O}_v \\ a^2 \in c^{-1}\mathfrak{O}_v}} |a|_v^{\mathrm{Re}(w)} \, \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b$$

$|c|_v \leqslant 1$ ならば右辺の積分領域は $(\mathfrak{O}_v - \{0\}) \times \mathfrak{O}_v$ 全体になるから, 簡単な計算で右辺は $(1 - q_v^{-\mathrm{Re}(w)})^{-1}$ となる. $|c|_v > 1$ ならば $c^{-1}\mathfrak{O}_v \subset c^{-2}\mathfrak{O}_v$ だから, 右辺の積分領域を $a \in c^{-1}\mathfrak{O}_v$ に広げたほうが大きくなる. よって

$$|\Phi_v^{(w)}(c)| \leqslant \int_{\substack{(a,b) \in (\mathfrak{O}_v - \{0\}) \times \mathfrak{O}_v \\ a \in c^{-1}\mathfrak{O}_v}} |a|_v^{\mathrm{Re}(w)} \, \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b = |c|_v^{-\mathrm{Re}(w)} \, (1 - q_v^{-\mathrm{Re}(w)})^{-1}.$$

となり, $v \notin S$ のとき $F_v^\times$ 上で不等式 $|\Phi_v^{(w)}(c)| \leqslant (1 - q_v^{-\mathrm{Re}(w)})^{-1} \sup(1, |c|_v)^{-\mathrm{Re}(w)}$ が得られた. 有限被覆を使った議論をすれば $v \in S$ のとき, ある $y_v \in F_v^\times$ があって $N_v \subset y_v(F_v)^2$ となっているとしてもよい. よって, あるコンパクト集合 $\mathcal{U}_v \subset F_v^\times$ があり, $u_v \in N_v$ は $u_v = y_v x_v^2$ ($x_v \in \mathcal{U}_v$) の形に書ける. 補題 3.2

[14] [KTW, §4.2] に対応する補題 4.20 の主張を少し弱めたため, [KTW, Lemma 4.5] の証明にはこのかなり技術的な補題が必要になります.

から, $\Phi_v \in \mathscr{S}(F_v)$ は $\Phi_v(X) = f_{v,1}(x_1)f_{v,2}(x_{12})f_{v,3}(x_2)$ $(f_j \in \mathscr{S}(F_v))$ の形であるとしても良い. すると, 変数変換で

$$\begin{aligned}\Phi_v^{(w)}(cu_v) &= \int_{F_v^\times}\int_{F_v} |a|_v^w f_{v,1}(a)f_{v,2}(b)f_{v,3}(a^{-1}b^2 - acy_vx_v^2)\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b \\ &= \int_{F_v^\times}\int_{F_v} |a|_v^w f_{v,1}(ax_v^{-2})f_{v,2}(bx_v)f_{v,3}(a^{-1}b^2 - acy_v)\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b\end{aligned}$$

補題4.1(の局所体版)から $|f_{v,1}(bx_v)| \leqslant \phi_1(b)$ $|f_{v,2}(bx_v^{-1})| \leqslant \phi_2(b)$ $(b \in F_v, x_v \in \mathcal{U}_v)$ となる $\phi_{v,1}, \phi_{v,2} \in \mathscr{S}(F_v)$ が取れる. そこで,

$$\Phi_{v,1}(X) := \phi_{v,1}(x_1)\phi_{v,2}(x_{12})f_{v,3}(x_2), \quad X \in V(F_v)$$

と定義すると, $\Phi_{1,v}^{(\mathrm{Re}(w))}$ は $|\Phi_v^{(w)}(cu_v)| \leqslant \Phi_{1,v}^{(\mathrm{Re}(w)}(c)$ $(c \in F_v^\times, u_v \in N_v)$ を満たす. $\mathrm{Re}(w) > 1$ ならば, 連続函数 $\phi_1 : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ を, $c = (c_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ に対して

$$\phi_1(c) := \prod_{v \in S} \Phi_{1,v}^{(\mathrm{Re}(w))}(c_v) \times \prod_{v \notin S}(1 - q_v^{-\mathrm{Re}(w)})^{-1}\,\sup(1, |c|_v)^{-\mathrm{Re}(w)}$$

で定義できる. $|\phi_w(cu)| \leqslant \phi_1(c)$ $(c \in \mathbb{A}^\times, u \in N)$ は構成から明らかに成り立つ. $1 < \mathrm{Re}(w) < \mathrm{Re}(s)$ とすると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}^\times} |c|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s)}\,\phi_1(c)\,\mathrm{d}^\times &= \prod_{v\in S}\int_{F_v^\times} |c|_v^{\mathrm{Re}(s)}\Phi_{1,v}^{(\mathrm{Re}(w))}(c_v)\,\mathrm{d}^\times c_v \\ &\quad \times \prod_{v \notin S}(1 - q_v^{-\mathrm{Re}(w)})^{-1}\int_{F_v^\times} |c_v|_v^{\mathrm{Re}(s)}\sup(1, |c_v|_v)^{-\mathrm{Re}(w)}\,\mathrm{d}^\times c_v\end{aligned}$$

ここで $v \in S$ に対する因子は $\widetilde{Z_{F_v}}(\Phi_1, \mathrm{Re}(w - 2s + 1), \mathrm{Re}(s), \mathbf{1})$ に等しいことが分かるので (*cf.* 補題 3.5), 補題 3.4 からそれは $\mathrm{Re}(w - s + 1) > 1/2$, $\mathrm{Re}(s - 2s + 1) > 0$ で収束する. $v \notin S$ に対する因子は計算できて $(1 - q_v^{-\mathrm{Re}(s)})^{-1}(1 - q_v^{-\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Re}(s)})^{-1}$ になる. よって, $v \notin S$ に亘る無限積の収束条件は $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\mathrm{Re}(w) > 1$, $\mathrm{Re}(w - s) > 1$ である. □

4.6.2 定理 4.17 の証明 (*cf.* [KTW, Lemma 4.5])

補題2.1から, $V^0(F)$ は $G(F)\,X_z$ $(z \in [F^\times]_2)$ の非交和に分解され, $G(F)^{X_z} = \{(1, \mathrm{diag}(1, \pm 1))\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である. これより, $Z(\Phi, s)$ の定義 (4.4) は次のように変形される (補題 4.5 から, $s \in \mathcal{D}$ では以下の式変形の各ステップは Fubini の定理から正当化される.)

$$\int_{G(\mathbb{A})/G(F)} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \sum_{z \in [F^\times]_2}\sum_{\gamma \in G(F)/G(F)^{X_z}} \Phi(g\gamma\,X_z)\,\mathrm{d}g$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{z\in[F^\times]_2} \int_{G(\mathbb{A})/G(F)^{X_z}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Phi(g\,X_z)\,\mathrm{d}g \\
&= \sum_{z\in[F^\times]_2} \int_{c\in\mathbb{A}^\times/\{\pm1\}} \iint_{\mathbb{A}^\times\times\mathbb{A}} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1} |a^2c^2|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Phi(a,ab,a(b^2-zc^2))\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}^\times c \\
&= \sum_{z\in[F^\times]_2} \int_{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times} \sum_{\tau\in F^\times/\{\pm1\}} \\
&\qquad \iint_{\mathbb{A}^\times\times\mathbb{A}} \left(|a|_{\mathbb{A}}^{s_1} |a^2\tau^2c^2|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Phi(a,ab,a(b^2-z\tau^2c^2))\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b \right) \mathrm{d}^\times c
\end{aligned}
$$

ここで, $(z,\tau)\mapsto z\tau^2$ は $[F^\times]_2\times(F^\times/\{\pm1\})$ から $F^\times$ の上への全単射なので, 最後の式で z の和と τ の和を合体させることで

$$
Z(\Phi.s) = \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} |c|_{\mathbb{A}}^{s_2} \sum_{z\in F^\times} \Phi^{(s_1+2s_2-1)}(c^2z) \tag{4.28}
$$

が示された, ここで $\Phi^{(s_1+2s_2-1)}$ は補題 4.21 で定義した $\mathbb{A}^\times$ 上の函数である. $s\in\mathcal{D}$ のとき, 補題 (4.21) から, この函数は条件 (4.27) を $w=s_1+2s_2-1$, $s=s_2$ として満たすから, $\Phi^{(s_1+2s_2-1)}$ は $s=s_2$ として補題 4.20 の条件 (i) を満たしている. 補題 4.20 の条件 (ii) を確認する. 補題 (3.6) (1) より

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F} \left| \int_{\mathbb{A}^\times} |c|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Phi^{(s_1+2s_2-1)}(c)\,\mathrm{d}^\times c \right| \\
&\leqslant \prod_{v\in S} \widetilde{Z_{F_v}}(\Psi_v, \mathrm{Re}(s), \mathbf{1}) \times |\zeta_F^S(s_1)\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)| \sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F} \left| \frac{L^S(s_2,\chi)}{L^S(2s_1+s_2,\chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_2}} \right|.
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Re}(s_1)>1$, $\mathrm{Re}(s_2)>1$ なので, 補題 4.19 より, 右辺の χ についての和は収束している. よって, 条件 (4.25) も満たされる. 補題 4.20 を (4.28) の右辺に適用し, $v\notin S$ での因子を補題 3.6 (1) で計算すれば所望の結果を得る.

5　一般化された新谷 2 重ゼータ函数

5.1　定義

§4.2 の記号を想起する. S は Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合, $\mathfrak{O}_F(S)$ は S-整数環である.

5.1.1　軌道型

$[F_S^\times]_2 := (F_S^\times)^\times/(F_S^\times)^2$ とおく. これは $[F_v^\times]_2\,(v\in S)$ の直積群だから位数 $\prod_{v\in S} 4|2|_v^{-1} = 4^{\#S}|2|_S^{-1}$ の有限群である (*cf.* 補題 3.1).

$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{O}_F(S)$ の $\mathfrak{O}_F(S)$ の 2 つのイデアルとする．$\mu\in\mathfrak{a},\nu\in\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$, $\nu\mu\neq 0$ について

$$A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)=\{x\in\mathfrak{a}\mathfrak{b}/\nu\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2\mid x^2\equiv\mu\pmod{\mu\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}\}$$

とおく．自明な評価

$$\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)\leqslant\#(\mathfrak{a}\mathfrak{b}/\mu\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)=\#(\mathfrak{O}_F(S)/\mu\mathfrak{b})=\mathbf{N}_S(\mu)\mathbf{N}_S(\mathfrak{b}) \tag{5.1}$$

よりこれは有限集合である．$(\varepsilon,\eta)\in\mathfrak{O}_F(S)^\times\times\mathfrak{O}_F(S)^\times$ の $F^\times\times F^\times$ への作用を $(\mu,\nu)\mapsto(\varepsilon\mu,\eta^2\nu)$ で定義し, $[\mu,\nu]$ を (μ,ν) の $\mathfrak{O}_F(S)^\times\times\mathfrak{O}_F(S)^\times$-軌道とすると,$\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)$ は $[\mu,\nu]$ のみで決まることが分かる．

定義 5.1 可逆イデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subset\mathfrak{O}_F(S)$ および類 $\delta_S\in[F_S^\times]_2$ に対して, $\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)$ を条件

$$\mu\in\mathfrak{a}-(0),\quad\nu\in\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2-(0),\quad\nu\in\delta_S(F_S^\times)^2$$

を満たす $\mathfrak{O}_F(S)^\times$ 軌道 $[\mu,\nu]$ 全体の集合とする．そこで,

$$\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(s,\delta_S):=\frac{1}{2}\mathbf{N}_S(\mathfrak{a})^{s_1}\mathbf{N}_S(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{2s_2}\sum_{[\mu,\nu]\in\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)}\frac{\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)}{\mathbf{N}_S(\mu)^{s_1}\mathbf{N}_S(\nu)^{s_2}}$$

と定義する．

中国式剰余定理と Hensel の補題を使うと, (5.1) は次のように改善される：

補題 5.2 任意の $\varepsilon>0$ に対してある定数 $C_\varepsilon>0$ が存在して, 任意のイデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subset\mathfrak{O}_F(S)$, および $\mu\in\mathfrak{a}-(0)$, $\nu\in\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2-(0)$ について不等式

$$\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)\leqslant C_\varepsilon\,\mathbf{N}_S(\mu)^\varepsilon$$

が成り立つ．

補題 5.3 (1) 級数 $\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(s,\delta_S)$ は領域 $\mathcal{D}$(*cf.* (4.9)) で絶対収束する．

(2) $\mathfrak{a}',\mathfrak{b}'$ が $\mathfrak{O}_F(S)$ の可逆イデアルでそれぞれ $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ と同値なものとすると, $\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(s,\delta_S)=\xi^S_{c\mathfrak{a},c'\mathfrak{b}}(s,\delta_S)$ である．

証明 (1) $\sigma_i:=\mathrm{Re}(s_i)\,(i=1,2)$ とおく．任意に $\varepsilon>0$ を与えると, 補題 5.2 から $\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\sigma_1,\sigma_2,\delta_S)$ は次の級数を優級数にもつ：

$$\sum_{(\mu,\nu)\in\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)}\mathbf{N}_S(\mu)^{-\sigma_1+\varepsilon}\mathbf{N}_S(\nu)^{-\sigma_2}\leqslant[\mathfrak{O}_F(S)^\times:(\mathfrak{O}_F(S)^\times)^2]\,\zeta^S_F(\sigma_1-\varepsilon)\,\zeta^S_F(\sigma_2)$$

$\mathfrak{O}_F(S)^\times$ は有限生成アーベル群なので, 右辺の群指数は有限である. Dedekind ゼータ函数の性質から $\zeta_F^S(\sigma) < +\infty\ (\sigma > 1)$ であることから (1) が従う.

(2) $\mathfrak{a}' = c\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = c'\mathfrak{b}$ $(c, c' \in F^\times)$ としてよい. $x \mapsto (cc')^2 x$ は集合 $A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)$ から $A_{c\mathfrak{a},c'\mathfrak{b}}(c\mu,(cc')^2\nu)$ の上への全単射なので, $\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu) = \#A_{c\mathfrak{a},c'\mathfrak{b}}(c\mu,(cc')^2\nu)$ となる. $(\mu,\nu) \mapsto (c\mu,(cc')^2\nu)$ は $\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)$ から $\mathbf{X}_{c\mathfrak{a},c'\mathfrak{b}}(\delta_S)$ の上への全単射であることにより (2) の主張は従う. このとき, $\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(s,\delta_S)$ の定義式の右辺の最初の因子 $\mathbf{N}_S(\mathfrak{a})^{s_1}\mathbf{N}_S(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{2s_2}$ が必要なことに注意する. □

$\{\mathfrak{a}_j\}_{j=1}^{h_F(S)}$ を $\mathfrak{O}_F(S)$ のイデアル類群の完全代表系とする. そこで

$$\xi^S(s,\delta_S) := \sum_{j=1}^{h_F(S)}\sum_{k=1}^{h_F(S)} \xi^S_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}(s,\delta_S) \tag{5.2}$$

と定義する. 補題 5.3(2) からこれは代表系 $\{\mathfrak{a}_j\}$ の選択によらない. この定義が見かけ上異なる形をした [KTW, §4.1] の定義と一致することを説明する. $\mathfrak{O}_F(S)$ の可逆イデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対応するイデールをそれぞれ α, β として

$$\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} := \left(\alpha^{-1}, \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \beta^{-1}\end{smallmatrix}\right]\right) \in G(\mathbb{A})$$

とおく. さらに

$$\Gamma_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}} := G(F)\cap\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{-1}G(\mathbb{A},S)\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \{\left(\varepsilon, \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \xi & \eta\end{smallmatrix}\right]\right) \mid \varepsilon,\eta\in\mathfrak{O}_{F,S}^\times,\ \xi\in\mathfrak{b}\},$$
$$\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}} := V(F)\cap\rho(\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})^{-1}V(\mathbb{A},S) = \left\{\left[\begin{smallmatrix}x_1 & x_{12}\\ x_{12} & x_2\end{smallmatrix}\right] \mid x_1\in\mathfrak{a}, x_{12}\in\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ x_2\in\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2\right\}$$

とおく. ただし,

$$G(\mathbb{A},S) := G(F_S)\times\prod_{v\notin S}G(\mathfrak{O}_v) \quad V(\mathbb{A},S) := V(F_S)\times\prod_{v\notin S}V(\mathfrak{O}_v).$$

$\delta_S = (\delta_v)_{v\in S}\in[F_S^\times]_2$ に対して $V^0(F_S,\delta) := \prod_{v\in S}V^0(F_v,\delta_v)$ とし,

$$\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S) := \mathscr{L}_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cap V^0(F_S,\delta_S)$$

とおく. $X\in V^0(F)$ の $G(F)$ での固定部分群を $G(F)^X$ とする.

補題 5.4 $s\in\mathcal{D}$ とする. 任意の $\delta_S\in[F_S^\times]_2$ に対して,

$$\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(s,\delta) := |\tau_1(\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})|_S^{s_1}|\tau(\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})|_S^{s_2}\sum_{X\in\Gamma_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\backslash\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)}\frac{\#(\Gamma_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cap G(F)^X)^{-1}}{|P_1(X)|_S^{s_1}|P(X)|_S^{s_2}}. \tag{5.3}$$

証明 ここだけの記号として, $\gamma_{\varepsilon,\eta}(\xi) = \left(\varepsilon, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \xi & \varepsilon^{-1}\eta \end{smallmatrix}\right]\right) \in \Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S}$ とおく. $X = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathscr{L}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cap V^0(F)$ に対して $\mu = P_1(X) = x_1$, $\nu = P(X) = x_{12}^2 - x_1x_2$ とおくと $\mu \in \mathfrak{a} - (0)$, $\nu \in \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (0)$, $x_{12} \in \mathfrak{ab}$, $x_2 \in \mathfrak{ab}^2$ であり

$$x_{12}^2 - \nu = \mu x_2 \in \mu\mathfrak{ab}^2 \qquad \therefore\ x_{12}^2 \equiv \nu \pmod{\mu\mathfrak{ab}^2}$$

となる. これより, $X \mapsto (\mu, \nu, x_{12})$ は $\mathscr{L}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cap V^0(F)$ から, 集合

$$\mathbf{Y} := \{(\mu,\nu,x) \in (\mathfrak{a} - (0)) \times (\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (0)) \times \mathfrak{ab} \mid x^2 \equiv \nu \pmod{\mu\mathfrak{ab}^2}\}$$

の上への全単射を与える. また $X' \in \mathscr{L}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cap V^0(F)$, $\mu' = P_1(X')$, $\nu' = P(X')$ とすると, $X' = \rho(\gamma_{\varepsilon,\eta}(\xi))X$ は

$$\mu' = \varepsilon\mu, \quad \nu' = \eta^2\nu, \quad x'_{12} = \varepsilon(\eta x_{12} + \xi\mu)$$

と同値であることが分かる. よって, これが $\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S}$ の集合 $\mathbf{Y}$ への作用を記述している. $(\mu,\nu) \in (\mathfrak{a}-(0)) \times (\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (0))$ に対して, $\mathbf{Y}(\mu,\nu) := \{(\mu,\nu)\} \times \mathfrak{ab}) \cap \mathbf{Y}$ とおく. $\gamma_{\varepsilon,\eta}(\xi)$ がファイバー $\mathbf{Y}(\mu,\nu)$ を保つ条件は, $\varepsilon = 1$, $\eta = \pm 1$ であり, $\gamma_{1,\pm1}(\xi)$ の作用は $(\mu,\nu,x) \mapsto (\mu,\nu,\pm x + \xi\mu)$ となる. この作用による $\mathbf{Y}(\mu,\nu)$ の商集合を $\bar{\mathbf{Y}}(\mu,\nu)$ とすると, $\bar{\mathbf{Y}}(\mu,\nu) \cong A(\mu,\nu)/\{\pm1\}$ となる. $x \in A(\mu,\nu)$ に対して, $\tilde{x} := \begin{bmatrix} \mu & x \\ x & (x^2-\nu)/\mu \end{bmatrix}$ を対応する $\mathscr{L}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cap V^0(F)$ の元とすると, (5.3) の右辺の和の部分は

$$\sum_{[\mu,\nu] \in \mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)} \left\{ \sum_{x \in A(\mu,\nu)/\{\pm1\}} \#(\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S} \cap G(F)^{\tilde{x}})^{-1}) \right\} \mathbf{N}_S(\mu)^{-s_1}\mathbf{N}_S(\nu)^{-s_2}$$

と書きなおせるから,

$$\sum_{x \in A(\mu,\nu)/\{\pm1\}} \#(\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S} \cap G(F)^{\tilde{x}})^{-1} = \tfrac{1}{2}\#A(\mu,\nu) \tag{5.4}$$

が成立することを示せばよい.
さて, $\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S} \cap G(F)^{\tilde{x}} \subset \{\gamma_{1,1}(0)(\text{単位元}), \gamma_{1,-1}(2x\mu^{-1})\}$ だから

$$\#(\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S} \cap G(F)^{\tilde{x}})^{-1} = \begin{cases} 2^{-1} & (x \equiv -x \pmod{\mu\mathfrak{b}}), \\ 1 & (x \not\equiv -x \pmod{\mu\mathfrak{b}}) \end{cases}$$

である. これより (5.4) がすぐ従う. □

$\mathfrak{a}_j$ に対応するイデールを α_j とすると, $\{\alpha_j^{-1}\}_j$ は商 $\mathrm{Cl}(F,S)$ の $(\mathbb{A}^\times)^S$ における完全代表系であることに注意すると, 補題 5.4 より式 (5.2) は [KTW,] の定義と一致する [15])

[15] [KTW, p.484] の $\xi^S(s,\delta_S)$ の定義式の訂正: 因子 $|\tau_1(\gamma_{jk})|_S^{s_1}|\tau(\gamma_{jk})|_S^{s_2}$ を入れる.

5.1.2 指標型

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を $\mathfrak{O}_F(S)$ の可逆イデアルとし, ω_S を有限群 $[F_S^\times]_2$ の指標とする.

定義 5.5

$$\widetilde{\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}(s,\chi_S) := \frac{2^{\#S}}{\#([F_S^\times]_2)\,|2|_S} \mathbf{N}_S(\mathfrak{a})^{s_1}\mathbf{N}_S(\mathfrak{ab})^{2s_2} \sum_{[\mu,\nu]\in\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}} \omega_S(\nu_S)\,\frac{\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)}{\mathbf{N}_S(\mu)^{s_1}\mathbf{N}_S(\nu)^{s_2}}$$

と定義する. ただし, $\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ は $(\mu,\nu)\in(\mathfrak{a}-(0))\times(\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2-(0))$ の $\mathfrak{O}_F(S)^\times\times\mathfrak{O}_F(S)^\times$-軌道全体の集合である. また, ν_S は $\nu\in F^\times$ の $F_S^\times$ への対角埋め込み像を表す. さらに,

$$\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S) := \sum_{j=1}^{h_F(S)}\sum_{k=1}^{h_F(S)} \widetilde{\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}(s,\omega_S)$$

と定義する, ここで $\{\mathfrak{a}_j\}_{j=1}^{h_F(S)}$ は $\mathfrak{O}_F(S)$ のイデアルからなる類群の完全代表系である.

定義 5.1, 5.5 から明らかに収束域 $\mathcal{D}$ において等式

$$\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S) = \frac{2^{\#(S)+1}}{\#([F_S^\times]_2)|2|_S} \sum_{\delta_S\in[F_S^\times]_2} \omega_S(\delta_S)\,\xi^S(s,\delta_S) \tag{5.5}$$

が成り立つ. $[F_S^\times]_2$ のフーリエ反転公式から

$$\xi^S(s,\delta_S) = \frac{|2|_S}{2^{\#S+1}} \sum_{\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}} \omega_S(\delta_S)\,\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S). \tag{5.6}$$

5.2 大域ゼータ積分/ゼータ函数

(*cf.* [木村, 命題 5.14]) $S\subset\Sigma$ を Σ_∞ を含む有限集合とする. 函数 $\Phi\in\mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ を $\Phi=\otimes_v\Phi_v$, $\Phi_v\in\mathscr{S}(V(F_v))$ かつ

$$\Phi_v = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)} \qquad v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}-S \tag{5.7}$$

となるように取って, 大域ゼータ積分 $Z(\Phi,s)$ を考える (定義 4.5). $\Phi_S := \otimes_{v\in S}\Phi_v\in\mathscr{S}(V(F_S))$ とおき, $\delta_S=(\delta_v)_{v\in S}\in[F_S^\times]_2$, $\omega_S=\otimes_{v\in S}\omega_v\in\widehat{[F_S^\times]_2}$ について

$$Z_S(\Phi_S,s,\delta_S) := \prod_{v\in S} Z_{F_v}(\Phi_v,s,\delta_v), \quad \widetilde{Z_S}(\Phi_S,s,\omega_S) = \prod_{v\in S}\widetilde{Z_{F_v}}(\Phi_v,s,\omega_v)$$

とおく (*cf.* 定義 3.3). 定義 (5.1) と式 (5.2) によって軌道型 2 重ゼータ函数 $\xi^S(s,\delta_S)$ $(\delta\in[F_S^\times]_2)$ および指標型ゼータ函数 $\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S)$ $(\omega\in\widehat{[F_S^\times]_2})$ が定義された.

命題 5.6 $s\in\mathcal{D}$ において次の等式が成り立つ:

$$Z(\Phi,s)=\frac{2^{\#S}}{|2|_S}\Delta_F^{-3/2}\prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}}(1-q_v^{-1})^{-2}\sum_{\delta_S\in[F_S^\times]_2}Z_S(\Phi_S,s,\delta_S)\,\xi^S(s,\delta_S) \tag{5.8}$$

$$=\frac{1}{2}\Delta_F^{-3/2}\prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}}(1-q_v^{-1})^{-2}\sum_{\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}}\widetilde{Z_S}(\Phi_S,s,\omega_S)\,\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S). \tag{5.9}$$

証明 ([KTW, Lemma 4.2], *cf.* [杉山, §3]) $h=h_F(S)$ とおく. $\mathbb{A}$ の部分群 $F_S\prod_{v\notin S}\mathfrak{O}_v$ は $\mathbb{A}/F$ の代表系を含む. これと $\mathbb{A}^\times=\bigcup_{j=1}^h F^\times\alpha_j^{-1}(F_S^\times\prod_{v\notin S}\mathfrak{O}_v^\times)$ より

$$G(\mathbb{A})/G(F)=\bigsqcup_{j,k=1}^h\prod_{v\notin S}G(\mathfrak{O}_v)\,(G(F_S)/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})\,\gamma_{j,k}$$

となる. これと測度の関係 (4.2) および (4.3) から

$$\begin{aligned}
&\Delta_F^{3/2}\times Z(\Phi,s)\\
&=\sum_{j,k}\int_{G(F_S)/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}}|\tau_1(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_2}\sum_{X\in V^0(F)}\Phi(g_S\gamma_{j,k}X)\,\mathrm{d}g_S\\
&=\sum_{j,k}\sum_{\delta_S\in[F_S^\times]_2}\int_{G(F_S)/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}}|\tau_1(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_2}\sum_{X\in V(F)\cap V^0(F_S,\delta_S)}\Phi(g_S\gamma_{j,k}X)\,\mathrm{d}g_S
\end{aligned}$$

ただし, $\mathrm{d}g_S$ は $G(F_S)=\prod_{v\in S}G(F_v)$ の直積測度である. (5.7) より, $\Phi(g_S\gamma_{j,k}X)\neq 0$, $X\in V(F)\cap V^0(F_S,\delta)$ ならば $X\in\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}(\delta_S)$ である. さらに, $\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}$ を $\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}$-軌道分解して, 各軌道 $\rho(\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})X$ と $\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\cap G(F)^X$ の全単射を利用すると, 最後の式は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k}\sum_{\delta_S\in[F_S^\times]_2}\int_{G(F_S)/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}}|\tau_1(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_2}\\
&\quad\times\sum_{X\in\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\backslash\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}(\delta_S)}\ \sum_{\gamma\in\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\cap G(F)^X}\Phi_S(g_S(\gamma X)_S)\,\mathrm{d}g_S.
\end{aligned}$$

ここで, 補題 (5.7) を使い, さらに γ に亘る和で g_S の積分領域を合体させることで, 次の式を得る:

$$\sum_{j,k}|\tau_1(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_S^{s_1}|\tau(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_S^{s_2}\sum_{\delta_S\in[F_S^\times]_2}\sum_{X\in\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\backslash\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}(\delta_S)}\frac{\#(\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\cap G(F)^X)^{-1}}{|P_1(X_S)|_S^{s_1}|P(X_S)|_S^{s_2}}$$
$$\times\int_{G(F_S)}|P_1(g_S(\gamma X)_S)|_S^{s_1}|P(g_SX_S)|_S^{s_2}\Phi_S(g_SX_S)\,\mathrm{d}g_S.$$

$X\in\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}(\delta_S)\subset V^0(F_S,\delta_S)$ なので, X と $X_{\delta_S}:=(X_{\delta_v})_{v\in S}$(*cf.* (2.8)) は同じ $G(F_S)$-軌道に属する. よって (3.14) より

$$\begin{aligned}&\int_{G(F_S)}|P_1(g_SX_S)|_S^{s_1}|P(g_SX_S)|_S^{s_2}\Phi_S(g_S(\gamma X)_S)\,\mathrm{d}g_S\\&=\prod_{v\in S}\int_{G(F_v)}|P_1(g_vX_{\delta_v}|_v^{s_1}|P(g_vX_{\delta_v})|_v^{s_2}\Phi_v(g_vX_{\delta_v})\,\mathrm{d}g_v\\&=\prod_{v\in S}2|2|_v^{-1}(1-q_v^{-1})^{-2}Z_{F_v}(\Phi_v,s,\delta_v).\end{aligned}$$

以上の議論を s_j の代わりに $\mathrm{Re}(s_j)$, Φ の代わりに $|\Phi(X)|\leqslant\Psi(X)$ なる非負な $\Psi\in\mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$(補題 4.1) に置き換えて行うと, 非積分函数の非負性から $Z(\Phi,s)$ の絶対収束が $Z_v(\Psi_v,\mathrm{Re}(s),\delta_v)$ の収束 (補題 3.4) および $\xi^S(\mathrm{Re}(s),\delta_S)$ の収束 (命題 5.3) から従う. これで命題 4.5 の証明および等式 (5.8) の証明が終了する. (5.9) は (5.6) および (3.11) を使うと (5.8) から得られる. □

補題 5.7 $g_S\in G(F_S)$, $X\in\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}$, $\gamma\in\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}$ とすると, $j=1,2$ について [16]

$$|\tau_j(g_S(\gamma X)_S)|_S=\frac{|P_j(g_S(\gamma X)_S|_S}{|P_j(X_S)|_S}\times|\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_S$$

証明 P_j は連続写像 $P_j:X=(X_v)_v\ni V^0(\mathbb{A})\longmapsto P_j(X)=(P_j(X_v))_v\in\mathbb{A}^\times$ を定義する. よって, $P_j(X)_S$, $P_j(X)^S$ が意味を持つ. $|P_j(X)_S|_{\mathbb{A}}=|P_j(X_S)|_S$ に注意する.

$$\begin{aligned}|P_j(g_S\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma X)|_{\mathbb{A}}&=|P_j(g_S\,(\gamma X))_S|_{\mathbb{A}}\,|P_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma X)^S|_{\mathbb{A}}\\&=|P_j(g_S\,(\gamma X)_S)|_S\,|\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma^S)|_{\mathbb{A}}\,|P_j(X)^S|_{\mathbb{A}}.\end{aligned}$$

[16][KTW] の訂正：論文 p.485 (4.6) 式の右辺の最後に因子 $|\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}|_S$ を入れる. 対応して, p.484 (4.4) 式の直前で $\alpha_j\in\mathbb{A}^1\cap(F^\times)^S$ を $\alpha_j\in(F^\times)^S$ に訂正.

ここで, $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}$ より $\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma^S\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}^{-1} \in \prod_{v\notin S} G(\mathfrak{O}_v)$ なので, $|\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma^S)|_{\mathbb{A}} = |\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_{\mathbb{A}} = |\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_S$. また $X \in V(F)$ だから, $|P_j(X)^S|_{\mathbb{A}} = |P_j(X)_S|_{\mathbb{A}}^{-1} = |P_j(X_S)|_S$. よって,

$$|P_j(g_S\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma X)_S|_{\mathbb{A}} = |P_j(g_S\,(\gamma X)_S)|_S\,|\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_S\,|P_j(X_S)|_S^{-1}. \tag{5.10}$$

一方, $\gamma X \in V(F)$ より $|P_j(\gamma X)|_{\mathbb{A}} = 1$ なので,

$$|P_j(g_S\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma X|_{\mathbb{A}} = |\tau_j(g_S\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_{\mathbb{A}} \tag{5.11}$$

(5.10), (5.11) を比較することで所望の式が得られる. □

5.3 2重ゼータ函数の「明示公式」

この節では, 軌道型 2 重ゼータ函数 $\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S)$ の別表示 ([KTW, Theorem 4.3]) を証明する.

定理 5.8 $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ とする. $s \in \mathcal{D}$ に対して, 次が成り立つ:

$$\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S) = \zeta_F^S(s_1)\,\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)}\frac{L^S(s_2,\chi)}{L^S(2s_1+s_2,\chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}}. \tag{5.12}$$

証明 $s \in \mathcal{D}$ とする. (5.9) と定理 4.17 より

$$\begin{aligned}&\sum_{\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}}\widetilde{Z_S}(\Phi_S,s,\omega_S)\,\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S)\\&=\sum_{\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}}\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F}\widetilde{Z_S}(\Phi_S,s,\omega_S)\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)}\frac{\zeta_F^S(s_1)\,\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)\,L^S(s_2,\chi)}{L^S(2s_1+s_2,\chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}}.\end{aligned}$$

が $\Phi_v = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}\,(v\notin S)$ であるような任意の $\Phi = \otimes_v\Phi_v \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ で成り立つ. $\Phi_v\,(v\in S)$ を走らせると系 3.8 から, 任意の $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ について等式 (5.12) が得られる. □

5.4 2重ゼータの「明示公式」II

命題 5.9 S を Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合とし, $\delta_S \in [F_S^\times]_2$ とする. $S' = S \cup \Sigma_2$ とおく. $s \in \mathcal{D}$ に対して,

$$\xi^S(s,\delta_S) = \tfrac{1}{2}\Delta_F^{3/2}\frac{\zeta_F^{S'}(s_1)}{\zeta_{S'}^F(2s_1)}\zeta_F^{S'}(2s_2)\zeta_F^{S'}(2s_1+2s_2-1)$$
$$\times \sum_{\substack{d\in[F^\times]_2\\ d_S\in\delta_S(F_S^\times)^2}} \frac{L^{S'}(s_1,\omega_d)\,\mathfrak{L}_{\Sigma_2-S}(s,d)}{L^{S'}(2s_2+s_1,\omega_d)\,\mathbf{N}_{S'}(\mathfrak{f}_{\omega_d})^{s_2}}, \tag{5.13}$$

ここで

$$\mathfrak{L}_{\Sigma_2-S}(s,d) := \prod_{v\in\Sigma_2-S} 2|2|_v^{-1}(1-q_v^{-1})^{-2}|d_v|_v^{s_2} Z_{F_v}(\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)},s,d_v)$$

であり, $d \in [F^\times]_2$ に対して $\omega_d \in \mathfrak{C}_F$ は §4.3.2 で定義される実指標, d_S は d の $[F_S^\times]_2$ への自然な像を表す. 領域

$$\mathcal{D}_2' := \{s\in\mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(s_1+2s_2) > 2+\max(\mathrm{Re}(s_1),1-\mathrm{Re}(s_1),1)\}$$

において級数 (5.13) は広義一様に絶対収束し, 上の式によって $\xi^S(s,\delta_S)$ は $\mathcal{D}_2'$ に有理型に解析接続される [17]

証明 $\Phi = \otimes_v\Phi_v$, $\Phi_v \in \mathscr{S}(V(F_v))$, $\Phi_v = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}$ $(v \notin S)$ とする. §4.6.2 の最初の式変形から

$$Z(\Phi,s) = \sum_{d\in[F^\times]_2}\int_{G(\mathbb{A})/G(F)^{X_d}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2}\Phi(gX_d)\,\mathrm{d}g.$$

$G(F)^{X_d} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるから,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{d\in[F^\times]_2}\int_{G(\mathbb{A})} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2}\Phi(gX_d)\,\mathrm{d}g\\
&= \frac{1}{2}\sum_{d\in[F^\times]_2}\prod_v\int_{G(F_v)} |\tau_1(g_v)|_v^{s_1}|\tau(g_v)|_v^{s_2}\Phi_v(g_vX_d)\,\mathrm{d}g_v\\
&= \frac{1}{2}\sum_{d\in[F^\times]_2}\prod_v\{(1-q_v^{-1})^{-2}2|2|_v^{-1}Z_{F_v}(\Phi_v,s,d_v)\},
\end{aligned}$$

[17] $\mathcal{D}_2'$ は [KTW, Prop.4.9] で考えた領域と同じ.

ここで, 最後の等式は (3.14) による. $v \notin S' = S \cup \Sigma_2$ のとき, $\Phi_v = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}$ だから, 補題 3.6(2) の式を代入して, $Z(\Phi, s) =$

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta_F^{S'}(s_1)\zeta_F^{S'}(2s_2)}{\zeta_F^{S'}(2s_1)}\zeta_F^{S'}(2s_1+2s_2-1)\sum_{d\in[F^\times]_2}\frac{L^{S'}(s_1,\omega_d)\mathfrak{L}_{\Sigma_2-S}(d,s)}{L^{S'}(s_1+2s_2,\omega_d)\,\mathbf{N}_{S'}(\mathfrak{f}_{\omega_d})^{s_2}}$$
$$\times\prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}}\{(1-q_v^{-1})^{-2}2|2|_v^{-1}\}\prod_{v\in S}Z_{F_v}(\Phi_v, s, \delta_v).$$

命題 5.8 の証明の最後の部分と同様の議論により, Φ_v $(v \in S)$ を走らせてこれと (5.8) を比較することで所望の式を得る.

定義 3.3 および補題 3.4 から $\mathcal{D}'$ 上広義一様に評価 $|Z_{F_v}(\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_V)}, s, d_v)| \ll 1$ が成り立つことに注意すると, 後半部分は補題 4.19 と同じ議論で証明される. □

注意 5.10 §8 で述べた背景から, 表示式 (5.13) は 2 重ゼータを「不分岐 Eisenstein 級数のトーラス周期付き Dirichlet 級数」と見たときの明示的な公式であると思える. 実際, (5.13) は Eisenstein 級数のトーラス周期を与える Hecke の公式を内包している.

例： [伊吹山・齋藤 II, p.291] で, 次の式が述べられている [18]($\xi_i(s)$ の方は省略)[19]:

$$\xi_i^*(s) = \frac{\zeta^{(2)}(2s_2)\zeta^{(2)}(s_1)}{\zeta^{(2)}(2s_1)\zeta^{(2)}(s_2)} \times \zeta^{(2)}(s_2)\zeta^{(2)}(2s_1+2s_2-1)$$
$$\times\sum_{(-1)^{i-1}D>0}\frac{L^{(2)}(s_1,\chi_D)}{L^{(2)}(2s_2+s_1,\chi_D)}\frac{1}{(D^{(2)})^{s_2}}\times\left\{\sum_{e=2}^{\infty}\frac{a_D^{(s_1)}(2^e)}{(2^e)^{s_1+s_2-\frac{1}{2}}}\right\} \tag{5.14}$$

ここで, $a_D^{(s_1)}(2^e)$ はオイラー 2 因子の Dirichlet 級数展開係数である:

$$\frac{\zeta_2(s_1)}{\zeta_2(2s_1)}\zeta_2(2s_2)\zeta_2(2s_1+2s_2-1)\frac{L_2(s_1,\chi_D)}{L_2(2s_2+s_1,\chi_D)}\frac{1}{D_2^{s_2}} = \sum_{e=0}^{\infty}\frac{a_D^{(s_1)}(2^e)}{(2^e)^{s_1+s_2-1/2}} \tag{5.15}$$

[18] 公式 (5.14) は命題 (1.2)(3) の式と良く似ているが大きな違いは s_1, s_2 の場所が入れ替わっている点である. 公式 (5.14) の証明は [Z, Prop.3.1(1)] を使うと初等的な変形で容易にできる, 未確認だが命題 1.2(3) の公式は (5.14) から Blomer の議論 (途中で Kronecker 記号による 2 次相互法則を使う 2 重級数の変形) によって導けると思われる. *cf.* $S = \{\infty, 2\}$ のとき [KTW, §A3] 参照.

[19] [KTW, §A.2] で述べたように $\xi_i(s)$ の対応する公式は谷口の結果からも従う.

公式 (5.14) は命題 5.9 で得られた表示式 (5.13) を $F=\mathbb{Q}$, $S=\{\infty\}$ で使うと, あとは $\mathfrak{L}_{\{2\}}(d,s)$ を計算することで得られる. $[\mathbb{Q}_2^\times]_2$ の代表系を §7.1 のように取る. $\delta\in[\mathbb{Q}_2^\times]_2$ について, ω_δ の導手は $\delta=1,5$ のとき $\mathbb{Z}_2$, $\delta=3,7$ のとき $4\mathbb{Z}_2$, $\delta\equiv 0 \pmod 2$ のとき $8\mathbb{Z}_2$ となる。よって $\delta\neq 1,5$ のとき $L(z,\omega_\delta)=1$, $L(z,\omega_1)=1-2^{-z}$, $L(z,\omega_5)=1+2^{-z}$ となる (*cf.* (3.1)). これに注意し, 補題 3.6(1) の式を公式 (3.12) に代入して計算すると, $Z_{\mathbb{Q}_2}(\mathbb{1}_{V(\mathbb{Z}_2)},s,\delta)$ は次のようにもとまる:

$$\frac{2^{-4}}{(1-2^{-2s_2})(1-2^{1-2s_1-2s_2})}\begin{cases}\frac{1+2^{-s_1}}{1-2^{-s_1}}(1-2^{-s_1}+2^{1-2s_1}-2^{1-2s_1-2s_2}) & (\delta=1),\\ (1+2^{-s_1}+2^{1-2s_1}-2^{1-2s_1-2s_2}) & (\delta=5),\\ 1+2^{-s_1} \quad (\delta=3,7), \\ (1+2^{-s_1})2^{-s_2}\,(\delta\equiv 0 \pmod 2).\end{cases}$$

一方, 展開 (5.15) を場合分けして調べてこの結果と比較することで次を得る:

$$2^4\,Z_{\mathbb{Q}_2}(\mathbb{1}_{V(\mathbb{Z}_2)},s,\delta)=2^{2s_2}\times\sum_{e=2}^{\infty}\frac{a_\delta^{(s_1)}(2^e)}{(2^e)^{s_1+s_2-1/2}}.$$

6 函数等式

S を Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合とする. $\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}$ に対して,

$$\Xi^S(s,\omega_S):=\frac{\zeta_F^S(2s_1)}{\zeta_F^S(s_1)}\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S),\quad s=(s_1,s_2)\in\mathcal{D} \tag{6.1}$$

と定義する. $\widehat{[F_S^\times]_2}$ を添え字集合とし, 次のベクトル値有理型函数を導入する.

$$\boldsymbol{\Xi}^S(s):=\left(\Xi^S(s,\omega_S)\right)_{\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}}$$

6.1 定義

$\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ を $\mathbb{C}^2$ の可逆アフィン変換全体のなす群とする. $\mathbb{C}^2$ 上の有理型函数 [20] 全体のなす体を $\mathfrak{M}$ とし, 群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ の体 $\mathfrak{M}$ への右作用を

$$\phi^f(s_1,s_2):=\phi(f(s_1,s_2)),\quad \phi(s_1,s_2)\in\mathfrak{M},\ f\in\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$$

[20] $\mathbb{C}^2$ の稠密開集合上で定義された複素数値函数で, 局所的には正則函数の比で与えられるものを有理型関数と呼ぶ

で定義する．I を空でない有限集合とする．このとき, $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ は $\mathfrak{M}$ に成分を持つ I 上の行列環 $\mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})$ に自然に作用するので, 半直積群 $\mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ が考えられる．ここで, $\mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})^\times$ は可逆行列全体の乗法群を表す.

定義 6.1 (i) $\mathfrak{c} = (\mathbf{C}(s), f) \in \mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ とする.

$$\boldsymbol{\Xi}(f(s)) = \mathbf{C}(s)\,\boldsymbol{\Xi}(s)$$

が成り立つとき, $\mathfrak{c}$ 型の函数等式を満たすという.

(ii) H を有限群とする．$\boldsymbol{\Xi}(s) = (\Xi_i(s))_{i\in I} \in \mathfrak{M}^I$ を $\mathbb{C}^2$ 上のベクトル値有理型函数とする．群準同型 $\boldsymbol{\Gamma} : H \longrightarrow \mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ が $\boldsymbol{\Xi}(s)$ の H-函数等式系であるとは, $\boldsymbol{\Gamma}(h) = (\mathbf{C}_h(s), f_h)\,(h \in H)$, $\mathbf{C}_h(s) \in \mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})$, $f_h \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ とするとき,

(a) $\boldsymbol{\Xi}(s)$ が任意の $h \in H$ について $\boldsymbol{\Gamma}(h)$ 型の函数等式を満たし, かつ

(b) $h \mapsto f_h$ は H から $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ への単射

が成り立つことを意味する.

6.2 函数等式 I

Affine 変換 $f_\beta : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$f_\beta : s = (s_1, s_2) \longmapsto \left(s_1 + s_2 - \tfrac{1}{2}, 1 - s_2\right) \tag{6.2}$$

で定義する．この変換の位数は 2 である．$\mathsf{B}_S(s) \in \mathbf{Mat}_{\widehat{[F_S^\times]_2}\times\widehat{[F_S^\times]_2}}(\mathfrak{M})$ を ω_S-対角成分が $\Gamma_S(s_2, \omega_S)$ (*cf.* (4.7)), 対角成分以外は 0 として定義する．$\mathsf{B}_S(s)$ は s_2 のみの函数である．(4.23) で定義される領域 $\mathcal{D}_2$ を想起しよう．容易に分かるように, $f_\beta(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_2$ である.

定理 6.2 $\mathcal{D}$ 上の正則函数 $(s_2 - 1)\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は $\mathcal{D}_2$ 上の正則函数に解析接続され,

$$\boldsymbol{\Xi}^S(f_\beta(s)) = \mathsf{B}_S(s)\,\boldsymbol{\Xi}^S(s), \quad s \in \mathcal{D}_2$$

が成り立つ.

証明 定理 (5.8) と (6.1) から $s \in \mathcal{D}$ において

$$\Xi^S(s, \omega_S) = \zeta_F^S(2s_1)\,\zeta_F^S(2s_1 + 2s_2 - 1) \sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)} \frac{L^S(s_2, \chi)}{L^S(2s_1 + s_2, \chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}}$$

である．補題 4.19 より, 右辺の級数表示は $\mathcal{D}_2$ 上で収束して正則函数を定義している．$\zeta_F^S(2s_1)$, $\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)$, $(s_2-1)L^S(s_2,\chi)$ は $\mathcal{D}_2$ 上正則だから, 上の表示によって $(s_2-1)\Xi^S(s,\omega_S)$ は $\mathcal{D}_2$ 上で正則に解析接続される．f_β は 2 つの多項式 $2s_1$, $2s_1-2s_2-1$ を入れ替え, s_2, $1-s_2$ も f_β で入れ替わる．よって補題 4.2 によれば, $s\in\mathcal{D}_2$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&\Xi^S(f_\beta(s),\omega_S)\\
&=\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)\,\zeta_F^S(2s_1)\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)}\frac{L^S(1-s_2,\chi)}{L^S(2s_1+s_2,\chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1+s_2-1/2}}\\
&=\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)\,\zeta_F^S(2s_1)\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)}\frac{\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_2-1/2}\,\Gamma_S(s_2,\omega_S)\,L^S(s_2,\chi)}{L^S(2s_1+s_2,\chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1+s_2-1/2}}\\
&=\Gamma_S(s_2,\omega_S)\,\Xi^S(s,\omega_S)
\end{aligned}
$$

□

注意 6.3　表示式 (5.9), 定義 5.5 および (6.1) から, 定理 6.2 と同様の論法で $\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ の $f_\gamma\circ f_\alpha^3:(s_1,s_2)\mapsto(1-s_1,s_1+s_2-\frac{1}{2})$ に関する函数等式が得られる.(*cf.* §1(iii) で述べた新谷の結果. 注意 5.10 も参照.)

6.3　函数等式 II

Affine 変換 $f_\gamma:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$ を

$$
f_\gamma:(s_1,s_2)\longmapsto\left(s_1,\tfrac{3}{2}-s_1-s_2\right), \tag{6.3}
$$

で定義する．この変換は位数 2 で, 領域 $\mathcal{D}_1=\{s\in\mathbb{C}^2\mid \mathrm{Re}(s_1)>1\}$ を保つことに注意する．$\omega_S=\otimes_{v\in S}\omega_v$, $\chi_S=\otimes_{v\in S}\chi_v\in\widehat{[F_S^\times]_2}$ に対して,

$$
\widetilde{G_S}(s,\omega_S,\chi_S):=\prod_{v\in S}\widetilde{G_{\psi_{F_v}}}(s,\omega_v,\chi_v)
$$

とおき (*cf.* 定義 3.12(2)),

$$
\mathsf{C}_S(s):=(\widetilde{G_S}(s,\omega_S,\chi_S))_{(\chi_S,\omega_S)}\in\mathbf{Mat}_{\widehat{[F_S^\times]_2}\times\widehat{[F_S^\times]_2}}(\mathfrak{M})
$$

と定義する [21].

[21] [KTW, Theorem 4.21] の等式の右辺の最初の因子 $\Delta_F^{-3/2}$ は不要.

定理 6.4 $\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は $\mathcal{D}_1$ 上の有理型函数に解析接続され, $(s_2-1)(s_1+s_2-3/2)\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は $\mathcal{D}_1$ 上正則になる. S が $\Sigma_2 \cup \Sigma_\infty \cup \{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} \mid \mathrm{ord}_v(\mathfrak{d}_{F_v/\mathbb{Q}}) > 0\}$ を含むとすると, $s \in \mathcal{D}_1$ に対して,

$$\boldsymbol{\Xi}^S(f_\gamma(s)) = \mathsf{C}_S(s)\,\boldsymbol{\Xi}^S(s).$$

証明 まず, $\delta_S = (\delta_v)_{v\in S} \in [F_S^\times]_2$ について $\xi^S(s,\delta)$ の解析接続を導く. $v \notin S$ に対しては $\Phi_v = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}$ とおき, $v \in S$ に対する $\Phi_v \in \mathscr{S}(V(F_v))$ を $\mathrm{Supp}(\Phi_v) \subset V^0(F_v,\delta_v)$ と成るように選んで $\Phi := \otimes_v \Phi_v \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ とおく. この函数に対して定理 4.8 を適用する. Φ の選び方から

$$T(\Phi, s_1) = 0 \quad (\mathrm{Re}(s_1) > 1), \tag{6.4}$$

$$\zeta(\Phi^{(3)}(0,0,\cdot), s_2) = 0 \quad (\mathrm{Re}(s_1) > 1) \tag{6.5}$$

となる. これらは, 行列 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a^{-1}b^2 \end{smallmatrix}\right]$ および行列 $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_2 \end{smallmatrix}\right]$ が特異集合 $V - V^0$ に含まれるので定義 (4.12) および (4.14) から直ちに従う. 定理 4.8, (6.4), (6.5) から

$$\begin{aligned} Z(\Phi, s) &= Z_+(\Phi, s_1, s_2) + Z_+(\widehat{\Phi}, s_1, \tfrac{3}{2} - s_1 - s_2) \\ &\qquad + \frac{c_F}{2s_1+2s_2-3} T(\widehat{\Phi}, s_1) + \frac{c_F}{2s_2-2}\zeta(\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,\cdot), s_1). \end{aligned}$$

この式の右辺の最初の 2 項は $\mathcal{D}_1$ において正則函数になる. $\zeta(\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,\cdot), s_1)$ は $\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,\cdot) \in \mathscr{S}(\mathbb{A})$ にたいする Tate の大域ゼータ積分なので $\mathrm{Re}(s_1) > 1$ では正則函数になる. また $T(\widehat{\Phi}, s)$ は補題 4.7 (3) より $\mathrm{Re}(s) > 1$ で正則函数である. よって, $(s_2-1)(s_1+s_2-3/2)\,Z(\Phi,s)$ が $\mathcal{D}_1$ で正則に成ることが分かった.

Φ の選び方から $Z_S(\Phi_S, s, \delta'_S) = 0$ $(\delta'_S \neq \delta_S)$ だから, (5.8) より

$$Z(\Phi, s) = \frac{2^{\#S}}{|2|_S}\Delta_F^{-3/2} \prod_{v \in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}} (1-q_v^{-1})^{-2} Z_S(\Phi_S, s, \delta_S)\,\xi^S(s,\delta_S), \quad s \in \mathcal{D}.$$

この式の右辺に $(s_2-1)(s_1+s_2-3/2)$ をかけると $\mathcal{D}_1$ で正則函数になる. 補題 3.7 から各点 $w \in \mathcal{D}_1$ において $Z_S(\Phi_S, w, \delta_S) \neq 0$ となるように Φ_v $(v \in S)$ を選べるから,

$$\xi^S(s,\delta_S) = \frac{|2|_S}{2^{\#S}}\Delta_F^{3/2} \prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}} (1-q_v^{-1})^2 \frac{1}{Z_S(\Phi_S, s, \delta_S)} \times Z(\Phi, s)$$

によって $(s_2-1)(s_1+s_2-3/2)\,\xi^S(s,\delta_S)$ は $w \in \mathcal{D}_1$ の近傍で正則になることが分かる. (5.5) により, $(s_2-1)(s_1+s_2-3/2)\,\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S)$ についても同じことが言える.

次に函数等式を導く．S が Σ_2 および $\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}}$ の素因子をすべて含むとの仮定から $\widehat{\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}} = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}$ $(v \notin S)$ となる (補題 3.10)．よって，系 4.9 と (5.8) から

$$Z_S(\Phi_S, f_\gamma(s), \delta_S)\, \xi^S(f_\gamma(s), \delta_S) = \sum_{\varepsilon_S \in [F_S^\times]} Z_S(\widehat{\Phi_S}, s, \varepsilon_S)\, \xi^S(s, \varepsilon_S), \quad s \in \mathcal{D}_1$$

ここで (3.19) より得られる等式

$$Z_S(\widehat{\Phi_S}, s, \varepsilon_S) = \sum_{\eta_S \in [F_S^\times]_2} G_S(s, \varepsilon_S, \eta_S)\, Z_S(\Phi_S, f_\gamma(s), \eta_S) = G_S(s, \varepsilon_S, \delta_S)\, Z_S(\Phi_S, f_\gamma(s), \delta_S)$$

を使うと，

$$Z_S(\Phi_S, f_\gamma(s), \delta_S)\, \xi^S(f_\gamma(s), \delta_S) = \sum_{\varepsilon_S \in [F_S^\times]} G_S(s, \varepsilon_S, \delta_S)\, Z_S(\Phi_S, f_\gamma(s), \delta_S)\, \xi^S(s, \varepsilon_S).$$

Φ_v $(v \in S)$ を走らせると補題 3.7 より，

$$\xi^S(f_\gamma(s), \delta_S) = \sum_{\varepsilon_S \in [F_S^\times]} G_S(s, \varepsilon_S, \delta_S)\, \xi^S(s, \varepsilon_S)$$

を得る．さらに (5.5), (5.6),(6.1) などを使うと $\Xi^S(s, \omega_S)$ 達の間の所望の函数等式が得られる． □

6.4 アフィン変換による 2 面体群の実現

位数 12 の 2 面体群は次の生成元と関係式で定義される

$$D_{12} := \langle \gamma, \beta \mid \gamma^2 = \beta^2 = (\beta\gamma)^6 = 1 \rangle$$

あるいは $\alpha = \beta\gamma$ とおけば次のようにも書ける:

$$D_{12} = \langle \gamma, \alpha \mid \gamma^2 = \alpha^6 = 1,\ \gamma\alpha\gamma = \alpha^{-1} \rangle$$

f_γ, $f_\beta \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ を (6.3), (6.2) で定義し，$f_\alpha := f_\beta \circ f_\gamma$ と定義すると，

$$f_\gamma^2 = f_\alpha^6 = 1, \quad f_\gamma \circ f_\alpha \circ f_\gamma = (f_\alpha)^{-1}$$

であり，f_γ, f_α は位数 12 の 2 面体群 D_{12} と同型な $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ の部分群を生成する．その要素は以下の表で与えられる．

1	f_α	f_α^2	f_α^3	f_α^4	f_α^5
$\binom{s_1}{s_2}$	$\binom{s_1+s_2-1/2}{1-s_1}$	$\binom{s_2}{3/2-s_1-s_2}$	$\binom{1-s_1}{1-s_2}$	$\binom{3/2-s_1-s_2}{s_1}$	$\binom{1-s_2}{s_1+s_2-1/2}$

f_γ	$f_\beta = f_\gamma \circ f_\alpha$	$f_\gamma \circ f_\alpha^2$	$f_\gamma \circ f_\alpha^3$	$f_\gamma \circ f_\alpha^4$	$f_\gamma \circ f_\alpha^5$
$\binom{s_1}{3/2-s_1-s_2}$	$\binom{s_1+s_2-1/2}{1-s_2}$	$\binom{s_2}{s_1}$	$\binom{1-s_1}{s_1+s_2-1/2}$	$\binom{3/2-s_1-s_2}{s_2}$	$\binom{1-s_2}{1-s_1}$

6.5 解析接続

定理 6.5 [22] S が Σ の有限部分集合で, Σ_∞ を含むとする. このとき $(s_1-1)(s_2-1)(s_1+s_2-\frac{3}{2})\,\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は $\mathbb{C}^2$ 上の正則函数に解析接続される. $\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は $(\mathsf{B}_S(s), f_\beta)$ 型函数等式および $(\mathsf{C}_S(s), f_\gamma)$ 型函数等式の両方を満たす.

証明 多変数ゼータの解析接続でよく使われる Hartogs の拡張定理を使った議論による (*cf.* [佐藤 82-1, p.603], [谷口 1, §5.4], [KTW, Cor.4.17]). 命題 5.9, 定義 5.5 および定理 6.4 から, $(s_1-1)(s_2-1)(s_1+s_2-\frac{3}{2})\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は領域 $\mathcal{D}_2'$, $\mathcal{D}_1$ の上で正則である. よって, $\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2'$ の線型凸包 $\mathrm{Conv}(\mathcal{D}_2'\cup\mathcal{D})$ まで正則に延長される. $\mathrm{Conv}(\mathcal{D}_2'\cup\mathcal{D}_1)=\mathbb{C}^2$ なので結論を得る. □

注意 6.6 この証明では $\mathcal{D}_2'$ での解析性の確保に表示式 5.13 が使われている. $\mathcal{D}_2$ が $\mathcal{D}_1$ に含まれてしまうため, 良く似た表示式 (5.12) の方からは $\mathbb{C}^2$ への解析接続は得られない [23].

7 $F=\mathbb{Q}$ の場合

$F=\mathbb{Q}$ とする. $\Sigma_{\mathbb{R}}=\{\infty\}$, $\Sigma_{\mathbb{C}}=\emptyset$, Σ_{fin} は素数全体の集合と同一視される. $\mathbb{Q}$ の素点の有限集合 S 全体を $\mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}$ とする.

7.1 定理 1.1 の導出

$\mathbb{Q}_p$ の 2 次ヒルベルト記号や $[\mathbb{Q}_p^\times]_2$ の構造などについては, 例えば [志村, p.19, pp.33-34] に詳しい説明がある. まとめておく.

- p が奇素数の場合, $u_p\in\mathbb{Z}_p^\times-(\mathbb{Z}_p)^2$ を一つ固定すると,

$$[\mathbb{Q}_p^\times]_2=\{1,u_p,p,pu_p\}$$

と代表系がとれる. $u\in\mathbb{Z}-\{0\}$ が p と互いに素な整数ならば,

$$(p,u)_{\mathbb{Q}_p}=\left(\frac{u}{p}\right),\quad (p,p)_{\mathbb{Q}_p}=\left(\frac{-1}{p}\right),\quad (u,v)_{\mathbb{Q}_p}=1$$

[22] 前半の正則性の部分は $F=\mathbb{Q}$, $S=\{\infty\}$ の場合は [佐藤 82-1] から従う. 佐藤文広先生から講演中にいただいたコメントによると, Eisenstein 級数を $\mathscr{S}(\mathbb{A}^2)$ の元から構成する Godment の方法 (古典的には Eisenstein 級数を Epstein ゼータと関連付けることに対応) を適用すると, §8 を [佐藤 82-1, §2] にある多変数設定に書き換えることが出来ると思われます. [佐藤 82-1] をアデールを使って代数体へ一般化することは実質的に [谷口 1] で行われている.

[23] 講演の中では間違った事を言いました, このように訂正します

- $p=2$ の場合, $1+8\mathbb{Z}_2=(\mathbb{Z}_2^\times)^2$ であり,

$$[\mathbb{Q}_2^\times]_2=\{1,3,5,7,2,6,-6,-2\}$$

と代表系が取れる. u が奇数ならば,

$$(2,u)_{\mathbb{Q}_2}=\left(\frac{2}{|u|}\right),\quad (2,2)_{\mathbb{Q}_2}=1,\quad (u,v)_{\mathbb{Q}_2}=(-1)^{\frac{(|u|-1)(|v|-1)}{4}}$$

自然数 n と素数 p に対して, $n=n_pn^{(p)}$, $(n_p,n^{(p)})=1$, n_p は p のべき) によって自然数 n_p, $n^{(p)}$ を決める. N を平方因子を持たない自然数として $S(N)$ を N の素因子の集合, $S=S(N)\cup\{\infty\}$ とする. 正の約数 $Q\mid N$, $\mathbf{d}\in T_N$, $j=1,2$ の組 $(j,Q,\mathbf{d})$ にたいして

$$\delta(j,Q,\mathbf{d})=\left((-1)^{j-1},2^{\mathrm{ord}_2(Q)}d_2,\{p^{\mathrm{ord}_p(Q)}u_p^{\frac{1-d_p}{2}}\}_{p\in S(N^{(2)})}\right)$$

として $[\mathbb{Q}_S^\times]_2=[\mathbb{R}^\times]_2\times[\mathbb{Q}_2^\times]_2\times\prod_{p\in S(N^{(2)})}[\mathbb{Q}_p^\times]_p$ の要素を定義する ($2\nmid N$ のときは, 2 因子は取る). これによって, 集合 $[\mathbb{Q}_S^\times]_2$ の要素は 3 つ組み $(j,Q,\mathbf{d})$ 全体と $1:1$ に対応する. $\delta\in[\mathbb{Q}_S^\times]_2$ に対して定義される実指標 $\omega_\delta\in\widehat{[\mathbb{Q}_S^\times]_2}$ ((4.3.2) の最後) を想起しよう. 対角埋め込み $\mathbb{Q}^\times\hookrightarrow\mathbb{Q}_S^\times$ により, 整数 $n\neq 0$ に対し $\omega_\delta(n)\in\{1,-1\}$ が決まる.

補題 7.1 $\delta=\delta(j,Q,\mathbf{d})\,\mathbf{d}=(d_p)_{p\in S(N)})$ に対して, $\omega_\delta(n)\,(n\in\mathbb{Z}-\{0\})$ は §1.2 であたえた完全乗法函数 $\omega_{j,Q,\mathbf{d}}(n)$ に一致する.

証明 $2\mid N$ のときを考える. $(n,N)=1$ のとき, 上で復習したヒルベルト記号の値と, ヤコビ記号の性質を使って計算すれば出来る. □

$F=\mathbb{Q}$ は類数 1 なので $\xi^S(s,\delta)$, $\widetilde{\xi^S}(s,\omega_\delta)$ は $\xi^S_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}}(s,\delta)$, $\widetilde{\xi^S_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}}}(s,\omega_\delta)$ (*cf.* 定義 5.1, 定義 5.5) にそれぞれ等しい. さて, $S=\{\infty\}\cup S(N)$ について,

$$\mathbb{Z}_S^\times=\{\pm\prod_{p\in S(N)}p^{\nu_p}\mid \nu_p\in\mathbb{Z}\}$$

なので, $(\mathbb{Z}\cap Q^\times)\times(\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}^\times)$ での $\mathbb{Z}_S^\times\times\mathbb{Z}_S^\times$ 軌道 $[m,n]$ (*cf.* §5.1) の完全代表元として $\{(m,nl)\mid 0<l\mid N,\,(m,n)\in X_N\}$ (ただし, X_N は §1.2 の集合) が取れることは明らか. $\delta=\delta(j,Q,\mathbf{d})$ のとき, 集合 $X_S(\delta)$ は $X_N(j,Q,\mathbf{d})$ に対応する. これらのことに注意すると, $\xi^S_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}}(s,\delta)$, は (1.5) に一致する. また補題 7.1 を使うと, $\widetilde{\xi^S_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}}}(s,\omega_\delta)$ は, (1.6) に一致する. そうすると定理 1.1(1), (2) は定理 6.2, 6.4, 6.5 から従う. 定理 1.2 は定理 5.8 から従う. 定理 1.1 (3) は次章で説明する.

7.2　D_{12}-函数等式系

この節の結果は [平本] による．行列 $\mathsf{B}_S(s)$, $\mathsf{C}_S(s)$ は $\infty \in S$ でなくても $S \in \mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}$ に対して同じ公式で定義される．

定理 7.2　(1) $S \in \mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}$ に対して, 単射的群準同型写像

$$\boldsymbol{\Gamma}^S : D_{12} \longrightarrow \mathbf{Mat}_{\widehat{[F_S^\times]_2} \times \widehat{[F_S^\times]_2}}(\mathfrak{M})^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$$

で次の条件を満たすものが唯ひとつ存在する:

$$\boldsymbol{\Gamma}^S(\beta) = (\mathsf{B}_S(s), f_\beta), \qquad \boldsymbol{\Gamma}^S(\gamma) = (\mathsf{C}_S(s), f_\sigma) \tag{7.1}$$

さらに, $S_1, S_2 \in \mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}, S_1 \cap S_2 = \emptyset$ に対して, $\boldsymbol{\Gamma}^{S_1 \cup S_2}(s) = \boldsymbol{\Gamma}^{S_1}(s) \otimes \boldsymbol{\Gamma}^{S_2}(s)$ が成り立つ．ただし, $\otimes$ は行列のクロネッカー積を表す．

(2) $S \in \mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}$, $\{\infty, 2\} \subset S$ ならば, $\boldsymbol{\Gamma}^S$ は $\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ の D_{12}-函数等式系である．

証明 (1) 群準同型写像 $\boldsymbol{\Gamma}^S$ の一意性は $D_{12} = \langle \beta, \gamma \rangle$ であることと条件 (7.1) から明らか．定義より, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ならば

$$\mathsf{B}_{S_1 \cup S_2}(s) = \mathsf{B}_{S_1}(s) \otimes \mathsf{B}_{S_2}(s), \quad \mathsf{C}_{S_1 \cup S_2}(s) = \mathsf{C}_{S_1}(s) \otimes \mathsf{C}_{S_2}(s)$$

となっている．よってあとは, $S = \{p\}$ $(p \neq 2, \infty)$, $S = \{\infty, 2\}$ の場合に D_{12} の生成元 γ, β の基本関係式に相当する次の式を半直積群 $\mathfrak{M}^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ において直接計算で確かめれば $\boldsymbol{\Gamma}^S$ の存在が示せれたことになる: $\mathfrak{c} := (\mathsf{C}_S(s), f_\gamma)$, $\mathfrak{b} := (\mathsf{B}_S(s), f_\beta)$, $\mathfrak{e} = (1, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$ として

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{b}^2 = (\mathfrak{b}\mathfrak{c})^6 = \mathfrak{e}$$

$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{e}$ は Hecke の L-函数のガンマ因子の性質 (補題 4.3) から分かる．$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{e}$ は概均質局所ゼータのガンマ行列の性質 (系 3.15 (2)) から従う．よって問題となるのは $(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^6 = \mathfrak{e}$ だが, [平本] ではこの関係式をチェックしている．

(2) $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathbf{Mat}_{\widehat{[F_S^\times]_2} \times \widehat{[F_S^\times]_2}}(\mathfrak{M})^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ で $\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ が $\mathfrak{a}_1$ 型函数等式を満たしかつ $\mathfrak{a}_2$ 型函数等式を満たせば, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ 型函数等式を満たすことは明らか．このことと定理 6.5 と (1) から (2) の主張は従う．$\square$

注意 7.3　$S = \{2, \infty\}$ の場合, ここでの $\boldsymbol{\Xi}^{\{2,\infty\}}(s)$ の D_{12}-函数等式系は [B] で得られていたものに帰着され, [平本] はその別証明に加え, Blomer のガンマ行列 (16×16 正方行列) が, 実は無限素点由来の 4×4 行列と素点 2 由来の 4×4 行列のクロネッカー積に分解される, という新たな事実も示している．

8　付録: Eisenstein 級数のトーラス周期付きゼータ函数

この章では, §1.1 で言及した「新谷の方法」について説明を補足する.

古典的によく知られた $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 不変な非正則 Eisenstein 級数を, 群 $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+ := \{h \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ 上の函数として

$$E(g,w) := \sum_{\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})/\mathbf{B}(\mathbb{Z})^+} y(g\gamma)^{\frac{w+1}{2}}, \quad \mathrm{Re}(w) > 1$$

と定義する, ここで, $y : \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+ \to \mathbb{R}_{>0}$ は, 任意の $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+$ を岩澤分解により,

$$g = \left[\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right] \times a \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right] \in \mathbf{SO}(2)\mathbf{B}(\mathbb{R})^+$$

と書き表し $y(g) := c^{-1}$ で定義される. ($\mathbf{B}$ は $\mathbf{GL}_2$ の下半三角行列全体のなす部分群, $\mathbf{B}(\mathbb{R})^+$ は正の対角成分を持つ $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ の要素全体.) $E(g,w)$ は半平面上 $\mathrm{Re}(w) > 1$ で広義一様に絶対収束して正則函数を定め, w について有理型解析接続され

$$\mathrm{Res}_{w=1} E(g,w) = C > 0 \quad (\text{定数函数}) \tag{8.1}$$

となることが知られている. 以下は収束を無視した「発見的考察」である. $L^* = V(\mathbb{Z})$ とし, §1 で「定義」を紹介した (このままでは定義されない)$\zeta_i(s, L^*)$ に関連するゼータ積分 ($-\det x \in (\mathbb{Q}^\times)^2$ の寄与で発散)(1.3) の x についての和の範囲を, 群作用で安定な 2 つの部分

$$(L^*)_2 := L^* \cap \{-\det(x) \in (\mathbb{Q}^\times)^2\}, \qquad (L^*)_1 := L^* - (L^*)_2$$

で分割して, (1.3) を 2 つの和 $Z_1(s,\Phi) + Z_2(s,\Phi)$ と考える. 「非平方数」の部分 $Z_1(s,\Phi)$ の方は収束していて, 留数公式 (8.1) を利用して, 次のように形式的に変形できる：

$$\begin{aligned}
Z_1(\Phi,s) &= \int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})} |\det g|^s 1 \sum_{x \in (L^*)_1} \Phi(gx{}^tg)\,\mathrm{d}g \\
&= \int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})} |\det g|^s \left\{C^{-1}\mathrm{Res}_{w=1} E(g,w)\right\} \sum_{x \in (L^*)_1} \Phi(gx{}^tg)\,\mathrm{d}g \\
&= C^{-1}\mathrm{Res}_{w=1} \int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})} |\det g|^s E(g,w) \sum_{x \in (L^*)_1} \Phi(gx{}^tg)\,\mathrm{d}g
\end{aligned}$$

(最後で留数と和を入れ替えたが, 「発見的考察」なので気にしない.) ここで unfolding (Eisenstein 級数の定義を代入して基本領域上の積分と結合させる) を行う：

$$
\begin{aligned}
&I(s,w,\Phi)\\
&:=\int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})}|\det g|^s E(g,w)\sum_{x\in(L^*)_1}\Phi(gx{}^tg)\,\mathrm{d}g\\
&=\int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})}\sum_{\gamma\in\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})/\mathbf{B}(\mathbb{Z})^+}|\det g\gamma|^s y(g\gamma)^{(w+1)/2}\sum_{x\in(L^*)_1}\Phi(g\gamma x{}^t(g\gamma))\,\mathrm{d}g\\
&=\int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{B}(\mathbb{Z})^+}|\det g|^s y(g)^{(w+1)/2}\times\sum_{x\in(L^*)_1}\Phi(gx{}^tg)\,\mathrm{d}g.
\end{aligned}
$$

岩澤分解で $g=\left[\begin{smallmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right]h,\ h=a\left[\begin{smallmatrix}1&0\\ b&c\end{smallmatrix}\right]$ のとき, $\mathrm{d}g=\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\,\mathrm{d}h,\quad \mathrm{d}h:=\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}^\times c$. よって $\Phi^0(x):=\int_{\mathbf{SO}(2)}\Phi(kx{}^tk)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ とすると

$$
I_1(s,w,\Phi)=\int_{\mathbf{B}(\mathbb{R})^+/\mathbf{B}(\mathbb{Z})^+}|\det h|^s y(h)^{\frac{w+1}{2}}\sum_{x\in(L^*)_1}\Phi^0(hx{}^th)\,\mathrm{d}h
$$

この式の右辺においては, $(L^*)_1$ を L^* 全体にしても収束が確保される. こうして, 新谷の (original の形) の 2 重ゼータ積分が次の形で自然に導入される:

$$
Z^{\mathbf{B}}(s_1,s_2,\Phi):=\int_{\mathbf{B}(\mathbb{R})^+/\mathbf{B}(\mathbb{Z})^+}|\det h|^s y(h)^{\frac{w+1}{2}}\sum_{x\in L^*}\Phi(hx{}^th)\,\mathrm{d}h,
$$
$$
(s=2s_2+s_1,\ w=2s_1+1)
$$

そこで $Z^{\mathbf{GL}_2}(\Phi,s)$ の代替物が $2^{-1}C^{-1}\mathrm{Res}_{s_1=1}Z^{\mathbf{B}}(s_1,\frac{s}{2}-s_1)$ と考える.

注意 8.1 このノートでは, $\mathbf{B}$ の代わりに変数 a を「外付け」にして $G=\mathbf{GL}_1\times\left\{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\ b&c\end{smallmatrix}\right]\right\}$ とした. (a の V への作用は a^2 倍ではなく, a 倍に変わる.)

参考文献

[B] Blomer, V., *Subconvexity for a double Dirichlet series*, Comp. Math. **147** 355–374 (2011).

[DG] Diamantis, N., Goldfeld, D., *A converse theorem for double Dirichlet series and Shintani zeta functions*, J. Math. Soc. Japan **66** (2), 449–477 (2014).

[GH] Goldfeld,D., Hoffstein. J., *Eisenstein series of $\frac{1}{2}$-integral weight and the mean value of real Dirichlet L-series.* Invemt. math. **80**, 185–208 (1985).

[KTW] H.Kim, M.Tsuzuki, S.Wakatsuki, *The Shintani double zeta functions*, Forum Math. **34** , no. 2, 469–505 (2022).

[Kim-若槻-山内] Kim. H., Wakatsuki, S., Yamauchi, T., *Equidistribution theorems for holomorphic Siegel cusp forms of general degree*, arXiv:2106.07811.

[平本] C. Hiramoto, *On the functional equations of the Shintani double zeta functions*, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli **70**, 1–10 (2022)

[伊吹山・齋藤 I] Ibukiyama. T., Saito, H., *On zeta functions associated to symmetric matrices I: explicit form of zeta functions,* Amer. J. Math. **117** (1995), 1097–1155.

[伊吹山・齋藤 II] Ibukiyama. T., Saito, H., *On zeta functions associated to symmetric matrices, II: functional equations and special values*, Nagoya Math. J., **208** (2012), 265–316.

[IK] Iwaniec, H., Kowalski, E., *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications **53**, AMS (2004).

[池田] 池田保「付録 Weil Constant の基本性質」(第 4 回整数論サマースクール「Weil 表現入門」報告集に採録されている)

[木村] 木村達雄 「概均質ベクトル空間」 (岩波書店)

[LL] Labesse, J-P., Langlands, R.P., *L-indistinguishability for* $SL(2)$, Can. J. Math. XXXI No.4 (1979), 726–785.

[新谷] T. Shintani, *On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **22** (1975), 25–65.

[齋藤] Saito, H., *Explicit form of the zeta functions of prehomogenous vector spaces*, Math. Ann. **315** (1999), 587–615.

[佐藤 82-1] Sato, F., *On zeta functions of ternary forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1982), 585–604.

[佐藤 82-2] Sato, F., *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces, I. Functional equations*, Tohoku Math. J. (2) **34** (1982), 437–483.

[佐藤 94] Satō, F, *Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms*, K. G. Ramanathan memorial issue, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., **104**, 99–135 (1994).

[佐藤 89] F. Sato, *On functional equations of zeta distributions*, Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties, 465–508, Adv. Stud. Pure Math., 15, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[志村] Shimura, G., *Arithmetic of Quadratic Forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer (2010).

[谷口 1] Taniguchi, T., *Distributions of discriminants of cubic algebras*, arXiv:0606109v1.

[T] Tate, J., *Fourier analysis in number theory and Hecke's zeta-functions*, in Algebraic Number Theory (edited by Cassels and Frölich) (1967), 305–347.

[RV] Ramakrishnan, D., Valenza, R.J., *Fourier Analysis on Number Fields*, GTM 186 Springer-Verlag (1999).

[雪江] Yukie, A., *Shintani Zeta Functions*, London Mathematical Society Lecture Note Series **183** Cambridge University Press (1993).

[若槻] Wakatsuki, S., *The dimension of spaces of Siegel cusp formsof general degree*, Adv. Math. **340** (2018), 1012–1066.

[W] Weil, A., *Basic Number Theory*, Springer-Verlag (1967).

[Z] Zagier, D., *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*, Lecture Notes in Math., 627, 105?169, Springer, 1977.

[杉山] 杉山和成 (この報告集採録)

[鈴木 (美)] 鈴木美裕 (この報告集採録)

[谷口 2]　谷口隆 (この報告集採録)

[伊吹山]　伊吹山知義 (この報告集採録)

[佐藤]　佐藤文広 (この報告集採録)

Counting cubic fields using Shintani's zeta function

Frank Thorne (University of South Carolina)

Abstract

From analytic properties of zeta functions, we can effectively count integral orbits of prehomogneous vector spaces via Landau's theorem. As a typical example, I will explain how to count cubic fields by their discriminants, using the zeta functions studied by Shintani. In particular, I will:

(1) Explain the Davenport-Heilbronn correspondence for maximality of cubic rings, and how this can be incorporated into Shintani's zeta functions;

(2) Give an overview of Landau's method, and explain how the existence of zeta functions leads to arithmetic density results;

(3) Describe equidistribution of this maximality condition in terms of exponential sums, and give an overview of how these sums can be computed;

(4) Explain how to put these pieces together with a simple sieve, and thereby count cubic fields.

This note are based on a presentation given (remotely) to the Summer School on Prehomogeneous Vector Spaces, organized by Yasuhiro Ishitsuka, Kazunari Sugiyama, and Takashi Taniguchi in Kobe, September 2023.

Note. In some places, there is some textual overlap with some of the author and his collaborators' cited papers.

1 Introduction

Here is a typical example of a result in arithmetic statistics. Let $N_d(X)$ count the number of number fields K, of degree d over $\mathbb{Q}$, and with $|\mathrm{Disc}(K)| < X$.

Then the **Davenport-Heilbronn theorem** [DH71] asserts that

$$N_3(X) \sim \frac{1}{3\zeta(3)} X. \tag{1.1}$$

A succession of papers [Bel99, BBP10, BST13, TT13b, BTT], written (in various permutations) by Karim Belabas, Manjul Bhargava, Carl Pomerance, Arul Shankar, Takashi Taniguchi, Jacob Tsimerman, and the present author, have resulted in progressively stronger results, with a negative secondary term and a power saving error term. The strongest result to date is:

Theorem 1.1. We have

$$N_3(X) = \frac{1}{3\zeta(3)} X + (1 + \sqrt{3}) \frac{4\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3\zeta(5/3)} X^{5/6} + O(X^{2/3}(\log X)^{2.09}). \tag{1.2}$$

The existence of the (negative) secondary term above had been conjectured by Roberts [Rob01] and Datskovsky and Wright (implicitly in [DW88]). Previously, Shintani [Shi75] had obtained an analogous result for cubic *orders*.

We will give an overview of two questions here:

(1) How can one obtain the asymptotic density result (1.1) at all?
(2) How can one obtain the sharpest error terms possible?

Here we will give an overview of a method using *Shintani zeta functions* and *Landau's method*. This is not the only known method, and indeed we recommend Bhargava, Shankar, and Tsimerman's work [BST13] for an account using *Bhargava's averaging method*, which also obtains the secondary term in (1.2). (See also Y. Suzuki's article [鈴木雄] giving an overview of this method in this volume.)

Bhargava's method applies in significant generality – see Bhargava and Shankar [BS15] for a non-prehomogeneous example (one among many!)

The method discussed here is the most complicated of the known methods – at least, if one is not prepared to black box a lot of relevant background. However, when all the necessary background ingredients are in place, these are the sharpest tools available, leading to the strongest possible error terms.

At the end, we recommend some further reading for the interested reader.

2 Correspondence for cubic rings

Most approaches to the Davenport-Heilbronn theorem proceed by relating cubic fields to **binary cubic forms**, via the correspondences of **Levi** and **Delone–Faddeev**, and **Davenport-Heilbronn**. See [BST13], among other sources, for a more thorough treatment.

First, we recall the relevant definitions. The lattice of *integral binary cubic forms* is defined by

$$V(\mathbb{Z}) := \{au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \ : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.1}$$

and the *discriminant* of $f(u, v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \in V(\mathbb{Z})$ is given by the equation

$$\mathrm{Disc}(f) = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd. \tag{2.2}$$

Then $\mathrm{Disc}(f)$ is nonzero if and only if $f(u, v)$ factors into distinct linear factors over $\mathbb{C}$.[*1]

The group $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ acts on $V(\mathbb{Z})$ by

$$(\gamma \cdot f)(u, v) = \frac{1}{\det \gamma} f((u, v) \cdot \gamma). \tag{2.3}$$

A cubic form f is *irreducible* if $f(u, v)$ is irreducible as a polynomial over $\mathbb{Q}$, and *nondegenerate* if $\mathrm{Disc}(f) \neq 0$.

One also considers the action (2.3) over other rings such as $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, or $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Over $\mathbb{R}$ this action has two nondegenerate orbits, corresponding to the sign of $\mathrm{Disc}(f)$. Over $\mathbb{C}$ all of the nondegenerate forms are in the same orbit, making this V a *prehomogeneous vector space.*

The correspondence of Levi [Lev14] and Delone–Faddeev [DF64], as further extended by Gan, Gross, and Savin [GGS02] to include the degenerate case, is as follows:

[*1] If one factor is a scalar multiple of another, then we do not consider these linear factors to be distinct.

Theorem 2.1. There is a canonical, discriminant-preserving bijection between the set of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-orbits on $V(\mathbb{Z})$ and the set of isomorphism classes of cubic rings. Under this correspondence, irreducible cubic forms correspond to orders in cubic fields, and if a cubic form f corresponds to a cubic ring R, then $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})}(f)$ is isomorphic to $\mathrm{Aut}(R)$.

To count cubic fields, we count their maximal orders. A cubic ring is the maximal order in a cubic field if and only if it is:

- **nondegenerate**: its discriminant is not zero.
- **an integral domain**, true if and only if f is irreducible.
- **maximal**.

Our counting methods will naturally exclude the degenerate rings, so we can ignore those. We will end up counting all of the maximal rings, including the reducible ones, but the reducible rings correspond to quadratic fields and so are easily counted.

The maximality condition is the most subtle. It turns out that maximality can be checked locally: a cubic ring R is maximal over $\mathbb{Z}$ if and only if $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ is maximal over $\mathbb{Z}_p$ for all primes p. We call the latter condition *maximality at* p, and the **Davenport–Heilbronn maximality condition** translates it into the language of binary cubic forms:

Proposition 2.2 ([DH71])**.** Under the Levi–Delone–Faddeev correspondence, a cubic ring R is maximal at p if and only if any corresponding cubic form f belongs to the set $U_p \subseteq V(\mathbb{Z})$ for all p, defined by the following conditions:

- the cubic form f is not a multiple of p; and
- there is no $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-transformation of $f(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3$ such that a is a multiple of p^2 and b is a multiple of p.

See, e.g. [BST13] for a complete proof. To give the idea of a proof, consider the Delone-Faddeev correspondence over $\mathbb{Q}$ rather than over $\mathbb{Z}$. The form f will be nonmaximal at p if and only if there is some other integral binary cubic form f', $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-inequivalent but $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$-equivalent to f, and with $\mathrm{Disc}(f') = p^{-k}\mathrm{Disc}(f)$ for some positive integer k. For example, f' can be chosen to be the maximal order in the cubic field (or algebra) corresponding to the order corresponding to f.

We can now easily see half of the if and only if: that if f is any form satisfying the negation of the Davenport-Heilbronn conditions, there exists such a f'. In the first case, $f = pf'$ for some g, and since scalar matrices act by the same scalars, there is our f'.

In the second case, note that

$$\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot f(u,v) = pf(u/p, v).$$

Then, after suitable $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-transformation, our condition guarantees precisely that $pf(u/p,v)$ has integral coefficients. (And that it has last coefficient divisible by p, but we will not need this.)

We now give a *very brief* introduction to Shintani's zeta function theory [Shi72]. Define the *Shintani zeta functions*

$$\xi^{\pm}(s) = \sum_n a^{\pm}(n) n^{-s} := \sum_{\substack{x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \backslash V(\mathbb{Z}) \\ \pm \mathrm{Disc}(x) > 0}} \frac{1}{|\mathrm{Stab}(x)|} |\mathrm{Disc}(x)|^{-s}, \tag{2.4}$$

and note that by the Delone-Faddeev correspondence we have

$$\xi^{\pm}(s) = \sum_{\pm \mathrm{Disc}(R) > 0} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(R)|} |\mathrm{Disc}(R)|^{-s}, \tag{2.5}$$

where the sum is over cubic rings.

Shintani's work establishes that these are 'nice zeta functions', enjoying analytic continuation to $\mathbb{C}$ apart from simple poles at $s = 1$ and $s = 5/6$ (whose residues Shintani computed), and satisfying a functional equation. By Landau's method, which we will discuss shortly, it is known how to compute the partial sums

$$\sum_{0 < \pm \mathrm{Disc}(R) < X} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(R)|}. \tag{2.6}$$

Moreover, the factor of $\frac{1}{|\operatorname{Aut}(R)|}$ is well understood (see Proposition 5.1), and can be removed without too much effort.

If our goal is to count cubic *fields*, we must handle the three conditions described previously: nondegeneracy, irreducibility, and maximality.

Nondegeneracy is automatic, as rings with discriminant zero are excluded from the zeta function. Irreducibility will be handled at the end: ignoring this condition, our cubic field count will also include a count of algebras of the form $K \times \mathbb{Q}$, where K is quadratic with $|\operatorname{Disc}(K)| < X$ – and these algebras are easily counted, so their counting function can be subtracted.

The nonmaximality condition is the serious one. Although we cannot adapt our zeta function to count only maximal rings, we may handle finitely many of the maximality conditions at once, and then run a sieve. By work of F. Sato [Sat89] and Datskovsky-Wright [Wri85, DW86], Shintani's zeta function may be extended to define

$$\xi^{\pm}(s, \Phi_m) = \sum_n a^{\pm}(\Phi_m, n) n^{-s} := \sum_{\substack{x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \backslash V(\mathbb{Z}) \\ \pm \operatorname{Disc}(x) > 0}} \frac{1}{|\operatorname{Stab}(x)|} \Phi_m(x) |\operatorname{Disc}(x)|^{-s}, \tag{2.7}$$

where Φ_m is any $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$-invariant function, lifted to a function on $V(\mathbb{Z})$, which we think of as describing some 'local condition' $\pmod m$. In particular, we will be interested in the case where m is the square of a product of distinct primes, and Φ_m is the function $\pmod m$ which, by Proposition 2.2, detects nonmaximality at *each* prime divisor of m.

3 Landau's method

Landau's method belongs with the following simple observation, known as **Perron's formula**:

Proposition 3.1. Let $c > 0$ be a real number. We have

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 1, \\ 0, & \text{if } 0 < x < 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

The integral is $\frac{1}{2}$ if $x = 1$, but we can avoid caring about this. The proof is a straightforward exercise in complex analysis. Roughly: if $x > 1$, shift the contour all the way to the right, and the integrand decays exponentially as one does this; if $x < 1$, shift the contour all the way to the left, this time picking up the residue from a pole at $s = 0$.

We quickly obtain the following:

Proposition 3.2. Let $L(s) := \sum_{n \geq 1} a(n)n^{-s}$ be a Dirichlet series. Then, we have

$$\sum_{n<X} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(s) X^s \frac{ds}{s}, \tag{3.2}$$

valid for any c for which the Dirichlet series defining $L(s)$ converges absolutely.

To prove this, replace $L(s)$ by its definition, switch the order of summation and integration, and use the previous proposition. (One must worry about convergence, but there are no problems here. We assume that X is not an integer to avoid an additional $\frac{1}{2}a(X)$ term on the left.)

How might one use this? For example, let $d(n)$ denote the *divisor function* of n, counting the number of positive prime divisors. Then it is easily proved that

$$\sum_n d(n) n^{-s} = \zeta(s)^2,$$

and hence it follows that

$$\sum_{n<X} d(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta(s)^2 X^s \frac{ds}{s}. \tag{3.3}$$

To bound this, we work *formally* and leave any convergence questions for later. Shift the contour to the line $\Re(s) = \frac{1}{2}$, passing a double pole at $s = 1$, and computing the residue we conclude that

$$\sum_{n<X} a(n) = X \log X + (2\gamma - 1)X + E(X), \tag{3.4}$$

for an error term E satisfying

$$|E(X)| \leq X^{1/2} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} |\zeta(s)|^2 \left| \frac{ds}{s} \right|. \tag{3.5}$$

Since the integrand is independent of X, as long as it is absolutely convergent we have $E(X) \ll X^{1/2}$.

We notice two things about this computation:

(1) This relies on analytic continuation of $\zeta(s)$ to $\Re(s) = 1/2$, where it is not defined by its Dirichlet series. At the heart of the usual proof of analytic continuation is an application of Poisson summation.
(2) Unfortunately, the convergence issues are serious here. The integral in (3.5) does *not* converge, and the above cannot be rigorously justified. So, one must refine the method so as to allow a rigorous proof.

Before describing Landau's method, which gives a way of handling the convergence issues, we present a sample result. The following variation is due to Lowry-Duda, Taniguchi, and the author [LDTT22]:

Theorem 3.3. Let $\phi(s) = \sum_n a(n)\lambda_n^{-s}$ be a zeta function with nonnegative coefficients, absolutely convergent for $\Re(s) > 1$, enjoying an analytic continuation to $\mathbb{C}$ which is holomorphic away from a simple pole at $s = 1$, and with a 'well behaved' functional equation of degree d relating $\phi(s)$ to $\widehat{\phi}(1-s)$ for a 'dual zeta function' $\widehat{\phi}(s) = \sum_n b(n)\mu_n^{-s}$.

Then, for $X \geq 2$ we have

$$\sum_{\lambda_n < X} a(n) = \mathrm{Res}_{s=1}\big(\phi(s)\big)X + O\Big(X^{\frac{d-1}{d+1}}\delta_1^{\frac{d-1}{d+1}}\widehat{\delta_1}^{\frac{2}{d+1}} + \widehat{\delta_1}\log(X)\Big), \tag{3.6}$$

provided that the error term is bounded by the main term, and where

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \mathrm{Res}_{s=1}\big(\phi(s)\big), \\ \widehat{\delta_1} &= \sup_Z \frac{1}{Z}\sum_{\mu_n < Z} |b(n)|. \end{aligned}$$

The implied constant depends on the functional equation, but does not depend further on $\phi(s)$ or the $a(n)$.

The statement generalizes further, for example to allow a double pole as in $\zeta(s)^2$ and (3.5). Unfortunately the most general version of this result, although not so complicated theoretically, is rather complicated to state.

Note that the error term may be written simply as $O(X^{\frac{d-1}{d+1}})$, where the implied constant depends on ϕ. In typical examples, ϕ is fixed and X is allowed to increase, and the precise ϕ-dependence is not of much interest. In this case, our work reduces to results obtained by Landau [Lan12, Lan15] and Chandrasekharan and Narasimhan [CN62]. The novelty of [LDTT22] was to carefully track the ϕ-dependence.

We will apply this to the Shintani zeta functions of the form defined in (2.7), and the uniformity will allow us to track the dependence on Φ_m. From the standpoint of Landau's method, the zeta function dual to $\xi^{\pm}(s, \Phi_m)$ is $m^{4s}\xi^{\pm}(s, \widehat{\Phi_m})$, where we define $\widehat{\Phi_m} : V^*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ by the usual Fourier transform formula

$$\widehat{\Phi_m}(x) := \frac{1}{m^4} \sum_{y \in V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})} \Phi_m(y) \exp\left(2\pi i \cdot \frac{[x, y]}{m}\right), \tag{3.7}$$

and lift $\widehat{\Phi_m}$ to a function on $V^*(\mathbb{Z})$, which we identify with $V(\mathbb{Z})$. (There are some mild technicalities in this identification, which we sweep under the rug.)

Note the factor of m^{4s}! This comes from the functional equation, but if we include it in the definition of the zeta function – as we will do here – then the functional equation will be the same for all Φ_m simultaneously, so that we can use our 'Uniform Landau' Theorem 3.3. We obtain the following:

Theorem 3.4. As described above, given a zeta function pair

$$\xi^{\pm}(s, \Phi_m) := \sum_n a^{\pm}(\Phi_m, n) n^{-s}, \quad \xi^{\pm}(s, \widehat{\Phi_m}) := \sum_n a^{\pm}(\widehat{\Phi_m}, n) n^{-s}.$$

Let

$$\delta_1 = \delta_1(\Phi_m) := \mathrm{Res}_{s=1} \xi^{\pm}(s, \Phi_m) \tag{3.8}$$

and

$$\widehat{\delta_1} = \widehat{\delta_1}(\Phi_m) := m^4 \cdot \sup_N \frac{1}{N} \sum_{\alpha \in \{\pm\}} \sum_{n < N} a^{\alpha}(|\widehat{\Phi_m}|, n), \tag{3.9}$$

Assuming two technical conditions which we omit here, we have

$$\begin{aligned} N^{\pm}(X, \Phi_m) &:= \sum_{n < X} a^{\pm}(\Phi_m, n) \\ &= \sum_{\sigma \in \{1, \frac{5}{6}\}} \frac{X^{\sigma}}{\sigma} \cdot \mathrm{Res}_{s=\sigma} \xi^{\pm}(s, \Phi_m) + O\left(X^{3/5} \delta_1^{3/5} (\widehat{\delta_1})^{2/5}\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

We will end up summing the error term over many different Φ_m. In practice we will have something like $\delta_1(\Phi_m) \ll \frac{1}{m}$ for many Φ_m of interest – and naturally we are happy to see negative exponents of m in the error term! What is clear from this formula is that we want to bound $\widehat{\delta_1}$ – and hence $\widehat{\Phi_m}$ – as much as we can.

Idea of the proof of uniform Landau. To even give a reasonable sketch of the proof would take us too far afield, but we will at least give the idea. As explained above, we have

$$\sum_{n<X} a^{\pm}(\Phi_m, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \xi^{\pm}(s, \Phi_m) X^s \frac{ds}{s}$$

and morally the idea is to shift the contour to the left of the critical strip, picking up polar contributions at $s = 1$ and $s = 5/6$, and using the functional equation of the zeta function to estimate and bound the resulting integral.

Unfortunately, the zeta function *grows* along vertical lines to the left of the critical strip. This also implies that known bounds grow *within* the critical strip.

To remedy the convergence issues, we consider the following variation of Perron's formula, based on *Riesz means*, which holds for each positive integer k:

$$\begin{aligned} N(X, \Phi_m, k) &:= \frac{1}{k!} \sum_{n<X} a(\Phi_m, n) \Big(1 - \frac{n}{X}\Big)^k \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \xi(s, \Phi_m) \frac{X^s}{s(s+1)\cdots(s+k)} ds. \end{aligned} \tag{3.11}$$

As the growth of ξ is *polynomial* along vertical lines, by taking k large enough we obtain convergence of the integral if we shift the line to $\Re(s) = c$, for $c \in [0, 1]$, or for c slightly smaller than 0. The above strategy then works as it was earlier described.

We could simply declare victory for a variant of our cubic field counting problem, where we count each field with $|\mathrm{Disc}(K)| < X$ with weight $(1 - |\mathrm{Disc}(K)|/X)^k$. This is an example of a general principle in number theory, that incorporating smooth weights often leads to simpler analysis and/or better error terms. (At heart, the general principle comes from Fourier analysis: the smoother the function, the more rapidly its Fourier transform decays.) See Shankar, Södergren, and Templier [SST23] for an example where the authors 'declare victory' with a different smoothing function, and then obtain striking results on the central values of the associated Dedekind zeta functions.

Instead, we recover the unsmoothed estimate, up to an error term. Define the kth finite difference operator Δ_y^k by

$$\Delta_y^k F(X) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} F(X+\nu y), \tag{3.12}$$

and then in (3.11) we have

$$N(X, \Phi_m) = y^{-k} \Delta_y^k \big(X^k N(X, \Phi_m, k)\big) + O\Big(\sum_{X \le n \le X+ky} |a(\Phi_m, n)| \Big). \tag{3.13}$$

Provided that one can also analyze the finite differences of the shifted integral in (3.11), we are able to obtain the theorem.

4 Equidistribution and exponential sums

Recall from (3.10) that we can obtain good error terms by bounding the partial sums of $|\widehat{\Phi_m}(x)|$ where by (3.7) we defined

$$\widehat{\Phi_m}(x) := \frac{1}{m^4} \sum_{y \in V(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})} \Phi_m(y) \exp\left(2\pi i \cdot \frac{[x,y]}{m}\right). \tag{4.1}$$

It turned out that Taniguchi and I got very lucky, in that when $\Phi_m = \Psi_{p^2}$ is the characteristic function of those binary cubic forms which are nonmaximal at p, we obtained the following explicit formula in [TT13a]:

Theorem 4.1. The Fourier transform of Ψ_{p^2} is given as follows:

(1) Let $b \in pV(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$. We write $b = pb'$ and regard b' as an element of $V(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Then

$$\widehat{\Psi_{p^2}}(pb') = \begin{cases} p^{-2} + p^{-3} - p^{-5} & b' : \text{ of type } (0), \\ p^{-3} - p^{-5} & b' : \text{ of type } (1^3), (1^2 1), \\ -p^{-5} & b' : \text{ of type } (111), (21), (3). \end{cases}$$

(2) For $b \in V(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \setminus pV(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$,

$$\widehat{\Psi_{p^2}}(b) = \begin{cases} p^{-3} - p^{-5} & b: \text{ of type } (1^3_{**}), \\ -p^{-5} & b: \text{ of type } (1^3_{*}),\ (1^3_{\max}), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We omit the precise definitions of notation such as (1^3_{**}). What is most important is that the 'otherwise' case is by far the most common, so that we have

$$|\widehat{\Psi_{p^2}}(b)| \approx p^{-7} \tag{4.2}$$

on average. As the error term (3.10) contains sums of $|\widehat{\Psi_{m^2}}(b)|$ over many different b, the power savings here is very visible in our final error terms!

Taniguchi and I developed two methods for proving formulas such as the one above. Our work in [TT13a] was based on work of Mori [Mor10]; see also Hough [Hou20] for a formidable computation of this type. In [TT20], we developed a simpler method which works in many cases.

To give the reader some idea of how such formulas may be proved, we will give a complete proof of a simpler formula, using the method in [TT20].

Proposition 4.2. Let $w_p : V(\mathbb{F}_p) \to \mathbb{C}$ be the counting function of the number of roots of $v \in V(\mathbb{F}_p)$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$. Then, assuming that $p \neq 3$ we have

$$\widehat{w_p}(v) = \begin{cases} 1 + p^{-1} & v = 0, \\ p^{-1} & v \neq 0 \text{ and } v \text{ has a triple root in } \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.3}$$

It turns out that this formula is itself of significant interest! But for now we notice the parallel structure: better than square root cancellation in average, with the largest values confined to the most singular orbits.

Here is the proof. First we note that there is a **bilinear form** defined on V, by

$$[x, x'] := aa' + bb'/3 + cc'/3 + dd', \tag{4.4}$$

which satisfies $[gx, g^{-T}x'] = [x, x']$ identically, as can be checked by hand or by more highbrow methods. This formula is formally true over $\mathbb{Z}$ or over $\mathbb{F}_p$ ($p \neq 3$), and we already used it implicitly to identify $V^*(\mathbb{Z})$ with (a sublattice of) $V(\mathbb{Z})$.

Now write $\langle n\rangle := \exp(2\pi i n/p)$, and write Φ_p for the characteristic function of the orbit (1^3): those nonzero elements of $V(\mathbb{F}_p)$ which have a triple root. By Fourier inversion, it suffices to compute the Fourier transform of the right side of (4.3), and thus to compute $\widehat{\Phi_p}$.

Using the facts that (1^3) is a single $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-orbit, and that our bilinear form is $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$-invariant, we compute that

$$\begin{aligned} p^4\widehat{\Phi_p}(y) &= \frac{1}{p^2-p}\sum_{g\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)}\sum_{t\in\mathbb{F}_p^\times}\langle [g\cdot(t,0,0,0),y]\rangle \\ &= \frac{1}{p^2-p}\sum_{g\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)}\sum_{t\in\mathbb{F}_p^\times}\langle [(t,0,0,0),g^Ty]\rangle \end{aligned}$$

The inner sum is equal to $p-1$ if $[1:0]\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ is a root of g^Ty, and -1 if it is not. Equivalently, the inner sum is equal to $p-1$ if g^Ty is in the subspace $(0,*,*,*)$ defined by $a=0$, and -1 if it is not.

For each root α of y, counted with multiplicity, $[1:0]$ will be a root of g^Ty for $\frac{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)|}{p+1}=p^2-p$ elements $g\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, so that

$$p^4\widehat{\Phi_p}(y) = \frac{1}{p^2-p}\cdot(p^2-p)\cdot\Big(pw_p(x)-(p+1)\Big).$$

Proposition 4.2 now follows easily.

We can isolate the following principle from the proof. Let $W=(*,0,0,0)$ be the subspace of binary cubic forms which are multiples of u^3; this consists of the zero form and forms in (1^3). We then have $W^\perp=(0,*,*,*)$, and all forms in this subspace have a root. Translating each of these subspaces around by all of SL_2 or GL_2, we obtain 'dual' functions which depend only on the GL_2-orbits of y, and whose Fourier transforms are related by the above formula.

Generalizing this recipe, and following [TT20], suppose we have:

- A prehomogeneous vector space (G,V);
- A finite number of orbits, which we list as $\mathcal{O}_1,\dots\mathcal{O}_r$. We write $|\mathcal{O}_i|$ for their cardinalities and e_i for their characteristic functions.
- A bilinear form $[-.-]$ satisfying an analogue of the G-invariance property described above.

Then for any subspace W of V, we have

$$\sum_{1\le i\le r} \frac{|\mathcal{O}_i \cap W|}{|\mathcal{O}_i|} \cdot \widehat{e_i} = \frac{|W|}{|V|} \sum_{1\le i\le r} \frac{|\mathcal{O}_i \cap W^{\perp}|}{|\mathcal{O}_i|} \cdot e_i. \tag{4.5}$$

Then, both sides are functions of the G-*orbits* on V. If we choose enough different W, so that the functions on the left span the r-dimensional vector space of functions of the G-orbits of V, then we obtain all the $\widehat{e_i}$ – and hence an explicit formula for the Fourier transform of any G-invariant function.

5 Putting it all together

We now see how to put all of these ingredients together. For convenience, we will track the error terms a bit less carefully than in (1.2), and obtain an error term of $O(X^{2/3+\epsilon})$.

Let, for each squarefree q, $\Psi_{q^2} : V(\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ denote the characteristic function of those binary cubic forms which are nonmaximal at every prime dividing q. The Levi–Delone–Faddeev correspondence, the Davenport–Heilbronn correspondence, and inclusion-exclusion give

$$N^{\pm}_{\le 3}(X) = \sum_q \mu(q) N^{\pm}(X, \Psi_{q^2}), \tag{5.1}$$

where:

- As above,

$$\begin{aligned} N^{\pm}(X, \Psi_{q^2}) &:= \sum_{n<X} a^{\pm}(\Psi_{q^2}, n), \\ \xi^{\pm}(s, \Psi_{q^2}) &= \sum_{n} a^{\pm}(\Psi_{q^2}, n) n^{-s} \\ &:= \sum_{\substack{x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\backslash V(\mathbb{Z}) \\ \pm\mathrm{Disc}(x)>0}} \frac{1}{|\mathrm{Stab}(x)|} \Psi_{q^2}(x) |\mathrm{Disc}(x)|^{-s}. \end{aligned}$$

  Equivalently, $N^{\pm}(X, \Psi_{q^2})$ is the number of binary cubic forms x, weighted by $|\mathrm{Stab}(x)|^{-1}$, with $0 < \pm\mathrm{Disc}(x) < X$, which are nonmaximal at q;

- $N^{\pm}_{\leq 3}(X)$ is the number of maximal cubic rings R with $0 < \pm\mathrm{Disc}(R) < X$, each weighted by $|\,\mathrm{Aut}(R)|^{-1}$. These are in bijection with the following sets: cubic fields K; algebras $L \times \mathbb{Q}$ where L is a quadratic field; and $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

The factor of $|\,\mathrm{Aut}(R)|$ is a little bit annoying, but not actually difficult to deal with:

Proposition 5.1. Let R be the maximal order in K, $L \times \mathbb{Q}$, or $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ as above. Then:

- If K is an S_3-cubic field, then $|\,\mathrm{Aut}(R)| = |\,\mathrm{Aut}(K)| = 1$.
- If K is an cyclic cubic field, then $|\,\mathrm{Aut}(R)| = |\,\mathrm{Aut}(K)| = 3$.
- If R is a maximal order in $L \times \mathbb{Q}$ with L quadratic, then $|\,\mathrm{Aut}(R)| = |\,\mathrm{Aut}(L \times \mathbb{Q})| = |\,\mathrm{Aut}(L)| = 2$.
- If R is the maximal order in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, then $|\,\mathrm{Aut}(R)| = 6$. (There is a unique such example – so the contribution to the asymptotics is negligible.)

As there are only $O(X^{1/2})$ cyclic cubic fields K with $|\mathrm{Disc}(K)| < X$, we thus have

$$N^{\pm}_3(X) = N^{\pm}_{\leq 3}(X) - \frac{1}{2}N^{\pm}_2(X) + O(X^{1/2}) \tag{5.2}$$

where $N^{\pm}_3(X)$ and $N^{\pm}_2(X)$ count the number of cubic and quadratic fields, respectively, counted without weighting, with discriminant bounded by X.

We now split the sum into two parts in accordance with whether $q \leq Q$ or $q > Q$, and apply Landau's method (Theorem 3.4) for the former. We obtain

$$\begin{aligned} N^{\pm}_{\leq 3}(X, \Sigma) &= \sum_{q \leq Q} \mu(q) N^{\pm}(X, \Psi_{q^2}) + \sum_{q > Q} \mu(q) N^{\pm}(X, \Psi_{q^2}) \\ &= \sum_{\sigma \in \{1, \frac{5}{6}\}} \frac{X^{\sigma}}{\sigma} \sum_{q \leq Q} \mu(q) \cdot \mathrm{Res}_{s=\sigma} \xi^{\pm}(s, \Psi_{q^2}) + O\left(E_2 + E_3\right), \\ &= \sum_{\sigma \in \{1, \frac{5}{6}\}} \frac{X^{\sigma}}{\sigma} \sum_{q=1}^{\infty} \mu(q) \cdot \mathrm{Res}_{s=\sigma} \xi^{\pm}(s, \Psi_{q^2}) + O\left(E_1 + E_2 + E_3\right), \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} E_1 :=& \sum_{\sigma \in \{1, \frac{5}{6}\}} X^\sigma \sum_{q > Q} \left| \mathrm{Res}_{s=\sigma} \xi^\pm(s, \Psi_{q^2}) \right|, \\ E_2 :=& X^{\frac{3}{5}} \sum_{q \le Q} \mathrm{Res}_{s=1} \xi^\pm(s, \Psi_{q^2})^{\frac{3}{5}} \widehat{\delta}_1(\Psi_{q^2})^{\frac{2}{5}}, \\ E_3 :=& \sum_{q > Q} N^\pm(X, \Psi_{q^2}). \end{aligned}$$

We handle the residues first; we have

$$\mathrm{Res}_{s=1} \xi^\pm(s, \Psi_{q^2}) = \alpha^\pm \prod_{p|q} (p^{-2} + p^{-3} - p^{-5}) + \beta \prod_{p|q} (2p^{-2} - p^{-4}), \tag{5.3}$$

where

$$\alpha^+ = \frac{\pi^2}{72}, \quad \alpha^- = \frac{\pi^2}{24}, \quad \beta = \frac{\pi^2}{24}, \tag{5.4}$$

and the residues at $s = 5/6$ are smaller. Roughly, if not *quite* technically, we have $\mathrm{Res}_{s=1} \xi^\pm(s, \Psi_q) \asymp \frac{1}{q^2}$. We obtain

$$E_1 \ll \sum_{q > Q} \frac{X}{q^{2-\epsilon}} \ll \frac{X}{Q^{1-\epsilon}}.$$

For E_3, we have a *tail estimate*

$$N^\pm(X, \Psi_{q^2}) \ll X / q^{2-\epsilon}, \tag{5.5}$$

and hence we get

$$E_3 \ll \sum_{q > Q} \frac{X}{q^2} \ll \frac{X}{Q^{1-\epsilon}}.$$

The existence of the tail estimate (5.5) is probably the most unique feature of this problem; in analogous situations, very often tail estimates are expected but cannot be proved.

The proof of (5.5) is algebraic rather than analytic, and it is not difficult to prove. One must understand, for each maximal cubic ring R, how many nonmaximal cubic rings it can contain with index q. See, for example, Proposition 29 of [BST13] for an elementary upper bound, which is stated for q prime but which readily generalizes to q squarefree. More precise equalities can also be obtained: see Proposition 33 of [BST13] or Section 2 of [DW88].

The trickiest part of the argument – at least that was not known prior to [TT13b], is to verify that $\widehat{\delta_1}(\Psi_{q^2}) \ll q^{1+\epsilon}$. We will not try to explain the messy details here, but the heart of the argument is that

$$\widehat{\delta_1}(\Psi_{q^2}) \ll q^{8-7+\epsilon}, \tag{5.6}$$

where this -7 is the same -7 as in (4.2). Roughly speaking, heuristically speaking one expects that the -7 of (4.2) *should* lead to a -7 in (5.6), and some of the more technical parts of [BTT] are dedicated to demonstrating that the details can be made to work.[*2]

Given that, we see that

$$E_2 \ll X^{\frac{3}{5}} \sum_{q \leq Q} q^{-6/5+\epsilon} \cdot q^{2/5+\epsilon} \ll X^{\frac{3}{5}} Q^{1/5+\epsilon},$$

and so we obtain a final error term of

$$E_1 + E_2 + E_3 \ll X^{\epsilon} \Big(\frac{X}{Q} + X^{\frac{3}{5}} Q^{1/5} + \frac{X}{Q} \Big).$$

We optimize by taking $Q = X^{1/3}$ and getting an error term of $O(X^{2/3+\epsilon})$.

Further reading

Within this volume, we recommend three other contributions on closely related topics: M. Suzuki's discussion [鈴木美] of Hough's work [Hou19] on the shape of cubic fields; Y. Suzuki's work [鈴木雄] describing Bhargava's averaging method, proving similar results without the use of zeta functions; and Yamamoto's note [山本] describing O'Dorney's work [O'D] on 'algebraic functional equations', which we describe a bit more below.

Some additional references (a far from exhaustive list!) are:

- For the proof of Theorem 1.1, along the lines presented here, see Bhargava, Taniguchi, and the author's work [BTT]. This paper also presents a version

[*2] See [TT13b, Theorem 3.1] for a direct proof of (5.6). In [BTT], (5.6) is proved on average over q, in conjunction with a variant of Landau's method that permits this. This allowed us to simultaneously obtain an analogue to (1.2) for 3-torsion in quadratic fields, where the analogue of (5.6) can't be proved directly but can be proved on average.

of Theorem 1.1 with 'local conditions' – for example, if one wants to count cubic fields where 5 is ramified and 7 is inert.

This 'local conditions' version has various applications to other arithmetic statistics problems; see [BTT] for a summary and further references.

- Taniguchi and the author's previous work [TT13b] also proves a variation, counting cubic fields in arithmetic progressions. Here we were able to demonstrate unexpected biases. For example, in the functions counting cubic fields K with $\mathrm{Disc}(K) \equiv a \pmod 7$, the secondary term is different for every a!
- For an alternative treatment of Theorem 1.1 with a somewhat larger error term, see Bhargava, Shankar, and Tsimerman [BST13]. Their approach avoids the zeta function theory, instead applying Bhargava's averaging method, and is much more self-contained. We also recommend [BST13] for a particularly readable treatment of the Delone-Faddeev and Davenport-Heilbronn correspondences.

  Their methods generalize widely; see, for example, Bhargava and Shankar [BS15] for one of many examples of spectacular results that can be thus obtained.
- Yet another alternative treatment involves *smoothing* the sums; see Shankar, Södergren, and Templier [SST23] for such a variation of Theorem 1.1.
- Analogues of these questions are also interesting in the function field setting, where some algebro-geometric considerations 'explain' the secondary term. See Zhao [Zha13].
- For background on Shintani zeta functions, we recommend Shintani's original paper [Shi72]. For a more comprehensive overview to prehomogeneous vector spaces and their zeta functions, see Kimura's book: [木村 98] in Japanese, or [Kim03] in English translation. See also Sato-Shintani [SS74] for the landmark paper on which much of Kimura's book is based, and Yukie's book [Yuk93] for a research monograph on this more general family of Shintani zeta functions, most notably treating the 'quartic case' of pairs of ternary quadratic forms.

- Finally, the Shintani zeta functions satisfy a stunning – and to the author, totally surprising – "algebraic functional equation", proved via class field theory instead of complex and Fourier analysis. This was conjectured by Ohno [Ohn97] and proved by Nakagawa [Nak98]; see Gao [Gao18] and O'Dorney [O'D17] for further proofs. See also [O'D] for further results by O'Dorney in this vein, or Yamamoto [?] for an overview of O'Dorney's work.

Acknowledgments

The author thanks Takashi Taniguchi for helpful comments, for the invitation to participate in the Summer School, and also for the invitation to visit him in Japan, to participate in person in a preliminary summer school earlier in the year.

The author is partially supported by the National Science Foundation under Grant No. DMS-2101874.

参考文献

[BBP10] Karim Belabas, Manjul Bhargava, and Carl Pomerance. Error estimates for the Davenport-Heilbronn theorems. *Duke Math. J.*, 153(1):173–210, 2010.

[Bel99] Karim Belabas. On the mean 3-rank of quadratic fields. *Compositio Math.*, 118(1):1–9, 1999.

[BS15] Manjul Bhargava and Arul Shankar. Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves. *Ann. of Math. (2)*, 181(1):191–242, 2015.

[BST13] Manjul Bhargava, Arul Shankar, and Jacob Tsimerman. On the Davenport-Heilbronn theorems and second order terms. *Invent. Math.*, 193(2):439–499, 2013.

[BTT] Manjul Bhargava, Takashi Taniguchi, and Frank Thorne. Improved error estimates for the Davenport-Heilbronn theorems. *Math. Ann.*

To appear.

[CN62] K. Chandrasekharan and Raghavan Narasimhan. Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions. *Ann. of Math. (2)*, 76:93–136, 1962.

[DF64] B. N. Delone and D. K. Faddeev. *The theory of irrationalities of the third degree.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 10. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[DH71] H. Davenport and H. Heilbronn. On the density of discriminants of cubic fields. II. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 322(1551):405–420, 1971.

[DW86] Boris Datskovsky and David J. Wright. The adelic zeta function associated to the space of binary cubic forms. II. Local theory. *J. Reine Angew. Math.*, 367:27–75, 1986.

[DW88] Boris Datskovsky and David J. Wright. Density of discriminants of cubic extensions. *J. Reine Angew. Math.*, 386:116–138, 1988.

[Gao18] Xia Gao. On the Ohno-Nakagawa theorem. *J. Number Theory*, 189:186–210, 2018.

[GGS02] Wee Teck Gan, Benedict Gross, and Gordan Savin. Fourier coefficients of modular forms on G_2. *Duke Math. J.*, 115(1):105–169, 2002.

[Hou19] Robert Hough. The shape of cubic fields. *Res. Math. Sci.*, 6(3):Paper No. 25,, 2019.

[Hou20] Robert D. Hough. The local zeta function in enumerating quartic fields. *J. Number Theory*, 210:1–131, 2020.

[Kim03] Tatsuo Kimura. *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, volume 215 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. Translated from the 1998 Japanese original by Makoto Nagura and Tsuyoshi Niitani and revised by the author.

[Lan12] Edmund Landau. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. *Nachrichten von der Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pages 687–770, 1912.

[Lan15] Edmund Landau. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. Zweite abhandlung. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pages 209–243, 1915.

[LDTT22] David Lowry-Duda, Takashi Taniguchi, and Frank Thorne. Uniform bounds for lattice point counting and partial sums of zeta functions. *Math. Z.*, 300(3):2571–2590, 2022.

[Lev14] F. Levi. Kubische Zahlkörper und binäre kubische Formenklassen. *Leipz. Ber.*, 66:26–37, 1914.

[Mor10] Shingo Mori. Orbital Gauss sums associated with the space of binary cubic forms over a finite field. *RIMS Kôkyûroku*, 1715:32–36, 2010.

[Nak98] Jin Nakagawa. On the relations among the class numbers of binary cubic forms. *Invent. Math.*, 134(1):101–138, 1998.

[O'D] Evan O'Dorney. Reflection theorems for number rings generalizing the Ohno-Nakagawa identity. Preprint (2022), available at `https://arxiv.org/abs/2111.09784`.

[O'D17] Evan O'Dorney. On a remarkable identity in class numbers of cubic rings. *J. Number Theory*, 176:302–332, 2017.

[Ohn97] Yasuo Ohno. A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms. *Amer. J. Math.*, 119(5):1083–1094, 1997.

[Rob01] David P. Roberts. Density of cubic field discriminants. *Math. Comp.*, 70(236):1699–1705, 2001.

[Sat89] Fumihiro Satō. On functional equations of zeta distributions. In *Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties*, volume 15 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 465–508. Academic Press, Boston, MA, 1989.

[Shi72] Takuro Shintani. On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms. *J. Math. Soc. Japan*, 24:132–188, 1972.

[Shi75] Takuro Shintani. On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 22:25–65, 1975.

[SS74] Mikio Sato and Takuro Shintani. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. *Ann. of Math. (2)*, 100:131–170, 1974.

[SST23] Arul Shankar, Anders Södergren, and Nicolas Templier. Central values of zeta functions of non-Galois cubic fields, 2023.

[TT13a] Takashi Taniguchi and Frank Thorne. Orbital L-functions for the space of binary cubic forms. *Canad. J. Math.*, 65(6):1320–1383, 2013.

[TT13b] Takashi Taniguchi and Frank Thorne. Secondary terms in counting functions for cubic fields. *Duke Math. J.*, 162(13):2451–2508, 2013.

[TT20] Takashi Taniguchi and Frank Thorne. Orbital exponential sums for prehomogeneous vector spaces. *Amer. J. Math.*, 142(1):177–213, 2020.

[Wri85] David J. Wright. The adelic zeta function associated to the space of binary cubic forms. I. Global theory. *Math. Ann.*, 270(4):503–534, 1985.

[Yuk93] Akihiko Yukie. *Shintani zeta functions*, volume 183 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Zha13] Yongqiang Zhao. On sieve methods for varieties over finite fields. 2013. Thesis (Ph.D.)–University of Wisconsin-Madison.

[木村 98] 木村達雄. **概均質ベクトル空間**. 岩波書店, 1998.

[鈴木美] 鈴木美裕. 保型形式と概均質ゼータ関数. **本報告集**, 2023.

[鈴木雄] 鈴木雄太. 整数軌道の数え上げ：数の幾何と平均法. **本報告集**, 2023.

[山本] 山本修司. 大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性. **本報告集**, 2023.

整数軌道の数え上げ：数の幾何と平均法

鈴木雄太 （立教大学理学部数学科）

概要

種々の数論的対象と概均質ベクトル空間の整数軌道の間の対応を使えば, 整数軌道の数え上げによって, 数論的対象の統計を行える．本稿では, 数の幾何を用いて整数軌道を数え上げる方法を概説する．特に, 数え上げる範囲が非有界な場合には根本的な困難が生じるが, これを乗り越える Bhargava の平均法について解説する．

1　整数軌道の数え上げと数論的対象の統計

1.1　本稿の目的

概均質ベクトル空間の整数軌道と数論的対象の間の対応を用いることで, 数論的対象の統計を行うことができる．本稿では,「数の幾何」の技法を用いて数論的対象の統計を行う方法を解説する．この手法は, たとえば Davenport–Heilbronn [13] によって 3 次体の数え上げに用いられたが, Bhargava はその方法を大きく発展させることで, 4 次体と 5 次体を数え上げる次の定理を証明した：

定理 1.1（Bhargava [2, Theorem 1]） 実数 X と $i = 0, 1, 2$ に対して,

$$N_4^{(i)}(X) \coloneqq \#\{K : 4-2i \text{ 個実埋め込みを持つ } \mathfrak{S}_4\text{-}4 \text{ 次体} \mid |\mathrm{Disc}(K)| < X\}$$

とおくと,

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_4^{(i)}(X)}{X} = \frac{1}{2n_i} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4}\right)$$

が $n_0 \coloneqq 24$, $n_1 \coloneqq 4$, $n_2 \coloneqq 8$ とともに成立する．（ここで, $\mathfrak{S}_4$-4 次体とは K の Galois 閉包の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群が 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ になる 4 次の代数体 K のことを指した.）

定理 1.2（Bhargava [4, Theorem 1]） 実数 X と $i = 0, 1, 2$ に対して,

$$N_5^{(i)}(X) \coloneqq \#\{K : 5 - 2i \text{ 個実埋め込みを持つ 5 次体} \mid |\operatorname{Disc}(K)| < X\}$$

とおくと,

$$\lim_{X \to \infty} \frac{N_5^{(i)}(X)}{X} = \frac{1}{2n_i} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^5}\right)$$

が $n_0 \coloneqq 120$, $n_1 \coloneqq 12$, $n_2 \coloneqq 8$ とともに成立する.

上記の 2 つの定理は Bhargava の Fields 賞受賞業績の一部になっている.

このような統計を行う方法には, 本稿で解説する数の幾何によるアプローチのほか, 概均質ベクトル空間のゼータ関数を用いるアプローチがある. こちらについては本報告集の Frank Thorne 氏の記事 [24] を参照されたい.

また, 本稿に関連した文献として, 谷口隆氏の雑誌「数学セミナー」と「数学」の記事 [21, 22] を挙げておく. 雑誌「数学セミナー」の記事 [21] では, 数の幾何の解説から始め, 本稿で述べる手法の大きな流れが易しくかつわかりやすくまとめられている. 雑誌「数学」の記事 [22] はもう少し踏み込んだ解説である. また, どちらの記事も本稿で取り扱わなかった楕円曲線のセルマー群の統計を主題として整数軌道の数え上げについて解説している.

1.2 数え上げの舞台 — 少し一般的な設定

本稿では数え上げの手法を一般的な形で厳密に記述することは目標としないが, ある程度一般的な枠組みがわかるように, 次のような仮定を置いておく：

仮定 1.3 概均質ベクトル空間 (G, V) であって, 次を満たすものを考える：

(A1) G は簡約可能代数群.

(A2) 特異集合 S は, ある既約多項式 $\operatorname{Disc} \in \mathbb{Z}[V]$ で

$$S = \{x \in V \mid \operatorname{Disc}(x) = 0\}$$

と定義される既約超曲面である.

(A3) (G, V) は $\mathbb{Z}$ 上定義されている.

(A4) 任意の $x \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ に対して, 固定部分群

$$\operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x) \coloneqq \{g \in G_{\mathbb{R}} \mid gx = x\}$$

が有限群となる.

特異集合の定義方程式に現れる既約多項式を Disc と書いたのは, ここで考えるような応用では, この既約多項式が適切な「判別式」で与えられるためである.

この 仮定 1.3 の下, 次が成立することを思い出しておく：

命題 1.4　仮定 1.3 の下, 次が成り立つ：

(i) Disc は (G,V) の「基本」相対不変式である. つまり, (G,V) の任意の相対不変式は定数 c を用いて $c\,\mathrm{Disc}^m$ の形に書ける.
(ii) (G,V) は正則概均質ベクトル空間である.

証明 (i) については, (A2) と木村 [17, p. 38] の定理 2.9 を用いればよい. (ii) については, (A1) and (A2) とと木村 [17, p. 61] の定理 2.28 を用いればよい. □

命題 1.5　仮定 1.3 の下, $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}}^{(1)} \sqcup \cdots \sqcup V_{\mathbb{R}}^{(r)}$$

と有限個の $G_{\mathbb{R}}$ 軌道たち $V_{\mathbb{R}}^{(1)}, \ldots, V_{\mathbb{R}}^{(r)}$ へと分解する.（以後, この分解を用いる.）

証明 木村 [17, 系 4.4, p. 153] または谷口隆氏の記事 [23, 系 1.2] を参照. □

命題 1.6　仮定 1.3 の下, $n \coloneqq \dim V$ および $d \coloneqq \deg \mathrm{Disc}$ と書くと,

$$d\mu(x) \coloneqq |\,\mathrm{Disc}(x)|^{-\frac{n}{d}}\,dx$$

は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 上の $G_{\mathbb{R}}$ 不変な正則 Radon 測度である.（以後, この測度を用いる.）

証明 線形表現 (G,V) を $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ によって表すことにする. 要となるのは, (G,V) が正則概均質ベクトル空間なので, $\det \rho(g)^2$ に対応する相対不変式が "log Disc の Hessian" に相当するもので構成できるという事実（木村 [17, 系 2.17, p. 47]）である. 直接には, 命題 1.4 から (G,V) は正則概均質ベクトル空間なので, 木村 [17, p. 48] の命題 2.18 を用いることができ, Disc に対応する $G_{\mathbb{R}}$ の指標を χ と書けば, 任意の $g \in G_{\mathbb{R}}$ に対して,

$$|\,\mathrm{Disc}(gx)|^{-\frac{n}{d}}\,d(gx) = |\det \rho(g)||\chi(g)|^{-\frac{n}{d}}\,|\,\mathrm{Disc}(x)|^{-\frac{n}{d}}\,dx = |\,\mathrm{Disc}(x)|^{-\frac{n}{d}}\,dx$$

となることから主張が従う. □

命題 1.7 仮定 1.3 の下, $v^{(i)} \in V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ と Borel 可測関数 $\phi\colon V_{\mathbb{R}}^{(i)} \to \mathbb{C}$ に対して

$$\int_{x \in V_{\mathbb{R}}^{(i)}} \phi(x) d\mu(x) = \int_{g \in G_{\mathbb{R}}} \phi(gv^{(i)}) dg$$

が, $G_{\mathbb{R}}$ 上の適切に正規化された Haar 測度 dg に対して成立する.

証明 両辺はともに $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ 上の積分として, $G_{\mathbb{R}}$ 不変かつ, (A4) より $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ のコンパクトな部分集合の特性関数に対して有限であるから, 不変測度の一意性から従う. □

補足 1.8 実は, 楕円曲線の Selmer 群に関する統計 [5, 6, 7, 8] を行う場合には, 対応する代数群の表現の Zariski 稠密な単一 $G_{\mathbb{C}}$ 軌道が存在せず, $G_{\mathbb{C}}$ 軌道は楕円曲線を $y^2 = x^3 - \frac{I}{3}x - \frac{J}{27}$ と書いたときの不変量 I, J によってパラメトライズされる. したがって, この問題は概均質ベクトル空間の文脈で取り扱うことができない. この場合は, より一般に代数群の表現 (G, V) であって不変式環が多項式環と同型になるような**余正則空間**と呼ばれる数え上げの舞台を用意する必要がある. 余正則空間の場合でも議論の大枠は概均質ベクトル空間の場合とパラレルに進むが, 例えば, 積分公式を与える 命題 1.7 は

$$\int_{x \in V_{\mathbb{R}}} \phi(x) d\mu(x) = \int_{(I,J) \in R} \int_{g \in G_{\mathbb{R}}} \phi(g \cdot v^{(I,J)}) dg dI dJ$$

というような形のものを証明して用いることになる. ただしここで, R は不変量の組 (I, J) に対応する集合で, $v^{(I,J)}$ は不変量 I, J を持つような $V_{\mathbb{R}}$ の元である.

1.3 数え上げの舞台 — いくつかの具体例

前節のような状況の下の $V_{\mathbb{Z}}$ の $G_{\mathbb{Z}}$ 軌道と数論的対象の間の対応の例として, 本報告集の石塚裕大氏の記事 [16] で解説されたような, 代数体の整数環ないしはより一般に r 次環の数え上げに用いられる, 次のような対応を思い出す（[1, 3]）:

- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{Sym}^3 \mathbb{Z}^2)$ ：Levi–Delone–Faddeev 対応
  2 元 3 次形式の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 軌道と 3 次環の同型類の間の対応.
- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^3)$ ：Bhargava の高次合成則 III
  3 元 2 次形式の 2 つ組の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ 軌道と 4 次環 Q とその 3 次レゾルベント環 R の 2 つ組 (Q, R) の同型類の間の対応.

- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^4 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^5)$ ：Bhargava の高次合成則 IV
  5 元 2 次交代形式の 4 つ組の $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ 軌道と 5 次環 R とその 6 次レゾルベント環 S の 2 つ組 (R, S) の同型類の間の対応.

上の対応では, r 次環と $V_{\mathbb{Z}}$ の間で判別式が一致するというだけでなく,

- r 次環の整域性や $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群の様子は $V_{\mathbb{Z}}$ におけるある種の「既約性」へと
- r 次環の極大性や素数の分解の様子は $V_{\mathbb{Z}}$ における合同条件（の組）へと

翻訳できる.（これら $x \in V_{\mathbb{Z}}$ に関する性質は, もちろん $G_{\mathbb{Z}}$ 不変となる.）よって, 考えたい数論的対象に対応する $G_{\mathbb{Z}}$ 不変な集合 $S \subseteq V_{\mathbb{Z}}$ を取り, 個数関数

$$N(S; X) \coloneqq \sum_{\substack{G_{\mathbb{Z}}x \in G_{\mathbb{Z}} \backslash S \\ 0 < |\operatorname{Disc}(x)| < X}} 1 \tag{1.1}$$

を考察すれば, 数論的対象の $|\operatorname{Disc}(x)|$ を「高さ」とする数え上げができる. 本稿では数の幾何を用いてこの数え上げを行う方法を概観したい.

なお, 楕円曲線の Selmer 群の平均位数を計算する場合には

- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}), \operatorname{Sym}^4 \mathbb{Z}^2)$：
  2 元 4 次形式の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ 軌道と楕円曲線 E およびその 2-Selmer 群の元 η の組 (E, η) の同型類の間の対応.
- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Z}), \operatorname{Sym}^3 \mathbb{Z}^3)$：
  3 元 3 次形式の $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Z})$ 軌道と楕円曲線 E およびその 3-Selmer 群の元 η の組 (E, η) の同型類の間の対応.
- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2 \otimes \operatorname{Sym}^2 \mathbb{Z}^4)$：
  4 元 2 次形式の対の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ 軌道と楕円曲線 E およびその 4-Selmer 群の元 η の組 (E, η) の同型類の間の対応.
- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^5 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^5)$：
  5 元 2 次交代形式の 5 つ組の $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ 軌道と楕円曲線 E およびその 5-Selmer 群の元 η の組 (E, η) の同型類の間の対応.

といった対応（[5, 6, 7, 8]）を使うことになる. この対応については, 本報告集の佐野薫氏の記事 [20] に詳しい解説がある. また, 楕円曲線の Selmer 群の平均位数に対する本稿のような数え上げの手法の応用については, [22, 21] に簡単な解説がある.

1.4 $\mathfrak{S}_4$-4 次体の場合

上の設定を $\mathfrak{S}_4$-4 次体の場合にもう少しだけ詳しく見てみる．まず, $V_{\mathbb{Z}}$ は

$$2(A,B) = \left(\begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 2a_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & 2b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & 2b_{33} \end{bmatrix} \right) \quad \text{ただし } a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{Z}$$

というような整数係数 3 元 2 次形式の組 (A,B) がなす階数 12 の格子で与え, 代数群は $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SL}_3$ で与える．線形表現は

$$(g_2, g_3) \in \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{SL}_3 \quad \text{ただし} \quad g_2 = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

に対して

$$(g_2, g_3) \cdot (A,B) = (g_3(rA+sB)g_3^t, g_3(tA+uB)g_3^t)$$

で定める．このとき, $(A,B) \in V$ に対して

$$f(x,y) = f_{(A,B)}(x,y) := 4\det(Ax - By)$$

と定めると, これは明らかに SL_3 不変な 2 元 3 次形式を与える．また, $(A,B) \in V_{\mathbb{Z}}$ であれば, 係数 4 によって f は整数係数である．そこで, さらにこの 2 元 3 次形式の判別式を取り,

$$\mathrm{Disc}(A,B) := \mathrm{Disc}(4\det(Ax - By))$$

とすれば, この多項式は $(g_2, g_3) \in G$ に対して

$$\mathrm{Disc}((g_2, g_3) \cdot (A,B)) = \det(g_2)^6 \, \mathrm{Disc}(A,B)$$

と変換される整数係数を持つ相対不変式である．特に, Disc は既約な基本相対不変式であり, (G,V) の特異集合は $\mathrm{Disc}(A,B) = 0$ によって与えられる．（石塚裕大氏の記事 [15] で証明されている系 2.7 と定理 2.8 から従う．また, Bhargava [2, Section 2], 木村 [17, 例 2.8, p. 75–77] でも言及されている.）

Bhargava の高次合成則によれば, $\mathfrak{S}_4$-4 次体に対して, 次の対応がある：

定義 1.9（強既約） $(A,B) \in V_{\mathbb{Z}}$ が 2 条件

- A, B の定める $\mathbb{P}^2$ の 2 次曲線は $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ で共有点を持たない.

- 2 元 3 次形式 $f(x,y)=\det(Ax-By)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約.

を満たすとき, (A,B) は**強既約**であると言う.

定理 1.10（Bhargava の高次合成則 III [1], [2, p. 1037]）
次の全単射が存在する：

$$\begin{aligned}&\{(Q,R)/\cong \mid Q:4\text{ 次環},\ R:Q\text{ の }3\text{ 次レゾルベント環}\}\\ &\longleftrightarrow \quad G_{\mathbb{Z}}\backslash\{(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}\}.\end{aligned}$$

（ただし, 左辺の $(Q,R)/\cong$ は同型類を表す.）さらに, この全単射を通して

- 判別式の値が $\mathrm{Disc}(Q)=\mathrm{Disc}(R)=\mathrm{Disc}(A,B)$ と一致している.
- 強既約な (A,B) の $G_{\mathbb{Z}}$ 軌道と (Q,R) であって Q が A_4 ないしは $\mathfrak{S}_4$-4 次体の整環であるものの同型類が一対一に対応している.
- 素数 p に対して, $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ に対応する 4 次環 Q を考えたとき, $Q\otimes\mathbb{Z}_p$ が $\mathbb{Z}_p$ 上の極大な 4 次環である必要十分条件は, $(\mathrm{mod}\ p^2)$ の合同条件で与えられる. この合同条件を満たす $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ の集合を $\mathcal{U}_p\subseteq V_{\mathbb{Z}}$ と書こう. すると, 対応する 4 次環が極大である $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ の集合は $\bigcap_p \mathcal{U}_p$ で与えられる. また, 素数 p に対して, 合同条件を満たす $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ の割合は
$$\mu_p(\mathcal{U}_p)=\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^4}\right)$$
で与えられる. なお, 極大な 4 次環の 3 次レゾルベント環は一意的に定まる.

この 定理 1.10 により, 上のように与えた (G,V) に対して, $S\subseteq V_{\mathbb{Z}}$ を A_4 ないしは $\mathfrak{S}_4$-4 次体の整数環に対応するようにとり, 個数関数 (1.1) を考察すれば, 本稿冒頭の定理 1.1 が示せるはずである（なお, 判別式が X 以下の A_4-4 次体の個数は $O(X^{\frac{5}{6}+\varepsilon})$ であることが Wong [25, Theorem 1.1] で示されているので, 無視できる）.

以下, 具体的に計算を追いたい場合には, この 4 次体の数え上げの設定を用いる.

2　数の幾何

2.1　基本領域と群 $G_{\mathbb{R}}$ に沿った座標表示

以下, 実際に (1.1) を計算する数え上げを行おう．しかし, 命題 1.5 で与えられた軌道分解は r 次環の実埋め込みの個数に対応するため, (1.1) の代わりに

$$N(S^{(i)};X) \coloneqq \sum_{\substack{G_{\mathbb{Z}}x \in G_{\mathbb{Z}}\backslash S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}} 1$$

ただし

$$S^{(i)} \coloneqq S \cap V_{\mathbb{R}}^{(i)}$$

を別々に考えることにする．さらに, それぞれの軌道を

$$V_{\mathbb{R}}^{(i)} = G_{\mathbb{R}} v^{(i)} \quad \text{ただし} \quad v^{(i)} \in V_{\mathbb{R}}^{(i)}$$

と書くことにしよう．

実際に数えるのは $V_{\mathbb{R}}$ 内の単なる格子点 $V_{\mathbb{Z}}$ ではなく, それをさらに $G_{\mathbb{Z}}$ の作用で割ったものである．そこで, $G_{\mathbb{Z}}$ の作用を見やすくするため, 各軌道 $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ を群 $G_{\mathbb{R}}$ に沿って座標表示を行いつつ, 作用 $G_{\mathbb{Z}} \curvearrowright G_{\mathbb{R}}$ の基本領域を取る．作用 $G_{\mathbb{Z}} \curvearrowright G_{\mathbb{R}}$ の基本領域 $\mathcal{F}$（きちんと $\mathcal{F} \to G_{\mathbb{Z}}\backslash G_{\mathbb{R}}$ が全単射になるような狭義の基本領域）であって, semialgebraic（後述）かつ連結であり, 適当な Siegel set に含まれるものを取る．これは 4 次体の場合には, 岩澤分解による座標を用いて

$$\mathcal{F} \subseteq N'A'K\Lambda$$

と取る．ただし, 右辺の Siegel set および座標の取り方は絶対定数 $c_1, c_2 > 0$ を用いて

$$\begin{aligned}
K &\coloneqq \{k \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\}, \\
A' &\coloneqq \left\{ a(s) = \left(\begin{pmatrix} s_1^{-1} & \\ & s_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2^{-2}s_3^{-1} & & \\ & s_2 s_3^{-1} & \\ & & s_2 s_3^2 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; s_1, s_2, s_3 \geq c_1 \right\}, \\
N' &\coloneqq \left\{ n(u) = \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ u_1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ u_2 & 1 & \\ u_3 & u_4 & 1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; |u_1|, |u_2|, |u_3|, |u_4| \leq c_2 \right\}, \\
\Lambda &\coloneqq \{\lambda = (\lambda I_2, I_3) \mid \lambda > 0\}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

と与える．ここで, 座標の入れ方に下三角行列を使った理由や, 上のような対角行列の座標表示を使った理由は, 後に出てくる議論において $V_{\mathbb{R}}$ の元の a_{11} 成分に着目するためだったり, 変数 s_1, s_2, s_3 の範囲をわかりやすくしたかった等の理由による．

すると, $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ 内の任意の $G_{\mathbb{Z}}$ 軌道は $\mathcal{F}v^{(i)}$ に唯一つ代表元を持つ．しかし, 後に $\mathcal{F} \subseteq G_{\mathbb{R}}$ の側で座標表示を行いたいので, $G_{\mathbb{Z}}x \in G_{\mathbb{Z}} \backslash V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ に対して, 重複度

$$\sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ G_{\mathbb{Z}}hv^{(i)} = G_{\mathbb{Z}}x}} 1$$

を考察する必要がある．固定部分群に関して

$$\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}(x) \coloneqq \{g \in G_{\mathbb{R}} \mid gx = x\} \quad \text{および} \quad \mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(x) \coloneqq \{g \in G_{\mathbb{Z}} \mid gx = x\}$$

と書くことにすれば,

$$\sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ G_{\mathbb{Z}}hv^{(i)} = G_{\mathbb{Z}}x}} 1 = \frac{\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}(x)}{\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(x)}$$

を得る．ここで分子の $\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}(x)$ は, $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ 上に $G_{\mathbb{R}}$ が推移的に作用するから, 各 $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ 上で一定値を取る．一方, 分母の $\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(x)$ については興味ある数論的対象を数えるときに使う「既約性」を課せば, 一定値ないしは無視できる例外的な x を除いて 1 であることが期待できる．そこで,

$$n_i \coloneqq \frac{\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}(v^{(i)})}{\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(v^{(i)})}$$

と書いてしまおう．特に 4 次体の場合には次のようになる：

命題 2.1（Bhargava [2, Proposition 18]） $v^{(i)} \in V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ とすると,

$$\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}(v^{(i)}) \cong \begin{cases} \mathfrak{S}_4 & i = 0 \text{ のとき}, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & i = 1 \text{ のとき}, \\ D_4 & i = 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．ここで D_n は 2 面体群.

命題 2.2（Bhargava [2, p. 1039]） 強既約な $x \in V_{\mathbb{Z}}$ に対して, $\mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(x) \cong 1$.（注：これは 4 次体の場合の話で, 問題によっては無視できる量の例外が存在する.）

以上の準備により, 全単射 $\mathcal{F} \to G_{\mathbb{Z}} \backslash G_{\mathbb{R}}$ を用いれば, 「既約元」のみからなる $G_{\mathbb{Z}}$ 不変な集合 $S \subseteq V_{\mathbb{Z}}$ に対して,

$$N(S^{(i)}; X) = \sum_{\substack{G_{\mathbb{Z}} y \in G_{\mathbb{Z}} \backslash S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(y)| < X}} 1 = \frac{1}{n_i} \sum_{\substack{G_{\mathbb{Z}} y \in G_{\mathbb{Z}} \backslash S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(y)| < X}} \sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ G_{\mathbb{Z}} h v^{(i)} = G_{\mathbb{Z}} y}} 1$$
$$= \frac{1}{n_i} \sum_{\substack{G_{\mathbb{Z}} y \in G_{\mathbb{Z}} \backslash S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(y)| < X}} \sum_{\substack{x \in S^{(i)} \\ G_{\mathbb{Z}} x = G_{\mathbb{Z}} y}} \sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ h v^{(i)} = x}} 1$$

つまり

$$N(S^{(i)}; X) = \frac{1}{n_i} \sum_{\substack{x \in S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(x)| < X}} \sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ h v^{(i)} = x}} 1 \tag{2.2}$$

との表示を得る. 今, 集合 S は格子 $V_{\mathbb{Z}}$ ないしはそこに「既約性」と合同条件を付したものであり, 「既約性」について無視すると, (2.2) の右辺は単に格子点を領域 $\mathcal{F} v^{(i)}$ で数えることを意味する. そこで, 次に格子点を数える技法の 1 つである数の幾何について思い出してみる.

2.2 数の幾何とその応用における困難

「数の幾何」とは与えられた格子点の分布についての理論であった. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の性質の良い領域 $\mathcal{R}$ を考え, $\mathcal{R}$ 内の格子点の個数

$$\#(\mathcal{R} \cap \mathbb{Z}^n)$$

を数えることを考えてみる. Gauss の円問題（原点中心の円盤内の格子点の数え上げ）等を思い出してみると, 次のようにすればよいのであった：まず, 各格子点に単位立方体を配置する（各格子点には各立方体の「左下」等の指定した頂点をのせる）. すると, 領域 $\mathcal{R}$ と交わる立方体と交わらない立方体がある. 交わっている立方体の個数と領域 $\mathcal{R}$ 内の格子点の個数の誤差は, おおよそ「$\mathcal{R}$ の境界と交わる立方体」の個数で評価できるはずであり, また, 「$\mathcal{R}$ と交わる立方体」の合併は $\mathcal{R}$ を近似するはずである. よって, 単位立方体の体積は 1 だから, $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度を Vol と書けば

$$\#(\mathcal{R} \cap \mathbb{Z}^n) \approx \#\{\mathcal{R} \text{ と交わる立方体}\} \approx \operatorname{Vol}(\mathcal{R}) \tag{2.3}$$

と期待できるのであった. 誤差評価のためには $\mathcal{R}$ の形状, 特に境界の様子が気になるが, 次の Davenport による一般的な結果がある：

定義 2.3　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 E が, 実数上の加法・乗法・等号・不等号, つまり

$$+,\quad \times,\quad =,\quad >,$$

および実数値定数から作られる 1 階の論理式 Φ によって

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x)\}$$

と書かれるとき, E は **semialgebraic set** であるという.（正確には, この定義が通常の semialgebraic set の定義と同値であるというのが, Tarski–Seidenberg の定理の主張だといえる. 詳しくは [14] の Introduction and Overview と Corollary 2.11 を参照のこと.）

補題 2.4（Davenport [10]）　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\mathcal{R}$ が

(i) $\mathcal{R}$ は有界.
(ii) $\mathcal{R}$ は semialgebraic.

を満たすとき,

$$\#(\mathcal{R} \cap \mathbb{Z}^d) = \mathrm{Vol}(\mathcal{R}) + O\left(\max_{0 \leq i \leq n-1} \mathrm{Vol}_i(\mathcal{R})\right)$$

が成立する. ただし, π_i がいくつかの座標を無視する射影 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^i$ を渡るとき

$$\mathrm{Vol}_i(\mathcal{R}) \coloneqq \begin{cases} \max\limits_{\pi_i} \mathrm{Vol}(\pi_i(\mathcal{R})) & 1 \leq i \leq n-1 \text{ のとき}, \\ 1 & i = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とし, implicit constant は $\mathcal{R}$ を定義するのに使われる 1 階の論理式に含まれる量化子, 論理結合子, 加法, 乗法, 等号, 不等号, 定数の個数（つまり semialgebraic set $\mathcal{R}$ の「複雑度」）のみに依存し, 特に, 論理式に含まれる定数の大きさには依存しない.

つまり, 数えたい範囲 $\mathcal{R}$ の形状については, $\mathcal{R}$ が semialgebraic だというだけで数の幾何が適用できるのである. 今, $\mathcal{F}$ は semialgebraic なものを取っているから, (2.2) の数える範囲 $\mathcal{F}v^{(i)}$ は semialgebraic である.（さらに内側の和は semialgebraic sets の上で定数とできる.）したがって, $v \in V_{\mathbb{R}}$ と $X > 0$ に対して,

$$\mathcal{R}_X(v) \coloneqq \{x \in \mathcal{F}v \mid |\mathrm{Disc}(x)| < X\}$$

とおけば,

$$V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)} \coloneqq \{(A, B) \in V_{\mathbb{Z}} \mid (A, B) : \text{「既約」}\} \tag{2.4}$$

に対して, (2.2) から

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)};X) = \frac{1}{n_i} \int\limits_{x\in\mathcal{R}_X(v^{(i)})} \Bigg(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F} \\ hv^{(i)}=x}} 1 \Bigg) dx + (\text{誤差}) \tag{2.5}$$

程度のことが期待できる.（実際には「既約性」の効果を評価する必要がある.）この右辺の体積が有限であるか気になるところである. 4 次体の場合は, (2.1) において, s_1, s_2, s_3 は有界でないながらも, (2.5) 中の積分を $G_{\mathbb{R}}$ 側で座標表示して Haar 測度の密度関数に s_1, s_2, s_3 の十分な負べきが現れることを見れば体積の有限性が分かる.（つまり, s_1, s_2, s_3 が ∞ に向かう部分は「カスプ形状」を持っているはずである.）

…今, 何と言ったであろうか？実は (2.1) において s_1, s_2, s_3 の範囲は有界でないので, 領域 $\mathcal{R}_X(v)$ は有界ではないのである. よく見てみると, Davenport の補題（補題 2.4）には領域が有界である旨の条件 (i) がある. これはどれほど致命的なのだろうか？ Heuristics (2.3) を思い出してみると, 領域 $\mathcal{R}$ が有界でなければ (2.3) の真ん中の立方体の個数の部分が無限大になりえて, この heuristics は破綻することが分かる. 実際, 有理直線に沿ったカスプ状の領域を例に考えてみれば, 体積は有限ながらも, 含まれる格子点の個数は無限個になってしまう領域の存在がわかる. したがって, 領域 $\mathcal{R}$ 内の格子点の分布について情報がなければ, 非有界な領域 $\mathcal{R}$ に対して 補題 2.4 を拡張するのは不可能であろう. しかし, そもそも格子点の分布を考えるために 補題 2.4 を用意したのであった…

この事態は 4 次体に限った話ではなく, 特別な場合を除き, 作用 $G_{\mathbb{Z}}\backslash G_{\mathbb{R}}$ に関する基本領域は有界にならない.

3 Bhargava の平均法

前節最後に直面した「領域 $\mathcal{R}_X(v)$ が非有界であるために数の幾何による数え上げが破綻する」という困難をシステマティックに乗り越えるために編み出されたのが, これから見る Bhargava による「平均法」である.

3.1 カスプ領域の観察

$V_{\mathbb{R}}$ の有界集合

$$H \subseteq \{x \in V_{\mathbb{R}} \mid |\operatorname{Disc}(x)| \geq 1\}$$

を取る．簡単のため，話を 4 次体の数え上げの場合に限定し，H に対する $\mathcal{F}$ の作用およびカスプ領域の様子を座標表示 (2.1) を使って記述しよう．(2.1) の記号の下，$g = n(u)a(s)k\lambda \in \mathcal{F}$ を H の元 v に作用させてみれば，$gv = (A, B)$ の成分について，少しの計算の後に

$$\begin{aligned}
&a_{11} \ll \lambda s_1^{-1}s_2^{-4}s_3^{-2}, \quad &&a_{12} \ll \lambda s_1^{-1}s_2^{-1}s_3^{-2}, \quad &&a_{13} \ll \lambda s_1^{-1}s_2^{-1}s_3,\\
&a_{22} \ll \lambda s_1^{-1}s_2^{2}s_3^{-2}, &&a_{23} \ll \lambda s_1^{-1}s_2^{2}s_3, &&a_{33} \ll \lambda s_1^{-1}s_2^{2}s_3^{4},\\
&b_{11} \ll \lambda s_1 s_2^{-4}s_3^{-2}, &&b_{12} \ll \lambda s_1 s_2^{-1}s_3^{-2}, &&b_{13} \ll \lambda s_1 s_2^{-1}s_3,\\
&b_{22} \ll \lambda s_1 s_2^{2}s_3^{-2}, &&b_{23} \ll \lambda s_1 s_2^{2}s_3, &&b_{33} \ll \lambda s_1 s_2^{2}s_3^{4}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

を得る．ただしここで，implicit constant は H, c_1, c_2 に依存する．以後，

$$T \coloneqq \{a_{11}, \ldots, a_{33}, b_{11}, \ldots, b_{33}\}$$

を $(A, B) \in V_{\mathbb{Z}}$ の成分の集合とし，$t \in T$ に対して，(3.1) を

$$t \ll w(t)$$

と書く．この $w(t)$ を t の **weight** と呼ぶことにする．たとえば，

$$w(a_{11}) = \lambda s_1^{-1}s_2^{-4}s_3^{-2}, \quad w(a_{12}) = \lambda s_1^{-1}s_2^{-1}s_3^{-2}, \quad w(b_{11}) = \lambda s_1 s_2^{-4}s_3^{-2}$$

となる．注意であるが，

$$n(u)a(s)k\lambda H \subseteq \prod_{t\in T}[-cw(t), +cw(t)]$$

がある定数 $c > 0$ に対して成立することになる．前節では $\mathcal{R}_X(v)$ が非有界になることが問題になった．そこで，$\mathcal{R}_X(v)$ の元を $g \in \mathcal{F}$ を用いて gv と表し，座標表示 $g = n(u)a(s)k\lambda$ における変数 u, s, k, λ の様子を観察しよう．まず，$gv \in \mathcal{R}_X(v)$ に対しては $|\operatorname{Disc}(gv)| < X$ という条件があるため，$\lambda \ll X^{\frac{1}{12}}$ という条件が付く．次に $k \in K$ や $u = (u_1, \ldots, u_4)$ は $\mathcal{F}$ の定義の時点でそもそも有界である．残る変数は $s = (s_1, s_2, s_3)$ である．確かに s_i たちが大きくなってしまえば，weight $w(a_{11})$ は 1 未満になり，a_{11} が 0 でない整数になる場合はこのような gv は存在しないが，依然として $a_{11} = 0$ となる gv の可能性は排除できない．よって，$s_1, s_2, s_3 \geq c_1$ であったことを思い出せば，前節で問題になったカスプ部の格子点は $a_{11} = 0$ となっているような元たちからなるということが観察できる．

このようなカスプ領域の問題はより簡単な問題にも現れる．例えば, Dirichlet の約数問題, つまり実数 X 以下の自然数の約数の個数の総和の評価を思い出す．このときには, $\mathbb{R}^2$ 内の領域

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ かつ } 0 < xy \leq X\}$$

の格子点の個数を数えることになる．この領域自体は非有界であり, x 軸と y 軸に漸近するカスプを持つが, $x, y \in \mathbb{Z}$ かつ $x, y > 0$ ならば $x, y \geq 1$ なので, 領域を

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x, y \leq X \text{ かつ } 0 < xy \leq X\}$$

と有界な範囲へと狭めることができる．3 次体ないしは 3 次形式の数え上げの場合には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ のカスプ領域は比較的見やすい（実際, (2.1) における変数 s に対応する部分が 1 次元分しかない）ので, カスプ領域には既約な 3 次形式が少ないということが比較的容易に示せる（[11, 12]）．しかし, 4 次体, 5 次体の場合には, 上に見たようにカスプ領域の様子は複雑であり, よりシステマティックに取り扱う必要がある．このために, Bhargava は平均法という技法を導入した．平均法を用いれば, 一見矛盾するようだが, 数の幾何の適用を阻んでいたカスプ領域の既約元の個数評価に数の幾何を用いることができるようになる．

3.2 事前平均

まず, 先に (2.2) で得た表示（内で $v^{(i)}$ を v と書いたもの）

$$N(S^{(i)}; X) = \frac{1}{n_i} \sum_{\substack{x \in S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(x)| < X}} \sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ hv = x}} 1 \tag{3.2}$$

は任意の $v \in V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ に対して成立することに注意する．そこで, $V_{\mathbb{R}}$ の semialgebraic かつ空でない内部を持つ K 不変な有界領域

$$H \subseteq \{x \in V_{\mathbb{R}} \mid |\operatorname{Disc}(x)| \geq 1\}$$

をとり（以後, implicit constant は H に依存してよいものとする）, $v \in H^{(i)} := H \cap V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ に渡って (3.2) の平均を取る．すると,

$$N(S^{(i)}; X) = \frac{1}{n_i \mu(H^{(i)})} \int_{v \in H^{(i)}} \Bigg(\sum_{\substack{x \in S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(x)| < X}} \sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ hv = x}} 1 \Bigg) d\mu(v). \tag{3.3}$$

を得る．（ここで μ は 命題 1.6 に現れた不変測度である.）こうしておいて (2.5) を達成するには, ほとんどすべての v に対して, 上の積分の中の和に数の幾何の heuristics が適用できればよいわけである．そこで, 以後, S のカスプ部分のような「悪い」部分集合 E をとり, その寄与を上から評価してしまうことを考える．(3.3) において, S を E に取り替えたものを考える（E が $G_{\mathbb{Z}}$ 不変とは限らない場合へと定義を拡張する）：

$$N(E^{(i)};X) \coloneqq \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\int_{v\in H^{(i)}}\Bigg(\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv=x}} 1\Bigg)d\mu(v).$$

そして, 有界な積分範囲 $H^{(i)}$ と非有界な和の範囲 $\mathcal{F}v$ を取り替えられたらよいのにと思う．そこで, ひとまず x の和を外に出す：

$$N(E^{(i)};X) = \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \int_{v\in H^{(i)}}\Bigg(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv=x}} 1\Bigg)d\mu(v).$$

ここで, 内側の積分を 命題 1.7 を用いて変数変換する．すると,

$$N(E^{(i)};X) = \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \int_{g\in G_{\mathbb{R}}}\Bigg(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hgx=x}} 1\Bigg)\mathbb{1}_{gx\in H^{(i)}}dg$$

となる．（ここで, $\mathbb{1}_{\mathsf{P}}$ は条件 P に対する指示関数であり, P が成立するとき 1, そうでなければ 0 となる.）すると, $hgx=x$ とは $hg\in\operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x)$ のことだから

$$N(E^{(i)};X) = \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \sum_{\delta\in\operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x)}\ \int_{g\in G_{\mathbb{R}}}\mathbb{1}_{g\delta^{-1}\in\mathcal{F}^{-1}}\mathbb{1}_{gx\in H^{(i)}}dg.$$

ここで $g \rightsquigarrow g^{-1}\delta$ と変数変換して（今, G は簡約可能だから dg は両側不変である）

$$N(E^{(i)};X) = \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \sum_{\delta\in\operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x)}\ \int_{g\in\mathcal{F}}\mathbb{1}_{\delta x\in gH^{(i)}}dg.$$

しかし, 上式の右辺では $\delta\in\operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x)$ であり, $\#\operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x)=n_i$ と思って良いので,

$$N(E^{(i)};X) = \frac{1}{\mu(H^{(i)})}\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \int_{g\in\mathcal{F}}\mathbb{1}_{x\in gH^{(i)}}dg$$

つまり

$$N(E^{(i)};X)=\frac{1}{\mu(H^{(i)})}\int_{g\in\mathcal{F}}\Bigg(\sum_{\substack{x\in gH^{(i)}\cap E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}1\Bigg)dg. \tag{3.4}$$

を得る．これにより数の幾何を使う和の範囲を有界な $gH^{(i)}$ へと変えることができた.

3.3 座標表示

これから行うのは, S 内の「悪い」部分, つまりカスプ領域および「既約性」を満たさない領域の (3.4) を用いた評価である．抽象的な (3.4) のままでは様子が分かりづらいので, 本稿では以後, 話を 4 次体の場合に限定し, 座標表示 (2.1) を用いて (3.4) を書き直そう．まず, $\mathbb{R}_{>0}^{\times}$ と $(\mathbb{R}_{>0}^{\times})^3$ の Haar 測度を $d^{\times}\lambda=d\lambda/\lambda$ および $d^{\times}s:=ds_1/s_1ds_2/s_2ds_3/s_3$ と書き, $du=du_1du_2du_3du_4$ を Lebesgue 測度とし, さらに K 上の Haar 測度 dk を取る．すると, 座標表示 (2.1) に対して, $G_{\mathbb{R}}$ の Haar 測度は定数倍を除き

$$s_1^{-2}s_2^{-6}s_3^{-6}dud^{\times}sdkd^{\times}\lambda$$

となる．よって, (3.4) は $n=n(u)$ および $a=a(s)$ の略記の下,

$$N(E^{(i)};X)\ll\int_{nak\lambda\in N'A'K\Lambda}\Bigg(\sum_{\substack{x\in nak\lambda H^{(i)}\cap E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}1\Bigg)s_1^{-2}s_2^{-6}s_3^{-6}dud^{\times}sdkd^{\times}\lambda$$

と評価できる．この右辺で, $v\in H$ と $g=nak\lambda$ によって, $x=gv\in V_{\mathbb{Z}}^{(i)}$ と書けば

$$1\leq|\operatorname{Disc}(gv)|<X \text{ かつ } \lambda^{12}\leq|\operatorname{Disc}(gv)|\ll\lambda^{12}\quad\rightsquigarrow\quad\lambda\in[c,X^{\frac{1}{12}}]$$

と絶対定数 c を用いて λ の範囲を制限できる．さらに,

$$\sigma(E^{(i)};s,\lambda):=\sup_{\substack{n\in N'\\ k\in K}}\sum_{\substack{x\in nak\lambda H^{(i)}\cap E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}1 \tag{3.5}$$

とおけば,

$$N(E^{(i)};X)\ll\int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}}\int_{s_1,s_2,s_3\geq c_1}\sigma(E^{(i)};s,\lambda)s_1^{-2}s_2^{-6}s_3^{-6}d^{\times}sd^{\times}\lambda \tag{3.6}$$

を得る．この不等式が「悪い」部分の評価の基本道具の 1 つになる.

3.4 「悪い」部分の評価

では「悪い」部分の評価に移ろう．ここでは「可約」な部分の寄与の評価については割愛し, カスプ領域における既約元の個数の評価を行いたい．先に見たようにカスプ領域にある元とは $a_{11}=0$ なる元たちのことと思えるから, $a_{11}=0$ なる強既約な元が少ないことを示せばよい：

補題 3.1（Bhargava [2, Lemma 11]） 集合 $E \subseteq V_{\mathbb{Z}}$ を

$$E \coloneqq \{(A,B) \in V_{\mathbb{R}} \mid (A,B) : \text{強既約},\ a_{11}=0\}$$

で定めると,

$$N(E^{(i)};X) \ll X^{\frac{11}{12}}$$

が $i=0,1,2$ に対して成立する．

証明 (A,B) は強既約なので, A と B の定める 2 次曲線は $[1:0:0] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ を共通部分に持たない．よって, $(A,B) \in E$ ならば $a_{11}=0$ だから $b_{11} \neq 0$ とわかる．さらに, 3 次形式 $\det(Ax-By)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約でもなければならず, 特に $\det(A) \neq 0$ である必要がある．よって, $a_{12}=0$ であるか否かによって, 評価すべき集合 E は次の 2 通りに分類される：

Case 1 $a_{11}=0$ かつ $a_{12}, b_{11} \neq 0$.
Case 2 $a_{11}, a_{12}=0$ かつ $a_{13}, a_{22}, b_{11} \neq 0$.

これら場合分けを零な成分の集合 $T_0 \subseteq T$ と非零な成分の集合 $T_1 \subseteq T$ によって,

$$E(T_0,T_1) \coloneqq \{(A,B) \in E \mid t=0 \quad (\forall t \in T_0) \quad \text{かつ} \quad t \neq 0 \quad (\forall t \in T_1)\}$$

と書くことにしよう．

さて, (3.6) を用いるので, (3.5) を評価する必要がある．そこで $\mathcal{F}$ の作用を明示的に書いた (3.1) を思い出す．また, T_0 に含まれる成分は 0 になるだけなので, (3.5) における格子点数え上げの範囲は

$$nak\lambda H^{(i)} \cap E(T_0,T_1)^{(i)} \subseteq \prod_{t \in T_0} \{0\} \times \prod_{t \in T \setminus T_0} [-cw(t), cw(t)]$$

とある定数 $c>0$ によって評価できる．もしここで, $T\setminus T_0$ に対応する成分の範囲がすべて長さ $\gg 1$ の区間であれば, $T\setminus T_0$ の成分に対応する部分空間内で 補題 2.4 を用いることで

$$\sum_{\substack{x\in nak\lambda H^{(i)}\cap E(T_0,T_1)^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}} 1 \ll \prod_{t\in T\setminus T_0} w(t)$$

が得られる．実は, 先の Case 1, Case 2 の T_1 は必ず定数倍を除いた minimal weight を与える $t\in T\setminus T_0$ を含むようになっている．T_1 に含まれる成分は非零になるよう要求されているので, 結局, $T\setminus T_0$ に対応する成分の範囲はすべて長さ $\gg 1$ の区間であり, 上記の評価は成立する．

以上より, (3.6) を用いれば

$$N(E(T_0,T_1)^{(i)};X) \ll \int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}} \int_{s_1,s_2,s_3\geq c_2} \prod_{t\in T\setminus T_0} w(t) s_1^{-2}s_2^{-6}s_3^{-6} d^\times s d^\times \lambda \tag{3.7}$$

が分かる．ここで

$$\prod_{t\in T\setminus T_0} w(t) = \frac{\lambda^{12}}{\prod_{t\in T_0} w(t)}$$

に注意すれば, Case 1 の場合は

$$N(E(T_0,T_1)^{(i)};X) \ll \int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}} \int_{s_1,s_2,s_3\geq c_1} \lambda^{11} s_1^{-1}s_2^{-2}s_3^{-4} d^\times s d^\times \lambda \ll X^{\frac{11}{12}}$$

となる．ここでは s_1,s_2,s_3 の指数がすべて負になっていることが重要である．Case 2 の場合は s_1 の指数が 0 になってしまうが, $w(a_{13})\gg |a_{13}|\gg 1$ であるから, (3.7) の時点でこの weight $w(a_{13})$ を余分にかけてあげれば

$$\begin{aligned} N(E(T_0,T_1)^{(i)};X) &\ll \int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}} \int_{s_1,s_2,s_3\geq c_1} w(a_{13}) \prod_{t\in T\setminus T_0} w(t) s_1^{-2}s_2^{-6}s_3^{-6} d^\times s d^\times \lambda \\ &\ll \int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}} \int_{s_1,s_2,s_3\geq c_1} \lambda^{11} s_1^{-1}s_2^{-2}s_3^{-1} d^\times s d^\times \lambda \ll X^{\frac{11}{12}} \end{aligned}$$

を得る．以上をまとめて主張を得る． □

注意 3.2 上記の 補題 3.1 の証明は [2] の証明に 5 次体の数え上げを行う [4] の証明のスタイルを加えたものである．上記の 補題 3.1 では場合分けが高々 2 通りであるが, [4] では 151 通り（！）もの場合分け（8 ページに渡る表にまとめられている）が必要であり, 手計算するにせよ計算機にチェックさせるにせよ, 上記のように機械的に実行できる場合分けを準備する必要がある.

強既約でない部分の寄与については, 以下を引用するだけにとどめておく：

補題 3.3（Bhargava [2, Lemma 12, 13]） 集合 $E \subseteq V_{\mathbb{Z}}$ を

$$E \coloneqq \{(A,B) \in V_{\mathbb{R}} \mid (A,B) : \text{強既約でない},\ a_{11} \neq 0\}$$

で定めると,

$$N(E^{(i)}; X) = o(X) \quad (X \to \infty)$$

が $i = 0, 1, 2$ に対して成立する.

3.5 主要部の計算

以上で「悪い」部分を取り除くことができ, 4 次体の場合の (2.4) である

$$V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)} \coloneqq \{(A,B) \in V_{\mathbb{Z}} \mid (A,B) : \text{強既約}\ \}$$

に対して, 次が得られる：

補題 3.4（Bhargava [2, Proposition 17]） 実数 $X > 0$ に対して,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}; X) = \frac{1}{n_i} \int_{x \in \mathcal{R}_X(v^{(i)})} \Bigg(\sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ hv^{(i)} = x}} 1 \Bigg) dx + o(X) \quad (X \to \infty).$$

証明 集合

$$S_0 \coloneqq \{(A,B) \in V_{\mathbb{Z}} \mid a_{11} \neq 0\}$$

を考える．すると, (3.4) を用いた後, 補題 3.1 と 補題 3.3 を用いれば,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}; X) = N(S_0^{(i)}; X) + o(X) \quad (X \to \infty)$$

が分かり, $N(S_0^{(i)};X)$ を評価すれば良いことがわかる. (3.4) から,

$$N(S_0^{(i)};X)=\frac{1}{\mu(H^{(i)})}\int_{g\in\mathcal{F}}\Bigg(\sum_{\substack{x\in gH^{(i)}\cap S_0^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}1\Bigg)dg$$

を得る. $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ に対して $a_{11}\neq 0$ ならば $|a_{11}|\geq 1$ だから

$$\begin{aligned}&\mathscr{H}_X(g)\coloneqq\{x\in gH\mid |\operatorname{Disc}(x)|<X\},\\ &\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)\coloneqq\{x\in gH\mid |\operatorname{Disc}(x)|<X \text{ かつ } |a_{11}|\geq 1\}\end{aligned}$$

とおけば, 上記内側の和は

$$\sum_{\substack{x\in gH^{(i)}\cap S_0^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}1=\sum_{x\in\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}\cap V_{\mathbb{Z}}^{(i)}}1 \tag{3.8}$$

と書き直せる. ここで, H が semialgebraic かつ有界だから $\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}$ は semialgebraic な有界領域であり, Davenport の補題（補題 2.4）を適用できる. その際の誤差評価を行おう. まず, $v\in H^{(i)}$, $g=nak\lambda\in\mathcal{F}$ かつ $x=gv\in\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}$ ならば $|a_{11}|\geq 1$ より

$$1\ll w(a_{11})=\lambda s_1^{-1}s_2^{-4}s_3^{-2}$$

である. a_{11} は minimal weight を与える成分なので, $\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}$ をいくつかの座標を 0 にするよう射影したとき, その体積は

$$\ll\frac{\prod_{t\in T}w(t)}{w(a_{11})}\ll\lambda^{11}s_1s_2^4s_3^2$$

と評価できる. 以上より, Davenport の補題（補題 2.4）を適用して

$$\operatorname{Vol}(\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)})=\operatorname{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)})-\operatorname{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)}\setminus\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)})$$

と分解してやれば, $X\to\infty$ のとき,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)};X)=\frac{1}{\mu(H^{(i)})}\int_{g\in\mathcal{F}}\operatorname{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)})dg+O(R_1+R_2)+o(X)$$

ただし

$$R_1\coloneqq\int_{g\in\mathcal{F}}\operatorname{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)}\setminus\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)})dg\quad\text{および}\quad R_2\coloneqq\int_{g\in\mathcal{F}}\lambda^{11}s_1s_2^4s_3^2dg$$

である．主要項については Section 3.2 の計算の連続類似を逆にたどれば

$$\frac{1}{\mu(H^{(i)})}\int_{g\in\mathcal{F}}\mathrm{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)})dg=\frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\int_{v\in H^{(i)}}\int_{x\in\mathcal{R}_X(v)}\Bigg(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv=x}}1\Bigg)dxd\mu(v)$$

となるが, 命題 1.7 のような積分公式を用いれば, 内側の積分

$$\int_{x\in\mathcal{R}_X(v)}\Bigg(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv=x}}1\Bigg)dx$$

は v がどの $G_{\mathbb{R}}$ 軌道 $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ に入るかのみに依存する事がわかるので,

$$\frac{1}{\mu(H^{(i)})}\int_{g\in\mathcal{F}}\mathrm{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)})dg=\frac{1}{n_i}\int_{x\in\mathcal{R}_X(v^{(i)})}\Bigg(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv^{(i)}=x}}1\Bigg)dx$$

とわかる．次に誤差項 R_1 について考える．$\mathscr{H}_X(g)^{(i)}\setminus\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}$ においては a_{11} は $|a_{11}|\leq 1$ の範囲に含まれる．また, a_{11} の値を固定すると, $\mathscr{H}_X(g)^{(i)}\setminus\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}$ の残りの成分は直方体

$$\prod_{t\in T\setminus\{a_{11}\}}[-cw(t),+cw(t)]$$

に含まれる．この直方体の体積は

$$\prod_{t\in T\setminus\{a_{11}\}}w(t)\ll\frac{\prod_{t\in T}w(t)}{w(a_{11})}\ll\lambda^{11}s_1s_2^4s_3^2$$

と評価できる．したがって,

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)}\setminus\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)})\ll\int_{|a_{11}|\leq 1}\lambda^{11}s_1s_2^4s_3^2da_{11}\ll\lambda^{11}s_1s_2^4s_3^2$$

を得る．よって, $R_1\ll R_2$ と評価できるから, R_2 を評価すればよい．この R_2 に対しては成分表示 (2.1) を用いて Section 3.3 のように積分を座標表示すれば

$$R_2\ll\int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}}\int_{s_1,s_2,s_3\geq c_2}\lambda^{11}s_1^{-1}s_2^{-2}s_3^{-4}d^\times sd^\times\lambda\ll X^{\frac{11}{12}}$$

と評価でき無視できる．以上をまとめて主張を得る． □

あとは主要項の積分の計算が必要である：

命題 3.5 実数 $X>0$ と $i=0,1,2$ に対して

$$\frac{1}{n_i}\int\limits_{x\in\mathcal{R}_X(v^{(i)})}\left(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv^{(i)}=x}}1\right)dx=\frac{\zeta(2)^2\zeta(3)}{2n_i}X.$$

証明 以下のような UL 分解を考える：

$$G_{\mathbb{R}}=N\overline{N}A\Lambda$$

ただし, 部分群 $N,\overline{N},A,\Lambda$ と座標表示は

$$\begin{aligned}
N&:=\left\{n(x)=\left(\begin{pmatrix}1&x_1\\&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&x_2&x_3\\&1&x_4\\&&1\end{pmatrix}\right)\;\middle|\;x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}\right\},\\
\overline{N}&:=\left\{\overline{n}(u)=\left(\begin{pmatrix}1&\\u_1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&&\\u_2&1&\\u_3&u_4&1\end{pmatrix}\right)\;\middle|\;u_1,u_2,u_3,u_4\in\mathbb{R}\right\},\\
A&:=\left\{a(t)=\left(\begin{pmatrix}t_1&\\&t_1^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t_2&&\\&t_3t_2^{-1}&\\&&t_3^{-1}\end{pmatrix}\right)\;\middle|\;t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}_{>0}\right\},\\
\Lambda&:=\{\lambda=(\lambda I_2,I_3)\mid\lambda\in\mathbb{R}_{>0}\}
\end{aligned}$$

で与える. この分解の下, $G_{\mathbb{R}}$ 上の Haar 測度を可測関数 $\phi\colon G_{\mathbb{R}}\to\mathbb{C}$ に対して

$$\int\limits_{g\in G_{\mathbb{R}}}\phi(g)dg:=\int\limits_{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}}\int\limits_{s\in\mathbb{R}^3_{>0}}\int\limits_{u\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{x\in\mathbb{R}^4}\phi(n(x)\overline{n}(u)a(s)\lambda)dxdud^\times sd^\times\lambda$$

で定める. すると, Langlands [18] の結果から

$$\int_{G_{\mathbb{Z}}\backslash G^{\pm1}_{\mathbb{R}}}dg=\zeta(2)\cdot\zeta(2)\zeta(3)$$

を得ることができる. ただしここで

$$G^{\pm1}_{\mathbb{R}}=\{(g_2,g_3)\in G_{\mathbb{R}}\mid\det(g_2)=\pm1\}$$

とした. この Haar 測度を通して, $v^{(i)}$ として計算しやすい特殊な元を取り明示的に

計算すれば 命題 1.7 の類似物が得られ,

$$\frac{1}{n_i}\int_{x\in\mathcal{R}_X(v^{(i)})}\Big(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv^{(i)}=x}}1\Big)dx=\frac{6}{n_i}\int_0^{\left(\frac{X}{|\operatorname{Disc}(v^{(i)})|}\right)^{\frac{1}{12}}}\lambda^{12}|\operatorname{Disc}(v^{(i)})|d^{\times}\lambda\int_{G_{\mathbb{Z}}\backslash G_{\mathbb{R}}^{\pm1}}dg$$

$$=\frac{6\zeta(2)^2\zeta(3)}{n_i}\int_0^{X^{\frac{1}{12}}}\lambda^{12}d^{\times}\lambda=\frac{\zeta(2)^2\zeta(3)}{2n_i}X$$

を得る. □

なお, 集合 $S\subseteq V_{\mathbb{Z}}$ として, $V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}$ 全体でなく, 法 $q\in\mathbb{N}$ での合同条件を付した

$$S:=V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}\cap\bigsqcup_{a\in\mathscr{A}_q}(a+qV_{\mathbb{Z}})\quad \text{ただし}\quad \mathscr{A}_q\subseteq V_{\mathbb{Z}}/qV_{\mathbb{Z}}$$

を用いた場合も考察する必要がある. この場合には (3.8) において,

$$\sum_{x\in\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}\cap(a+qV_{\mathbb{Z}})}1=\sum_{x\in q^{-1}(\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}-a)\cap V_{\mathbb{Z}}}1$$

と書き直してあげれば同様に計算でき, 結局, 次を得る：

定理 3.6 集合 $\mathscr{A}_q\subseteq V_{\mathbb{Z}}/qV_{\mathbb{Z}}$ と実数 $X>0$ に対して,

$$\sum_{a\in\mathscr{A}_q}N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}\cap(a+qV_{\mathbb{Z}});X)=\mu_q(\mathscr{A}_q)\frac{\zeta(2)^2\zeta(3)}{2n_i}X+o_q(X)\quad (X\to\infty).$$

を得る. ただしここで $\mu_q(\mathscr{A}_q)$ は (mod q) での $\mathscr{A}_q$ の密度

$$\mu_q(\mathscr{A}_q):=q^{-12}|\mathscr{A}_q|$$

であり, $o_q(X)$ の "q" はこの誤差項の収束のスピードが q に依存することを意味する.

4 代数体の整数環の篩い出し

定理 3.6 により, $V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}$ の $G_{\mathbb{Z}}$ 軌道を数え上げることができた. しかし, 定理 1.10 を思い出すと, このままでは A_4, $\mathfrak{S}_4$-4 次体の整環をしかもその 3 次レゾルベント環の重複度まで含めて数え上げを行ってしまっていることがわかる. 4 次体を数え上げるのには整数環, つまり, これら整環の中で環の拡大に関して極大なもののみをレゾル

ベント環の重複度を無視して抽出する必要がある．（なお, 極大な 4 次環の 3 次レゾルベント環は一意的に定まることが知られているので, 極大でない 4 次環の寄与を除けば自動的に 3 次レゾルベント環の重複度は取り除ける．）$G_{\mathbb{Z}}$ 軌道 $G_{\mathbb{Z}}(A,B)$ が極大な 4 次環に対応する必要十分条件は 定理 1.10 により各素数 p に対して $(\mathrm{mod}\ p^2)$ の合同条件 $(A,B)\in\mathscr{U}_p$ で与えられる．つまり,

$$N_4^{(i)}(X)=N\Big(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}\cap\bigcap_p\mathscr{U}_p;X\Big) \tag{4.1}$$

となる．すると, 一見, 定理 3.6 を用いれば極大な整環を数え上げられそうに思えるが, 考慮すべき合同条件はすべての素数を法として考えなければならないため, 定理 3.6 はそのままでは適用できない．特に, 定理 3.6 では誤差評価は q に関して一様ではない．この問題は $\mathscr{U}_p$ の補集合の評価を与えたあとに無平方篩を適用することで乗り越えられる．

まず, 素数の大きさを制限するパラメター $P>0$ を用意し, (4.1) より

$$\begin{aligned}N_4^{(i)}(X)&=N\Big(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}\cap\bigcap_{p\le P}\mathscr{U}_p;X\Big)+O\Bigg(N\Big(V_{\mathbb{Z}}^{(i)}\setminus\Big(\bigcap_{p>P}\mathscr{U}_p\Big);X\Big)\Bigg)\\&=N\Big(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}\cap\bigcap_{p\le P}\mathscr{U}_p;X\Big)+O\Big(\sum_{p>P}N(V_{\mathbb{Z}}^{(i)}\setminus\mathscr{U}_p;X)\Big)\end{aligned} \tag{4.2}$$

とする．右辺第 1 項は中国式剰余定理を用いれば, 定理 3.6 より

$$N\Big(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}\cap\bigcap_{p\le P}\mathscr{U}_p;X\Big)=\prod_{p\le P}\mu_p(\mathscr{U}_p)\frac{\zeta(2)^2\zeta(3)}{2n_i}X+o_P(X)\quad(X\to\infty)$$

とできる．主要項の係数については, 定理 1.10 にある $\mathscr{U}_p$ の密度から

$$\mu_p(\mathscr{U}_p)=1+O(p^{-2}) \tag{4.3}$$

だとわかるので, $P\to\infty$ のとき,

$$\begin{aligned}\prod_{p\le P}\mu_p(\mathscr{U}_p)&=(1+o(1))\prod_p\mu_p(\mathscr{U}_p)\\&=(1+o(1))\frac{1}{\zeta(2)^2\zeta(3)}\prod_p\Big(1+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^4}\Big)\end{aligned}$$

と知れる．一方, 誤差項については (4.3) を 定理 3.6 と組み合わせれば, $V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}\setminus\mathscr{U}_p$ の密度は $O(p^{-2})$ であると期待したいところである．しかし, 定理 3.6 の誤差項が無視

できず, この期待を正しく証明するのは非自明な問題である．実際には, 高次合成則を通して評価を 4 次環とその 3 次レゾルベント環の数え上げに翻訳した後に, 4 次環と 3 次レゾルベント環の数え上げに関する既知の結果を組み合わせることで, 次を示すことができる：

補題 4.1　素数 p と実数 $X > 0$ に対して,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \frac{X}{p^2}.$$

ただし, implicit constant は絶対定数.

証明のために用いる 4 次環と 3 次レゾルベント環の数え上げに関する結果をいくつか述べる．まず, 4 次体の整環であって整数環との間で与えられた指数を持つものの個数を評価するために, 次の中川 [19] の結果を用いる．より一般の体については Brakenhoff [9] が類似した結果を示している．

補題 4.2（中川 [19]）　4 次体の整数環の指数 k の整環の個数は

$$\ll \prod_{p^v \| k} p^{(2+\varepsilon)\lfloor v/4 \rfloor}$$

と評価できる．ただしここで, p は素数, v は非負整数をわたり, $\lfloor x \rfloor$ は実数 x を超えない最大の整数を表し, 「$p^v \parallel k$」とは「$p^v \mid k$ かつ $p^{v+1} \nmid k$ である」ことを意味し, implicit constant は $\varepsilon > 0$ のみに依存する.

また, 3 次レゾルベント環の個数を評価するために content という量を導入する：

定義 4.3　4 次環 Q に対して, その **content** $\mathrm{ct}(Q)$ を

$$\mathrm{ct}(Q) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid Q = \mathbb{Z} + nQ' \text{ となる 4 次環 } Q' \text{ が存在する }\}$$

で定める.

すると 3 次レゾルベント環の個数は次のように与えられる：

補題 4.4（Bhargava [1, Corollary 4, p. 1333]）　4 次環 Q の 3 次レゾルベント環の個数は $\mathrm{ct}(Q)$ の約数の総和 $\sigma(\mathrm{ct}(Q)) = \sum_{d \mid \mathrm{ct}(Q)} d$ で与えられる.

以上を用いて, 補題 4.1 を示そう.

証明（補題 4.1）$V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p$ は 定理 1.10 で与えられた対応によって, 4 次体の整環と 3 次レゾルベント環の組 (Q,R) であって, 素数 p にて Q が極大でない（$Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ が極大な rank 4 の $\mathbb{Z}_p$-代数になっていない）ものに対応する．よって,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \sum_{\substack{Q:4\text{ 次体の整環} \\ Q:\text{not maximal at } p \\ |\operatorname{Disc}(Q)|<X}} \sum_{R:Q\text{ のレゾルベント環}} 1$$

となる．ここで Q を $n \coloneqq \operatorname{ct}(Q)$ で分類して 補題 4.4 を用いれば

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \sum_{\substack{Q:4\text{ 次体の整環} \\ Q:\text{not maximal at } p \\ |\operatorname{Disc}(Q)|<X \\ \operatorname{ct}(Q)=n}} 1$$

となる．ここで $\operatorname{ct}(Q) = n$ なる 4 次環 Q と $Q = \mathbb{Z} + nQ'$ なる content 1 の 4 次環 Q' は一対一に対応し, この対応の下で $\operatorname{Disc}(Q) = n^6 \operatorname{Disc}(Q')$ となるから,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \sum_{\substack{Q':4\text{ 次体の整環} \\ \mathbb{Z}+nQ':\text{not maximal at } p \\ |\operatorname{Disc}(Q')|<n^{-6}X \\ \operatorname{ct}(Q')=1}} 1$$

である．ここで $p \nmid n$ であれば, 上の和において Q' は素数 p にて極大でないままである．よって, Q' の整閉包 Q'' を取って, 指数 $k \coloneqq [Q'' : Q']$ で場合分けすれば, $p \nmid n$ ならば $p \mid k$ である．また, $\operatorname{Disc}(Q') = k^2 \operatorname{Disc}(Q'')$ である．よって, 補題 4.2 より

$$\begin{aligned} N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll & \sum_{\substack{n=1 \\ p\nmid n}}^{\infty} \sigma(n) \sum_{\substack{k=1 \\ p\mid k}}^{\infty} \prod_{p^v \| k} p^{(2+\varepsilon)\lfloor v/4 \rfloor} \sum_{\substack{Q'':4\text{ 次体の整数環} \\ |\operatorname{Disc}(Q'')|<n^{-6}k^{-2}X}} 1 \\ & + \sum_{\substack{n=1 \\ p\mid n}}^{\infty} \sigma(n) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{p^v \| k} p^{(2+\varepsilon)\lfloor v/4 \rfloor} \sum_{\substack{Q'':4\text{ 次体の整数環} \\ |\operatorname{Disc}(Q'')|<n^{-6}k^{-2}X}} 1. \end{aligned}$$

ここで, 定理 3.6 を用いれば, 上からの評価

$$\sum_{\substack{Q'':4\text{ 次体の整数環} \\ |\operatorname{Disc}(Q'')|<n^{-6}k^{-2}X}} 1 \ll \frac{X}{n^6 k^2}$$

を得る．したがって，

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid n}}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^6} \sum_{\substack{k=1 \\ p|k}}^{\infty} \prod_{p^v \| k} p^{(2+\varepsilon)\lfloor v/4 \rfloor - 2v} X + \sum_{\substack{n=1 \\ p|n}}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^6} X \ll \frac{X}{p^2}$$

と主張を得る． □

上に示した評価 補題 4.1 を用いれば, (4.2) の誤差項は

$$\sum_{p>P} N(V^{(i)}_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \sum_{p>P} \frac{X}{p^2} \ll \frac{X}{P}$$

と抑えることができ,

$$N_4^{(i)}(X) = \frac{1}{2n_i} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4}\right) X + o_P(X) + O\left(\frac{X}{P}\right) \quad (X \to \infty)$$

を得る．あとは, X に比べて P をゆっくり大きくしていけば, 定理 1.1 を得ることができる．

謝辞

第 30 回整数論サマースクール世話人の谷口隆先生，杉山和成先生，石塚裕大先生には貴重な勉強の機会をいただいたことを感謝申し上げます．また, 整数論サマースクールの講演準備や本稿の執筆の際には, 谷口隆先生, 石塚裕大先生, 佐藤文広先生, 都築正男先生, Frank Thorne 先生, 佐野薫先生, 山本修司先生に, 筆者が理解不足な部分について解説していただいたり, 間違いを指摘していただいたりしました．この場をお借りして感謝申し上げます．しかし依然として, 本稿には不正確な部分が残っていると思いますが, これはすべて筆者の勉強不足によるものだということをお断りしておきます．

参考文献

[1] M. Bhargava, *Higher composition laws III: The parametrization of quartic rings*, Ann. of Math. **159** (2004), 1329–1360.

[2] M. Bhargava, *The density of discriminants of quartic rings and fields*, Ann. of Math. **162** (2005), 1031–1063.

[3] M. Bhargava, *Higher composition laws IV: The parametrization of quintic rings*, Ann. of Math. **167** (2008), 53–94.

[4] M. Bhargava, *The density of discriminants of quintic rings and fields*, Ann. of Math. **172** (2010), 1559–1591.

[5] M. Bhargava and A. Shanker, *Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves*, Ann. of Math. **181** (2015), 191–242.

[6] M. Bhargava and A. Shanker, *Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank* 0, Ann. of Math. **181** (2015), 587–621.

[7] M. Bhargava and A. Shanker, *The average number of elements in the* 4-*Selmer groups of elliptic curves is* 7, arXiv preprint, `arXiv:1312.7333`.

[8] M. Bhargava and A. Shanker, *The average size of the* 5-*Selmer group of elliptic curves is* 6*, and the average rank is less than* 1, arXiv preprint, `arXiv:1312.7859`.

[9] J. Brakenhoff, *Counting problems for number rings*, Ph.D. thesis, Leiden University, 2009.

[10] H. Davenport, *On a principle of Lipschitz*, J. London Math. Soc. **26** (1951), 179–183, *Corrigendum: "On a principle of Lipschitz"*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 580.

[11] H. Davenport, *On the class-number of binary cubic forms* (I), J. London Math. Soc. **26** (1951), 183–192, *Corrigendum: On the class-Number of binary cubic forms* (I), J. London Math. Soc. **27** (1952), 512.

[12] H. Davenport, *On the class-number of binary cubic forms* (II), J. London Math. Soc. **26** (1951), 192–198.

[13] H. Davenport and H. Heilbronn, *On the density of discriminants of cubic fields.* II, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci. **322** (1971), 405–420.

[14] L. van den Dries, *Tame Topology and O-minimal Structures*, (Cambridge University Press, 1998).

[15] 石塚裕大, 三元二次形式のペアと射影空間の幾何, **本報告集**, 2023.

[16] 石塚裕大, 有理軌道，整軌道の解釈, **本報告集**, 2023.

[17] 木村達雄, 概均質ベクトル空間, (岩波書店, 1998).

[18] R. P. Langlands, The volume of the fundamental domain for some arithmetical subgroups of Chevalley groups, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups* (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, pp. 143–148.

[19] J. Nakagawa, *Orders of a Quartic Field*, Mem. Amer. Math. Soc. **122** (1996), no. 583, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[20] 佐野薫, 余正則空間と楕円曲線の Selmer 群, **本報告集**, 2023.

[21] 谷口隆, フィールズ賞業績紹介：バルガバ, 数学セミナー **54** (1), 2015 年 1 月, 34–40.

[22] 谷口隆, Manjul Bhargava 氏の業績 — 楕円曲線の平均階数と数の幾何 —, 数学 **68** (1), 2016 年 1 月, 72–82.

[23] 谷口隆, 本論のための準備, **本報告集**, 2023.

[24] Frank Thorne, *Counting cubic fields using Shintani's zeta function*, **本報告集**, 2023.

[25] S. Wong, *Densities of quartic fields with even Galois groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2873–2881.

概均質ベクトル空間：RETROSPECTIVE ACCOUNT

伊吹山 知義

Contents

本研究は JSPS 科研費 JP23K03031, JP19K03424, JP20H00115 の助成を受けたものです.

1. 前説（概要に代えて）

私もいい歳 (７５歳）なので、あえて読み物風に昔語りをしたいと思う。私の周辺の人たちが昔何を考えていたかというのを記録しておくのも無駄ではあるまいと思う。これらは日本の研究の大切な遺産なのに、もうみんなもう忘れているような気もするからである。当時の日本人の仕事に対するオマージュだと思ってくれてもよい。別に私の残す言葉というわけでもないが、当時のみんなの気持ちが何だったかというのは数学的にも大切な部分はあると思う。ただし個人的なバイアスをあえて気にせずに書くので、自分の知っている話と違うという方がいたら、ご容赦いただきたい。また、かなり敬称を略しているので、これもご容赦いただきたい。

1992 年に齋藤裕さん (1947–2010) との共同研究で「対称行列全体のなすベクトル空間のゼータ関数の明示的公式」を証明した。これは概均質ベクトル空間の一般論では決して迫りえない新しい結果をいろいろ含んでいるし、次元公式にも決定的な応用があったので、自分では良い仕事だと思い満足していた。当時、伊原康隆先生が IMRN の編集者で、そこに速報を投稿する関係でお世話になったのだが、彼から「佐藤幹夫先生 (1928–2023) にも話しておけば」と言われたので、京大の生協食堂で佐藤先生に偶然お会いしたときに「具体的に書けることが証明できました」と話した。しかし佐藤先生からは

「そういう話はいろいろあるようですね」

という非常に気のない反応が返ってきた。また「２元３次形式についてはどうですか？」と聞かれた。「全然わかりません」と答えると笑顔になった。

私はこの反応はちょっとショックで、「どうもわかってくれないんだな」という感想を持った。また「２元３次形式」のゼータ関数は、たぶん佐藤先生にとっては他では取り扱えない新発見だという気があって、これは他からは説明できないのだというのが彼のこの理論に対するプライドだったのかなとも思った。だから彼にとって、自分の定義した

ゼータ関数が既知のもので書けるという結果は、そう嬉しい結果ではないのかもしれないな、と思ったのは、まあ、こちらのひがみだったかな。それで「2元3次形式のゼータは実は既知のものなのだ」というような結果があれば、たぶん一番認めてくれる結果なのであろうが、今に到るもこれは結果が何もない。わりと外国でも会う人ごとに聞いてみているのだが。(Datskovsky-Wright の具体的表示と言うのはあるけれどこれは私の求める結果ではない。)

さて、彼が「そういう話はいろいろ」と言ったときの、いろいろの中味は何かと考えてみると、それ以前の木村達雄さん, 小木曽岳義さんの岩澤・テイトの理論（[43], [44]) が念頭にあったのかもしれない。しかしこれは G_A orbit が有限個の場合というもので、我々の場合は、これとは全然違う話である。つまり、われわれの場合は大雑把に言って、各 local での軌道が2個以上あり、これらの積は無限個あり、そのなかから global から来る適当な組み合わせをとる、という形であるから、本質的に話が違うのである。たとえば、オイラー積は全然持たない、というか一般にはオイラー積を持つ部分の無限和になっている。これはいろいろな意味で、非常に新しい結果であった。

2. 前史: Contour integral と次元公式（特殊値の時代）

1990 年当時、私は概均質ベクトル空間については全く素人だったので（今もそうだが)、全体がどんな理論なのか、あまり知識がなかった。しかし、対称行列全体のなすゼータ関数の特殊値がジーゲル保型形式の次元公式に現れることは知っており、これについては前から興味が非常にあった。対称行列全体で決まるゼータ関数というのは、とりあえずの定義は

$$\zeta(s,L)=\sum_{T\in SL_n(\mathbb{Z}))\backslash L^+}\frac{1}{|SO(T,\mathbb{Z})|\det(T)^s}$$

である。ここで $S_n(R):=Sym_n(R)$ を R 係数の n 次対称行列の全体とする。$S_n(\mathbb{Q}):=Sym_n(\mathbb{Q})$ に対して $GL_n(\mathbb{Q})$ の作用を $T\to AT\,{}^tA$ と定義する。

$$L_n=S_n(\mathbb{Z})=Sym_n(\mathbb{Z})$$
$$L_n^*=\{T=(t_{ij})\in S_n(\mathbb{Q});t_{ii}\in\mathbb{Z},2t_{ij}\in\mathbb{Z}\}$$

とおく。また $S_n(\mathbb{Q})$ の部分格子 L に対して L^+ を L の中の正定値行列の全体とする。また $T\in L^+$ に対して、

$$Aut(T)=SO(T,\mathbb{Z})=\{A\in SL_n(\mathbb{Z});AT\,{}^tA=T\}$$

としている。これはもちろん有限群である。(注意：$SL_n(\mathbb{Z})$ 同値と $SL_n(\mathbb{Z})$ 自己同型を $GL_n(\mathbb{Z})$ 同値と $GL_n(\mathbb{Z})$ 自己同型に変えても、ゼータ関数は全体が 1/2 倍されるだけである。）ジーゲル保型形式の次元公式の観点からは $\zeta(s,L_n^{*,+})$ の s が負の整数点での値が問題になっていた。

それとは全然違う話なのだが、新谷卓郎氏は、代数体のゼータ関数の特殊値は初等的に公式が与えられるのではないかというヘッケの予

想に興味を持っており、これを contour integral (周回積分表示）で解決した。([86], また日本語の解説は [1] など). またそののちに、山崎正 (1972, 修士論文)、森田康夫 (1974) などの 2 次ジーゲル保型形式の次元公式を契機として、新谷 (1975) は $\begin{pmatrix} 1_n & x \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}$ という形の行列に $\mathbb{Q}$ 共役な元の n 次ジーゲル保形形式の次元への寄与が、初等的な定数を除き $\zeta(r-n, L_r^*)$ $(r = rank(x)$) で与えられるという定理を証明した。当然 $\zeta(r-n, L_r^*)$ は具体的にどういう値なのかが気になるところだったが、これは $n=2$ の場合以外は当時 (1990 年代初め以前）は全く知られていなかった。そこで、本稿では最初に、ゼータ関数の値という観点で、当時、皆がどういう研究を試みてきたのかと言うことから、話を始めたい。

ちなみに、本稿では、途中でいくつか未解決問題というのをあげているが、これはあまり深い理由があって書いているわけではない。とりわけ重要というような意味ではなく、そういえばこういうこともやってなかったな、というような軽い気持ちで書いているが、それでも何かの参考になれば幸いである。

2.1. **周回積分入門.** 普通、周回積分 (contour integral) というのは、次のような道 C に沿った複素線積分のことを言う。

$\epsilon > 0$ を適当な正の数として、複素平面上の曲線で、次の 3 つをつないだもの C を考える。
(1) ∞ から ϵ に向かう道
(2) $(\epsilon, 0)$ から原点を中心として反時計回りに一周する道 $C(\epsilon)$
(3) $(\epsilon, 0)$ から ∞ に実軸上を向かう道、

普通のリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ について $\zeta(1-m)$ (m は ≥ 1 となる整数）の値は以下に示すように周回積分を用いて求まる。

ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は $Re(s) > 0$ について、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

で定義されている。
（ちなみに黒川信重君は、ガンマ関数の逆関数はマンガ関数でリーマン予想を証明するのに必要だと、よく冗談とも本気ともつかないことを言っていた。私が他大学で集中講義をしたのは彼のいたころの東工大 (1985 年？）が初めてで、古澤昌秋君などが出席していた。）

さて、$\Gamma(s)$ の収束範囲は $Re(s) > 0$ である。ここで x を nx に取り替えても dx/x は変わらないから、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nx} (nx)^s \frac{dx}{x}$$

であり、

$$\Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-ns} x^s \frac{dx}{x}$$

である。ここで $Re(s)>1$ ならば積分と和の順序交換ができて、

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}x^{s-1}dx$$

と書ける。しかし、ここで s を $\mathbb{C}$ に拡張したい。そのために、

$$\int_C \frac{1}{e^x-1}x^{s-1}dx$$

を考えたい。C を (1), (2), (3) の 3 つの path に分割する。正の実軸以外で

$$\log(t)=\log|t|+i\arg t \qquad (0<\arg t<2\pi)$$

ととって、t^s の分岐を $e^{s\log t}$ で定義すると、$x=\epsilon e^{i\theta}$ として評価すると

$$\int_C \frac{1}{e^x-1}x^{s-1}dx=\int_{C(\epsilon)}\frac{1}{e^x-1}x^{s-1}dx+(e^{2\pi is}-1)\int_\epsilon^\infty \frac{1}{e^x-1}x^{s-1}dx.$$

である。$C(\epsilon)$ を一周すると x^s の分岐が $e^{s\log x+2\pi is\log x}=e^{x+2\pi is}$ に変るからである。また

$$\left|\int_{C(\epsilon)}\frac{1}{e^x-1}x^{s-1}dx\right|=\epsilon^{Re(s)}\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{is\theta}}{e^{\epsilon e^{i\theta}}-1}\right|d\theta$$

であり、これは $\epsilon\to 0$ で 0 となる。よって、$\zeta(s)$ は

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)(e^{2\pi is}-1)}\int_C \frac{1}{e^x-1}x^{s-1}dx$$

により解析接続される。（後者の積分は任意の s に対して正則である。）
ここで m を正の整数として $s=1-m$ とすると、

$$\frac{1}{e^x-1}x^{-m}=\frac{x}{e^x-1}x^{-m-1}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{B_nx^{n-m-1}}{n!}$$

また

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{s}{\Gamma(s+1)}=\cdots=\frac{s(s+1)\cdots(s+m-1)}{\Gamma(s+m)}$$
$$e^{2\pi is}-1=2\pi i(s+m-1)+O((s+m-1)^2)$$

であるから、

$$\lim_{s\to 1-m}\frac{s+m-1}{\Gamma(s)(e^{2\pi is}-1)}=(-1)^{m-1}(m-1)!/2\pi i.$$

よって留数定理より、$m\geq 1$, $m\in\mathbb{Z}$ に対して、

$$\zeta(1-m)=(-1)^{m-1+m}\frac{B_m}{m}=-\frac{B_m}{m} \tag{1}$$

となる。ほぼ同様の証明で、 χ を modulo $f>0$ の原始的ディリクレ指標とし、一般ベルヌーイ数 $B_{n,\chi}$ を

$$\sum_{a=1}^f \frac{\chi(a)te^{at}}{e^{ft}-1}=\sum_{n=0}^\infty \frac{B_{n,\chi}}{n!}t^n$$

で定義すると、Dirichle の L 関数の特殊値は

$$L(1-m,\chi) = -\frac{B_{m,\chi}}{m} \tag{2}$$

であることがわかる。

3. 1970–1980 年代の Contour integral を用いたいくつかの試み

3.1. 新谷卓郎氏 (1943–1980) の結果.

Theorem 3.1 (Siegel, Klingen, Shintani)**.** F を総実代数体、$\zeta_F(s)$ を F のデデキントゼータ関数とするとき、
(1) （*Siegel, Klingen) F の整イデアル $\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{n}$ の Strahl Klass (=ray class)* $\mathfrak{c}$ を固定して、

$$\zeta_{\mathfrak{n}}(s,\mathfrak{c}) = \sum_{integral\ ideal\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{c}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

と定義するとき、任意の整数 $m \geq 1$ に対して $\zeta_{\mathfrak{n}}(1-m,\mathfrak{c}) \in \mathbb{Q}$ である。
(2) (Shintani) $\zeta_F(1-m)$ を表す初等的な式がある。これは $\mathbb{R}_+^n$ を単数群の基本領域に分解して、

$$(\mathbb{R}_+)^n = \coprod_{j=1}^{m}\coprod_{\epsilon\in E} \epsilon C_j(v_{j1},\ldots,v_{jr(j)})$$

と *simplicial cones* $C_j(v_{j1},\ldots,c_{jr_j})$ に分解し、そのそれぞれで *contour integral* を計算する方法による。

以上は [86], [1] を参照されたい。
次元公式への寄与についてはすでに少し述べたが、あとでまた取り上げる。

3.2. 佐武一郎氏 (1927–2014)・尾形庄悦氏の数学.

佐武先生は、カスプの次元が 0 次元で他にカスプがない数論多様体について、保型形式の次元公式を幾何学的な方法で書いた。そして尾形庄悦氏とともに、いろいろな予想とか、cone のゼータ関数とかを調べた。文献 [71] や [72] は幾何学の話が書いてあるだけで、概均質とは関係ない。しかし symmetric cone (=self dual homogeneous cone) とそれを含むベクトル空間は, 大抵は自然に概均質ベクトル空間となり、有界対称領域の保型形式の次元と関係がある。（実際上は概均質であることが本質的なわけではない。いろいろな技術的手法が似てはいるが。）特に、[70], [73], [74], [60] は、解析的計算に問題が生じないように、cone を作用する離散群の基本領域に分割するときに、その生成元が内点のみからなっているという仮定のもとに、ゼータ関数の特殊値の周回積分による計算法を与えている。佐武先生は、この計算は新谷を見習った物であると述べていた。しかし、実はこの、**生成元が内点のみからなる基本領域分割**というのは、**めったに成り立たない条件**でもある。彼らは次元公式を、0 次元カスプしかない場合について述べている。これは Hilbert modular, 2 次ジーゲルで不定符号四元数環と対応する場合、$SU(n,n)$ と対応する、ある場合などである。これがどの程度具体的な公式なの

か、実はよく知らない。（２次ジーゲルの場合は荒川 [2] の結果があった。ヒルベルト保型形式は文献は略すが、もちろん清水英男の結果がある。）

正直なところ、この佐武の理論ないしは各種の予想の周辺が結局のところ、現在どういう状態に落ち着いているのか、ということが私にはよくわかっていない。尾形氏がいまどうしているのかはよくしらないが一度解説を頼むとよいかもしれない。

3.3. **栗原章氏の数学.** Kurihara [52] は以上の流れで、符号が $(1, n-1)$ の２次形式のジーゲルゼータ関数の特殊値を周回積分で計算しようと試みた。このような符号の２次形式のゼータ関数は $SO(2,n)$ に付随する有界対称領域の次元公式に登場する（[26]）のだが、栗原氏にそのような観点があったかどうかはよくわからない。しかし、当然特殊値が有理数だという目論見はあったものと思う。

さて、S を符号 $(1, n-1)$ の２次形式とすると、領域 $\{x \in \mathbb{R}^n : xS\,{}^t x > 0\}$ はふたつの cone に分解する。たとえば $S = diag(s_1, -s_2, \ldots, -s_n)$ $(s_i > 0)$ ならば $D = \{x_1 > 0, xS\,{}^t x > 0\}$ がその一つである。$x \in D$ に対して、$\Gamma_x = \{\gamma \in SO(S); \gamma x = x\}$ とすると、これは $SO(n-1)$ に埋め込めるので有限群になり、$Q(x) = xS\,{}^t x$ と書くと

$$\zeta(s, Q) = \sum_{x \in SO(S,\mathbb{Z}) \backslash D} \frac{1}{|\Gamma_x| Q(x)^s}$$

と定義するのが自然である。しかし $\zeta(s, Q)$ で, D での基本領域の cone 分割の生成元が内点にあることを条件とすると $Q(x) = 0$ なる点 $x \in \mathbb{Q}^n$ が存在しては困ることになる。一方で、任意の不定符号２次形式は $n \geq 5$ で $\mathbb{Q}^n$ 内に自明でないゼロをもつのは, Hasse 原理により、よく知られている。よって $n \leq 4$ が必要となる。$n = 3$ は本質的にジーゲルに結果があるので、本当に新しいのは $n = 4$ で $Q(x) = 0$ なる $x \in \mathbb{Q}^4$ が存在しない場合ということになる。この場合は contour integral で書くことが一応は可能である。

周回積分で特殊値を書くためには、D の基本領域の分解 (rational open simplicial cones への分解）を考えなければならず、それぞれで、

$$\sum_{m_1, \ldots, m_l = 0}^{\infty} Q\Big(\sum_{i=1}^{l} (\xi_i + m_i) v_i\Big)\Big)^{-s}$$

という形で与えられるゼータ関数の和が $\zeta(s, Q)$ になる。

ところが、これは**周回積分法のあきらかな欠点**だと思うのだが、**基本領域の分解 (open simplicial cones への分解）というところがあまり理論的とは言えず**、分解の取りかたによっては一つ一つの cone に対する $s = 1 - m$ の値は一般に超越数になったりする。それぞれは超越数だが和を採ると有理数、という格好になっている。彼が実際に $n \geq 4$ で得た特殊値の有理性に関する結果は、次のもののみである。

Theorem 3.2 (Kurihara [52]). $Q(x) = x_1^2 - 7x_2^2 - 7x_3^2 - 7x_4^2$ を考えると、分解のそれぞれでの周回積分は超越数だが、まとめると有理数に

なる、つまり $\zeta(0,Q)$ は有理数である。(彼の方法では具体的な値はわからない。)

Proof. 彼の証明はかなりすさまじい。基本領域の分解を 2 種類与えておいて、それぞれの cone からの寄与は大体 $m_1 \log m_2$ というような数であり、全体はその線形結合になるのだが、これらに A. Baker の超越数論を適用して、あらわれる $m_1 \log m_2$ のような形の数が線形独立なことより、有理数でないと矛盾ということをいうのである。 □

その後の発展(ゼータ関数の特殊値ではなくて、ゼータ関数自身を具体的に書きくだし、その結果、特殊値の結果を出す方法)については [31] の第 7 章に詳しく書いたのでここでは繰り返さない。[31] を参照されたい。

3.4. 荒川恒男氏 (1949–2003) の数学:周回積分の終焉. 荒川 [3] は、前述のような状況がよい場合ではなくて、基本領域の生成元が境界に属するものがあって、そのままでは周回積分の経路に特異点が生じるような場合に、むりやり値を求める計算をおこなった。この論文は 70 ページもあり、そのほとんどが計算からなっていて、なかなか読むのが大変な論文である。私は出版された直後に詳しく読んだ。しかし、この方法でスマートな値を与えるのは無理なのだろうな、と逆の意味で納得して、次に進む契機になった。

さて、彼は論文でいろいろなゼータを扱っているが、よくわからない主要なゼータは次のものであった。

p を奇素数とする。$T \in L_2^{*+} = (1/2)S_2^+(\mathbb{Z})_e$ (つまり 2 次の正定値半整数対称行列)とする。このとき、L_2^{*+} 上の関数 ψ を次のように定義する。

もし $rank(T \bmod p) \neq 1$ ならば、$\psi(T) = 0$. もし $rank(T \bmod p) = 1$ ならば、

$$UT\,{}^tU \equiv \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bmod p$$

となる $U \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ が存在するが、このとき、

$$\psi(T) = \left(\frac{t}{p}\right), \qquad \left(\frac{*}{p}\right) \text{ は平方剰余記号}$$

と定義する。ここで

$$L(s, L_2^*, \psi) = \sum_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash L_2^{*+}} \frac{\psi(T)}{|SO(T,\mathbb{Z})| \det(T)^s}$$

と定義する。これは $Re(s) > 3/2$ で絶対一様収束する。ここで問題は $L(1-m, L_2^*, \psi)$ は何かということである。ちなみに、このような L 関数は橋本喜一朗 [14] で始めて導入されたので、当時、何人かの人はこれを橋本の L 関数と呼んでおり、荒川君はこの指標を ψ_H と書いているが、この H は Hashimoto の H であろう。しかし、のちに事情がわかってみるとこのゼータ関数は大雑把に言ってリーマンゼータであり、指標 ψ は 2 行 2 列の対称行列を古典的に 2 次体と解釈すれば、いわゆ

る種指標 (genus character) に過ぎないことがわかったので、現在そのように呼ぶ人はいない。（解決編は [18], [4] を参照。）ちなみに、齋藤さんも論文 [64] で ψ と類似の指標を一般の次数の場合に考えており、Siegel modular form に関する twisting operator などに応用している。

以上の L 関数とその特殊値については、詳しくは、あとの指数和の章を参照されたい。また [18], [20] III も参照されたい。

それはともかく、当時 $L(0, L_2^*, \psi)$ などは何であるか、全くわかっていなかったので、荒川君はこれを計算するために死力を尽くしたわけである。

いずれにしても、計算の基本は cone のガンマ関数であり、一般論は symmetric cone のガンマ関数 (Symmetric tube domain に対応する形式的実ジョルダン代数のなかの self-dual homogeneous cone) としてよく知られている ([12]). 今の場合は, $Y = (y_{ij})$, $T \in S_2^+(\mathbb{R})$ に対して

$$\det(T)^{-s} = \frac{1}{\Gamma_2(s)} \int_{Y>0} \det(Y)^{s-3/2} e^{-tr(TY)} \prod_{1 \le i \le j \le 2} dy_{ij}$$

ただしここで

$$\Gamma_2(s) = \pi^{1/2}\Gamma(s)\Gamma(s-1/2)$$

としている。ここで $Y > 0$ を $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用に関する基本領域に分割するのだが、基本領域は Minkowski の簡約行列の集合

$$R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 & y_{12} \\ y_{12} & y_2 \end{pmatrix} ; 0 \le 2y_{12} \le y_1 \le y_2, 0 < y_1 \right\}$$

にとれる。これは実は cone に分割できる。それにはまず、

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。また $W_i \in S_2(\mathbb{Z})_{\ge 0}$ (半正定値) のときに、

$$C(W_1, \ldots, W_r) = \{ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j W_j ; \lambda_j > 0 \}$$

とおく。ここで $C_{123} = C(V_1, V_2, V_3)$, $C_{ij} = C(V_i, V_j)$ $(i \ne j)$, $C_j = C(V_j)$ $(j = 1, 2)$ とおくと、

$$R_2 = C_{123} \cup C_{12} \cup C_{13} \cup C_{23} \cup C_1 \cup C_2$$

となるのである。（ちなみに、正定値対称行列の空間の cone 分解については、**Voronoi の簡約理論**というのがあって、perfect lattice などを使うものが知られている。たとえば [77] に解説があるようだが、私はあまりきちんと読んだことはない。このあたりの一般化については、たぶん渡部隆夫氏が詳しいのだと思う。将来的に、この分野で使われるべき道具かもしれないと思っている。たとえば、Duke-Imamoglu-Toth [9] には、この方向の話がでている。そこでは [20] I が引用されていて、一つの意外な応用が述べられている。）

ここに登場する各凸錐 C では、C を固定する限り、すべての $Y \in C$ について $|O(Y,\mathbb{Z})|$ は同じになる。そこで, $C \cup L_2^{*+}$ のそれぞれでゼータ関数を考える。つまり $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbb{R}_+^n$ に対して

$$\zeta(s, W_1, \ldots, W_r, \xi) = \sum_{m_1,\ldots,m_r=0}^{\infty} \det(\sum_{j=1}^{r}(\xi_j + m_j)W_j)^{-s}$$

とおく。ここで ξ を適当にうまくとると、$L_2(s, L_2^*.\psi)$ はこれらの線形結合でかける ([3] (2,4,1), (2,4,2))。そこで、$\zeta(s, W_1, \ldots, W_r, \xi)$ を contour integral で計算することになるのだが、$Y > 0$ なる行列は $k \in SO(2)$ に対して $kY\,{}^tk = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$ の形になるので、この $y_1 > 0$ と $y_2 > 0$ で２重の周回積分をするというのが方針である。ところが $r = 3, W_3 = V_3$ のときには V_3 が $S_2^+(\mathbb{R})$ の境界にあるという事情から、一回 y_1 で周回積分をしたあとに、y_2 で周回積分を続けようと思ったら、この積分路がそこら中で特異点を横切ってしまって、うまく帰着できないので、その手前で計算をやめて、評価する。ここが [3] の最も難しい部分であり、今見ても、その膨大な計算には圧倒される。

$n = 2$ でもここまで難しいのだから、$n = 3$ を試みる人は昔はいなかったのだが、最近　Brad Isaacson が試みたいと言っていた。まあどうなるのか、お手並み拝見というところである。

次元公式という観点からは、当該の L 関数自身が単純な関数であるということが後に [18] でわかってしまったので、荒川の手法は避けることができる。ちなみに、類似の L 関数の n が一般の場合は論文 [20] の III に述べてある通りである。このパート III の論文を読んだ人は、レフェリー以外にはいないのではないかと思っていたが、最近 Brad Isaacson が真面目に読んでいるようである。

荒川以降、contour integral で何かを求めようとした例は聞いたことがなく、ここで現在のところ歴史が途絶えているように見える。前にも述べた通り、それがかえって次のステップに進める契機になったとも言えるのである。実際にゼータの明示公式の研究を開始したのは、私が 1991 年に $L(s, L_2^*, \psi)$ の明示公式を発見したことが契機であり、歴史的な順番としては、その話を先に述べた方がいいのかもしれないが、それについては、またあとの第 9 節の指数和の話で述べることにして、ここで歴史の流れを無視して、ゼータの明示公式の話に移る。

4. 対称行列全体のなす概均質ベクトル空間のゼータ関数

以下、しばらくの間 [20] I, II, III の解説を行う。最初は、取り合えず正定値全体のなす空間のゼータ関数を定義する。（ゼータ関数をいろいろな符号で考えるのは、概均質は $\mathbb{R}$-orbit 分解で考えているからで、$\mathbb{R}$-orbit ごとに定義上別のゼータ関数があって、これらのゼータ関数のなすベクトルの間に関数等式があるというのが、佐藤・新谷の一般論である。しかし、後で見るように、この一般論には非常に misleading な点がある。）

4.1. **ゼータ関数の定義.** 記号を準備する。R を $\mathbb{R}$、または $\mathbb{Q}_p$ の単位部分環とする。また $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$ とする。このとき、次のように記号を定める。

$S_n(R)$: R 係数の n 次の対称行列全体の集合。

$S_n(R)_e$; $S_n(R)$ の元で、対角成分が $2R$ に属するもの.

$S_n(R,d)$; $x \in S_n(R)$ で $\det(x) = d$ となるもの全体の集合

$S_n(R,d)_e = S_n(R,d) \cap S_n(R)_e$.

また $R = \mathbb{R}$ (実数体）のとき

$$S_n^{i,n-i}(\mathbb{R},d) = \{x \in S_n(\mathbb{R},d) : x \text{ の } \mathbb{R} \text{ で符号が } (i,n-i)\}$$

とおく。特に $L_n = S_n(\mathbb{Z})$, $L_n^* = \frac{1}{2}S_n(\mathbb{Z})_e$ とおく。実は $S_n(\mathbb{Q})$ の部分格子で $SL_n(\mathbb{Z})$ で不変なものは、$n \geq 3$ のときは定数倍を除いて L_n または L_n^* に限る ([20] I Lemma 1.1)。($n = 2$ のときは、定数倍を除き、全部で 4 つあるのは [18] に記載してある通りである。)

L^+ を L のなかで正定値のものの全体を表す。L を $SL_n(\mathbb{Z})$ で不変と仮定する。正定値の対称行列全体に付随する概均質ベクトル空間のゼータ関数の定義はそれなりに単純で

$$\zeta(s,L^+) := \zeta_n(s,L) = \sum_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash L^+} \frac{1}{|SO(T,\mathbb{Z})| \det(T)^s}$$

で与えられる。ここで添え字の n は符号が $(n,0)$ であることを示している。前に述べたように、実際には $L = L_n$ または L_n^* を考えている。L_n と L_n^* は内積 $Tr(xy)$ (x, $y \in S_n(\mathbb{Q})$) に対し、互いに dual lattice である。$\zeta_n(s,L_n) = \sum_{d>0} a(d)d^{-s}$ と書くとき、d^{-s} の係数は

$$a(d) = \sum_{T \in SL_n(\mathbb{Z})\backslash S^+(\mathbb{Z},d)} \frac{1}{|SO(T,\mathbb{Z})|}$$

である。

$\mathbb{Z}_v = \mathbb{R}$ (if $v = \infty$), $\mathbb{Z}_v = \mathbb{Z}_q$ (q 進整数環) (if $v = prime\ q$) と書くことにする。2 次形式論で T_1, $T_2 \in L_n$ でかつ、すべての v に対し、ある $U_v \in GL_n(\mathbb{Z}_v)$ があって、${}^tU_vT_1U_v = T_2$ となるとき、T_1 と T_2 は同じ種 (genus) $\mathfrak{L}$ に属するという。同じ種に属する T については $\det(T)$ は同じであるので、これを $d(\mathfrak{L})$ または $\det(\mathfrak{L})$ と書くことにしよう。$S^+(\mathbb{Z},d)$ は一般にいくつかの異なる種にわかれるが、もちろん $S_n^+(\mathbb{Z},d)$ 自身が単一の種であることもある。L_n ではなくて L_n^* を考えるときは $S(\mathbb{Z})_2 = 2L_n^*$ として、$d = \det(2T)$ を考えることになる。

それはともかく、1 つの種に対して、

$$M(\mathfrak{L}) = \sum_{T \in GL_n(\mathbb{Z})\backslash \mathfrak{L}} \frac{1}{|O(T,\mathbb{Z})|}$$

は種の Mass と呼ばれる。$T \in \mathfrak{L}$ に対して

Theorem 4.1 (Siegel and Minkowski)**.** $n \geq 2$ で次が成り立つ。

$$M(\mathfrak{L}) = 2\frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{i}{2})}{\pi^{n(n+1)/4}} \det(\mathfrak{L})^{(n+1)/2} \times \frac{1}{\prod_p \alpha_p(\mathfrak{L},\mathfrak{L})}.$$

ここで $\alpha_p(T,T)$ の定義は Siegel のよるもので、

$$\alpha_p(T,T) = 2^{-1}\lim_{r\to\infty}(p^r)^{n(n+1)/2-n^2}A_{p^r}(T,T).$$

ただし、

$$A_{p^r}(T,T) = \{X \in M_n(\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p); T[X] \equiv T \bmod p^r(S_n(\mathbb{Z}_p))\}$$

とおく。$\alpha_p(T,T)$ の定義では極限を取っているが、実際には r が十分大きくなると、極限の中身は一定になる。つまり十分大きい r については、これは極限ではなくて等式になるわけである。T から T への local density $\alpha_p(T,T)$ の具体的な公式は、昔からいろいろな論文があるが、大抵ミスプリがある。私の知る限り、もっとも正確で信用できる文献は [45] であって、[45] p. 108 Theorem 5.6.3 で $\beta_p(T,T)$ を調べた後に、[45] p. 98 の関係式

$$\alpha_p(T,T) = 2^{n\delta_{2,p}-1}\beta_p(T,T)$$

によって、$\alpha_p(T,T)$ を求めればよい。（Theorem 5.6.3 の公式は書き方があまりわかりやすくない点もあって、非常に注意深く読まないと読み間違えそうになるので注意が必要であるが、私の知る限り、完全に正しい式が書いてある。）

たとえば、p が奇数で $\det(T) \in \mathbb{Z}_p^\times$ (local に unimodular) のときは、大雑把に言って

$$\alpha_p(T,T) \sim \prod_{\nu=1}^{[n/2]}(1-p^{-2\nu})\begin{cases} 1, & n \text{ 奇数の場合} \\ 1+p^{-n/2}\left(\frac{(-1)^{n/2}\det(T)}{p}\right), & n \text{ 偶数の場合}\end{cases}$$

である。このように n が奇数と偶数で local density が非常に異なり、これが最終結果の違いまで大きく影響する。

以上は $T[X] \equiv T$ と T を T で表す話をしていた。ここで行き先を S に変えて $T[X] \equiv S$ で、T から S への local density というのが、定義される。$T \neq S$ の場合（たとえば S のサイズが T より小さい場合など）の local density $\alpha_p(T,S)$ を完全に具体的に書いた公式の文献は佐藤・広中 [76], Tonghai Yang [103](p odd), Tonghai Yang [104]($p=2$) などがあると思うが、使ったことはないので、詳しくは知らない。

4.2. $GL_n(\mathbb{Z})$ **同値と** $SL_n(\mathbb{Z})$ **同値.** われわれは、ゼータ関数の定義を $SL_n(\mathbb{Z})$ 同値で与えていた。（これは元々の新谷の定義に合わせてあるからである。）

しかし上の Mass formula は $GL_n(\mathbb{Z})$ で考えているので、両者のずれを見ておく必要がある。そもそも $[GL_n(\mathbb{Z}) : SO_n(\mathbb{Z})] = 2$ なので、$O(T,\mathbb{Z}) = \{g \in GL_n(\mathbb{Z}) := gT\,{}^tg = T\}$ として、$[O(T,\mathbb{Z}) : SO(T,\mathbb{Z})] \leq 2$ である。$[O(T,\mathbb{Z}) : SO(T,\mathbb{Z})] = 2$ ならば、T と $GL_n(\mathbb{Z})$ 同値なものは、$SL_n(\mathbb{Z})$ 同値でもある。この場合

$$\frac{2}{|O(T,\mathbb{Z})|} = \frac{1}{|SO(T,\mathbb{Z})|}$$

一方で $O(T,\mathbb{Z}) = SO(T,\mathbb{Z})$ ならば、$gT\,{}^tg = hT\,{}^th$ (g, $h \in GL_n(\mathbb{Z})$, $\det(g) = -1$, $\det(h) = 1$) とすると $gh^{-1} \notin SO(T,\mathbb{Z})$ となって矛盾だ

から、T と $GL_n(\mathbb{Z})$ 同値であるが、$SL_n(\mathbb{Z})$ 同値でないものがひとつある。この場合

$$\frac{1}{SO(T,\mathbb{Z})}+\frac{1}{SO(gT\,{}^tg,\mathbb{Z})}=\frac{2}{|O(T,\mathbb{Z})|}$$

である。つまり $SL_2(\mathbb{Z})$ 同値で考えたときの mass は $GL_n(\mathbb{Z})$ **同値で考えたときの Mass の２倍である。**よって、Siegel and Minkowski の定理を $SL_n(\mathbb{Z})$ 同値な分類に読み替えると

$$c_n = 2\pi^{-n(n+1)/4}\prod_{i=1}^{n}\Gamma(i/2)$$

とおくとき、

$$\sum_{T\in SL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{L}} = 2c_n \det(\mathfrak{L})^{(n+1)/2}\prod_p \alpha_p(T,T).$$

である。

4.3. 一般の符号の場合のゼータ関数の定義. まえに、とりあえず正定値の場合のゼータ関数の定義を述べたが、概均質ベクトル空間の一般論では、$T\in S_n(\mathbb{Z})$ の符号が $(i,n-i)$ (i 個プラス、$n-i$ 個マイナスの固有値を持つ場合）も考えるのが自然である。$i(n-i)\neq 0$ の場合は、$SO(T,\mathbb{Z})$ は有限群では無いから、$|SO(T,\mathbb{Z})|$ で割るという訳にはいかない。この場合は、適当な測度について、$\mu(T)=vol(SO(T,Z)\backslash SO(T,\mathbb{R}))$ を代わりにとればよい。しかし、たとえば、T が $n=2.\ i=1$ (不定符号２元２次形式）で、かつ $-\det(T)$ が平方数の時は、この体積は有限にならないので、そこをどう修正するかという問題がある。これに対しては新谷 [85], 佐藤文広 [75], 伊吹山・齋藤 [20] II の三通りの解答の与え方があるが、今は略す。(あとで Degeneration for $n=2$ という小節で少し述べる。）一方で $n\geq 3$ の場合でも問題があって、S はいろいろあって、いろいろな S についての和を考えるのだから、結局のところ、全体的にどう統一して測度の定数などをとるのか、というような問題は当然あるわけで、これはたとえば、[20] I あるいは、[31] 第７章 section 3.3 に述べてある通りである。ここでは具体的に [85], [20] の通りに述べる.

個々の $x\in S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z})$ に対し、$\mu(x)$ を定義したい。$GL_n(\mathbb{R})$ の測度を $g=(g_{ij})\in GL_n(\mathbb{R})$ に対し、$dg=\det(g)^{-n}\prod_{i,j}dg_{ij}$, $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{R})$ の測度を $y=(y_{ij})={}^ty$ に対して、$dy=|\det(y)|^{-(n+1)/2}\prod_{1\leq i\leq j\leq n}dy_{ij}$ と定義する。K を $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{R})$ の相対コンパクト集合として、$x\in S_n^{(i,n-i}(\mathbb{R})$ に対して、K_0 を $GL_n^+(\mathbb{R})=\{g\in GL_n(\mathbb{R});\det(g)>0\}$ の元で $g\to gx\,{}^t\in K$ となるものの全体とする。また $\Gamma_x=\{x\in SL_n(\mathbb{Z}):\gamma x\,{}^t\gamma=x\}$ とおく。（一般に無限群である。）Γ_x は Y に作用するが、この作用の基本領域を Y_0 とする。このとき

$$\mu(s)=\int_{Y_0}dg\backslash\int_K|\det(y)|^{-(n+1)/2}dy.$$

と定義する。特に $x\in S_n^{(n,0)}(\mathbb{Z})$ のときは

$$c_n\mu(x) = \frac{1}{|SO(x,\mathbb{Z})|}$$

となる。(本当に具体的な測度という点では [31] の解説の方がわかりやすいかと思うので、興味のある方はそちらを参照されたい。)

いずれにせよ。符号 $(i, n-i)$ なる $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z})$ に関するゼータ関数は

$$\zeta_i(s, L) = c_n \sum_{x\in SL_n(\mathbb{Z})\backslash L\cap S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{R})} \frac{\mu(x)}{\det(x)^s}$$

と定義する。

Minkowski Siegel の Mass formula というのは、定符号でない場合も全く同様に成立する。これは以下のようになる。

Theorem 4.2 (Siegel formula)**.** $\mathfrak{L}$ を $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z}, d)$ 内の種とするとき、

$$\sum_{x\in SL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{L}} \mu(x) = 2|d|^{(n+1)/2}\prod_p \alpha_p(x)^{-1}$$

ただし、簡単のため $\alpha_p(x,x) = \alpha_p(x)$ と書いた。定符号の場合は $c_n\mu(x) = 1/|SO(x,Z)|$ に合わせたいので、定義は一般の符号でも c_n を掛けている。

4.4. 定義から直ちに思いつく、ゼータ関数のナイーブな計算法.

4.4.1. 種になるのは何か?*(global vs local).* まず最初に問題になるのは、local にどのような行列を集めると、これが global からくるものになるのか、つまり $S_n(\mathbb{Z}, d)$ に含まれる種の全体は何なのかである。

$$S_n(\mathbb{Z}_p, d) = \{x \in S_n(\mathbb{Z}_p); \det(x) = d\}$$

とおくと、$S_n(\mathbb{Z}, d)$ に含まれる種全体のなす集合を $S_n(d,\mathbb{Z})/\sim$ と書くとき、これからの写像

$$S_n(\mathbb{Z}, d)/\sim \to \prod_p (GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p, d)) \tag{3}$$

が自然に定まり、これは定義により明らかに単射だが、全射では無い。ここで $x \in Sym(\mathbb{Z}_p)$ で $\det(x) \neq 0$ のとき、x の Hasse invariant を次のように定義する。まず x は $GL_n(\mathbb{Q})$ 同値 (i.e. $x \to Ux\,{}^tU$) で対角化可能なことはよく知られている。ここで x が $diag(a_1, \ldots, a_n)$ と同値とするとき、任意の $\mathbb{Q}$ の place $v = \infty$ or prime に対して、

$$\epsilon_v(x) := inv_v(x) = \prod_{1\le i\le j\le n} (a_i, a_j)_v$$

とおく。ここで $(a_i, a_j)_v$ は v でのヒルベルト記号で $a_ix^2 + a_jy^2 = 1$ が $(x.y) \in \mathbb{Q}_v^2$ なる解を持てば $+1$, 持たなければ -1 としている。(ちなみにこれは O'Meara [62] の定義であり、Serre [79] の定義はこれとは

異なっている。）ヒルベルト記号の定義により、Hasse invariant では、あきらかに積公式が成り立ち

$$\prod_v \epsilon_v(x) = \prod_v inv_v(x) = 1$$

である。よって (3) は全射ではない。しかし、この写像の像は決定できる。記号として $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z}, d)$ を、行列式が d, その $\mathbb{R}$ 上の対称行列としての符号が $(i, n-i)$（つまり正の固有値 i 個、負の固有値 $n-i$ 個）の対称行列の集合とする。ここで $x \in S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z}, d)$ ならば、$(1,1)_\infty = (1,-1)_\infty = 1$, $(-1,-1)_\infty = -1$ だから、$\epsilon_\infty(x) = inv_\infty(x) = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ である。

Proposition 4.3. 自然な写像

$$(4) \quad S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z}, d)/\sim \ni x \longrightarrow$$
$$\{(x_p) \in \prod_{p:prime} (GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p, d)); \prod_p \epsilon_p(x_p) = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}\}$$

は全射である。

上の命題は、要するに $det = d$ となる局所的な対称行列 x_v を（$v = \infty$ をこめて）$\prod_v \epsilon_v(x_v) = \prod_v inv(x_v) = 1$ となるように集めてきたら、これは global から来る、と言っているわけだが、$v = \infty$ での Hasse invariant は $(i, n-i)$ ではなくて、$(-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ にしかよらず $(i, n-i)$ 自身に依っているわけではないという点は、ゼータ関数の個数が見かけ上よりも減っている原因であって、これはなかなか面白い。

Proof. さて、[20] I では簡略な証明を与えているが、やや簡略すぎるように思うので、ここでは読者の便宜のために詳しく証明する。まず、素数での local な $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ 上の同型類は、行列式 d, 次元 n, Hasse invariant $int(x_v)$ のみで決まっている (O'Meara [62]). このような x が局所的に存在するための条件は $n = 1$ ならば必然的に $inv_p(x_p) = (det(x_p), -1)_p$ が条件である。$n = 2$ ならば $-1 \in \det(x)(\mathbb{Q}_p^\times)^2$ のときは, $(\det(x), -1)_v = inv_v(x_v)$ が条件 (つまり $<1>\perp<-1>$ のときである。）それ以外（たとえば $n \geq 3$ ならいつでも）は無条件である ([62] Theorem 63.23)。しかし、以上は今の議論にはあまり関係が無い。問題なのは、局所的に $(x_v) \in \prod_v Sym_n(\mathbb{Q}_v)$ かつ $det(x_v) = d$ を与えたときに, 一体いつ $x \in Sym_n(\mathbb{Q})$ で、$x \sim x_v$ ($GL_n(\mathbb{Q}_v)$ 同値）となる x が存在するかである。これはたとえば O'Meara [62] Theorem 72.1 に解答がある。答は、
(1) $d \in \mathbb{Q}^\times$ があって、すべての place v で $\det(x_v) = d$.
(2) ほとんどすべての v に対して $inv_v(x_v) = 1$.
(3) $\prod_v inv_v(x_v) = 1$.
である。これはつまり与えられた $(x_v) \in \prod_v S_n(\mathbb{Q}_v)$ に対して $\mathbb{Q}$ 上の元 $x \in S_n(\mathbb{Q})$ で, すべての素点 v に対し $\mathbb{Q}_v$ 上 x_v と同値な元が存在するための条件である。ここでわれわれの場合、条件 (2) は自動的に成

り立つ。何故かというと、われわれは $x_p \in S_n(\mathbb{Z}_p, d)$ としているので、実は $p \neq 2$ のときは、x_p は $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ で対角化され、$d \in \mathbb{Z}$ ともしているので、$p \nmid d$ ならば $\epsilon_p(x_p) = 1$ になる。（言い換えると $2d$ と素な素数では $\epsilon_p(x_p) = 1$ である。）また (1), (3) は取りかたの条件であるからそう取っておくことにすれば、関係ない。よって、とにかく global な $S_n(\mathbb{Q})$ の元 x で local に $\mathbb{Q}_v$ 上 x_v と同値になるものがあるわけである。次なる問題は、どういう (x_v) の集合が、ある $x \in S_n(\mathbb{Z})$ とすべての v で $GL_n(\mathbb{Z}_v)$ 同値になるかである。ここで $x_\infty = diag(1_i, -1_{n-i})$ と取っておくことにする。以上により、(4) の右辺の元を (x_v) とすると、前に述べた $\mathbb{Q}$ 上の話より、$y \in S_n^{i,n-i}(\mathbb{Q})$ であって、すべての素数 p についてある $g_p \in GL_n(\mathbb{Q}_p)$ が存在して、$x_p = g_p y\, {}^t g_p$ となる。さて、次に $\mathbb{Z}_p$ 上の同値を見る。p を $y \in S(\mathbb{Z}_p)$ となるような素数とする。もちろん有限個の素数を除き、これは成り立っている。ここで $p \nmid 2d$ とすると、$\det(y) = \det(x_p)$ は p と素であるから、$y, x_p \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ である。このような行列は unimodular という。奇素数 p に対しては unimodular な整数行列は $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 同値で

$$\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

と同値であることが知られている。（[45] Theorem 5.2.4, [31] p.301 命題 7.6). ということは y を x_p は、ほとんどすべての p で $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 同値でもあると言うことである。言い換えると $(g_p) \in GL_n(\mathbb{Q}_{A_f})$ ($\mathbb{Q}_{A_f}$ はアデールの有限部分) としてよい。強近似定理により、$M_n(\mathbb{Q})$ の類数は 1 だから、$(g_p) = (\gamma_p)\gamma, (\gamma_p \in GL_n(\mathbb{Z}_p), \gamma \in GL_n(\mathbb{Q}))$ としてよい。$x = \gamma y\, {}^t\gamma$ とおけば、$x \in S_n(\mathbb{Q})$ だが、$x_p = g_p y\, {}^t g_p = \gamma_p(x) {}^t\gamma_p$ である。ここで $\gamma_p \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$　より $x \in \cap_p S_n(\mathbb{Z}_p) = S_n(\mathbb{Z})$ である。また y は ∞ で $diag(1_i, -1_{n-i})$ と同値なのだから、もちろん $x \in S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{R})$ であり、よって $SL_n(\mathbb{Z})\backslash S^{(i,n-i)}(\mathbb{Z}, d)$ から $(x_v) \in \prod_v GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p, d)$ with $\prod_v \epsilon_v(x_v) = 1$ への全射もわかる。 □

以上の (4) と Mass formula を用いて、局所的な計算に帰着できたことになる。面倒なので $\alpha_p(x, x) = \alpha_p(x_v)$ および $\epsilon_v(x_v) = inv_v(x_v)$ と書くことにして、局所的な計算というのは、要するに

$$\sum_{x_p \in S_n(\mathbb{Z}_p, d)/\sim} \alpha_p(x_p)^{-1}$$

を計算して、これを $\prod_p \epsilon_v(x_p) = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ となるような各 p について 掛け合わせて、$|d|^s$ でわるということである。

重大な観察

以上から直ちにわかることだが、実は $\zeta_i(s, L)$ は ∞ での Hasse invariant $\epsilon = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ および、d の符号 $\delta = (-1)^{n-i}$ にしかよっていないのである。だから、

$$\zeta_i(s, L) = \zeta(s, L, \delta, \epsilon)$$

とでも書く方が正当である。（実際、[20] ではそのような書き方をした。）さらには $T \in S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z})$ ならば $-T \in S_n^{(n-i,i)}(\mathbb{Z})$ であるから、

$\zeta_i(s,L)=\zeta_{n-i}(s,L)$ である。だから、概均質ベクトル空間の一般論では $n+1$ 個あるはずのゼータ関数は、実際上は 2 つか 3 つしか異なるものはないのである。以上は、概均質ベクトル空間の一般論からはわからないことであるが、一方で、定義からは直接的にわりとすぐわかることなのである。

したがって、関数等式は大幅に簡略化される。これは [20] II に詳しく書いてある。実際上、関数等式はゼータ関数の具体形より、直接証明される。一般論と比較して証明を試みたことはないので、比較したら、何かいいことがあるのかないのか、よくしらない。たとえば、一般論では f という test function がついた関数を考えているので、そのようにすると何か変わったことがでるのかどうかはよく知らない。

4.5. **問題 1：積の条件 $\prod_v \epsilon_v(x_v)=1$ をどうするのか?.** これを解決する方法は単純で

$$\frac{1}{2}\Bigg(\prod_p \sum_{x_p\in GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p,d)} \alpha_p(x_p)^{-1}+ (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}\prod_p \sum_{x_p\in S_n(\mathbb{Z}_p,d)/\sim} \epsilon_p(x_p)\alpha_p(x_p)^{-1}\Bigg) \tag{5}$$

をとれば、$\prod_p \epsilon(x_p)=(-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ のところだけ残る。

歴史的に言えば、最初の unknown case である $n=3$ のときは、$GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p,d)$ の分類と、[49] の $n=3$ に対する具体的な Mass formula を用いて、正定値の場合に私が無理矢理計算しきったのが理論の始まりであった (１９９２年1月１６日夜半)。結果は

$$\zeta_3(s,L_3^*)=\frac{2^{2s}}{24}\Big(\zeta(s-1)\zeta(2s-1)-\zeta(s)\zeta(2s-2)\Big)$$

であった。この単純さには驚嘆した。

4.6. **問題２：局所的な同型類 $GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p,d)$ をどう記述するか.**

これは p が奇数ならば同型類は標準的なジョルダン分解と 1 対 1 であることがわかっている。また p が奇数の時は $\alpha_p(x)$ の公式は易しい ([45] または [49]). よってジョルダン分解ごとに直接計算するという手段がとれる。実際に最初はこの場合を一般の次数で計算したわけで、その結果が大変きれいだったので、次に進む気になれた。

しかし、問題は $p=2$ である。$p=2$ のときの $GL_n(\mathbb{Z}_2)$ 同値類の分類はわかっていた（O'Meara [62]). しかしこれは愕然とするぐらい複雑なものだった。

北岡良之さん曰く。あれは分類ではなくて、分類の存在定理にすぎない。

最初はこの分類を用いて計算を試みていたのだが、らちがあかなかった。これに対する解答は、

「種で分類して local density で考えるのをやめていきなり $\det(x_p)=d$

全体で Siegel Minkowski にあたる公式を書く。」と言うものであった。具体的な方針は以下の通りである。

まず $R_\nu = \mathbb{Z}_p/p^\nu\mathbb{Z}_p$ とおく。任意の環 R に対して、

$$GL_n^d(R) = \{g \in GL_n(R); (\det g)^2 d = d\}$$

とする。（たとえば $R = R_\nu$ ならば、d は可逆とは限らないから、$\det(g)^2 = 1$ にできるわけではない。）

ν が十分大ならば

$$GL_n^d(R_\nu)\backslash S_n(R_\nu, d) \cong GL_n^d(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p, d)$$

である。R_ν の方で考えると、多少有限集合だから考えやすい点がある。

$n = n_1 + \cdots + n_m$ $(n_i \in \mathbb{Z}_{>0})$ を n の partition, $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ を整数列とする。

$S_n^0(R_\nu, d, \{n_i\}, \{t_i\})$ を $S_n(R_\nu, d)$ の部分集合で次の形の元からなるもの全体とする。

$$x = \begin{pmatrix} p^{t_1}x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{t_2}x_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p^{t_m}x_m \end{pmatrix}$$

の形で、各 $x_i \in S_{n_i}(R_\nu)$ が unimodular, かつ $det(x) = d$ であるもの。また

$$S_n(R_\nu, d, \{n_i\}, \{t_i\})$$

を $S_n^0(R_\nu, d, \{n_i\}, \{t_i\})$ の元と $GL_n(R_\nu)$ 同値な $S_n(R_\nu, d)$ の部分集合全体とする。（もちろんジョルダン分解に関する定理により、任意の $x \in S_n(R_\nu, d)$ は $S_n^0(R_\nu, d, \{n_i\}, \{t_i\})$ のどれかの元と $GL_n(R_\nu)$ 同値になる。）

4.7. **Igusa local zeta.** 実は、後から気がついたのだが、われわれの local なゼータ関数は、井草が研究していたいわゆる Igusa local zeta と関係がある。単純な場合で言えば、Igusa local zeta というのは、K を local field, R を K の整数環とするとき、多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に対して

$$\int_{R^n} |f(x_1, \ldots, x_n)|^s dx_1 \cdots dx_n$$

と定義される。我々の計算はこれよりは詳細なことをやっている。実際、たとえば $S_n(\mathbb{Q}_p)$ に関する Igusa local zeta はわれわれの結果から計算できる。またわれわれはHasse symbol 付きの local zeta を必要としているという点からも既存の Igusa local zeta の計算よりは細かい。(Igusa では character つきの計算というのは、やられていない。）詳しく述べるのは面倒なので、ここでは [34] を引用するにとどめておく。いくつかの単純な古典領域のゼータ関数（たとえは４元数的エルミート上半空間の次元に関係するゼータなど）は、Igusa zeta から単純に計算されるはずである。しかし、できそうなことがすべて論文として発表されているわけではない。私自身は、どうも新しいことを発見すると言う方向に目が向きがちで、この数学に限らず、やったことの後

始末をきっちりしなかったきらいがあるのは反省点である。$\mathbb{Q}$ を一般の代数体上に変えた話とか、２次形式をエルミート形式に変えるなどの、いくつかの具体的な一般化等々の、関連する齋藤裕さんの業績については、[66], [67], [68], [69] などを参照されたい。このあたりのことをちゃんと後始末するというのが、私と齋藤さんの気質の違いであろうか。齋藤さんは現職のまま亡くなったが、また聞きであるが、「数学上の仕事はちゃんとやったので、思い残すことは何もない」、と述べていたそうである。これはどうも私には持ちえない感想に思われる。

4.7.1. キーポイント（１）. 記号 ω を $\omega = \iota$ (恒等写像 1) または ϵ_v としよう。

$$\lambda_\nu(d,\omega) := p^{(n(n-1)\nu/2} \sum_{x \in GL_n^d(R_\nu)\backslash S_n(R_\nu,d)} \frac{\omega(x)}{|O(x)|}$$

とおくと、これは結局、$S_n(R_\nu,d)$ 上での ω の和に帰着する。つまり

$$\begin{aligned}\lambda_\nu(d,\omega) &= \frac{2}{|GL_n^d(R_\nu)|} p^{(n(n-1)\nu/2} \sum_{x \in S_n(R_\nu,d)} \omega(x) \\ &= \frac{2^{-\delta_{2,p}} p^{v(d)+(n(n-1)\nu/2}}{|SL_n(R_\nu)|} \sum_{x \in S_n(R_\nu,d)} \omega(x)\end{aligned}$$

となる。ここで $S_n(R_\nu,d)$ は $S_n(R_\nu,d,\{n_i\},\{t_i\})$ の和に分解するわけである。ここですでに何と何が同値かと言う話は消滅している。

4.7.2. キーポイント（２）. $S_n(R_\nu,d,\{n_i\},\{t_i\})$ での和を $S_n^0(R_\nu,d,\{n_i\},\{t_i\})$ での和に帰着するには次の補題を用いる。

Lemma 4.4. 有限集合 S に有限群 G が作用しており、ω を G の作用で不変な S 上の関数とする。S の部分集合 S_0 が S の元の任意の G 軌道と交点があるとする。また $s_0 \in S_0$ に対して、

$$H_{s_0} = \{g \in G : gx_0 \in S_0\}$$

と定義する。ここで、もし $|H_{s_0}|$ が $s_0 \in S_0$ の元の取り方によらないならば、

$$\frac{1}{|S|}\sum_{x\in S}\omega(x) = \frac{1}{|S_0|}\sum_{x\in S_0}\omega(x)$$

となる。

この補題において $S = S_n(R_\nu,d,\{n_i\},\{t_i\})$, $S_0 = S_n^0(R_\nu,d,\{n_i\},\{t_i\})$, $G = GL_n^d(R_\nu)$ とすると、仮定が成り立つことがわかる。この証明は、実際に $|H_{s_0}|$ を m に関する帰納法で行列計算することにより求めることによる。(m は分割の個数だった。)

4.7.3. キーポイント（３）.

$$\lambda_\nu(d,\omega,\{n_i\},\{t_i\}) = 2^{-\delta_{2,p}} p^{-v(d)+n(n-1)\nu/2} |SL_n(R_\nu)|^{-1} \sum_{x\in S_n(R_\nu,d,n_i,t_i)} \omega(x)$$

$(v(d)=\sum_{i=1}^m n_i t_i)$ として、これをキーポイント (2) の手法で具体的に計算しきってしまう。p 奇数と $p=2$ では、このようにしてもやはり難しさがかなり違う。Partition $\{n_i\}$ において、すべての n_i が偶数の時 $\{n_i\}$ を even, ひとつでも odd な n_i があるとき $\{n_i\}$ を odd という。これらにわけて計算する必要が生じる。たぶん一番易しい場合は次の場合である。

結果の例：$\omega=\iota$, $t=\sum_{i=1}^m n_i t_i$. $d=p^t d_0$. $(d_0\in\mathbb{R}_{\nu-t}^\times)$. で、かつ p が奇数の時、

$$\lambda(d,\iota,\{n_i\},\{t_i\}) = p^{Q(\{n_i\},\{t_i\})} \prod_{i=1}^m (p^{-2})^{-1}_{[n_i/2]} \times \begin{cases} 1 & \text{if } \{n_i\} \text{ is odd} \\ 1+((-1)^{n/2}d_0,p)p^{-n/2} & \text{if } \{n_i\} \text{ is even.} \end{cases}$$

ただし、

$$Q(\{n_i\},\{t_i\}) = -\sum_{i=1}^m \frac{n_i(n_i+1)}{2} t_i - \sum_{1\le j<i\le m} n_i n_j t_j$$

また

$$(p^{-2})_n = \prod_{i=1}^n (1-p^{-2i}) \qquad n=0 \text{ ならば } 1$$

とおいた。これ以外に p が odd で $\omega=\epsilon_v$, $p=2$ で $\omega=\iota$ or ϵ_v で $\{n_i\}$ が odd と even といろいろ場合分けして計算する。結果は [20] I に書いてあるので, ここでは省略する。

4.8. 問題３：足し算のまとめ方.

場合分けした Local な計算の足し算を、どうやって綺麗なものに変えるか？我々が本当にほしいのは、

$$Z_n(u,\omega,d_0) = \sum_{\{n_i\}} \sum_{0\le t_1<t_2<\cdots<t_m} \lambda'(p^t d_0,\omega,\{n_i\},\{t_i\}) p^{(n(n+1)/2)t} u^t$$

である。ここで $t=\sum_i n_i t_i$, また λ' というのは, $\omega=\epsilon_p$ のときに λ を少しだけ modify するのであるが計算にとってはあまり本質的ではないので、定義は省略する。この級数は、大雑把に言って

$$\frac{1}{(1-p^{-2})(1-p^{-4})\cdots(1-p^{-n_i})}$$

などにいろいろな係数を掛けて和を取るという、かなりゴタゴタした量である。しかし、実例としては、たとえば n が奇数の時には、和を

取った結果は大変綺麗で

$$Z_n(u,t,d_0) = 2^{-\delta_{2,p}} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (1-p^{-2i})^{-1}$$
$$\times (1-p^{(n-1)/2}u)^{-1} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (1-p^{2i-1}u^2)$$

となる。このような和が綺麗になる保証は、一体どこから来るのか？

この解答は、q series の (q analogue 風の）公式にある。q 級数の理論より、次の定義をする。

$$(U,q)_m; = \prod_{i=1}^{m}(1-q^{i-1}U) \qquad \text{ただし } m=0 \text{ なら } 1 \text{ とする.}$$

$$(q)_m := (q,q)_m = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m), \qquad \binom{m}{r}_q = \frac{(q)_m}{(q)_r(q)_{m-r}}$$

q アナローグにおいて $1-q^n$ （ないしは $(1-q^n)/(1-q)$) は $n = \lim_{q\to 1}(1-q^n)/(1-q)$ の代わりであるから、$(q)_m$ は $m!$ の代わりである。このとき

Lemma 4.5.

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r}_q U^{m-r}(U,q)_r = 1.$$

ここで $(U,q)_r$ は $(1-x)^r$ の代わりであって、この補題の式は

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} x^{m-r}(1-x)^r = 1$$

の代わりである。

4.9. **結論の例.** 前と同様 $\delta = (-1)^{n-i}$, $\epsilon = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ とおく。

Theorem 4.6. $n \geq 3$ *odd* のとき、

$$\zeta(s, L_n^*, \delta, \epsilon) = b_n 2^{(n-1)s}\Bigg(\zeta(s - \frac{n-1}{2}) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \zeta(2s-2i+1)$$
$$+ \epsilon\delta^{(n+1)/2}(-1)^{(n^2-1)/8}\zeta(s) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \zeta(2s-2i)\Bigg)$$

$n \geq 4$, *even* のとき、

$$\zeta(s, L_n^*, \delta, \epsilon) = b_n 2^{ns}\Bigg((-1)^{[n/4]} D_n^*(s,\delta) \prod_{i=1}^{n/2-1} \zeta(2s-2i)$$
$$+ \epsilon\delta_n(-1)^{n(n+2)/8} \frac{2|B'_{n/2}|}{n} \prod_{i=1}^{n/2} \zeta(2s-2i+1)\Bigg).$$

ただし

$$D_n^*(s,\delta) = const \sum_{(-1)^{n/2}\delta D_K>0} |d_K|^{(n-1)/2-s} L(\frac{n}{2},\chi_K) \frac{\zeta(2s)\zeta(2s-n+1)}{L(2s-\frac{n}{2}+1,\chi_K)}$$

と定義している。const はもちろんある具体的な定数であるが、本質的ではないので、知りたいかたは論文 [20]I, II を参照されたい。

4.10. **問題４：出てきた結果の解釈.**

出てきた計算結果は一体何なのかを解釈する。これは n が奇数ならば、リーマンゼータ関数しか出てこないから, とくに言うべきことはない。しかし n が偶数の時は、計算で直接的に出てくる公式は、大雑把に言って　$\delta = (-1)^{n-i}$ で $n \geq 3$ とするとき、

$$\sum_{(-1)^{n/2}\delta d_K>0} |d_K|^{(n-1)/2} L(\frac{n}{2},\chi_K) \frac{\zeta(2s)\zeta(2s-n+1)}{L(2s-\frac{n}{2}+1,\chi_K)} |d_K|^{-s}$$

なのであって、これは一体何だと言う話になる。

答：これは半整数ウェイトの Cohen 型アイゼンシュタイン級数のメリン変換である。($\delta = 1$ ならば正則、また $\delta = -1$ ならば実解析的アイゼンシュタイン級数)

この結果を発表した頃、多くの人から、なぜ Cohen 型アイゼンシュタイン級数が出てくることがわかったのか、という説明がないことが不満だという声がいろいろあった。齋藤さんはこう言われると「伊吹山に聞いてくれ」と言っていた。私としては、計算する前からこれが出てくると信じていた。その理由は $n = 2$ のときの新谷の正定値のゼータについての結果は、$k = 3/2$ の実解析的アイゼンシュタイン級数の一部であったからだ。$k = 3/2$ だとアイゼンシュタイン級数は収束しないので、実解析的になるが、$k \geq 5/2$ では正則アイゼンシュタイン級数はまさにこの形をしている。その「直接的な」定義は, Cohen [8] にある。$r \geq 2$ を整数として、ウェイトが $r + 1/2$ の Cohen 型のアイゼンシュタイン級数を $E_{r+1/2}$ とする。([8] p. 273. 正確な定義は関数等式のところで述べる。）また、１以上の整数 r, N に対して、次のような記号を定義する。ここで $(-1)^r N \equiv 0$ or $1 \bmod 4$ のとき、$(-1)^f N = Df^2$ となる２次体の基本判別式 D または $D = 1$ がある。この場合

$$H(r,N) = L(1-r,\chi_D) \sum_{d|f} \mu(d)\chi_D(d) d^{r-1} \sigma_{2r-1}(f/d)$$

と定義する。ここで χ_D は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})/\mathbb{Q}$ に対応するディリクレ指標 ($D = 1$ ならば単位指標)、μ はメビウス関数、$\sigma_{2r-1}(n) = \sum_{m|n} m^{2r-1}$ である。また $H(r,0) = \zeta(1-2r) = -B_{2r}/(2r)$ (ベルヌーイ数）, N が以上以外の時は $H(r,N) = 0$ とおく。このとき、H_1 を複素上半平面として、

$$\mathcal{H}_{r+1/2} = \sum_{N\geq 0} H(r,N) q^N \qquad q = e^{2\pi i\tau}, \tau \in H_1$$

とおくと、$r \geq 2$ で、これは $\Gamma_0(4)$ に関するウェイトが $r+1/2$（半整数ウェイト）の正則アイゼンシュタイン級数で、いわゆる Kohnen plus space に属している。ここで $D_n^*(s,1)$ は $\mathcal{H}_{(n+1)/2}$ の普通の意味でのメリン変換と定数倍しか違わない。

実は $r=1$ とおくと、この係数から決まるディリクレ級数は、新谷の論文 [85] の $n=2$ の場合に登場する級数の一部である。しかし $r=1$ では、ウェイト 3/2 のアイゼンシュタイン級数は、このままの級数としては収束しないので、正則アイゼンシュタイン級数の係数になるわけではない。（実は実解析的アイゼンシュタイン級数から出てくる。）しかし、$r=1$ $(3/2=(2+1)/2)$ で出てくる級数が一般の偶数次数 n に対して $r+1/2=(n+1)/2$ でも計算結果に出てくると期待するのは当然のことであり、私はこの級数がでてくると最初から確信していた。（これは単純な直感というだけではなく、Mass formula ともよく符合していたからである。）結果はその通りであった。

しかし、われわれはこれ以外に $D_n^*(s.-1)$ というのがある。これは何であろうか？実はこれは実解析的アイゼンシュタイン級数のメリン変換の一部なのだが、これは後で述べよう。

未解決問題 1. 一般の概均質のゼータで、計算結果の解釈はいつでも問題になり得る。計算して具体的に書ければそれで終わりというわけではない。他の概均質ベクトル空間の場合についても、結果の解釈をいろいろ述べよ。

4.11. **実解析的アイゼンシュタイン級数と関数等式.** 半整数ウェイトの 1 変数実解析的アイゼンシュタイン級数を定義して、それと概均質ベクトル空間の関数等式との関係、およびそれを利用した 2 重ディリクレ級数の関数等式の証明について述べよう。これらは [20]II (2012) に書いてあることだが、大部分は MPI のプレプリントシリーズに 1997 年頃に掲載してあったものである。新谷の 2 重ディリクレ級数の関数等式の別証については、投稿後にレフェリーからの質問に答える形で付け加えたものであり、MPI のプレプリントには記載していない。（レフェリーが誰であったかは不明である。）

まず半整数ウェイトの保型因子を定義する。

$$\theta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n^2z) \qquad e(z)=e^{2\pi i z}$$

とおき、$\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ 4c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ に対して

$$j(\gamma,z)=\theta(\gamma z)/\theta(z)$$

とおく。これは具体的に言えば

$$j(\gamma,z)=\epsilon_d^{-1}\left(\frac{4c}{d}\right)(cz+d)^{1/2}$$

ただし、$(c\tau+d)^\alpha=e^{\alpha\log(c\tau+d)}$, $-\pi<\log(c\tau+d)<\pi$ としている。また $p\equiv 1 \bmod 4$ であるか $3 \bmod 4$ であるかに応じて $\epsilon_d=1$ または i と定義している。$\left(\frac{4c}{d}\right)$ は平方剰余記号であるが、その正確な定義は [81]

p.442 にある。ここで k を奇数と仮定しておきウェイト $-k/2$ の $\Gamma_0(4)$ に関する実解析的アイゼンシュタイン級数 $E(k,\sigma,z)$ を

$$E(k,\sigma,z) = y^{\sigma/2} \sum_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(4)} j(\gamma,z)^{k/2} |j(\gamma,z)|^{-\sigma}$$

と定義する。このような定義を最初に述べたのは、正則なときは [81], 実解析的な時は [83] であろうか。ところで Cohen [8] 1975 は正則なもので（$\sigma=0$, $k<-4$ という仮定下で）$\Gamma_0(4)$ の半整数ウェイトの保型形式ではあるが、レベル 1 とも見なせるような部分空間に属するアイゼンシュタイン級数を定義して、その係数が L 関数の負での値になるようなものを考えた（まえにのべた $\mathcal{H}_r$ である。）これは後に Kohnen [50] 1980 で Kohnen plus space と呼ばれるようになった空間の元である。Cohen のアイゼンシュタイン級数の定義は Kohnen 1980 よりも前の結果であり、おそらく Kohnen の定義の動機にもなっていたのではないかと推察される。それはともかく、われわれも当然レベル 1 のものがほしいので Cohen を見習って、次のように定義する。

$$E^*(k,\sigma,z) = E(k,\sigma,-\frac{1}{4z})(-2iz)^{k/2}$$
$$F(k,\sigma,z) = E(k,\sigma,z) + 2^{k/2-\sigma}(e(k/8)+e(-k/8))E^*(k,\sigma,z)$$

ただし、$e(\pm k/8) := e^{\pm 2\pi i k/8}$ としている。この $F(k,\sigma,z)$ がわれわれに必要なアイゼンシュタイン級数である。この級数はこのままでは $Re(\sigma)-k/2>2$ のときは絶対収束するが、それ以外の場合については、変数 σ に関する解析接続などについて [83] などに説明されている。また、これらの級数は $z=x+iy$ とするとき、$e(nx)$ $(n\in\mathbb{Z})$ の級数としてフーリエ展開される。正則なものは $e(nz)$ で展開されるが、実解析的な場合は $e(nx)$ の n が正負の両方があるところが違っている。またその係数は y の関数だが、ある種の Wittacker 関数の定数倍である。このフーリエ展開の様子は [81], [94] などでよく調べられている。実際には、彼らの計算では、少し足りない部分もあったので、[20] II で詳しく計算を追加しておいた。

さて、関数等式に関して、アウトラインを大雑把に説明すると次のようになる。

(1) $F(\sigma,k,z)$ は z についての保型形式であるから、普通のヘッケの理論により、$F(\sigma,k,iy)$ から定数項を引いたもののメリン変換と、$F(\sigma,k,i/y)$ から定数項を引いたもののメリン変換との間に関数等式があるのは通常と全く同じである。これはメリン変換の変数 s と実解析的アイゼンシュタイン級数の定義にあらわれるパラメーター σ を両方含んでいるので、最初から 2 重級数である。これらを適当に解釈すると新谷の 2 重ディリクレ級数の関数等式の別証が得られる。（実際にはいろいろ複雑なことがあるのだが、[20] II の p. 291 Proposition 3.7 に記載してあるとおりである。ちなみに、**新谷の論文** [85] **の序文の定義にはミスプリがある。**[85] **p. 35 の定義が正しい定義である。**）

(2) $F(\sigma,k,-(4z)^{-1})$ は、これが Kohnen plus space に属することによりそのフーリエ展開が $F(\sigma,k,z)$ のフーリエ係数を使って具体的に書け

る。より具体的に書くと、その係数は、適当な (σ, k) に対して $D_n(s, \pm 1)$ の線形結合を含んでいる。
(3) もちろんフーリエ係数は Wittaker function (合流型超幾何関数) を含んでいるから、メリン変換は一筋縄ではいかない、ある積分 $I(s, (\sigma - k)/2, \sigma/2)$ を含んでいる。しかし $\sigma = 0$, $k = -n - 1$, または $\sigma = 2$, $k = -n + 3$ $(n \geq 4)$ とすると、この積分はうまくまとめると Γ 関数などで具体的にかける。
(4) 大部分のフーリエ係数は収束し本質的に $\mu(x)/|\det(x)|^s$ から来ているが、σ と k が特殊な場合には、、$\mu(x) = \infty$ となるところでは、発散していることがある。このばあい、 σ を特殊な値にとるかわりに、関数等式の両辺を $\sigma = 2$ で Laurent 展開して、その Laurent 展開のそれぞれの項を比較することで s に関するディリクレ級数の関数等式を得ることができる。$\sigma = 2$ での Laurent 展開の定数項の各項をみると、大部分は $\mu(x)/|\det(x)|^s$ になるが、このようにならない項が残っている。この残りが、ゼータ関数を定義するときの補正項であって、これをゼータの定義に入れてしまえば、新しい関数等式が得られる。この補正は結果的に新谷の定義を同じである。

以上がアウトラインであるが、実際の計算はなかなか大変である。もう少し詳しく書いてみる。任意の H_1 上の関数 $f(z)$ について

$$f|U_4 = \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3} f\big(\frac{z+\nu}{4}\big)$$

とおく。

$$g(z) = y^{-\sigma/2}F(k, \sigma, z)$$
$$h(z) = (y^{-\sigma/2}F(k, \sigma, z))|U_4$$

とおく。ここで

$$g(z) = \sum_{d=-\infty}^{\infty} c_d(y)e(dx)$$

と書くと、

$$h(z) = \sum_{d=-\infty}^{\infty} c_d(y/4)e(dx)$$

となる。ここで $G(y) = g(iy)$, $H(y) = h(iy)$ とおいて、$G(1/4y) = (-1)^{(k^2-1)/8}\sqrt{2}y^{\sigma-k/2}H(y)$ がわかる。この等式はメリン変換の関数等式の根拠になる。さて、普通のヘッケの関数等式の証明でよくやるように、定数項は邪魔な部分だから、

$$\Phi_{\sigma,k}(s) = \int_0^\infty (G(y) - c_0(y))y^{s-1}dy$$

$$\Psi_{\sigma,k}(s) = \int_0^\infty (H(y) - c_0(y/4))y^{s-1}dy$$

とおく。まずメリン変換の関数等式に関する普通のヘッケの論法で次が容易にわかる。

Proposition 4.7 ([20] Proposition 3.2)**.**

$$\Phi_{\sigma,k}(\sigma-\frac{k}{2}-s)=2^{2s-2\sigma+k+1/2}(-1)^{(k^2-1)/8}\Psi_{\sigma,k}(s).$$

さらに d_K を 2 次体の基本判別式または 1、として次のように記号を定める。

$$Z^*(k,\sigma,s,d_K)=|d_K|^{\sigma-k/2-1-s}\frac{L(\sigma-(k+1)/2,\chi_K)\zeta(2s)\zeta(2s-2\sigma+k+2)}{\zeta(2\sigma-k-1)L(2s-\sigma+(k+3)/2,\chi_K)}.$$

これを $Z^*(k,\sigma,s,d_K)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$ と表すとき、

$$Z(k,\sigma,s,d_K)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(4n)}{n^s}$$

とおく。また定数 $C_{\sigma,k}$ を

$$C_{k,\sigma}=(-1)^{(k^2-1)/8}\frac{2^{k/2-\sigma+3/2+\sigma-k/2}}{\Gamma((\sigma-k)/2)\Gamma(\sigma/2)}$$

で定義する。また Whittaker function のメリン変換を表すために α, $\beta\in\mathbb{C}$ について、次の積分を定義する。

$$I(s,\alpha,\beta)=\int_0^{\infty}\frac{(1+u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}}{(1+2u)^s}du.$$

ただし、この積分表示で絶対収束するのは、$Re(\beta)>0$, $Re(s)>Re(\alpha)+Re(\beta)-1$ のときであるが、一般にこれは Γ 関数の積と超幾何級数の積でかけ、α, β がなんであっても意味を持つ。以上記号の準備の元で、つぎがわかる。

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma,k}(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)C_{\sigma,k}\Bigg(&I(s,\frac{\sigma-k}{2},\frac{\sigma}{2})\sum_{(-1)^{k+1/2\cdot d_K}>0}Z^*(k,\sigma,s,d_K)\\&+I(s,\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma-k}{2})\sum_{(-1)^{(k+1)/2}d_K<0}Z^*(k,\sigma,s,d_K),\Bigg)\\\Psi_{\sigma,k}(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)C_{\sigma,k}\Bigg(&I(s,\frac{\sigma-k}{2},\frac{\sigma}{2})\sum_{(-1)^{(k+1)/2}d_K>0}Z(k,\sigma,s,d_K)\\&+I(s,\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma-k}{2})\sum_{(-1)^{(k+1)/2}d_K<0}Z(k,\sigma,s,d_k)\Bigg)\end{aligned}$$

となる。これにより、$I(s,*,*)$ の部分さえ、うまく解釈できるならば、$Z(k,\sigma,s,d_K)$, $Z^*(k,\sigma,s,d_k)$ の和の間の関数等式がでるわけである。この部分は、定義から明らかなように、$k-2\sigma$ にしかよらない。(つま

り k と σ に別々によっているわけではない。）しかし、$I(s,*,*)$ の部分は、もちろん σ, k によっている。

$$c'_n=(-1)^{n(n+2)8+[n/4]}\pi^{n+1/2}\times\Gamma(\frac{n+1}{2})^{-1/2}\Gamma(\frac{n}{2})^{-1}\zeta(n)^{-1}$$

とおく。積分の変換公式などをよく考えると

Lemma 4.8. *(1)* $I(s,\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma-k}{2})$ は $\sigma=0$ で正則であり、よって $\Gamma(\sigma/2)^{-1}I(s,\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma-k}{2})$ は $\sigma=0$ で 0 である。
(2) $\Gamma(\sigma/2)^{-1}I(s,\frac{\sigma-k}{2},\frac{\sigma}{2})$ は $\sigma=0$ で 1 になる。

これらより、n が偶数の時 $D_n(s,\delta)$, $D_n^*(s,\delta)$ との関係は次のようになる。

$$\Phi_{0,-n-1}(s)=c'_n(2\pi)^{-s}\Gamma(s)D_n^*(s,1),$$
$$\Psi_{0,-n-1}(s)=c'_n(2\pi)^{-s}\Gamma(s)D_n(s,1).$$

一方で、$(\sigma,k)=(2,-n+3)$ ととれば

$$\Phi_{2,-n+3}(s)=c'_n(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\left(D_n^*(s,1)I(s,\frac{n-1}{2},1)+D_n^*(s,-1)I(s,1,\frac{n-1}{2})\right)$$
$$\Psi_{2,-n+3}(s)=c'_n(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\left(D_n(s,1)I(s,\frac{n-1}{2},1)+D_n(s,-1)I(s,1,\frac{n-1}{2})\right).$$

以上より、$I(s,*,*)$ の関数の性質をよく調べると、関数等式の一部を片側に寄せることができて、次を得る。

Proposition 4.9 ([20] II Prop 3.3)**.** n が $n\geq 4$ となる偶数ならば、

$$D_n^*(\frac{n+1}{2}-s,1)=(-1)^{n(n-2)/8}2^{-n/2}\pi^{-2s+(n-1)/2}$$
$$\times\Gamma(s)\Gamma(s-\frac{n-1}{2})\cos(\pi s)D_n(s,1)$$
$$D_n^*(\frac{n+1}{2}-s,-1)=2^{-n/2}(-1)^{n(n+2)/8+1}\pi^{-2s+(n-1)/2}$$
$$\times((\sin\pi s)D_n(s,-1)+(-1)^{n/2+1}D_n(s,1))$$

前半の式については Sturm [94] も参照されたい。フーリエ展開の 2 巾以外の計算は [81], [82], [94] にも書いてあるが、彼らには plus space という考え方がなく、この点で 2 巾の部分は書いていないので、厳密に計算して補う必要があった。

4.12. **新谷の２重ディリクレ級数.** 次の、新谷の導入した、２変数のディリクレ級数を考える。これらの関数等式は [85] にあるが、これの別証明が上記の考察から自然に得られることを、一応解説しておく。整数

m, n について、$A(m,n)$ で $x^2 \equiv n \bmod m$ となる $x \bmod m$ の個数を表すとする。次のようにおく。

$$\xi_i(s_1,s_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A(4m,(-1)^{i-1})m^{-s_1}n^{-s_2}$$

$$\xi_i^*(s_1,s_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A(m,(-1)^{i-1})m^{-s_1}(4n)^{-s_2}.$$

さらに

$$\eta_i^*(\sigma,s) = \sum_{(-1)^{i-1}d_K>0} Z^*(k+\sigma+\frac{k+1}{2},s,d_K)$$

$$\eta_i(\sigma,s) = \sum_{(-1)^{i-1}d_K>0} Z(k,\sigma+\frac{k+1}{2},s,d_K)$$

とおく。注意として、定義により、この右辺は k によらないことがわかる。実はここで

$$\eta_i^*(\sigma,s) = \zeta(\sigma)^{-1}\xi_i(\sigma,s+\frac{1}{2}-\sigma)$$

$$\eta_i(\sigma,s) = 2^{2s}\zeta(\sigma)^{-1}\xi_i^*(\sigma,s+\frac{1}{2}-\sigma)$$

であることがわかる。ここで　$\Phi_{\sigma,k}$, $\Psi_{\sigma,k}$ の関数等式より次の関数等式がわかる。

Proposition 4.10 ([20] II Proposition 3.7)**.**

$$\begin{pmatrix}\eta_1^*(\sigma,\sigma+\frac{1}{2}-s)\\ \eta_2^*(\sigma,\sigma+\frac{1}{2}-s)\end{pmatrix} = \frac{\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2}-\sigma)}{2^{\sigma}\pi^{2s-\sigma+1/2}}M(s)\begin{pmatrix}\eta_1(\sigma,s)\\ \eta_2(\sigma,s)\end{pmatrix}$$

ただし、

$$M(s) = \begin{pmatrix}\cos\pi(s-\frac{\sigma}{2}) & \sin(\frac{\pi\sigma}{2})\\ \cos\frac{\pi\sigma}{2} & -\sin\pi(s-\frac{\sigma}{2})\end{pmatrix}.$$

　以上の証明の根拠はメリン変換にすぎないので、（ゼータ関数のベクトルの間の）関数等式はひとつしか得られない。より詳しい関数等式については、都築氏の講演報告を参照されたい。

4.13. **Degeneration for** $n=2$**.** 以上の記号の元で、$D_2^*(s,1)$ と $D_2(s,1)$ の間の関数等式はやさしいが、$D_2^*(s,-1)$. $D_2(s,-1)$ を込めた関数等式は非常に面倒である。まず易しい方から結論だけ述べると次のようになる。

Proposition 4.11 ([20] II p.287 Proposition 3.4)**.**

$$D_2^*(\frac{3}{2}-s,1) = 2^{-1}\pi^{1/2-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-\frac{1}{2})\big(\cos(\pi s)D_2(s,1)-\zeta(2s-1)\big)$$

ただし、$D_2^*(s,1)$ と $D_2(s,1)$ はそれぞれ、$s=1$, $3/2$ 以外では正則である。（極の留数も具体的にわかる。）

これは [87], [85] にも証明がある。

しかし $D_2^*(s,-1)$, $D_2(s,-1)$ のときは、そうはいかない。この場合に関数等式を最初に示したのは [85] であり、以下はその別証である。

$\Phi_{\sigma,1}(s)$ と $\Psi_{\sigma,1}(s)$ を考えると、これらの "Main term" には新谷の定義した関数の一部

$$\xi_+^M(s) = \zeta(2s)\sum_{d=1}^{\infty} h(d)\log(\epsilon_d)d^{-s}$$

$$\xi_+^{*,M} = \zeta(2s)\Bigl(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{h(4d)\log(\epsilon_{4d})}{(4d)^s} + 2^{-2s}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{h(4d+1)\log(\epsilon_{4d+1})}{(4d+1)^s}\Bigr)$$

$$\xi_-(s) = 2\zeta(2s)\sum_{d=1}^{\infty} h(-d)w_{-d}^{-1}d^{-s}$$

$$\xi_-^*(s) = 2\zeta(2s)\Bigl(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{h(-4d)}{w_{-4d}(4d)^{-s}} + 2^{-2}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{h(-4d+1)}{w_{-4d+1}(4d-1)^{-s}}\Bigr)$$

が現れる。これは概均質ゼータの $\mu(x)$ が有限になるところである。

一方で $\Phi_{\sigma,1}(\sigma - s - \frac{1}{2})$ と $\Psi_{\sigma,1}(s)$ は σ の関数として有理型であるが、これを $\sigma = 2$ でローラン展開すると、$\sigma = 2$ で一位の極をもち、大雑把に言って、両方とも

$$A(\sigma,s) + B(\sigma,s)\zeta(\sigma-1)$$

のような形をしている。ここで $A(\sigma,s)$ と $B(\sigma,s)$ はともに $\sigma = 2$ で正則で、$\zeta(\sigma-1)$ はもちろん $\sigma = 2$ で極をもつ。Φ と Ψ の関数等式を書いて、両辺を $\sigma = 2$ でローラン展開すると、$(\sigma-2)^{-1}$ の係数からはリーマンゼータで書ける部分がでて、左右両辺を比較すると一致することが容易にわかるから、何も新しいことはでない。しかし $\sigma = 2$ でのローラン展開の定数項をとると、これは非常に複雑であり、$A(2,s)$ と 「$B(\sigma,s)$ の $\sigma = 2$ での微分」などがあらわれる。A の部分は概ね $\mu(x) < \infty$ となる x からの寄与だが、残りの寄与は複雑である。この複雑な項が、ゼータ関数の定義の補正項であり、実際に計算してみると、新谷が与えた補正と完全に一致する。ローラン展開の各項は、s について関数等式が成立するのは全く当たり前である。

新谷は、アイゼンシュタイン級数のようなよいガイドなしにむりやりゼータ関数の補正と関数等式を発見したのであるから、大変だっただろうと思う。のちに佐藤文広は（[20] II より以前に) 概均質ベクトル空間の一般論から、非常に自然な 2 変数のディリクレ級数を考えて、別証明を与えている。彼の証明と我々の証明は、少なくとも発想、手段などかなり異なっていると思われる。

我々の証明はアイゼンシュタイン級数のメリン変換の関数等式があるということから直ちに何らかの関数等式があることは保証されていると言う点で、計算は大変でも、目標に対する安心感がある。しかし、以上の我々の証明の計算は非常に複雑で、これぞ「ハードアナリシス」という感じの面白い計算のオンパレードで、目標に確信が持てなければ

ば続ける気になれない計算であった。興味がある方は [20] II の section 3, 4, 5 を参照してください。

未解決問題 2. 上の論法でいけば、$(\sigma-2)$ のローラン展開の係数はいつでも関数等式を満たすのだから、たとえば $e\geq 1$ のときの $(\sigma-2)^e$ の係数について、あたらしい関数等式が書けるはずである。これは何を意味するのだろうか？何か意味があるのだろうか？

4.14. **ゼータ関数の特殊値.**

さて、ジーゲル保型形式の次元公式には、以上で登場した

$$\zeta(s,L_n^*,1,1)=\zeta(s,L_n^{*,+})$$

の $s=1-m$ (m は 1 以上の整数）での値が現れる。これは一体いくつだろうか。

とりあえず $n\geq 3$ の場合を考えると、まず n が奇数ならば、リーマンゼータ関数しか現れないのだから、これの特殊値は全部ベルヌーイ数で書ける。一方、$n\geq 4$ で n が偶数の場合は、わからないところは $D_n^*(s,1)$ が出ているところである。しかし、$D_n^*(s,1)$ はウェイト $(n+1)/2$ の正則保型形式のメリン変換だから、Hecke の普通の論法より、$s=0,(n+1)/2$ 以外では s について正則である。しかるに $D_n^*(s,1)$ には

$$A_n(s)=\prod_{i=1}^{n/2-1}\zeta(2s-2i)$$

がかかっており、$n\geq 4$ としているから、$\zeta(2s-2)$ が $A_n(s)$ には必ず入っている。これは $s=1-m$ では $\zeta(-2m)=0$ であり、よってこの部分の寄与はゼロになるから $D_n^*(1-m,1)$ の値については気にしなくて良い。一方で $n=1$ とすれば、ゼータはリーマンゼータであるから問題が無い。

最後に残る、$n=2$ の場合は、上の論法のままでは適用できない。このときは Proposition 4.11 を用いる。

Proposition 4.12. $\zeta(0,L_2^*,1,1)=\frac{1}{48}$ である。また $m\geq 2$ ならば、

$$\zeta(1-m,L_2^*,1,1)=\frac{(-1)^mB_{2m}}{2^{2m}(2m)}$$

である。

論文 [20] II p.310 Theorem 6 では証明は $n\geq 3$ の場合は詳しいが $n=2$ の場合はかなり省略されているので、補足として少し詳しく解説しておこう。まず

$$\zeta(s,L_2^*,1,1)=2^{2s-1}D_2^*(s,1)$$

である（[20] II p. 270 line 1)。そこで $D_2^*(s,1)$ の特殊値に帰着する。これを求めるには Proposition 4.11 を用いる。まず $s=0$ の場合であるが、この場合 Proposition 4.11 の左辺で $s=3/2$ とおく。すると、

$D_2(s,1)$ の $s=3/2$ での留数は $\pi/3$ であることがわかっており、このとき、

$$\cos(\pi s)=\pi(s-\frac{3}{2})+c_2(s-\frac{3}{2})^2+\cdots$$

であるから、$\zeta(2)=\pi^2/6$ を用いて

$$D_2^*(0,1)=2^{-1}\pi^{-5/2}\Gamma(3/2)(\pi^2/3-\pi^2/6)=\frac{1}{24}.$$

よって $\zeta(0,L_2^*,1,1)=\frac{1}{48}$ である。次に $m\geq 2$ として $\zeta(1-m,L_2^*,1,1)$ と求める。Proposition 4.11 の左辺で, $s=m+1/2$ として、$\cos(\pi(m+1/2))=0$ かつ $D_2(s.1)$ は $s=m+1/2$ で正則だから右辺のこの部分の項は消える。残りをみて

$$D_2^*(1-m,1)=-2^{-1}\pi^{-2m-1/2}\Gamma(m+1/2)\Gamma(m)\zeta(2m)$$

ここで

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!}$$

であり、

$$\Gamma(m+1/2)=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi},\quad \Gamma(m)=(m-1)!$$

であるから、

$$\Gamma(m+1/2)\Gamma(m)=\frac{(2m-1)!!(m-1)!}{2^m}\sqrt{\pi}=\frac{(2m-1)!\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}$$

よって

$$D_2^*(1-m,1)=\frac{(-1)^m 2^{2m}B_{2m}}{2^2(2m)*2^{2m-1}}$$

$$\zeta(1-m,L_2^*,1,1)=2^{1-2m}D_2^*(1-m,1)=\frac{(-1)^m B_{2m}}{2^{2m}\cdot 2m}$$

$|B_1|=1/2$ であるから、これは

$$\frac{(-1)^m|B_1|B_{2m}}{2^{2m}\cdot m}$$

となる。これは [20] p. 310 Theorem 6 の通りである。

5. 次元公式と概均質ベクトル空間のゼータ関数

5.1. ジーゲル保型形式の場合. レベル N のジーゲル主合同部分群を

$$\Gamma_n(N)=\{g\in Sp(n,\mathbb{Z});g\equiv 1_{2n} \bmod N\}$$

と定義する。

一般の次数のジーゲル保型形式の次元公式の特殊な巾単元の寄与を概均質ベクトル空間の特殊値で書いたのは新谷である。文章でいえば次のとおりである。

Theorem 5.1 (Shintani [85](1975)). $(n-r)(n-r+1)/2$ 次元カスプと対応する *maximal parabolic* P_{n-r} の *unipotent radical* の中心に属する *unipotent elements* u で $rank(1_{2n}-u)=r$ となるものに共役な元全体の $\dim S_k(\Gamma_n(N))$ への寄与を *Selberg-Godement* の跡公式で計算すると、

(k の $(n-r)(n-r+1)/2$ 次式の具体的な多項式) $\times\zeta(r-n,,L_r^{*+})$ である。

以上のような巾単元を中心的巾単元と呼ぶことにする。

森田康夫の $n=2$ での次元公式 ([58], 1974 年) は、上記の新谷の結果の端緒になった計算である。当時は佐藤・新谷の概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論が登場したばかりであり、$n=2$ のときに、3 元２次形式のゼータ（実は概均質ベクトル空間のゼータ）が結果的に現れたので森田康夫氏は非常にうれしかったと言っていた。なお、山崎正氏 (1972) の証明は Riemann Roch による。Christian の証明は森田と独立であり、お互いに相手のことを知らないで計算していた。また Christian の当初の結果は少し間違いがあった ([7])。

Theorem 5.2 (Yamazaki[102], Morita [58], Christian [6]).

$k\geq 4,\ N\geq 3$ で

$$\dim S_k(\Gamma_2(N)) = N^{10}\prod_{p|N}(1-p^{-2})(1-p^{-4})\times$$

$$\left\{\frac{1}{2^{10}\cdot 3^3\cdot 5}(2k-2)(2k-3)(2k-4)-\frac{1}{2^6\cdot 3^2\cdot N^2}(2k-3)+\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot N^3}\right\}$$

Theorem 5.3 (Tsushima [97]). $k\geq 5,\ N\geq 3$ で

$$\dim S_k(\Gamma_3(N)) = N^{21}\prod_{p|N,p:prime}(1-p^{-2})(1-p^{-4})(1-p^{-6})$$

$$\times\left(\frac{1}{2^{16}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7}(2k-2)(2k-3)(2k-4)^2(2k-5)(2k-6)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5\cdot N^5}(2k-4)+\frac{1}{2^8\cdot 3^3\cdot N^{15}}\right)$$

対馬氏の当時の疑問：なぜ $n=3$ の公式に k の３次の項がでないのだろうか？

疑問に対する答は、ここに対応するゼータの値がゼロになるということである。関連するゼータは、たとえば

$$\zeta(s,L_3^{*,+}) = \frac{2^{2s}}{24}\Big(\zeta(s-1)\zeta(2s-1)-\zeta(s)\zeta(2s-2)\Big)$$

$$\zeta_2(s,L_2^{*,+}) = complicated$$

$$\zeta_1(s,L_1^{*,+}) = \zeta(s).$$

となるが、$r=1, n=3$ として $r-n=-2$ より

$$\zeta(-2)=0$$

を反映しているだけである。このように $\zeta(r-n, L_r^*)$ の値はしばしばゼロになる。たとえば、n が奇数で $n-(r-1)/2$ も奇数ならば、$\zeta(r-n, L_r^*)=0$ である。たとえば $n=5$, $r=1$ ならばゼロであり、$\dim S_k(\Gamma_5(N))$ には $\zeta(-4, L_1^*)=0$ に相当する k の 10 次の項にはない。

Theorem 5.4 (Ibukiyama-Saito [16], [20] II)**.** $\dim S_k(\Gamma_n(N))$ の次元公式に現れる、前に述べた中心的巾単元の寄与、つまり概均質ベクトル空間のゼータ関数の特殊値からの寄与は初等的な項を除けば、いろいろなベルヌーイ数の積として具体的に表される。具体的に言えば、これは下記の $I_n(\Pi_r, k, N)$ で正確に与えられる。また、次元公式の予想が任意の n と $N \geq 3$ について具体的に書き下せる。

もっと具体的に言えば、次のような予想になったのである。記号を準備する。

$$\begin{aligned} C_{n-r} &:= C_{n-r}(k,N) \\ &= [Sp(n,\mathbb{Z}):\Gamma_n(N)]N^{-r(n-\frac{r-1}{2})}\prod_{t=1}^{n-r}\frac{t!}{(2t-1)!!}\binom{k-1-\frac{n-t}{2}}{t}. \end{aligned}$$

r が奇数の時は、

$$I_n(\Pi_r,k,N) = C_{n-r}\frac{(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}|B_{n-\frac{r-1}{2}}B_2B_4\cdots B_{r-1}B_2B_4\cdots B_{2n-r-1}|}{2^{n+\frac{r-1}{2}}(n-\frac{r-1}{2})!(\frac{r-1}{2})!}$$

とおく。r が偶数の時は、

$$I_n(\Pi_r,k,N) = C_{n-r}\frac{(-1)^{r(1+\delta_{nr})/2}|B_2\cdots B_{r-2}B_{r/2}|\cdot|B_2B_4\cdots B_{2n-r}|}{2^{2n-\frac{r}{2}}(\frac{r}{2})!(n-\frac{r}{2})!}$$

とおく。これらが前に説明した中心的巾単元の寄与である。このとき、

Conjecture 5.5 ([16], [20] II)**.** $N \geq 3$ で $k > 2n$ のとき、

$$\dim S_k(\Gamma_n(N)) = \sum_{r=0}^{n} I_n(\Pi_r,k,N)$$

と予想される。(実際は $k > n+1$ でよい。)

Theorem 5.6 (若槻聡 [101])**.** 上の予想は正しい。つまり次元公式に寄与するのは、$\pm 1_{2n}$ と中心的べき単元 Π_r からの寄与 $I_n(\Pi_r,k,N)$ のみである。

証明のポイントはもちろん中心的べき単元以外のべき単元の寄与が全部消えるという点にある。$n=2$ のときは、この事実の証明は [58] に書かれているが、若槻はこれを一般の n で証明した。

5.2. **Tube domain の保型形式の次元公式とゼータ関数.** この節の内容については [26] に記述している。英文については [19] にアナウンスがあり、これは Margaret Robinson によって review されている。

昔から、$\Gamma_n(N)$ に関するウェイト $k > 2n$ のジーゲル保型形式に関しては、単位元 $\pm 1_{2n}$ と $\begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$ の形の元と共役なものしか次元公式に寄与はないであろうというのは漠然と予想されていた。（実際には $k > n+1$ でよい。）これは森田康夫氏、新谷卓郎氏も当然そのように考えていた。これらについて、書いた文献はないかもしれないが、私は口頭で聞いている。

ところで、一般の **tube domain** についは極大 $\mathbb{Q}$ 放物部分群の **unipotent radical** の中心の元で **rank** が最大のものの寄与の和を考えるのが正当である。これ以外の寄与は消えるだろう、というのを私は 1982 年ごろに考えていた。これは橋本喜一朗氏には話したことがある。

D をエルミート有界対称領域、G を対応する $\mathbb{Q}$ 上の半単純代数群とする。このとき、G の $\mathbb{Q}$ 上の root 系は D が tube domain ならば C 型である。ここで G の maximal $\mathbb{Q}$ parabolic の代表系 P_r を考えると、その unipotent radical の center を U_r は $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ というように、包含関係があるようにとれて、共役で U_r に属するが、U_{r-1} に属さない unipotent elements の全体の跡公式への寄与を考える。するとこれは U_r を概均質ベクトル空間とみなすとき、そのゼータ関数の特殊値になっている。(実際には概均質かどうかは関係なく、以上の設定ではゼータは「普通に」定義され、関数等式は個別に証明されるので、概均質にならない特殊な場合を気にする必要はない。）この証明は [26] に書いたとおりである。詳しくは [26] 自身を見ていただきたいが、簡単に説明しておく。

簡単のために、V が形式的実単純ジョルダン代数、Ω を V に付随する symmetric cone, $\mathscr{T} = V + \sqrt{-1}\Omega$ とする。（形式的実ジョルダン代数については [12] に極めて優れた解説がある。簡単に言えば、一般の V を全部、実対称行列と同じように簡単に扱えるようにするための道具や言葉が一般的に書かれている。）ここで $r = rank(V)$, $n = \dim V$, $\{e_i\}_{i=1}^r$ を V の直交巾等元とする。$e_i : V \ni x \to e_i x \in V$ なる写像の固有値は 0, 1, 1/2 のどれかであり、$V(e_i, \lambda)$ を固有値 λ に対する (V 内の）固有空間とする。$V_{ij} = V(e_i, 1/2) \cap V(e_j, 1/2)$ とおくと $d = \dim V_{ij}$ は一定である。つぎの関係式が知られている。

$$n = r + \frac{dr(r-1)}{2}.$$

V に対して、det, tr などが自然に定義される ([12])。特に V が単純なとき、$\det(x) = \Delta(x)$ と書くことにしよう。次を cone の Γ 関数という。

$$\Gamma_\Omega(s) = \int_\Omega e^{-tr(x)} \Delta(s)^{s-\frac{n}{r}} dx.$$

(dx は V の適当なユークリッド測度で、正確な説明は略す。）次の領域を考える。

$$\mathcal{H}_\nu(\mathscr{T}) = \{F(z) : \text{holomorphic on } \mathscr{T}, ||F(z)||_2 < \infty\}.$$

ただし

$$||F||_2 = \int_{\mathscr{T}} |F(z)|^2 \Delta(y)^{\nu - \frac{2n}{r}} dxdy$$

とした。ここで $z = x + iy$ としている。

Theorem 5.7. $\nu > 1 + d(r-1)$ のとき、$\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ 上の関数を

$$K(z,w) = \frac{\Gamma_\Omega(\nu)}{(4\pi)^n \Gamma(\nu - n/r)} \Delta\left(\frac{z - \overline{w}}{2i}\right)^{-\nu}$$

とおくとき、これは $\mathcal{H}_\nu(\mathscr{T})$ の再生核である。

さて、この再生核を用いれば Godement の公式にあたるものが書ける。Γ を $G(\mathbb{R})$ の covolume finite な離散群として $Z(\Gamma)$ を Γ の中心とし、

$$K_\Gamma(z,w) = \frac{1}{|Z(\Gamma)|} \sum_{\gamma \in \Gamma/Z(\Gamma)} K(\gamma z, w) J(\gamma, z)^{-1}$$

とおく。ただし、$J(\gamma, z)$ は次のように定義する。まず $G \times \mathscr{T}$ の保型因子 $j(g,z)$ で

$$|j(g,z)|^{2n/r} = \det(Jac(g,z))$$

となるものがある。ここで $Jac(g,z)$ は $z \to gz$ のヤコビアンである。ここで $J(g,z) = j(g,z)^\nu$ とおく。簡単に言えば、これはウェイト ν の保型因子である。

Theorem 5.8 ([26])**.** 上の記号の元で、$\nu > 2 + 2d(r-1)$ と仮定すると

$$\dim S_\nu(\Gamma) = \int_{\Gamma \backslash \mathscr{T}} K_\Gamma(z,z) \Delta(y)^{\nu - \frac{2n}{r}} dxdy$$

となる。

この証明は Godement [11] Theorem 8 の証明のまねをすればできるので [12] で道具立てがそろっている今となっては、証明は難しくはない。たとえば清水英男の本 [80] I の次元公式の部分は、一見 $SL_2(\mathbb{R})$ しか扱っていないように見えるが、実際は一般の場合に容易に読み替えられることを意図して書いたと著者本人から伺ったことがある。ここで注意すべきなのは、積分と和は交換可能ではないと言うことである。

さて、ここまでは普通で証明も易しいが、次は central unipotent の寄与の話と概均質ベクトル空間のゼータの話になり、これは易しくない部分がある。この話を正確に述べるには収束の正確な評価することが本質的である。この点が一番神経を使うべきところである。

さて証明の細部は [26] を見ていただくとして、ここでは次元公式への概均質ベクトル空間の寄与をなるべく手っ取り早く見ることを目指して記述する。V を形式的実単純ジョルダン代数として、$G_0 = \{g \in GL(V); g\Omega = \Omega\}$ とする。このとき (G_0, V) は自然な作用で、概均質ベクトル空間になる。L を V の格子として、

$$L^* = \{x \in V; \text{すべての } y \in L \text{ に対して } tr(xy) \in \mathbb{Z}\}$$

とおく。G_0 を V の自己同型で Ω を不変にするものとして、Γ_0 を L を不変に作用する G_0 の離散群とするとき

$$\zeta(s, L^+) = \sum_{x \in L \cap \Gamma_0 \backslash \Omega} \frac{\mu(x)}{\Delta(x)^s}$$

と定義する。ここで $\mu(x) = vol(G_{0,x}/\Gamma_x)$ である。

次に、tube domain を考える。G を前に書いたように $G/Z(G) = Aut(\mathscr{T})$ となる $\mathbb{Q}$ 上の代数群とする。ここで

$$\mathscr{T} = V + i\Omega$$

としておく。P を G の maximal $\mathbb{Q}$ parabolic のひとつとして、V_P を P の unipotent radical の中心とする。V_P は自然に形式的実ジョルダン代数の構造をもつ。（$\mathscr{T} = V + i\Omega$ となる V の部分空間である。）Γ を G の covolume finite な離散群とする。$\gamma \in \Gamma$ が中心的べき単元というのは、γ のある $G(\mathbb{Q})$ 共役が、ある maximal $\mathbb{Q}$ parabolic の unipotent radical の中心に属すことと定義する。$V_P \subset V$ とみなせる。

P を上の通りとして、

$$G(\mathbb{Q}) = \coprod_{i=1}^{v} \Gamma \kappa_i P \quad (disjoint)$$

としておく。（幾何的に言えば P に対応する佐武コンパクト化のカスプの代表元が κ_i である。）

仮定: P の $\mathbb{Q}$ 上の Levi 分解 $P = A \cdot B$ があって、

$$\kappa_i^{-1} \Gamma \kappa_i = (\kappa_1^{-1} \Gamma \kappa_1 \cap A) \cdot (\kappa_i^{-1} \Gamma \kappa_i \cap B)$$

となっていると仮定する。

Theorem 5.9. *m を G の real rank とする。また $\nu > 2 + 2d(r-1)$ と仮定する。このとき、前の仮定の下で、Γ の中心的巾単元で rank b のもの全体の $\dim S_\nu(\Gamma)$ への寄与は*

$$c_\kappa(\Gamma) \prod_{j=1}^{m-b} \frac{\Gamma(\nu - \frac{(j+b-1)d}{2})}{\Gamma(\nu - \frac{d(j-1)}{2} - 1 - \frac{d(m-1)}{2})} \zeta(d(b-r), L_\kappa^*)$$

ここで κ はある P に対するカスプの代表、$c_\kappa(\Gamma)$ は κ にはよるが ν にはよらない定数、

$$L_\kappa = V_P \cap k_\kappa^{-1} \Gamma k_\kappa$$

である。なお $\Gamma_\kappa := \Gamma \cap \kappa A \kappa^{-1}$ が L_κ に作用する離散群、ガンマ因子の部分は結果的に、$(m-b)(1+d(m-b-1)/2)$ 次の多項式である。また $\zeta(s, L_\kappa^{*,+})$ は V_P に付随する概均質ベクトル空間のゼータ関数である。

証明のキーポイントは次の補題のポアソン公式である。ただし V が対称行列の時 (形式的実ジョルダン代数として I 型、つまりジーゲル保型形式と対応する場合）は面倒な解析が必要になるが、この場合は新谷による。一般の場合も収束の厳密な評価がないと形式的に話をすすめることはできない。以下の補題から得られる、収束に関する詳しい

話は [26] にある程度書いてある。大雑把に言って、ポアソン公式から得られるのは、格子の元全体であるが、我々がほしいのは格子の元のなかで maximal rank の元だけである。このずれの部分をきちんと見ると言うことが問題の核心である。

Lemma 5.10 (Ibukiyama [32])**.** 任意の $Z \in \mathscr{T} = V + i\Omega$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ で $Re(\alpha) > d(r-1)+1$ と仮定する。L を V の格子とすると、

$$\sum_{T \in L^* \cap \Omega} e^{2\pi i Tr(TZ)} \det(T)^{\alpha - n/r} = vol(L^*)^{-1}(2\pi)^{-r\alpha}\Gamma_\Omega(\alpha) \sum_{S \in L} \det\left(\frac{Z+S}{i}\right)^{-\alpha}$$

となる。

もう少し解説を続ける。e を単純ジョルダン代数 V の単位元とする。また (M, V, ρ) を概均質ベクトル空間とする。例外集合 $S = \{x \in V; \Delta(x) = 0\}$ である。

複素変数 λ と $x \in V$ に対して

$$f = f_r(x, \lambda) = \begin{cases} \Delta(s)^{\lambda - n/r} exp(-2\pi tr(x)) & \text{if } x \in \Omega \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$f^* = f_r^*(x.\lambda) = \Delta(e - \sqrt{-1}x)^{-\lambda}$$

とおく。M^+ を $M(\mathbb{R})$ の 1 を含む real topology での連結成分とする。$g \in M^+$ に対して

$$\sum_{x \in L} f^*(\rho(g)x, \lambda) = vol(L^*)(2\pi)^{r\lambda}\Gamma_\Omega(\lambda)^{-1}\chi(g)^{-n/r} \sum_{x \in L^* \cap \Omega} f({}^t\rho(g)^{-1}, \lambda)$$

となる。適当な s と λ の範囲で、

$$\Phi(f, s) = \int_\Omega f(x, \lambda)|\det(x)|^s dx = (2\pi)^{-r(s+\lambda)}\Gamma_\Omega(s+\lambda),$$

V 上の関数 h に対して

$$Z(h, s, L) = \int_{M_+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{x \in L - S} h(gx) dg$$

とおけば、適当な収束条件の下で

$$Z(h, s, L) = \sum_i \xi_i(s, L)\Phi_i(h, s - \frac{n}{r})$$

ただし、

$$\xi_i(s, L) := \sum_{x \in L \cap V_i/\Gamma} \frac{\mu(x)}{\Delta(x)^s}.$$

肝心なのは次の関数等式である。

$$Z(f_r^*(x, \lambda), L, \frac{n}{r} - s) = vol(L^*)^{-1}(2\pi)^{r\lambda}\Gamma_\Omega(\lambda) Z(f_r(x, \lambda), L, s).$$

問題は Z の定義には $x \in L - S$ (つまり rank が一杯）のものしか出ていないのに、ポアソン公式には L の元がすべて出ていることである。ここを処理するには、

$$
\begin{aligned}
&Z(f_r^*(x,\lambda),L,s) = Z_+(f_r^*(x,\lambda),L,s)\\
&+ vol(L^*)(2\pi)^{r\lambda}\Gamma_\Omega(\lambda)^{-1}Z_+(\frac{n}{r}-s,f_r(x,\lambda),L^*)\\
&-\sum_l \frac{1}{s-dl/2}\sum_{i=1}^{u_\ell} c_{\ell,i}(\Gamma)Z(f_l^*(x,\lambda),\rho(h_i)^{-1}L(l)\cap V(l),\frac{dr}{2})
\end{aligned}
$$

と書き換えて処理する。（ただし $V = Sym(\mathbb{Q})$ のときは新谷の収束の議論が必要。また $V(l)$ は V のなかの rank l のジョルダン部分代数、Z_+ は $\chi(g) \geq 1$ での積分）

6. 専門家の言うことを信じてはいけないという話

対称行列のゼータ関数の結果があまりに意外な単純なものだったので、私は世の中で難しいといわれているものを信じてはいけないのだと思い始めた。大野泰生君は、当時、私の大学院生だった。彼に最初あげた問題は、彼が体調不良で休んでいるうちに、他大学の人に解かれてしまったので、何か違う問題ということで私が提案したのが、binary cubic zeta についての問題であった。私の提示したのは次のようなことだった。

「世間では binary cubic は難しい対象だと言われている。しかし、難しいといっている人たちは、誰も binary cubic zeta の Dirichlet 級数としての小さい部分の数字を書いてみたことがあるとは思えない。計算もしていないのに難しいかどうかなどはわからない。まず、とにかくこれを具体的に計算してみなさい。計算法は Davenport にでているはずだ。計算結果を眺めて、それから何か面白そうなことがないか、宝探しをしてみてごらん。」

というわけで、彼は見事それまでだれも気が付かなかった面白いこと（４つあるゼータ関数のうち、二つずつが本質的に等しいという事実）を数値的に見つけて、予想をのべた。（Amer. J. Math. の匿名のレフェリーは、自分も同じデータを見ていたはずなのに、自分には気が付けなかったと絶賛していた。）この予想は結局、中川仁君が証明することになったのだが、これについての解説は本報告集の [105] にあるので、ここでは省略する。

また別の問題として、世間では b 関数の計算は難しいのだと言われているが、定義と計算法がはっきりしている対象なのだから、そういうことを信じないで Mathematica を使えば計算できるのではないか、と述べたところ、割とそういうことが可能だというのを示したという他の人の結果もあった。（もちろんちゃんとやるにはいろいろ工夫が必要なのだが。）

あとでのべる Eisenstein 級数の Koecher Maass 級数が単純になるという結果も、最初、専門家は、そんなに簡単になるとはとても思えな

い、と言っていたことを思えば、思い込みから自由になるというのは、なかなか難しいことだと思わせられる。

7. Koecher-Maass series

7.1. **Koecher version for theta series.** S を m 次の正定値対称行列とする。X を $m\times n$ 次の整数行列とし、$X_2 = X_1U$ ($U \in GL_n(\mathbb{Z})$) のとき、X_1 と X_2 は同値とみなし、$X_1 \sim X_2$ と書こう。

$$\zeta(s,S) = \sum_{X\in M_{m,n}(\mathbb{Z})/GL_n(\mathbb{Z});rank(X)=n} \frac{1}{\det({}^tXSX)^s}$$

とおく。これは関数等式を持つ (Koecher [47], [48])。

7.2. **Maass version for Siegel modular forms.** $\Gamma = Sp(n,\mathbb{Z})$ とし、$F \in A_k(Sp(n,\mathbb{Z}))$ をウェイト k のスカラー値ジーゲル保型形式とする。

$$F(Z) = \sum_{T\in L_n^*} a(T)e(Tr(TZ)) \qquad Z\in H_n, \quad e(x) = e^{2\pi ix}$$

とする。k は偶数と仮定しておく。

$$L(s,F) = \sum_{GL_n(\mathbb{Z})\backslash L_n^{*,+}} \frac{a(T)}{\det(T)^s|O(T,\mathbb{Z})|}$$

とおく。ここで $T_1 \sim T_2$ は $UT_2\,{}^tU = T_1$ for some $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ ということ。また $Aut(T) = \{U \in GL_n(\mathbb{Z}) : UT\,{}^tU = T\}$ とおいた。ここで $a(UT\,{}^tU) = \det(U)^k a(T)$ だが、k を偶数と仮定したから、$a(UT\,{}^tU) = a(T)$ である。$GL_n(\mathbb{Z})$ 同値を $SL_n(\mathbb{Z})$ 同値に変えれば k 奇数でも一見うまく定義できるように見えるが、この場合は、$L(s,F)=0$ になるので、意味は無い。よって k が偶数という仮定は避けることができない。

以上で定義した L 関数は関数等式をもつ ([56]). 実際

$$\xi(s,F) = (2\pi)^{-ns}\prod_{i=0}^{n-1}\Gamma(s-\frac{i}{2})L(s,F)$$

とおくとき、

$$\xi(k-s,F) = (-1)^{nk/2}\xi(s,F)$$

となる ([56])。実際には Maass の定義した級数はこれよりも一般的な、Maass の言う量指標付きの級数について、関数等式を証明している。量指標の意味は後で説明する。

ちなみに、これは講演のあとに佐藤文広君に指摘されたのだが、Maass は [56] 以前に次数 2 で [54] で量指標付きの Koecher Maass 級数にあたるものに対して関数等式を証明している。これはヘッケの量指標の L 関数の関数等式の証明を拡張しようという試みでそれから自然に量指標という名前がつけられたのだろうと言うことだ。その後、1950 年代は Selberg 理論や、Harish Chandra とかが登場して、帯球関数の理

論が発展した時期でもあり、互いの貢献はごちゃごちゃしていてあまりよくわからないのではないか、とのことだった。

7.3. 対称管状領域上の保型形式に対する、量指標付き Koecher Maass 級数の関数等式.

この節の内容については [25] にすべて書いてあるので、詳しくはそちらを参照されたい。ちなみにこの結果も私の怠慢により英語の論文にはしていない。時間ができたらどこかに書いておきたいのだが。

まず tube domain についてざっと説明して、それから量指標の定義をのべ、次に関数等式について説明する。これが佐藤文広君の講演とどう関係するのかはよく理解していない。

さて、symmetric tube domain の定義を述べる。もっともよい参考書は [12] であると思う。

今 V を $\mathbb{R}$ 上の形式的実ジョルダン代数とする。これは $\mathbb{R}$ 上の有限次ベクトル空間で、非結合的な積 $x \circ y$ が定義されており、(i) $x \circ y = y \circ x$, (ii) $x^2 \circ (x \circ y) = x \circ (x^2 \circ y)$, (iii) $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x = y = 0$ の 3 つの条件を満たすもののことを言う。任意の形式的実ジョルダン代数は単純なものの直和であり、単純な形式的実ジョルダン代数は 5 種類に分類されている。これらはよく知られた対象で、みな非常に具体的にかける。たとえば I 型は n 次対称行列の集合で、$x \circ y = (xy + yx)/2$ で定義されている。単純な V では symmetric cone Ω とよばれる部分集合が, $\Omega = \{x^2; x \in V^\times\}$ で定義されている。直積 $V^m = V \times \cdots \times V$ では Ω^m を考えることになる。V を単純形式的実ジョルダン代数として、対応する対称管状領域（symmetric tube domain) は

$$\mathscr{T} = (V + \sqrt{-1}\Omega)^m$$

で定義される。これは第一種ジーゲル領域とも呼ばれている。

さて、Maass [56] がジーゲル上半空間の時に定義した量指標を一般の symmetric tube domain で定義しよう。

$$G_0 = \{g \in GL(V); g\Omega = \Omega\}$$

とおき、$(G_0 \cap SL(V))^m$ の離散部分群 Γ_0 で、割って体積有限のものを一つ指定する。記号 $\mathbb{D}(\Omega^m)$ で Ω^m の各成分についての不変微分作用素で生成される環とする。ここで、不変の意味は、Ω 上の C^∞ 関数 f と $g \in G_0$ について $(\tau(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ とするとき、微分作用素 $\mathbb{D}$ が $\tau(g)D = D\tau(g)$ を満たすという意味である。(ρ, W) を G^m の有理表現とする。Ω^m 上の W 値の C^∞ 関数 $u(Y_1, \ldots, Y_m)$ が次の 4 つの条件を満たすとき、Γ に関する量指標と呼ぶ。

(1) $u(\gamma(Y_1, \ldots, Y_m)) = \rho(\gamma)u(Y_1, \ldots, Y_m) \quad \gamma \in \Gamma_0$
(2) $Du = \lambda(D)u$ for some constant $\lambda(D)$,
(3) $u(cY_1, \ldots, cY_m) = u(Y_1, \ldots, Y_m)$ for any constant c
(4) $||u(Y_1, \ldots, Y_m)||$ は適当な増大度条件をみたす。
(詳しくは [25] p. 14)

(あとで ρ は trivial にする。) これがいったい何なのか、ということは Maass にはあまり説明がないが、たとえば、正定値対称行列で Mellin 変換を考えるとすると、$\det(Y)^s$ を $\det(Y) = t$ として $t = 0 \sim \infty$ でメ

リン変換を考えることになる (Robert Hjarmar Mellin はフィンランド人)。しかし、このような変換の像の性質からもとの関数の保型性が決まるかどうかという逆定理を考えたいとすると、この t に関する一変数の積分では $\det(Y)=1$ のところが変数として残ってしまう。そのため、ディリクレ級数から関数自身を思い出すためには $\det(Y)=1$ 上での関数をスペクトル分解できるような十分多くの関数を用意しておかないといけないのである。これが量指標である。（もちろん実解析的保形形式の一種である。）これがたとえば、 [35], [95] の逆定理に登場する量指標であって、このような関数は避けることができない。実際には連続スペクトルの部分も追加しないといけないが。（ちなみに、メリン変換による逆定理のこういう側面について、きちんと解説したものは見たことがない。たとえば Bump [5] は Hilbert modular のときに、逆定理を述べているが、上記のような説明はないので、本質がわかりにくくなっている。）

さて、われわれは $\mathscr{T}$ 上の保型形式のメリン変換できまる、Koecher Maass 級数という、関数等式を持つディリクレ級数を定義したい。一般に、$Aut(\mathscr{T})$ は実リー群 $G(\mathbb{R})$ の単位元の連結成分 $G(\mathbb{R})^0$ を中心で割ったものである。ここで $G(\mathbb{R})$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数群 G の $\mathbb{R}$ valued points としておく。簡単のために G に次の仮定を置く。

仮定: $G/\mathbb{Q}$ の極大 $\mathbb{Q}$ 放物部分群 P で 0 次元カスプに対応するものが存在する。

また G の covolume finite な離散群 Γ を固定し、Γ は次のような変換を含んでいると仮定する。

$$(Z_1,\ldots,Z_m)\to(-Z_1^{-1},\ldots,-Z_m^{-1}).$$

この条件は関数等式の証明に必要である。

さて、$\mathscr{T}$ の Γ に関するウェイト k の保形形式 $f(Z)$ と言うのはジーゲル保型形式の時と同様に定義されてフーリエ展開をもつ。0 次元カスプに対応する極大放物部分群の unipotent radical U は abelian であり、$U\cap\Gamma=L$ とおくとこれは U 内の格子である。(そもそも $U(\mathbb{R})$ はジョルダン代数 V^m である。）ここで、さらに Γ が $Z\to Z+u$ ($u\in L$) なる変換を含んでいれば、

$$f(Z)=\sum_{T\in L}a(T)e^{2\pi i(T,Z)}$$

と自然にフーリエ展開される。ここで $(T,Z)=tr(TZ)$ は形式的実ジョルダン代数としての T と Z の自然な内積である. $G(\mathbb{R})$ の実ランクが 2 以上ならば、Koecher 原理により、$T\notin\overline{\Omega}^m$ ($\overline{\Omega}$ は Ω の閉包）ならば、$a(T)=0$ である。P の Levi 分解により、半単純部分が Ω^m を保つように作用する。Γ とこの群の共通部分を Γ_0 とかく。$u(Y)$ を $W=\mathbb{C}$, $\rho=det^k$ となる Γ_0 に対する量指標とする。

定義 7.1.

$$D(s,F,u)=\sum_{T\in\Gamma_0\backslash L\cap\Omega^m}\frac{a(T)u(T)}{|O(T,Z)|\det(T)^s}$$

と定義し、これを量指標 u 付きの F の *Koecher Maass* 級数と呼ぶ。特に $u=1$ のときは単に *Koecher Maass* 級数と呼ぶことにしよう。

このようなディリクレ級数 $D(s,F,u)$ はオイラー積は持たないが、関数等式は持つ。このような級数を Koecher-Maass 級数と呼ぶようになったのは私が命名したからである。（論文上では Kohnen のものが最初かもしれないが、その前に私は彼といろいろ議論して、この名称を試用したいということは口頭では既に彼に伝えていた。）なぜ、Koecher Maass 級数と呼んだかというと、名前はアルファベット順にした。文献的には、この級数は [54], [47], [48], [56] などに登場しているが、佐藤文広氏によると、歴史は複雑らしい。ちなみに Siegel 保型形式についてとりあつかった [56] には、Selberg からは「このような関数等式は前から知っていた」と言われた、という記述がある。しかし Selberg は未発表のようである。関数等式は Selberg 理論の応用として証明できるので、あるいは Selberg は tube domain 上の一般論も知っていたのかもしれないが、書いていないものはわからない。

定理を述べるために、少し記号を準備する。r を V のランク（V の直交べき等元の最大個数）とする。($x \in V$ の最小多項式の最大次数といってもよい。）また d を、直交べき等元 $e_i \neq e_j$ に対して、固有値 $1/2$ の固有空間を $V(e_i,1/2)$ などとおき、$V_{ij}=V(e_i,1/2)\cap V(e_j.1/2)$ とおくと、$\dim V_{ij}$ は一定で、これを d と書く。また $\hat{u}(Y)=u(Y^{-1})$ と書く。Ω の不変微分作用素の生成元は [12] Prop XIV.1.4 にある。これは

$$(D_s f)(x)=\det(x)^{s+1}\det(\frac{\partial}{\partial x})\det(x)^{-s}f(x)$$

と置くとき、$D_{jd/2}$ $(j=0,\ldots,r-1)$ が $D(\Omega)$ の生成元である。$\hat{D}_s(Y_i)=(-1)^r D_{d(r-1)/2-s}(Y_i)$ と定義する。このとき

$$(\prod_{i=1}^{m}\hat{D}_s(Y_i)\hat{u})(Y)=(-1)^{rm}\prod_{i=1}^{rm}\Gamma(s-\alpha_j)\hat{u}(Y)$$

であったと仮定する。

Theorem 7.2 ([25])**.** 上のような量指標 u と保型形式 F に対して、

$$\xi(s,F,u)=(2\pi)^{rms}\left(\prod_{j=1}^{rm}\Gamma(s-\alpha_j)\right)D(s,F,u)$$

と定義すると

$$\xi(k-s,F,u)=(-1)^{rmk/2}\xi(s,\hat{u})$$

である。ここで $D(s,u)$ は高々 $s=\alpha_j+k-d(r-1)/2$ で極を持ち、その他では正則である。

証明のキーポイントは次の積分公式にある。

Lemma 7.3. dv を不変測度として、

$$\int_{\Omega^m} u(Y)e^{-tr(TY)}\det(Y)^s dv$$

$$= (2\pi)^{(n-r)m/2} \det(T)^{-s} u(T_1^{-1}, \ldots, T_m^{-1}) \prod_{i=1}^{rm} \Gamma(s-\alpha_i).$$

この証明には Selberg の、「不変微分作用素の同時固有空間は任意の不変作用素の固有空間でもあり、またその固有値は不変微分作用素の固有値のみによる」という大変きれいな結果と Faraut and Koranyi [12] で形式的実ジョルダン代数の帯球関数、および、その微分作用素での固有値がすべて決定されていることによる。なお、私の当初の証明は [56] を徹底的に真似したものであったが、白馬で講演した折に、Selberg が使えるのではないかとの示唆を佐藤文広氏より受けた。それで白馬の報告集では、Maass 流と Selberg 流の両方の証明をつけている。詳しくは [25] を参照されたい。なお、一言付け加えると、Koecher-Maass 級数が十分大きい $Re(s)$ で収束するということは全然自明ではない。この部分の評価も [25] にきちんと書いておいた。

7.4. $Sp(n,\mathbb{Z})$ **の Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数.** $k > n+1$ を偶数とする。次の級数を $Sp(n,\mathbb{Z})$ のジーゲルアイゼンシュタイン級数という。

$$E_n^{(k)}(\mathbb{Z}) = \sum_{g \in \Gamma_\infty \backslash Sp(n,\mathbb{Z})} J(g,Z)^{-k}.$$

ここで

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z}) \right\}$$

$$J(g,Z) = \det(CZ+D) \qquad \text{for } g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R}).$$

また

$$E_n^{(k)}(Z) = \sum_{T \in L_n^*} a(T) e(Tr(TZ))$$

とフーリエ展開しておく。($e(x) := e^{2\pi i x}$.)

$$H_k = \begin{pmatrix} 0_k & 1_k \\ 1_k & 0_k \end{pmatrix}$$

とおく。$m = 2k$, $T \in L_n^*$, $rank(T) = r$ $(0 < r \le n)$ とすると半整数対称行列 T_1 で $\det(T_1) \neq 0$, $T = {}^tOT_1O$ (O は原始的な (r,n) 整行列) となるものがある。

$$\rho_m := \prod_{j=1}^{m} \frac{\pi^{j/2}}{\Gamma(j/2)}$$

とおく。

Lemma 7.4 (Siegel [91])**.**

$$a(T) = (-1)^{kr} 2 \frac{\rho_{2k}}{\rho_{2k-r}} \det(2T_1)^{(2k-r-1)/2} \prod_p \alpha_p(H_k, 2T_1)$$

ただし、$\alpha_p(H_k, 2T_1)$ はいわゆる *local density* で今の場合、

$$A_q(H_k, T_1) = \{K \in M_{2k,r}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z});\ {}^tKSK \equiv 2T_1 \bmod q\}$$

(q は p の巾）とおくとき、

$$\alpha_p(S, 2T_1) = \lim_{q\to\infty} q^{r(r+1)/2-2kr} A_q(S, 2T_1)$$

で定義される。*(*十分大きい q について右辺が一定になるのは前と同様である。）

Theorem 7.5 (伊吹山・桂田 [29], [21]). $n \geq 3$ が奇数とすると、

$$L(s, E_n^{(k)}) = (-1)^{nk/2} 2^{(n-1)s} \times \frac{\prod_{i=0}^{(n-1)/2}(k-i)}{((n-1)/2)!} \times \frac{\prod_{i=1}^{(n-1)/2}|B_{2i}|}{|B_k|\prod_{i=1}^{(n-1)/2}|B_{2k-2i}|}$$

$$\times \left\{\zeta(s)\zeta(s-k+1)\prod_{i=1}^{(n-1)/2}\zeta(2s-2i)\zeta(2s-2k+2i+1)\right.$$

$$+ (-1)^{(n^2-1)/8}(-1)^{n(n+1)/2}\zeta(s-\frac{n-1}{2})\zeta(s-k+\frac{n+1}{2})$$

$$\left.\times \prod_{i=1}^{(n-1)/2}\zeta(2s-2i+1)\zeta(2s-2k+2i)\right\}$$

$n \geq 4$ が偶数とすると

$$L(s, E_n^{(k)}) = 2^{ns}\frac{\prod_{i=1}^{n/2-1}\zeta(1-2i)}{\zeta(1-k)\prod_{i=1}^{n/2}\zeta(1-2k+2i)}$$

$$\times \left\{D_n^*(s,1) \otimes D_{2k-n}^*(s,1)\prod_{i=1}^{n/2-1}\zeta(2s-2i)\zeta(2s-2k+2i+1)\right.$$

$$\left.+ \frac{1+(-1)^{n/2}}{2}(-1)^{n(n+2)/8}\frac{|B_{n/2}B_{k-n/2}|}{(n/2)(k-n/2)} \times \prod_{i=1}^{n/2}\zeta(2s-2i+1)\zeta(2s-2k+2i)\right\}$$

ただし、κ を半整数（$(1/2)\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$ の元）とするとき、

$$D_{2\kappa-1}^*(s,1) = \sum_{(-1)^{\kappa-1/2}d_K>0} |d_K|^{-s} L(\frac{3}{2}-\kappa, \chi_K)\frac{\zeta(2s)\zeta(2s-2\kappa+2)}{L(2s-\kappa+\frac{3}{2}, \chi_K)}$$

とおく。ここで d_K は種々の 2 次体 K ないしは $K = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ の基本判別式をわたる。（後者では $d_K = 1$ としている。）また χ_K は $\mathbb{Q}(\sqrt{d_K})$ に対応する 2 次指標、$\zeta(s)$, $L(s, \chi_K)$ はリーマンゼータとディリクレの L 関数である。$D_{2\kappa-1}^*(s,1)$ は重さ κ の、いわゆるプラス空間に属する正則アイゼンシュタイン級数 (Cohen Eisenstein series と呼ばれる）のメリン変換として得られる。ただし、κ が大きくないときは、実解析的なアイゼンシュタイン級数を考える必要があるが、これらは前の節 4.11 で述べた。([21], [20] II も見よ)。

記号 $\otimes$ は *convolution* であって、

$$D^*_{2\kappa_i-1}(s,1)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_i(m)}{m^s}$$

のとき、

$$D^*_{2\kappa_1-1}(s,1)\oplus D^*_{2\kappa_2-1}(s,1)=\zeta(2s-\kappa_1-\kappa_2+s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_1(m)a_2(m)}{m^s}$$

とおいている。

以上の証明の経緯は次のとおりである。まず $n=3$ のときは桂田君のフーリエ係数の公式 [41] というのがあった。私はこの公式を利用して、一晩徹夜して $n=3$ のときに完全に計算しきって、結果が単純になることを理解した。これを 2 次形式の専門家である北岡さんに話したら、彼は「それは次数が小さいから単純になる場合があるのであって、一般には無理だと思うよ」との意見だった。しかし、私は一般にも単純だと信じていたので、アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の専門家である桂田君に相談して、共同研究で一般の n の場合の計算を完成させた。結果は上に見る通り単純であった。

この式を見て、私は n が偶数の時には、一変数から n 次への**リフトがあるのではないかと予想**した。これは Duke-Imamoglu が standard L に関する予想を与えるより前に独立に考えたことで、その予想の理由は

(1) $D^*_{2k-n}(s,1)$ はウェイトが $k-(n-1)/2$ の 1 変数半整数保型形式であり、これはたぶんウェイトが $k-(n-1)/2$ のカスプ形式、つまり志村対応でウェイトが $2k-n$ のカスプ形式に拡張されそうなこと。

(2) $\zeta(s)\zeta(s-(2k-n)+1)$ はウェイト $2k-n$ のアイゼンシュタイン級数のゼータ関数であり、これは f をウェイト $2k-n$ のカスプ形式と思えば $L(s,f)$ に変えられること。またこのとき、n を偶数として

$$\prod_{i=1}^{n/2-1}\zeta(2s-2i)\zeta(2s-2k+2i+1)\to\prod_{i=1}^{n/2-1}L(2s-2i,f)$$

$$\prod_{i=1}^{n/2}\zeta(2s-2i+1)\zeta(2s-2k+2i)\to\prod_{i=1}^{n/2}L(2s-2i+1,f)$$

という読み替えが可能なこと。

以上は現在 Duke-Imamoglu-Ikeda lift と呼ばれているものの私の version の予想であった。私はこの予想を 1996 年頃だったかに、池田君を含む日本人の何人かが居た席で個人的に話したことがあったが、あまり関心を引かなかった。ちなみに、当時この Koecher-Maass 級数に関する結果は数理研以外では確か未発表であった。その後、1998 年に東京から白馬の第一回整数論オータムワークショップにゆく列車のなかで Kohnen にこの予想を話そうとすると、彼は私を押しとどめて、Duke と Imamoglu が standard zeta に関してリフトの予想を述べていることを話した。これは当然私の予想とは全く独立に考えられたものであっ

た。Koecher-Maass 級数がどう書けるかというような不可思議な予想より、標準ゼータがどう書けるかという方が、インパクトがあったのも確かだろう。実際、Kohnen に話したとき、彼は私が当然普通の L 関数の話をすると思っていたらしく、Koecher Maass 級数の形がどうなるかという話なのだというと、かなりぎょっとしていた。ちなみに当時、偶数次と奇数次のジーゲル保型形式が異なる性質を持っているという感想を 2 次形式の Mass formula や [20] I などから強く思っており、いまではそう考えている人は多いが当時はそう思っている人は居なかった。

以上のリフトは Ikeda lift として実現されたのは、よく知られているとおりである。

ちなみにその後、桂田氏と共著で、Klingen Eisenstein 級数、Ikeda lift の場合について、Koecher Maass 級数を計算したが、池田リフトについては上で述べたとおりになっていた。(伊吹山・桂田 [27], [28])

7.5. **証明のキーポイント.** アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の公式は $n=3$ のときは完全に closed な式が知られている（桂田 [41]). これを用いて直接計算することもできる。一般の次数の場合は 桂田 [42] などはあるものの、完全に closed なフーリエ係数の公式ではない。よって、Siegel による local density に帰着する公式を用いる。

今 $\det(T)\neq 0$ としているので、$T=T_1$ である。local density は $2T$ の属する種 (genus) $\mathfrak{L}$ にしかよらない。（つまり T_0 であって、任意の素点 v に対して、$T_0={}^t g(2T)g$ となる $g\in GL_n(\mathbb{Z}_v)$ が存在するもの全体が $2T$ で決まる genus $\mathfrak{L}$ である。以下、$2T$ のことを T と書く。

すべての $T\in\mathfrak{L}$ に対して $\det(T)$ は一定なので、これを $d(\mathfrak{L})$ と書こう。また $T\in\mathfrak{L}$ ならば、フーリエ係数 $a(T)$ は一定なので、

$$\sum_{T\in GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{L}}\frac{1}{|O(T,\mathbb{Z})|}$$

をくくり出せる。よって、ジーゲル公式より

$$\xi(s,E_n^{(k)})=(-1)^{nk/2}2^{ns+1}\frac{\rho_{2k}}{\rho_n\rho_{2k-n}}\sum_{\mathfrak{L}}\prod_{p<\infty}\frac{\alpha_p(H_k,\mathfrak{L})}{\alpha_p(\mathfrak{L},\mathfrak{L})}d(\mathfrak{L})^{k-s}$$

となる。これが計算の出発点である。この計算は対称行列のゼータ関数の計算に似ている。詳しくは [21] ないしは [29] を参照されたい。

未解決問題 3. *(i)* フーリエ展開係数 $a(T)$ が T の属する *genus* だけで決まっているような保型形式にはどのようなものがあるのか。
(ii) Koecher-Maass 級数が易しくなるのは, *genus* だけで決まっていることが必須なのか？たとえば *(genus* だけでは決まっていないことがわかっている）池田・宮脇リフトでは無理なのか？
(iii) 任意のレベルに対するジーゲルアイゼンシュタイン級数の *Koecher Maass* 級数を具体的に書け。
(iv) すべての *tube domain* で「易しい保型形式」の *Koecher- Maass* 級数の具体形を求めよ。（これはいくつかは知られている。文献は自分ではあまりきちんと調べていないので、この文書には記載しない。）

8. Siegel 公式とアイゼンシュタイン級数

8.1. **正定値の場合.** まず簡単のために S が整数係数の m 次正定値対称行列の場合から説明する。T を整数係数の n 次正定値対称行列で $n<m$ としておこう。このとき $S[X]={}^tXSX$ と書くことにして、

$$A(S,T)=\{X\in M_{m,n}(\mathbb{Z}):S[X]=T\}$$

となるものの集合は有限集合である。ここで $A(S,T)$ の一般的な公式はなどはもちろん望めない。しかし、Siegel は次を 1930 年代に

Theorem 8.1 (Siegel [87]). *(1) S の種にわたる $A(S,T)$ の平均値は局所的な量 (local density) の積で記述される。*
(2) S によってきまるジーゲル上半空間 H_n 上のテータ級数

$$\theta_S(Z)=\sum_{X\in M_{mn}(Z)}e(Tr(S[X]Z))\qquad e(*)=e^{2\pi i*},Z\in H_n$$

の S の種に渉る平均値は、ジーゲルアイゼンシュタイン級数になる。

という非常に興味深い定理を証明した。これは実は Siegel 保型形式が定義される以前の話（ジーゲルが「入門」と称する論文を書く以前の話）なのである。ここで S の種というのは、整数係数の対称行列の集合 $\{S'\}$ で、すべての $\mathbb{Q}$ の素点 $v\le\infty$ について、ある $g_v\in GL_m(\mathbb{Z}_v)$ があって、$S'=S[g_v]$ となるようなものである。ここで $\mathbb{Z}_\infty=\mathbb{R},\mathbb{Z}_v=\mathbb{Z}_p$ ($v=p$ が素数）としている。S と S' が $GL_m(\mathbb{Z})$ の元 g につて $S'=S[g]$ となるときは S と S' は同値という。ひとつの種の中でのことなる同値類の個数を S の類数という。

この定理の (2) について、良く解説に登場するのは、E_8 の場合である。整数係数対称行列は対角成分がみな偶数の時、偶行列と呼ばれる。$\det=1$ の偶行列全体は一つの種をなすことが知られている。特にこのような行列が存在するのは $m\equiv 0 \bmod 8$ の場合に限られ、また $m=8$ ならば類数は 1 になる。この類の代表を E_8 と書く。この場合は一つの種の中で平均を取る必要がないので、たとえば $z\in H_1$ に対して

$$\theta_S(z)=E_4(z)$$

(ウェイト 4 のアイゼンシュタイン級数）となり、この係数が $A(S,t)$ を与え、それは $E_4(z)$ のメリン変換で記述される。$E_4(z)$ のメリン変換、すなわち $E_4(z)$ のゼータ関数は

$$\zeta(s)\zeta(s-3)$$

となる。

しかし、この解説は **非常にミスリーディングである。** 第一に、たとえ $n=1$ でも、ジーゲル公式から得られるアイゼンシュタイン級数のゼータ関数は、一般に**オイラー積をもたない。** さらに、アイゼンシュタイン級数で書けると言っているが、アイゼンシュタイン級数というのは一般のレベルでは山ほど異なるものがあるわけで、いったいどの関数になっているのか正確に記述されていない。

正確にはどういうアイゼンシュタイン級数なのかというのは当然の疑問で、これを正確に書いたのは Lynne Walling [100] であろうと思う。

（実は今のところ詳しくは読んでいないので、ざっと見た推察に過ぎないのだが、多分推察は正しいであろう。）彼女はこの仕事を、ジーゲルがやり残した仕事を完成させたと、非常に誇りに思っていたようだ。このような仕事は、なんとなく哲学好きな傾向のある、理論的ではない具体的な計算を軽んじがちな日本人には受けない仕事のような気もするのだが、私は良い仕事だと思っている。彼女は残念ながら最近亡くなった。癌だったそうだ。初めて会ったのは 2000 年の 3 月で、コロラド大学の保型形式集会の主催者だった。このとき、彼女は Kohnen を呼び、Kohnen が Böcherer に声を掛け、彼らが私にも声を掛けて、私と広中由美子さんが出席した。これは Cris Poor, David Yuen と知り合うきっかけとなり、Cris が最近そのことで、我々は Walling に感謝しないといけないのだ、と言っていた。

ところで、それではこの Walling の結果から $A(S,T)$ の平均値は一般的になんになるのか公式を書け、といわれると、たぶん Walling のままでは書けないであろう。この問題について、私は昔から興味があって、これはここに登場するアイゼンシュタイン級数それぞれの Koecher Maass 級数を計算することに相当するはずだと思うがこれは残された問題だと思う。難しいのか易しいのか、よく知らないが極端に難しくはないのではないかと思っている。私自身が研究する予定は今のところ無いけれど。ちなみに平均値は S から T を表す local density であり、これは [76], [104], [103] などに記述があるから、それを使うと、ジーゲル公式にあらわれるテータの平均値の Koecher Maass 級数は原理的には計算できるはずである。もちろん原理的に「計算できるはず」というのと実際に計算することは雲泥の差があるので、本当の結論はやってみないとわからない。一般の local density というのは、かなり複雑だったと認識している。

未解決問題 4. *Siegel 公式にあらわれる正定値 2 次形式の表現数の平均値の公式を、任意の種に対して具体的に与えよ。(Walling の公式に現れる、すべてのレベルの Eisenstein 級数の Koecher Maass 級数の公式を具体的に書け。）もちろんこれは一種の local density の積の母関数である。前に述べたとおり、たとえば [76] などを用いてどの程度易しく計算できるのかは知らない。しかし計算が得意だと思う人は、やってみる価値はあるのではないか。*

8.2. **不定符号の場合.** 前節の最後の問題について、不定符号の場合で $n=1$ については解答があるので、これについて書きたい。前と同様、S のサイズを m, target T のサイズを n としておく。なお、不定符号で $n>1$ の場合は Klingen [46] がテータ関数の変換公式について、仕事をしている。これは Siegel の結果の拡張である。S が不定符号の場合は、テータ関数はそのままでは $S[X]=T$ なる整数行列 X が無限個あるので、具合が悪い。それで S の majorant という正定値行列をもちいて、実解析的テータ関数を定義することになる。この平均値が $A(S,T)$ の平均値のかわりを務める。この Klingen の論文の mathscinet での reviewer は A. Weil である。

それはともかく、われわれの次元公式という観点からの興味で言えば、S が符号 $(1, n-1)$ の 2 次形式の時、前に述べたように S のゼータ関数 $\zeta(s, S)$ は $SO(n, 2)$ に付随する IV 型領域の保型形式の次元公式に登場し、$\zeta(1-m, S)$ が具体的にどうなるかが問題である。このようなゼータは今では本質的には

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\prod_{v\leq\infty}\alpha_v(S,t)\right)t^{-s}$$

と書けるので local density についての公式が [76], [103], [104] などで知られていることを用いる証明もあるだろう。私の証明は Siegel の 実解析的テータ関数の平均値が実解析的アイゼンシュタイン級数になるというジーゲルの結果 [89] を用いる。

実は m が偶数、かつ $n=1$ の時は、この問題は非常に詳しく、[31] の第 7 章で取り扱っている。これは私が知る限り新結果であるが、英文論文にはしていない。なお、このような結果は [55] にも一部ある。これはここでは繰り返さない。

m が偶数の時は以上の通りだが、では m が奇数ならどうするのか、という疑問が当然生じる。この場合、普通に考えて、$\zeta(s, S)$ 自身が綺麗であるという保証はない。たとえば、正定値で考えても、サイズが奇数の S のテータ関数は半整数ウェイトなのだから、よく知られているように、そのメリン変換の公式は複雑である。一方で、特殊値だけについてなら、簡単な結果があるのは [31] p. 329 系 7.22 に述べてあるとおりである。しかし系 7.22 の証明は本では関数等式を使えとだけ書いてきちんと説明していないので、ここで解説する。

m が奇数ならば、S の符号が (p, q) で q が偶数の時、[88] II の定理より

$$\xi(s,S)=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s,S)$$

とすると

$$\xi(s,S)=(-1)^{m-n}\det(2S)^{-1/2}\xi(\frac{m}{2}-s,S^{-1})$$

となり、$s=1-r$ での値は、$\zeta(s,S)$ が $s=m/2$ いがいでは正則と言うことがわかっているので、$r\geq 2$ ならば、$\Gamma(1-r)^{-1}=0$ から、$\zeta(1-r,S)=0$ である。一方で $\zeta(0,S)$ の値は $\zeta(s,S)$ の $s=m/2$ の留数で書けるが、この留数は Siegel によりわかっているから、$\zeta(1-r,S)$ はいつでも有理数で具体的に書ける。

未解決問題 5. *Symmetric tube domain* の保型形式の次元公式を具体的な *torsion free* 離散群に対して具体的に与えよ。(特に若槻の、中心的巾単元以外が消えるという定理を一般の *tube domain* に拡張せよ。)

9. 指数和とベルヌーイ数

9.1. 未解決問題の宝庫. 次元公式は、指数和の公式に関する問題の宝庫である。次元公式ないしはヘッケ作用素の跡を Selberg の跡公式で計算すると、非半単純元の共役類の寄与はなんらかの概均質ベクトル空間の抽象的に定義されたゼータ関数の特殊値で与えられるはずであ

る。ただし、この特殊値を求めたいと思ったら、この抽象的なゼータ関数が実際のところ具体的に何であるのかを調べて、その具体的なゼータ関数の特殊値の知られた求め方に帰着するという方法以外は知られていない。

一方で、Riemann-Roch-Hirzebruch の定理、および Lefschetz fixed point theorem で計算すると、指数和（1の巾根に関する複雑な和）で与えられる。これは具体的な巾根の和であるが、これが一体何なのか（もっと単純な公式はあるのか）、たとえば有理数になるのか、ベルヌーイ数で書けるのか、類数などと関係するのか、などの疑問は、大抵の場合、すぐには答えられない。たぶん答のわかっていない問題が多数あるであろう。

幸運にもセルバーグ跡公式で具体的な回答が得られている場合は、それとの比較で指数和をゼータ関数の特殊値で書く公式が得られる。ゼータ関数の特殊値がわかりやすい算術的な量で書けている場合は、指数和の明示的公式ができるわけである。しかしその場合でも、その指数和の公式の初等的な証明は、と聞かれると、大抵は誰も知らない。ここには非常に面白い問題があると思う。たとえば、Hilbert modular 上での表現に関して、齋藤裕 [63] に出てくる指数和は、わかりやすい表示は知られていないし、そういう問題を初等的に示すのは難しいのだと思う、と齋藤さんは言っていた。　具体的にどういうことが問題になるのだったか、よく覚えていないが、この場合は吉田敬之 [106] の跡公式による計算と比較するというのが自然で、実際 $k \geq 4$ では、そのようにして、ある表示が相対類数の和になることが示される. 果たしてこの公式の初等的な証明があるのかどうか私はよく知らない。$k = 2$ のときは跡公式の計算は適用範囲外なので、この場合がどうなっているのかよく知らない。（少なくとも [63] では予想になっている。しかし冷静に考えると、寄与が k に本質的に依らないというのは幾何的に証明可能であると考えるから、[30] と同様に考えれば、実際はできているような気もするのだが）、[63] は $k = 2$ で類数が 1 というようなあまり好ましくない条件がついていたりするので、なんとなく中途半端だし、実際のところ、何が何と等しくあるべきなのか、とかいうことが非常に明確には述べられていないように思う。今とは時代が違うので、現代の誰かが明快に解説できると面白いだろう。

未解決問題 6. 斎藤 [63] にでている指数和を直接計算して公式を作れ.

あるいは、対馬龍司 [99] の指数和は、伊吹山 [24], 荒川・伊吹山・金子 [4] 第8章などと深い関係がある。これらを使えば [98] で述べられている問題は皆解けると思った記憶があるのだが、昔のことで忘れてしまった。しかし、このあたりの数学の感覚については [4] の第8章の序文に思うところを詳しく書いてあるので、そちらを読んでいただければ幸いである。

また概均質ベクトル空間の立場から、いきなりうまい指数和を考えて、これが特殊値と関係しそうだ、というような予想ができれば、これは非常に面白い。しかし、一般にこのような理論は皆無であると思う。

未解決問題 7. 概均質ベクトル空間から、何らかの手段で「自然」に指数和を定義し、その公式を求めよ。

ベルヌーイ数とゼータ関数の本 [4] は私が共同執筆を提案して実現した本であるが、私の一つの目論見は Lee-Weintraub の指数和について、いろいろ考えていたときに得た sporadic な結果をまとめることであった。これをまとめた第 8 章は一部の外国人レフェリーには非常に評判が悪かったが（本に執筆するような内容ではない、とまで言われた）、近年 Brad Isaacson がその周辺を精力的に研究する動機のひとつになっているので、書いておいてよかった ([36], [37], [38], [39], [40] など)。こういう問題は単純だと誤解して見下している人もいるが、実は難しいのだということは自分でやってみればわかる。第 8 章の序文を参照されたい。（単純な主張でも内容は深いのが整数論の特徴だ、と時々言われるのだが、まあ大げさに言えばそれに類した側面はあるだろう。）

9.2. **Hecke の結果.** $SL_2(\mathbb{Z})$ の、レベルが素数 p の主合同部分群を $\Gamma(p)$ と書くことにする。このとき、$SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(p) \cong SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ により、$\Gamma(p)$ に関する、ウェイト k の一変数正則保型形式の空間 $A_k(\Gamma(p))$ には有限群 $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ が作用している。この作用素を既約分解する問題を、ヘッケは何故か Fundamentalproblem と呼んで、生涯にわたり追求していた。(p は奇素数とする。）$SL_2(\mathbb{F}_p)/\{\pm 1\}$ の既約表現の次数は

$$p, \quad p+1, \quad p-1, \quad (p+1)/2, \quad (p-1)/2$$

であり、指標の表は単位指標以外は

$degree$	G_q	$G^{(1)}_{(q+1)/2}$	$G^{(1)}_{(q+1)/2}$	$G^{(1)}_{(q-1)/2}$	$G^{(2)}_{(q-1)/2}$	$G^{(i)}_{q+1}$	$G^{(i)}_{q-1}$
$\chi(U)$	0	$\frac{1+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$-\frac{1+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	1	-1
$\chi(U^\nu)$	0	$\frac{1-\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	1	-1
$\chi(R^a)$	1	$(-1)^a$	$(-1)^a$	0	0	$\rho^{ia}+\rho^{-ia}$	0

である。ただし ν は平方非剰余、$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ で g は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ の生成元、$\epsilon = (-1)^{(p-1)/2}$. $\rho = e^{2\pi i/(\rho-1)}$. $G^{(i)}_{q-1}$ は $q+1$ 乗が 1 の元の上で character が i による。$G^{(i)}_{(q+1)/2}$, $G^{(i)}_{(q-1)/2}$ を第 2 種 (zweiter Art) という。また G_{q+1} は $(q-3)/2$ 個、G_{q-1} は $(q-1)/2$ 個ある。群の位数と既約表現の次数の平方和が等しいというよく知られた関係式は

$$\begin{aligned} \frac{q(q^2-1)}{2} &= 1 + q^2 + 2\left(\frac{1+q}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \\ &\quad + (q-1)^2\frac{q-1}{2} + (q+1)^2\frac{q-3}{2} \end{aligned}$$

で与えられる。(Hecke [15] 全集 p. 699.　あるいは近藤武 [51] 群論 III 定理 8.33)

$A_k(\Gamma(p))$ における $SL_2(\mathbb{F}_p)/\{\pm 1_2\}$ の $G^{(i)}_{(q+1)/2}$ の重複度を y_i, $G^{(i)}_{(q-1)/2}$ の重複度を w_i と書くと

Proposition 9.1 (Hecke, p.704, p.893)**.** *k even ならば $y_1 - y_2 = h(\sqrt{-p})$, k odd ならば $w_1 - w_2 = h(\sqrt{-p})$.* この差の空間は量指標のテータ関数で張られる。

9.3. **Hecke の結果の拡張 (Hilbert case and Siegel case).**

1970 年代に、ヘッケの論文に書いてある結果と似たことがないかを考えるのが流行した。（まだ Hecke の遺産で過ごしていた時代だった。それからジーゲルの遺産を考える時代に移行した。）

Hilbert modular の場合、つまり総実体 F について、$SL_2(O_F)$ の保型形式に対する $SL_2(\mathbb{F}_q)$ の表現の重複度、および重複度の差の表示については、齋藤裕 [63] が代数幾何により、吉田敬之 [106] （プリンストンの博士論文）が跡公式により計算した。ちなみに私は [106] のコピーを持っていたのだが、長い間に行方不明になってしまった。東大の図書館にあるらしい。

Siegel modular の場合は Lee and Weintraub [53] 橋本喜一朗 [14]、対馬龍司 [98] 等が考えた。(山崎正のプレプリントというのもあったが、発表されなかった。対馬によれば、正しくないところがあったと言うことだった。）しかし指数和を具体的な数値で書こうと考えて大変な苦労の末に、自明でない L 関数の特殊値について、何らかの式を最初に与えたのは荒川恒男 [3] である。

B. Srinivasan [93] は $Sp(2,q)$ の既約表現の表を与えた。（ちなみに、このような結果は古典的に大昔からよく知られていたのだろうと思うかもしれないが、論文の年号をみてみればわかるように、1968 年にやっと出てきた結果であり、これは私が大学 2 年生の時だった。つまり、当時はこのような結果自身がかなりホットな話題だったのである。実際ここで残されていた、2 巾体の場合が、榎本彦衛氏の修士論文 [10] (1972) になっているのである。）[93] の記号では Symplectic 群の内積を

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

としているから、普通ので考えると、2 行と 3 行、2 列と 3 列を入れ替えるべきである。よって $J = \begin{pmatrix} 0_1 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix}$ で $Sp(2,p)$ を定義すると、やはりそこの記号で A_{ij} と書かれているものは、普通の意味では

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A'_{21} = -A_{21}$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix}1&0&\nu&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad A'_{22}=-A_{22}$$

となる。ここで ν は $(\nu/p)=-1$ (quadratic non-residue) となる元である。$Sp(2,\mathbb{Q})$ の既約指標で、複素数が表れるものは4つ ψ_{12}, ψ_{22}, ψ_{31}, ψ_{32} でこれらは共役類 A_{21} と A_{22}, おおび A_{41} と A_{42} で共役な複素数をとる。

$g\in Sp(2,\mathbb{F}_p)$ として、

$$L(g)=\sum_{i=0}^{3}(-1)^i Trace[g|H^{3-i,0}((H_3/\Gamma(p))^*,\mathbb{C})]$$

とおく。($*$ は Igusa compact 化)。

Proposition 9.2 (Lee and Weintraub [53]). 素数 p について $p\equiv 3 \bmod 4$ と仮定する。

$$Im(L(A_{21}))=\frac{p(p^2-1)}{8}\biggl(\Bigl(\frac{1}{8}h(-p)-\frac{1}{12}B_{3,\chi}\Bigr)\sqrt{-p}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-2}\frac{\chi(a)}{(1-\zeta^{-j})(1-\zeta^{j+1})(1-\zeta^{j(j+1)})}\biggr).$$
$$L(A_{41})=0.$$

注意 : Srinivasan の表によれば、A_{21} では、A_{22} と値が異なるのは虚の部分だけで、この虚部は ψ_{21}, ψ_{31} で

$$p\tilde{\epsilon}=p\frac{-1+\sqrt{-p}}{2}$$

ψ_{22}, ψ_{32} で

$$p\tilde{\epsilon'}=p\frac{-1-\sqrt{-p}}{2}$$

の形をしている。

Proposition 9.3 (荒川 [3] Theorem 3.4). 元 $\alpha\in Sp(2,\mathbb{Z})$ に対して、$\Gamma(p)\alpha$ の $S_k(\Gamma(p))$ への作用の跡を $Tr(\alpha)$ と書くことにする。A_{21}, A_{22} の代表するコセットを *Selberg* 跡公式で計算すると

$$Tr(A_{21})-Tr(A_{22})=-p^2(p^2-1)\sqrt{-p}L(0,L_2^*,\psi)$$

である。*(*橋本 [14], 対馬 [98] も参照*)*

特に *Lee-Weintraub* [53] とあわせれば

$$-p^2(p^2-1)\sqrt{-p}L(0,L_2^*,\psi)=\frac{p(p^2-1)}{4}\biggl(\Bigl(\frac{1}{8}h(-p)-\frac{1}{12}B_{3,\chi}\Bigr)h(\sqrt{-p})$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-2}\frac{\chi(a)}{(1-\zeta^{-j})(1-\zeta^{j+1})(1-\zeta^{j(j+1)})}\biggr).$$

となる。

ここで $L(s, L_2^+, \phi)$ の定義は section 3.4 で述べたとおりである。また、χ を導手 f の原始的ディリクレ指標とするとき、一般ベルヌーイ数 $B_{n,\chi}$ は

$$\sum_{a=1}^{p} \frac{\chi(a)te^{at}}{e^{pt}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n,\chi}}{n!} t^n.$$

で定義する ([4])。特に

$$B_{1,\chi} = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)a$$

$$B_{3,\chi} = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)a^3 - \frac{3}{2} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)a^2 + \frac{f}{2} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)a$$

である。

ベルヌーイ多項式を

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} \qquad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

と定義する。もっと一般には

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

で定義する ([4])。$x \in \mathbb{R}$ に対して $\langle x \rangle$ を $x - \langle x \rangle \in \mathbb{Z}$, かつ $0 < \langle x \rangle \leq 1$ となる実数とする。（つまり x の小数部分、ただし、x が整数の時は 1 とする。）ここで次の複雑な記号を導入する。

$$\mathcal{A} = -\sum_{\alpha,\gamma}{}' B_1(\langle \frac{\alpha^2 - 2\alpha\gamma}{p} \rangle) B_1(\langle \frac{2\alpha\gamma}{p} \rangle) B_1(\langle \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{p} \rangle) + \frac{1}{12}(3 + \delta_{p,3}) B_{1,\psi}$$

ただし、α, γ は $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ かつ $\alpha^2 \not\equiv 2\alpha\gamma \bmod p$, $\alpha\gamma \not\equiv 0 \bmod p$, $\alpha^2 \not\equiv \gamma^2 \bmod p$ なるものを動く。

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{3} \sum_{\alpha,\gamma}{}'' B_2(\langle \frac{\alpha^2 - 2\alpha\gamma}{p} \rangle) B_2(\langle \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{p} \rangle)$$

ここで $(\alpha, \gamma) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ かつ $\alpha^2 \not\equiv \gamma^2 \bmod p$ を動く。

Theorem 9.4 (荒川 [3])**.** 以上の記号の下で、$p \equiv 1 \bmod 4$ ならば $L(0, L_2^*, \psi) = 0$. もし $p \equiv 3 \bmod 4$ ならば

$$L(0, L_2^*, \psi) = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \frac{11}{36p} B_{3,\psi} - \frac{1}{24p} B_{1,\psi}$$

である。

しかし、荒川の複雑な計算とは全く独立に、直接的に次がわかる。

Theorem 9.5 (伊吹山・齋藤 [18])**.** $p \equiv 3 \bmod 4,\ p > 3$ の仮定の下で

$$L(s, L_2^*, \psi) = -\frac{2^{2s-1}B_{1,\psi}}{p^s}\zeta(2s-1).$$

特に $s=0$ として $\zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} = -1/24$ より

$$L(0, L_2^*, \psi) = \frac{1}{24}B_{1,\psi}.$$

m を 1 以上の整数とすると

$$L(1-m, L_2^*, \psi) = \frac{p^{m-1}}{2^{2m}m}B_{2m}B_{1.\psi}.$$

証明は ψ は 2 次形式と 2 次体の order のイデアル類の対応を考えると、いわゆる 2 次体の genus character （イデアル類群の位数 2 の指標）とみなせて、定義から直接的に示される。この結果は [4] の第 10 章でも日本語で解説している。

なお、この結果を出した経緯は次のとおりである。1991 年の 12 月はじめごろに数理研で、当時、一時的に九大の助手だった Pia Bauer というドイツ人女性研究者が 2 元 2 次形式のゼータについての講演を行って、これは 2 次体のゼータでもあるから、というような話をした。彼女の講演にはあまり感銘を受けなかったが、「ああそうだった、2 元 2 次形式は 2 次体だったな」と始めて思いついて、これで $L(s, L_2^*, \psi)$ を書き換えたらどうなるかな、と思って、ついでに具体的な p について例を計算してみると、係数がどんどん消えるのである。これにはちょっとぎょっとして、きちんと理屈を考えてみたら、すぐ上の結果が出た。以前、私がまだ九大にいた 1990 年ごろに齋藤裕さんが九大に来た時に（私が阪大に移ったのは 1991 年)、私が彼に「こういう特殊値（指数和）に興味があって無手勝流で計算してみているのだがあまりうまくいかない」という話をしたことがあったのだが、そのことが念頭にあったので、結果を出したあと、京都に立ち寄った機会に、斎藤さんに結果を書いた文書を見せた。そしたら、彼が「それは私も知っていた」という説明をしたので、それで共著論文を私が書いた。だから、これはふたりが全く独立に得た結果であった。一般の次数の場合の、2 次形式全体のなす概均質ベクトル空間のゼータ関数についての共同研究は、このときに私が提案して始まった。なお、上記の論文では $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変な格子（本質的に有限個）についての結果を追加してある。

これから直ちに

Proposition 9.6. $p \equiv 3 \bmod 4,\ p > 3$ として、y_{ij} を ψ_{ij} の $S_k(\Gamma(p))$ における $Sp(2,p)$ の既約表現の重複度とすると、

$$y_{21} - y_{22} - y_{31} + y_{32} = \frac{p(p^2-1)}{24}h(\sqrt{-p})$$

未解決問題 8. この重複度の差の空間は 2 次ジーゲルカスプ形式の空間 $S_k(\Gamma(p))$ の中でどのような保型形式で張られるのか。また類数が現れるのは何故か？*Hecke* の論文にあるような説明を与えよ。

以上の結果と [53] および補題 9.3 を比較して次を得る。

Proposition 9.7 ([18])**.** p を $p \equiv 3 \bmod 4$ となる素数で、$p > 3$ とする。また ψ を *quadratic residue symbol* とする。このとき

$$\sum_{(a,b,c)\in S} \frac{\psi(abc)}{(1-\zeta^a)(1-\zeta^b)(1-\zeta^c)} = -\sqrt{-p}\left(\frac{p+1}{4}B_{1,\psi} + \frac{1}{6}B_{3,\psi}\right).$$

ただし $S = \{(a,b,c); 1 \le a,b,c \le p-1, ab+bc+ca \equiv - \bmod p\}$ とおいている。

注意：$p > 3$ で $p \equiv 3 \bmod 4$ ならば $B_{1,\psi} = -h(\sqrt{-p})$ である。
この補題 9.7 の初等的な証明は今に到るも知られていない。

ちなみに Pia Bauer Wigner はもともと訓練を受けた上手な歌手だったが（一度、九大にいたころに、サンサーンスの「サムソンとデリラ」の楽譜を私がプレゼントして、歌ってもらったことがある。ピアノ伴奏はザギエだった。）、その後、数学者をやめて、パリに出てコンセルバトワールに通っていると聞いていた。近況はよく知らないが、メゾソプラノ歌手としての活動をウェブで見ることができる。

9.4. **Arakawa identity and Tsukano conjecture.** 以後、$p \equiv 3 \bmod 4$ と仮定する。また整数 h に対して、次の集合を定義する。

$$S_h = \{(a,b,c); 1 \le a,b,c \le p-1, ab+bc+hca \equiv 0 \bmod p\}$$

また次の二つの量を定義する。

$$I(h,p) = \sum_{(a,b,c)\in S_h} \frac{\psi(abc)}{(1-\zeta^a)(1-\zeta^b)(1-\zeta^c)},$$
$$J(h,p) = \sum_{(a,b,c)\in S_h} \psi(abc)abc.$$

$I(1,p)$ の値は [18] でわかっていた。（つまり上の Proposition 9.7 である。）$\mathfrak{g}(\psi)$ を ψ に対するガウス和とする。つまり

$$\mathfrak{g}(\psi) := \sum_{a=1}^{p-1} \psi(a)e^{2\pi ia/p} = \sqrt{-p}$$

ちなみに ζ が 1 の原始 f 乗根のときには

$$\frac{1}{1-\zeta^a} = -\frac{1}{p}\sum_{c=1}^{f-1} \zeta^{ac}$$

であることは容易にわかるので（たとえば [4] の第 8 章）、$I(h,p)$ の式を指数和に書き換えることは容易である。ただし出てくる 2 次形式はもととはかなり変わった形になる。（いわば dual といってよい。）これは、この手の和に関する手ごろな演習問題であって、これを実行するといろいろ思うことも出てくるであろう。もちろん書き換えたからと行って全然容易になるわけではない。

以下に述べる予想は、阪大修士課程で、私の学生だった東野仁政（さとゆき）氏が、私の勧めで実験した修士論文の内容である。彼はもと

もと学部の時は埼玉大の佐藤孝和君の学生で、大学院から阪大に来た。修士終了後、直ちにベンチャー系に就職したが、現在は転職して、大学関係で量子計算機のプログラマなどの技術的な仕事をしている。活躍の様子はウェブでみることができる。

Conjecture 9.8 (東野 [96]). $\zeta = e^{2\pi i/p}$ とする。また $p \equiv 3 \bmod 4$ とする。このとき次が成り立つと予想される。

$$I(1,p)/g(\psi) = -\left(\frac{p+1}{4}B_{1.\psi} + \frac{1}{6}B_{3,\psi}\right), \tag{6}$$

$$I(p-1,p)/g(\psi) = -\left(\frac{p-3}{4}B_{1,\psi} + \frac{1}{6}B_{3,\psi}\right), \tag{7}$$

$$I(2,p)/g(\psi) = \begin{cases} -\frac{1}{6}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\left(\frac{p+1}{6}B_{1,\psi} + \frac{5}{18}B_{3,\psi}\right) & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{8}$$

$$I(\frac{p-1}{2},p)/g(\psi) = \begin{cases} \frac{p-4}{4}B_{1,\psi} + \frac{5}{24}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\left(\frac{p-5}{6}B_{1,\psi} + \frac{17}{72}B_{3,\psi}\right) & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{9}$$

$$I((p+1)/2,p)/g(\psi) = \begin{cases} \frac{p}{4}B_{1,\psi} + \frac{5}{24}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\left(\frac{p+1}{6}B_{1,\psi} + \frac{17}{72}B_{3,\psi}\right) & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{10}$$

$$I(p-2,p)/g(\psi) = \begin{cases} -\left(B_{1,\psi} + \frac{1}{6}B_{3,\psi}\right) & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\left(\frac{p-5}{6}B_{1,\psi} + \frac{5}{18}B_{3,\psi}\right) & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{11}$$

$$J(1,p)/p^2 = \frac{p+1}{2}B_{1,\psi} - \frac{1}{6}B_{3,\psi}, \tag{12}$$

$$J(2,p)/p^2 = \begin{cases} -\frac{1}{2}B_{1,\psi} + \frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ \frac{2(p+1)}{3}B_{1,\psi} - \frac{5}{36}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{13}$$

$$J(\frac{p-1}{2},p)/p^2 = \begin{cases} \frac{3p+1}{4}B_{1,\psi} + \frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\frac{p-3}{4}B_{1,\psi} - \frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{14}$$

(15)

$$J(\frac{p+1}{2},p)/p^2=\begin{cases} -\frac{p-1}{4}B_{1,\psi}+\frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p\equiv 3 \bmod 8,\\ \frac{3(p+1)}{4}B_{1,\psi}-\frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p\equiv 7 \bmod 8,\end{cases}$$

(16)

$$J(p-2,p)/p^2=\begin{cases} \frac{2p-1}{2}B_{1,\psi}+\frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p\equiv 3 \bmod 8,\\ -\frac{p-2}{3}B_{1,\psi}-\frac{5}{36}B_{3,\psi} & \textit{if } p\equiv 7 \bmod 8,\end{cases}$$

(17)

$$J(p-1,p)/p^2=-\frac{p-1}{2}B_{1,\psi}-\frac{1}{6}B_{3,\psi}.$$

上の予想は全部独立というわけではない。

Isaacson の発想：以上の予想を英語に翻訳して、B. Isaacson に送ったところ、彼は自分が証明できると思うと言って、実際に彼はほどなく証明した。Brad Isaacson は Rutgers, Newark での Robert Sczech の弟子で、Sczech は Zagier の弟子である。Sczech は既に大学を退職している。退職の時に彼が数学教室に数学研究のために 50 万ドルを寄付したというのがウェブの記事になっている。

Isaacson は、対称行列のゼータ関数の明示的公式を与えることが自分の Jugentraum だった（伊吹山・齋藤の論文を見るまでは）と私に言ってきた。

Sczech はマックスプランク研究所で荒川君と同じ時期を過ごした。Isaacson に「夜の何時であろうと、荒川の部屋はいつも電気がついていて数学をやっていた」と語ったそうで、このことを聞いたのは、Arakawa の $L(0,L_2^*,\psi)$ についての仕事と同じくらい inspirational だった、と私宛のメールに書いてあった。

Isaacson の観点では、荒川氏の contour integral による $L(0,L_2^*,\psi)$ の $B_1(\{x\})$ の三重積での複雑な公式 Theorem 9.4 と伊吹山・齋藤の公式 Theorem 9.5 を組み合わせて、これを三重積に関する新しい公式と思うことにする。これを用いると、いろいろ新しい関係式が証明できるという発想である。確かに荒川プラス伊吹山・齋藤は、非常に摩訶不思議な公式を与えるが、こういうことが新しいことに利用できるとは私は思ってもみなかった。荒川君の仕事が意外な形で正当に評価されるのを嬉しく思う。

Proposition 9.9 (B.Isaacson [40])**.** 東野予想は正しい。

しかし、Isaacson の手法は相当 ad hoc であって、どうしてこの手法で、わからなかったときの計算がうまくできるのか、ということの本質的な理由が私にはよくわからない。そもそもこれは普通の意味での初等的な証明とは言いかねるであろう。

未解決問題 9. *(i)* 指数和の公式の初等的な証明を与えよ。少なくとも、もう少し哲学的な説明を与えよ。

(ii) なぜ上にあげた h だけうまくいっているのだろうか？あるいはうまくいく２次式とそうでない２次式はどういう違うがあるのだろうか？
(iii) 他の概均質ベクトル空間では、このような指数和の問題はないのか？たとえば、３行３列の対称行列からなる概均質ベクトル空間では、どうなるのか？$\det \equiv 0 \bmod p$ のところで和をとるとか？もっともらしい一般論を予想し、証明せよ。
(iv) Isaacson の証明から、荒川の公式を「消去」して、これを、より初等的な証明、ないしは本質的な記述に変形せよ。

10. 付録：ジョルダン分解の補足的解説

現在の日本ではあまり２次形式の整数論はポピュラーでなくなっているかもしれないので、[45] p. 71, [62], [31] より、局所的なジョルダン分解について少し引用しておく。

(V, Q) を $\mathbb{Q}_p$ 上の２次空間として、$B(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$ とする。$B(x,x) = Q(x)$ である。L を V の $\mathbb{Z}_p$-lattice をする。$s(L) = B(L,L)$ とおいて scale という。また

$$n(L) = \{\sum_i a_i Q(x_i); a_i \in \mathbb{Z}_p, x_i \in L\}$$

とおく。$p \neq 2$ ならば、$n(L) = s(L)$ である。$p = 2$ ならば $n(L) = 2s(L)$ または $s(L)$ である。$\{v_i\}_{i=1}^n$ を L の $\mathbb{Z}_p$ 上の基底とする。行列 $A = (B(e_i, e_j))$　と $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ について、$a^{-1}A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ のとき、L を (a) modular という。L が (a) modular ならば任意の i. j に対して $B(v_i, v_j) \in a\mathbb{Z}_p$ であり、よって $s(L) \subset a\mathbb{Z}_p$ である。もし $a\mathbb{Z}_p \neq s(L)$ ならば、$B(v_i, v_j)$ はすべて $ap\mathbb{Z}_p$ の元と言うことになり、$a^{-1}A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ に反する。よって L が (a) modular ならば、

$$s(L) = a\mathbb{Z}_p$$

である。これは行列表示 A で言えば

$$A = p^t A_0 \qquad A_0 \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$$

と言うことである。特に $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対して (a) modular なものを unimodular という。これは行列で言えば $\det(A) \in \mathbb{Z}_p^\times$ つまり $A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ というのを同じである。

$\mathbb{Z}_p$ 上の格子 L に対して、

$$L = L_1 \perp L_2 \perp \cdots \perp L_m$$

でかつ L_i が $s(L_i)$ modular であり、$s(L_1) \supset s(L_2) \supset \cdots \supset s(L_m)$ かつ $s(L_i) \neq s(L_{i+1})$ となる直交分解がある。これは行列で言えば、ある $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ があって、1

$$A \sim \begin{pmatrix} p^{t_1}A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{t_2}A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p^{t_m}A_m \end{pmatrix}$$

で、$\det(A_i) \in \mathbb{Z}_p^\times$ と言うことである。このような、格子または行列の直交分解をジョルダン分解という。

Theorem 10.1 (O'Meara [62], Kitaoka [45]). 格子 L の 2 つの *Jordan* 分解について、次の性質がなりたつ。

$$L = L_1 \perp \cdots \perp L_t = K_1 \perp \cdots \perp K_u$$

がともにジョルダン分解だとすると、
(1) $t = u$.
(2) $s(L_i) = s(K_i)$, $\mathrm{rank}(L_i) = rank(K_i)$ $(1 \leq i \leq t)$
(3) $n(L_i) = n(K_i)$ $(1 \leq i \leq t)$.
さらに $p \neq 2$ ならば、$L_i \cong K_i$ となる。つまり、この場合はジョルダン分解は一意的である。

p が奇数ならば、unimodular 行列 A は単純で、

$$\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

と同値である。([45] Theorem 5.2.4). p が奇数の時、2 つの n 次の unimodular 行列 A_1 と A_2 が $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 同値であるための必要十分条件は、$\det(A_1) = \det(A_2)(\mathbb{Z}_p^\times)^2$ であることである。実際、同値ならば、$UA_1\,{}^tU = A_2$ より $\det(A_1)\det(U)^2 = \det(A_2)$ である。また $\det(A_1) = \det(A_2)u^2$ $(u \in \mathbb{Z}_p^\times)$ ならば、$P = diag(1_{n-1}, u)$ で $(1_{n-1}, \det(A_1))$ と $(1_{n-1}, \det(A_2))$ は同値になる。だからより単純な言い方をすると次のようになる。

Theorem 10.2. p を奇素数とするとき、$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ および $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_r$ があって、

$$A = \begin{pmatrix} p^{t_1}A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{t_2}A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p^{t_m}A_m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} p^{s_1}B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{s_2}A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p^{s_r}B_r \end{pmatrix}$$

で A_i は n_i 次、B_j は n'_j 次の行列で $\det(A_i)$, $\det(B_j) \in \mathbb{Z}_p^\times$ と仮定する。ここで A と B が $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 同値であるための必要十分条件は $m = r$, $n_i = n'_i$, $\det(A_i) \in \det(B_i)(\mathbb{Z}_p^\times)^2$ $(i = 1, \ldots, m)$ となることである。

以上により、p が奇数のときは、同型類は単純である。しかし、

$p = 2$ ならばジョルダン分解は全然一意的ではない。また $GL_n(\mathbb{Z}_2)$ 同値の代表元の記述は極めて複雑である。またユニモジュラー行列の構造も複雑である。たとえば、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}{}^tP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

しかし、両者はジョルダン分解としての成分 1 と 3 などは同型ではない。

実は $p = 2$ についても $GL_n(\mathbb{Z}_2)$ に関する同値類の記述は O'Meara [62] に定理として述べられている。これが複雑であることは前に述べた。この定理の記述が複雑なのは一般の局所体で述べてあることも一因だが、たとえ $\mathbb{Z}_2$ に限っても、本質的に面倒だと言う事実は変えられない。これはやむを得ないことである。これを避けたかったら何か新しい不変量を導入するしかない。(たとえば、池田・桂田の extended Gross-Keating invariant とか？)

11. 引用論文のタイプミス訂正

講演の準備の過程で気がついた、いくつかの自分の論文のタイプミスについてまとめておく。なお、十分検証したわけではないから、ほかにもあるものと思う。

(1) [20] I において、p.1100 第一節の l. 6 d_{ij} は dy_{ij}.
(2) p. 1108 l. 8 $S_n(R,d)$ は $S_n(\mathbb{Z}_p,d)$
l. 9, Hilfsatz 5 は Hilfssatz 5.
(3) p. 1110 下 l. 5, $1 \le i,j \le$ は $1 \le i,j \le m$.
(4) p. 1111 式 (3,4) は $p^{t_1} X x_1' = 0$.
(5) p. 1225 Theorem (Körner) において、$\beta(n, \det x_i)^{-1}$ (マイナス一乗がぬけている。)
(6) [25] p. 21 l. 8 任意の不変作用素で → 任意の不変微分作用素で
(7) [25] の p. 24 の中ほど、$L_s f(X)$ は $(L_s f)(Y)$ の間違い。右辺の積分は、被積分関数に $f(Y)$ がはいる。
(8) [25] の p. 41 で $\eta(s,u)$ の最初の式は、右辺の積分の中に $a(T)$ がはいる。
(9) [25] の第 7 節 p. 38 において、h の定義がぬけているが、これは $h = P_k g$ が定義である。この記号は Maass [56] p. 210 にならっている。

参考文献

[1] 青木美穂、p 進ゼータ関数、久保田-レオポルドから岩沢理論へ、日本評論社、(2019), 284 pp+ii.
[2] T. Arakawa, The dimension of the space of cusp forms on the Siegel upper half plane of degree two related to a quaternion unitary group. J. Math. Soc. Japan **33** (1981), no. 1, 125–145.
[3] T. Arakawa, Special values of L-functions associated with the space of quadratic forms and the representation of $Sp(2n,\mathbb{F}_p)$ in the space of Siegel cusp forms, Adv. Stud. Pure Math.**15**, Academic Press, Inc., Boston, MA, (1989), 99–169.
[4] 荒川恒男、伊吹山知義、金子昌信、新装版ベルヌーイ数とゼータ関数、整数論の風景、共立出版 2022 年（旧版と比べて、細かい訂正以外に、２次形式の種の理論や Barnes の伝記等が追加されている。）
[5] D. Bump, Automorphic forms and representation, Cambridge Univ. Press (1997), xiv+574 pp.

[6] U. Christian, Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. Reine Angew. Math. **277** (1975), 130–154.

[7] U. Christian, Zur Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. Reine Angew. Math. 296(1977), 108–118.

[8] H. Cohen, Sums involving at negative integers of L functions of quadratic characters, Math. Ann. **217**(1975), 271–285.

[9] W. Duke, Ő. Imamoḡlu, and Á, Tóth, On a method of Hurwitz and its application, Preprint 2023, 17 pp. `http:https://www.math.ucla.edu/~wdduke/`

[10] H. Enomoto, The characters of the finite symplectic group $Sp(4, q)$, $q = 2^f$. Osaka Math. J. **9** (1972), 75–94.

[11] R. Godement, Série de Poincaré et Spitzenformen, Séminaire Cartan 1957/58 Expose 10.

[12] J. Faraut and A. Korányí, Analysis on symmetric cones, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994. xii+382 pp.

[13] K. Hashimoto, Class numbers of positive definite ternary quaternion Hermitian forms. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **59** (1983), no. 10, 490–493.

[14] K. Hashimoto, Representations of the finite symplectic group $Sp(4, \mathbb{F}_p)$ in the space of Siegel modular forms, Contemp. Math. **53** (1986), 253–276.

[15] E. Hecke, Mathematische Werke, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht (1970),

[16] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices and an explicit conjecture on dimensions of Siegel modular forms of general degree, Internat. Math. Res. Notices(1992), no. 8, 161–169.

[17] T. Ibukiyama, On some alternating sum of dimensions of Siegel cusp forms of general degree and cusp configurations. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **40** (1993), no. 2, 245–283.

[18] T. Ibukiyama and H. Saito, On L-functions of ternary zero forms and exponential sums of Lee and Weintraub, J. Number Theory **48**(1994), no.2, 252–257.

[19] T. Ibukiyama, On dimensions of automorphic forms and zeta functions of prehomogeneous vector space. (in English) Theory of prehomogeneous vector spaces(Kyoto, 1994). 京大数理解析研究所講究録 **924** (1995), 127–133.

[20] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices I. An explicit form of zeta functions. Amer. J. Math. **117**(1995), no.5, 1097–1155. II: Functional equations and special values, Hiroshi Saito Memorial Volume of Nagoya Math. J. Vol. **208**(2012), 263–315. III. An explicit form of L functions, Nagoya Math. J. **146**(1997), 149–183

[21] T. Ibukiyama and H. Katsurada, An explicit form of Koecher Maass Dirichlet series associated with Siegel Eisenstein series（日本語）代数群上の保型形式、数理解析研究所講究録 **965** (1996), 41–51.

[22] 伊吹山知義、A survey on the new proof of Saito-Kurokara lifting after Duke and Imamoglu (日本語）, 第 5 回整数論サマースクール報告集 (1997). 134–176. ウェブは
`http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/proceedings.html`

[23] 伊吹山知義、齋藤裕、「やさしいゼータ関数」、日本数学会「数学」　Vol. 50 No.1 (1998), 1–11. `https://doi.org/10.11429/sugaku1947.50.1`
英文は　Sugaku Exposition: On easy zeta functions　Vol. 14(2001) 191–204. AMS (翻訳は Don Zagier による。英文のデジタルファイルはない。)

[24] T. Ibukiyama, On some elementary character sums, Commentarii Math. Univ. St. Pauli **47**(1998), 7–13.

[25] 伊吹山知義、Koecher-Maass series on tube domains, 第 1 回整数論オータムワークショップ報告集　(1998), 46 pp. ウェブは
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/proceedings.html
[26] 伊吹山知義, Dimension of holomocphic automorphic forms of tube domains: The contribution of central unipotent elements and zeta functions of prehomogeneous vector spaces, 第 3 回整数論オータムワークショップ報告集　(2000), 27 pp. ウェブは
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/proceedings.html
[27] T. Ibukiyama and H. Katsurada, An explicit formula for Koecher Maass Dirichlet series for Eisenstein series of Klingen type, J. Number Theory **102**, (2003), 223–256.
[28] T. Ibukiyama and H. Katsurada, An explicit formula for the Koecher Maass Dirichlet series for the Ikeda lift, Abhand. Math. Semi. Univ. Hamburg **74**(2004), 101–121.
[29] T. Ibukiyama and H. Katsurada, Koecher-Maass series for real analytic Siegel Eisenstein series. *Automorphic forms and zeta functions* Proceedings of the Conference in Memory of Tsuneo Arakawa, (2006). 170–197, World Sci. Publ., Hackensack, NJ.
[30] T. Ibukiyama, Dimension formulas of Siegel modular forms of weight 3 and supersingular abelian varieties, *Proceedings of the 4-th Spring Conference on modular forms and related topics, "Siegel Modular Forms and Abelian Varieties" ed. by T. Ibukiyama* (2007), 39–60. 改訂版は：
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/pdf/
2007weightthreeprocrevised2.pdf
[31] 伊吹山知義、保型形式特論、共立出版 2018 年、480 pp+x.
[32] T Ibukiyma, Some Poisson formula on tube domains, Comment. Math. Univ. St. Pauli **69** (2021), 43–50.
[33] T. Ibukiyama, Genus character L-functions of quadratic orders in an adelic way and maximal orders of matrix algebras, arXiv:2303.14983v1.
[34] J. Igusa, Some results on p-adic complex powers, Amer. J. Math. **106**(1984), 1013–1032.
[35] K. Imai (=K. Ota), Generalization of Hecke's correspondence to Siegel modular forms, Amer. J. Math **102** (1980), 903–936.
[36] B. Isaacson, On character sums of Lee-Weintraub, Arakawa, and Ibukiyama, and related sums, A dissertation submitted to the graduate school-Newark, Rutgers, (New Jersey), 2015. 218 pp.
[37] B. Isaacson, Character sums of Lee and Weintraub. J. Number Theory **191** (2018), 316–344.
[38] B. Isaacson, Special values of Ibukiyama-Saito L-functions. Kyushu J. Math. **72** (2018), no. 2, 343–373.
[39] B. Isaacson, On a generalization of a theorem of Ibukiyama. Comment. Math. Univ. St. Pauli **67** (2019), no. 1, 1–16.
[40] B. Isaacson, The Tsukano conjectures on exponential sums. Osaka J. Math. **57** (2020), no. 3, 543–561.
[41] H. Katsurada, An explicit formula for the Fourier coefficients of Siegel-Eisenstein series of degree 3, Nagoya Math. J. **146** (1997), 199–223.
[42] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.
[43] 木村達雄、小木曽岳義、ある正則概均質ベクトル空間に付随した adelic zeta distribution について、京大数理研講究録 **718**(1990)165–191.

[44] T. Kimura and T. Kogiso, On adelic zeta functins of prehomogeneous vector spaces with a finitely many adelic open orbits. Advanced Studies in Pure Math. **21** (1992), 21–31.

[45] Y. Kitaoka, Arithmetic of quadratic forms, Cambridge Tracts in Math. **106**, Cambridge Univ. Press, (1993), x+268 pp.

[46] H. Klingen, Zur Transformationstheorie von Thetareihen indefiniter quadratischer Formen. Math. Ann. **140** (1960), 76–86

[47] M. Koecher, Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, J. Reine Angew. Math. **192** (1953),1-23.

[48] M. Koecher, Über Thetareihen indefiniter quadratischer Formen. Math. Nachr. **9** (1953), 51–85.

[49] O. Körner, Die Masse der Geschlechter quadratischer Formen von Range ≤ 3 in quadratischen Zahlkörper, Math. Ann. **193**(1971), 279–314.

[50] W. Kohnen, Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. **248**(1980), 249–266.

[51] 近藤武、岩波講座基礎数学、群論 III, 岩波書店 1977.

[52] A. Kurihara, On the values at non-positive integers of Siegel's zeta functions of $\mathbb{Q}$-anisotropic quadratic forms with signature $(1, n-1)$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo SecIA. **28** (1982), 567–584.

[53] R. Lee and S. H. Weintraub, On a generalization of a theorem of Erich Hecke, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **79** (1982), 7955–7957.

[54] H. Maass, Modulformen zweiten Grades und Dirichletreihen. Math. Ann. **122** (1950), 90–108.

[55] H. Maass, Automorphe Funkitionen und indefinite quadratische Formen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenchaften (1949).

[56] H. Maass, Siegel's modular forms and Dirichlet series. Dedicated to the last great representative of a passing epoch. Carl Ludwig Siegel on the occasion of his seventy-fifth birthday. Lecture Notes in Mathematics, **216**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. v+328 pp.

[57] R. Matthes and Y. Mizuno, Koecher-Maass series associated to Hermitian modular forms of degree 2 and a characterization of cusp forms by the Hecke bound. J. Math. Anal. Appl. **509**, (2022), no. 1, Paper No. 125904, 26 pp.

[58] Y. Morita, An explicit formula for the dimension of spaces of Siegel modular forms of degree two. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **21** (1974), 167–248.

[59] J. Nakagawa, On the relations among the class numbers of binary cubic forms, Invent. math. **134** (1998), 101–138.

[60] S. Ogata, Special values of zeta functions associated to cusp singularities, Tohoku Math. J. **37** (1985), 367–384.

[61] 大野泰生、「２元３次形式のゼータ関数の考察」(1995 年大阪大学修士論文, あいにくこの論文のデジタルファイルは現在所有していない）同じ内容の英文論文は次に発表されている。A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms. Amer. J. Math. **119** (1997), 1083–1094.

[62] O. T. O'Meara, Introduction to quadratic forms. Second printing, corrected. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **117**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971. xi+342 pp.

[63] H. Saito, On the representation of $SL_2(\mathbb{F}_q)$ in the space of Hilbert modular forms. J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 101–128.

[64] H. Saito, A generalization of Gauss sums and its applications to Siegel modular forms and L-functions associated with the vector space of quadratic forms. J. Reine Angew. Math. **416** (1991), 91–142.

[65] H. Saito, On L-functions associated with the vector space of binary quadratic forms. Nagoya Math. J. **130** (1993), 149–176.

[66] H. Saito, Explicit formula of orbital p-adic zeta functions associated to symmetric and Hermitian matrices. Comment. Math. Univ. St. Paul. **46** (1997), no. 2, 175–216.

[67] H, Saito, Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces. Math. Ann. **315**(1999), no. 4, 587–615.

[68] H. Saito, Global zeta functions of Freudenthal quartics, Internat. J. Math. **13**(2002), no.8, 797–820.

[69] H. Saito, Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces. Nagoya Math. J. **170** (2003), 1–31.

[70] I. Satake, Special values of zeta functions associated with self-dual homogeneous cones, in *Manifolds and Lie groups*, Progress in Math. **14**, Birkhäuser, Basel-Bpston-Stuttgart, (1981), 359–384.

[71] 佐武一郎、数論的多様体の不変量について（$\mathbb{Q}$-階数 1 の場合）、雑誌「数学」３５巻 (1983), 210-220.

[72] I. Satake, On numerical invariants of arithmetic varieties of Q-rank one, Progr. Math. **46** *Automorphic forms of several variables*, Birkhäuser Boston, Inc. Boston, MA, 1984, 353–369.

[73] I. Satake and J. Faraut, The functional equation of zeta distributions associated with formally real Jordan algebras Satake, I.; Faraut, J. Tohoku Math. J. (2) **36** (1984), no. 3, 469482.

[74] I. Satake and S. Ogata, Zeta functions associated to cones and their special values Adv. Stud. Pure Math.**15** Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989, 1–27.

[75] F. Sato, On zeta functions of ternary zero forms J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1982), 585–604.

[76] F. Sato and Y. Hironaka, Local densities of representations of quadratic forms over p-adic integers (the non-dyadic case). J. Number Theory **83** (2000), 106–136.

[77] A. Schürmann, Computational geometry of positive definite quadratic forms, Polyhedral reduction theories, algorithms and applications, University Lecture Series **48**, AMS (2008), xv+162 pp.

[78] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. B. **20** (1956), 47–87. Also in Collected Papers I (1989). 423–463 (Springer Verlag).

[79] J. P. Serre, Cours d'arithmétique. Collection SUP: "Le Mathématicien" **2**, Presses Universitaires de France, Paris 1970 188 pp.

[80] 清水英男、保型関数 I, II, III, 岩波講座基礎数学（小平邦彦監修）(1977 頃).

[81] G. Shimura, Modular forms of half integral weight, in *Modular forms of one variable I*, Lecture Notes in Maath. **320** Springer, Berlin (1973), 57–74.

[82] G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. Math. **97** (1973), 440–481.

[83] G. Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **31** (1975), 79–98.

[84] 佐藤幹夫、新谷卓郎、概均質ベクトル空間「数学の歩み」佐藤記念号、1970.（残念ながらデジタルファイルはないと思う。）

[85] T. Shintani, On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **22** (1975), 25–65.

[86] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), 393–417. (新谷論文のデジタルファイルはいずれも見たことがない。)
[87] C. L. Siegel, Über die analytiche Theorie der quadratische Formen, Ann, Math, **36**(1935), 527–606.
[88] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen Indefiniter quadratische Formen I, Math. Zeit. **43** (1938), 682–708; II Math. Zeit **44** (1939). 398–426.
[89] C. L. Siegel, Indefinite quadratische Formen und Modulfunktionen, Courant Anniversary volume (1948). 395–406.
[90] C. L. Siegel, Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I, Math. Ann. **124**(1951), 17–54.
[91] C. L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten der Eisensteinschen Reihen. Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **34** (1964), no. 6, 20 pp.
[92] C. L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten von Eisensteinschen Reihen der Stufe T, Math. Z. **105** (1968), 257–266.
[93] B. Srinivasan, The characters of the finite symplectic group $Sp(4, q)$, Trans. Amer. Math. Soc. **131** (1968), 488–525.
[94] J. Sturm, Special values of zeta functions, and Eisenstein series of half integral weight, Amer. J. Math. **102**,(1980), 219-240.
[95] 菅野孝史、Weissauer's converse theorem, 第一回整数論オータムワークショップ報告集「Koecher-Maass 級数について」(1998), 81–98. ウェブは `http://http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/proceedings.html`
[96] 東野仁政、指数和と Bernoulli 数についての実験（1999 年度大阪大学修士論文）(デジタルファイルは、私は持っているがウェブには載せていない。)
[97] R. Tsushima, A formula for the dimension of spaces of Siegel cusp forms of degree three. Amer. J. Math. **102** (1980), no. 5, 937–977.
[98] R. Tsushima, The spaces of Siegel cusp forms of degree two and the representation of $Sp(2, \mathbb{F}_p)$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **60(6)** (1984), 209–211.
[99] R. Tsushima, Dimension formula for the spaces of Siegel cusp and a certain exponential sum, Mem. Inst. Sci. Tech. Meiji Univ. **36** (1997), 1–56.
[100] L. Walling, Explicitly realizing average Siegel theta series as linear combinations of Eisenstein series, Ramanujan J.**47** (2018), 475–499.
[101] S. Wakatsuki, The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree. Adv. Math. **340** (2018), 1012–1066.
[102] T. Yamazaki, On Siegel modular forms of degree two. Amer. J. Math. **98** (1976), no. 1, 39–53.
[103] T. Yang, An explicit formula for local densities of quadratic forms, J. Number Theory **72** (1998), 309–356
[104] T. Yang, Local densities of 2-adic quadratic forms. J. Number Theory **108** (2004), no. 2, 287–345.
[105] 山本修司、大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性、第３０回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」
[106] H. Yoshida, On the representations of the Galois groups obtained from Hilbert modular forms, Thesis, Princeton University(1973) (東大の数学図書館は所蔵しているものと思う。)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, OSAKA UNIVERSITY, MACHIKANEYAMA 1-1, TOYONAKA,OSAKA, 560-0043 JAPAN
E-mail address: `ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp`

保型形式付き概均質ゼータ関数

鈴木 美裕（京都大学理学研究科）

概均質ゼータ関数の積分表示に保型形式をつけたものを考える．そのような積分表示で定まる関数のことを，ここでは保型形式付き概均質ゼータ積分と呼ぶことにする．保型形式付き概均質ゼータ積分は, [Sat94] において最初に導入された．[Hou19] と [SW21+] では，それぞれ 2 元 3 次形式の空間と 2 次正方行列の対の空間の保型形式付き概均質ゼータ積分に，篩法や Tauber 型定理を適用することで，保型形式に付随する何らかの量の等分布を示している．本稿では，これらの具体的な保型形式付き概均質ゼータ積分とその応用について解説する．

1　3 次体の shape

体 K を $\mathbb{Q}$ の n 次拡大とし，実素点の個数を r, 複素素点の個数を s とする．このとき，$n=r+2s$ が成り立つ．代数体 K の実埋め込みを $\sigma_1,\ldots,\sigma_r : K \to \mathbb{R}$, 複素埋め込みを $\tau_1,\ldots,\tau_s : K \to \mathbb{C}$ とすると，埋め込み $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ が

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x),\ldots,\sigma_r(x), \operatorname{Re}\tau_1(x), \operatorname{Im}\tau_1(x),\ldots,\operatorname{Re}\tau_s(x),\operatorname{Im}\tau_s(x))$$

で定義される．この埋め込みにより，整数環 $\mathcal{O}_K$ を $\mathbb{R}^n$ の格子とみなす．

また，$\mathcal{O}_K$ 上の 2 次形式 q を

$$q(x) = \sigma_1(x)^2 + \cdots + \sigma_r(x)^2 + 2|\tau_1(x)|^2 \cdots + \cdots + 2|\tau_s(x)|^2$$

で定義する． 基点となる $\mathbb{Z}$-格子を 1 つ固定すると，階数 $(n-1)$ の $\mathbb{Z}$-格子は $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ の点とみなすことができる．$\sigma(1)$ の直交補空間に $\mathcal{O}_K$ を射影して得られる階数 $(n-1)$ の $\mathbb{Z}$-格子に対応する $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ の点の

$$\mathcal{S}_{n-1} := \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})/\mathrm{GO}_{n-1}(\mathbb{R})$$

における像を Λ_K と表わし，K の **shape** という．商空間 $\mathcal{S}_{n-1}$ には $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ と

$\mathrm{GO}_{n-1}(\mathbb{R})$ の Haar 測度から定まる測度 μ を入れる．このとき, $\mu(\mathcal{S}_{n-1}) < \infty$ となることが知られている．

Bhargava と Harron は, 次の意味で $\{\Lambda_K\}_K$ が $\mathcal{S}_{n-1}$ 上 μ に関して等分布であることを示した．

定理 1.1（[BH16]） 自然数 $n \in \{3,4,5\}$ と $i \leq n/2$, 正の実数 $X > 0$ に対して, 以下の条件を満たす代数体 K の集合の位数を $N_n^{(i)}(X)$ と表わす:

- $[K:\mathbb{Q}] = n$ かつ K の Galois 閉包の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群は S_n (このような代数体を S_n-体という);
- K の複素素点の個数は i;
- $|D_K| < X$, ただし D_K は K の判別式.

また, 境界が測度 0 の可測集合 $W \subset \mathcal{S}_{n-1}$ に対して, 上の 3 つの条件を満たし $\Lambda_K \in W$ となる代数体 K の個数を $N_n^{(i)}(X,W)$ と表わす．このとき,

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_n^{(i)}(X,W)}{N_n^{(i)}(X)} = \frac{\mu(W)}{\mu(\mathcal{S}_{n-1})}.$$

自然な全射 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \mathcal{S}_{n-1}$ による Λ_K の逆像の点を 1 つとり, これを再び Λ_K と表わすことにすると, 関数 $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ に対して $\phi(\Lambda_K)$ が考えられる．Hough は, Λ_K での尖点的 Maass 形式 (後述) の値の分布に関して次を示した．

定理 1.2（[Hou19]） 関数 $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ を, 重さ $2k$ の尖点的 Hecke 固有 Maass 形式とする．このとき, 任意の $F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ と $\epsilon > 0$, $X \to \infty$ に対して

$$N_{3,\pm}(\phi, F, X) := \sum_{[K:\mathbb{Q}]=3} \phi(\Lambda_K) F\left(\frac{\pm D_K}{X}\right) \ll_{\phi,\epsilon} X^{\frac{2}{3}+\epsilon}.$$

注意 1.3 [Hou17+] では 4 次体の場合として次の主張が示されている: ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ の尖点的 Hecke 固有 Maass 形式とする．このとき, 任意の $F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ と $\epsilon > 0$, $i \in \{0,1,2\}$, $X \to \infty$ に対して

$$\sum_{\substack{K:S_4\text{-体} \\ s=i}} \phi_3(\Lambda_K)\phi_2(\Lambda'_K) F\left(\frac{\pm D_K}{X}\right) \ll_{\phi_2,\phi_3,\epsilon} X^{\frac{23}{24}+\epsilon}.$$

ただし, Λ'_K は整数環 $\mathcal{O}_K$ のレゾルヴェント環 (3 次環) の shape とする．

この定理の証明には, 2 元 3 次形式の空間のゼータ積分に Maass 形式をつけたものを使う. 本稿の前半では, この Maass 形式つきゼータ積分の基本性質を紹介する.

1.1 Maass 形式

Maass 形式についての必要事項をまとめておく. 例えば [Bum98, §1.9, §2.1] を参照. 以下の記号を使う:

- $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \quad G^1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$,
- $G^+ = \{g \in G_{\mathbb{R}} \mid \det(g) > 0\}$,
- $G_{\mathbb{Z}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \quad \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,
- $K = \mathrm{SO}(2) = \left\{ \kappa_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

整数 k に対して, 上半平面上の C^∞ 関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ であって

$$f(z) = \left(\frac{cz+d}{|cz+d|} \right)^{-k} f(\gamma(z)), \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

を満たすものを考える. ここで, $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ は 1 次分数変換とする. 上式の右辺を $(f|_k\gamma)(z)$ と表わす. **重さ k の Laplacian** を

$$\Delta_k = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \sqrt{-1} k y \frac{\partial}{\partial x}$$

で定義する. 関数 $f \in C^\infty(\mathbb{H})$ が 3 つの条件

- 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f = f|_k\gamma$,
- f は Δ_k の固有関数,
- ある $N > 0$ に対して $f(x + \sqrt{-1}y) = O(y^N)$, $y \to \infty$

を満たすとき, **重さ k の Maass 形式**という. さらに, 任意の $z \in \mathbb{H}$ に対して $\int_0^1 f(z+t)\mathrm{d}t = 0$ を満たすとき, Maass 形式 f は**尖点的 (cuspidal)** であるという.

正の整数 n に対して, Maass 形式の空間上の線型作用素 T_n で **Hecke 作用素**と呼ばれるものがある (定義は省略). すべての Hecke 作用素の同時固有関数である Maass 形式のことを **Hecke 固有形式**という.

コンパクト群 K の指標 χ_k を, $\chi_k(\kappa_\theta) = e^{2\pi\sqrt{-1}k\theta}$ で定義する. 重さ k の Maass

形式 f に対して $\phi \in C^\infty(G^1)$ を $\phi(g) = (f|_k g)(\sqrt{-1})$ で定めると, ϕ は

$$\phi(\gamma g \kappa) = \chi_k(\kappa)\phi(g), \qquad \gamma \in \Gamma, g \in G^1, \kappa \in K$$

を満たす. このようにして得られる $\Gamma\backslash G^1$ の関数を ([Hou19] に倣って) K-type k の Maass 形式とよぶ. 群 G^1 上の Maass 形式 ϕ を, $g \mapsto \phi(\det(g)^{-\frac{1}{2}}g)$ のようにして G^+ 上の関数に拡張する.

定義 1.4 関数空間

$$C_c^\infty(G^1/\!/K, \chi_k) := \{f \in C_c^\infty(G^1) \mid f(\kappa_1 g \kappa_2) = \chi_k(\kappa_1\kappa_1)f(g)\}$$

に畳み込みで積を定義し, $\mathbb{C}$-代数の構造を入れる:

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_{G^1} f_1(gx)f_2(x^{-1})\mathrm{d}x, \qquad f_1, f_2 \in C_c^\infty(G^1/\!/K, \chi_k).$$

この $\mathbb{C}$-代数は可換であることが知られている ([Bum98, Proposition 2.2.8]). また, K-type k の Maass 形式の空間に畳み込みで作用する:

$$(f * \phi)(g) = \int_{G^1} f(xg)\phi(x^{-1})\mathrm{d}x.$$

重複度 1 定理から次が成り立つ.

補題 1.5 K-type k の尖点的 Hecke 固有 Maass 形式 ϕ と $f \in C_c^\infty(G^1/\!/K, \chi_k)$ に対して, 定数 $\Lambda_{f,\phi} \in \mathbb{C}$ であって

$$f * \phi = \Lambda_{f,\phi}\phi$$

となるものが存在する.

1.2 2 元 3 次形式の空間

本報告集の他の項ですでに説明されたことの繰り返しになるが, 2 元 3 次形式の空間について基本事項を復習する. 詳細は, [石塚 23, §2] と [Tho23] を参照.

2 元 3 次形式の空間

$$V_{\mathbb{R}} := \{f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

への群 $G_{\mathbb{R}}$ の作用を $g \cdot f(x, y) = f((x, y)g)$ で定義する．2 元 3 次形式の判別式 $D(f) = b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$ は, $G_{\mathbb{R}}$ の指標 $\chi(g) = \det(g)^6$ に関して $D(g \cdot f) = \chi(g)D(f)$ を満たす, $V_{\mathbb{R}}$ の相対不変式である．

non-singular な 2 元 3 次形式の集合を, $D(f)$ の正負によって V_+ と V_- の 2 つに分割すると, $V_\pm$ はいずれも G^+-軌道である．それぞれの軌道の代表元

$$x_+ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad x_- = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

をとり, G^+ における固定化群を $I_{x_\pm}$ と表わす．このとき, $|I_{x_+}| = 3$, $|I_{x_-}| = 1$ となることが知られている．

整数係数 2 元 3 次形式のなす格子を $V_{\mathbb{Z}}$ とする:

$$V_{\mathbb{Z}} = \{f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}.$$

ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}}$ への $G_{\mathbb{R}}$ の作用の制限により, この格子には $G_{\mathbb{Z}}$ が作用する．

定理 1.6（Delone-Fadeev 対応） 2 元 3 次形式 $f(x, y) = ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3 \in V_{\mathbb{Z}}$ に対して, 3 次環 $R(f) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\theta$ であって環構造が

$$\begin{aligned} \omega\theta &= -ad \\ \omega^2 &= -ac + b\omega - a\theta \\ \theta^2 &= -bd + d\omega - c\theta \end{aligned}$$

で与えられるものを対応させることで, 自然な全単射 $G_{\mathbb{Z}} \backslash V_{\mathbb{Z}} \to \{3 \text{ 次環 }\}_{/\cong}$ が得られる．

定義 1.7 素数 p に対して 3 次環 R が p で極大であるとは, $R \otimes \mathbb{Z}_p$ が $\mathbb{Z}_p$ 上の極大な 3 次環であることをいう．

[TT13, Lemma 5.8, Proposition 5.9] より, p で極大な 3 次環に対応する $V_{\mathbb{Z}}$ の点の集合は, $V_{p^2} := V_{\mathbb{Z}}/p^2V_{\mathbb{Z}}$ の部分集合を定める．この部分集合の特性関数を Φ_p と表わす．また, 平方因子をもたない正の整数 q に対して, $\Phi_q = \prod_{p|q} \Phi_p$ とおく．ここで, p は q の素因数全体をわたる．

整数 m に対して $V_{\mathbb{Z},m} = \{f \in V_{\mathbb{Z}} \mid D(f) = m\}$ とおく．これは Γ-安定な $V_{\mathbb{Z}}$ の部分集合．$V_{\mathbb{Z},m}$ の Γ-軌道の個数を $h(m)$ と表わし, 代表系 $\{x_{i,m}\}_{i=1}^{h(m)} \subset V_{\mathrm{sgn}(m)}$ を 1 つ固定する．固定化群を $\Gamma(i, m) = \mathrm{Stab}_\Gamma(x_{i,m})$ とおく．また, $g_{i,m} \cdot x_{\mathrm{sgn}(m)} = x_{i,m}$

となる $g_{i,m} \in G^+$ をとる．3 次体 K に対して $\mathcal{O}_K$ に対応する $V_{\mathbb{Z}}$ の点が $x_{i,m}$ の軌道に属するとき, $\Lambda_K := g_{i,m} \in \Gamma \backslash G^+$ とする．

ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$ 上の交代形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle x, y \rangle = x_4 y_1 - \frac{1}{3} x_3 y_2 + \frac{1}{3} x_2 y_3 - x_1 y_4$$

で定義する．この交代形式に関する $V_{\mathbb{Z}}$ の双対格子は

$$\hat{V}_{\mathbb{Z}} = \{ f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \mid a, d \in \mathbb{Z}, b, c \in 3\mathbb{Z} \}.$$

また, $f \in L^1(V_{\mathbb{R}})$ に対して Fourier 変換を

$$\hat{f}(x) = \int_{V_{\mathbb{R}}} f(y) \exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle x, y \rangle) \mathrm{d}y$$

で定める．このとき, $\hat{f} \in L^1(V_{\mathbb{R}})$ ならば Fourier 逆変換 $\hat{\hat{f}}(-x) = 9f(x)$ が成り立つ．

1.3 Maass 形式つきゼータ積分

平方因子をもたない正整数 q を 1 つとる．本稿の前半で説明する Maass 形式つきゼータ積分は, 次のように定義される．

定義 1.8 試験関数 $f \in C_c^\infty(V_{\mathbb{R}})$ を, サポートが G^+-軌道 V_+ または V_- に含まれるものとする．このとき, **Maass 形式つきゼータ積分**を

$$Z_q^{\pm}(f, \phi, V_{\mathbb{Z}}; s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^s \phi(g^{-1}) \sum_{x \in V_{\mathbb{Z}}} \Phi_q(x) f(g \cdot x) \mathrm{d}g$$

で定義する．

試験関数を適切にとると, Maass 形式つきゼータ積分は保型形式付き新谷ゼータ関数の積分表示である．

定義 1.9 $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して, **保型形式付き新谷ゼータ関数** $\mathcal{L}_q^{\pm}(\phi, s)$ を

$$\mathcal{L}_q^+(\phi, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{g_0 \in I_+} \sum_{i=1}^{h(m)} \Phi_q(x_{i,m}) \frac{\phi(g_{i,m} g_0)}{|\Gamma(i,m)|},$$

$$\mathcal{L}_q^-(\phi, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{i=1}^{h(-m)} \Phi_q(x_{i,-m}) \phi(g_{i,-m})$$

で定義する.

通常の新谷ゼータ関数の収束性から, 右辺は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束することがわかる.

以下, 試験関数 f は $f_G \in C_c^\infty(G^1//K, \chi_{2k})$ と $f_D \in C_c^\infty(\mathbb{R}^\times)$ で

$$f(x) = f_D(|D(x)|) \sum_{\substack{g \in G^+ \\ g \cdot x_\pm = x}} f_G(g)$$

と表わせると仮定する. ここで, f_G は $f_G(zg) = f_G(g)$, $z \in \mathbb{R}^\times$, $g \in G^1$ で G^+ 上の関数に拡張している.

補題 1.10 $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して,

$$Z_q^\pm(f, \phi, L; s) = \frac{\Lambda_{f_G,\phi}}{12} \mathcal{L}_q^\pm(\phi, s) \tilde{f}_D(s).$$

ただし, $\tilde{f}_D(s) = \int_0^\infty f_D(x) x^{s-1} \mathrm{d}x$ は Mellin 変換.

証明 Z_q^+ のみ示す. Z_q^- も同様. 格子 $V_\mathbb{Z}$ 上の和を Γ-軌道ごとに分解すると,

$$Z_q^+(f, \phi, V_\mathbb{Z}; s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h(m)} \frac{\Phi_q(x_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|} \chi(g)^s \phi(g^{-1}) \sum_{\gamma \in \Gamma} f(g\gamma g_{i,m} \cdot x_+) \mathrm{d}g.$$

Γ 上の和を unfold すると,

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \int_{G^+} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h(m)} \frac{\Phi_q(x_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|} \chi(g)^s \phi(g^{-1}) \sum_{g_0 \in I_{x_+}} f_G(g g_{i,m} g_0) f_D(\chi(g) m) \mathrm{d}g \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h(m)} \frac{\Phi_q(x_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|} \sum_{g_0 \in I_{x_+}} \int_{G^1} \phi(g^{-1}) f_G(g g_{i,m} g_0) \mathrm{d}g \int_0^\infty \lambda^{12s} f_D(\lambda^{12} m) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h(m)} \frac{\Phi_q(x_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|} \sum_{g_0 \in I_{x_+}} \Lambda_{f_G,\phi} \phi(g_{i,m} g_0) \cdot \frac{1}{12 m^s} \tilde{f}_D(s) \\
&= \frac{\Lambda_{f_G,\phi}}{12} \mathcal{L}_q^\pm(\phi, s) \tilde{f}_D(s).
\end{aligned}$$

積分と和の順序交換は, [Shi72, Proposition 2.13] と同様の議論で正当化される. □

定義 1.11　truncated ゼータ積分を

$$Z_q^{\pm,+}(f,\phi,V_{\mathbb{Z}};s)=\int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi(g)\geq 1}}\chi(g)^s\phi(g^{-1})\sum_{x\in V_{\mathbb{Z}}}\Phi_q(x)f(g\cdot x)\mathrm{d}g,$$

$$\hat{Z}_q^{\pm,+}(\hat{f},\phi,\hat{V}_{\mathbb{Z}};1-s)=\int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi(g)\geq 1}}\chi(g)^{1-s}\phi(g^{-1})\sum_{x\in\hat{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\hat{V}_{\mathbb{Z},0}}\hat{\Phi}_q(x)\hat{f}\left(g^{\iota}\cdot\frac{x}{q^2}\right)\mathrm{d}g$$

で定義する．また, ゼータ積分の**特異部分**を

$$Z_q^{\pm,0}(\hat{f},\phi,\hat{V}_{\mathbb{Z}};s)=\int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi(g)\leq 1}}\chi(g)^{s-1}\phi(g^{-1})\sum_{x\in\hat{V}_{\mathbb{Z},0}}\hat{\Phi}_q(x)\hat{f}\left(g^{\iota}\cdot\frac{x}{q^2}\right)\mathrm{d}g$$

で定める．

truncated ゼータ積分は複素平面全体で正則になる．Poisson 和公式から次がしたがう．

補題 1.12　$\mathrm{Re}(s)>1$ に対して,

$$Z_q^{\pm}(f,\phi,V_{\mathbb{Z}};s)=Z_q^{\pm,+}(f,\phi,V_{\mathbb{Z}};s)+\hat{Z}_q^{\pm,+}(\hat{f},\phi,\hat{V}_{\mathbb{Z}};1-s)+Z^{\pm,0}(\hat{f},\phi,\hat{V}_{\mathbb{Z}},s).$$

Maass 形式のフーリエ展開を使って計算すると, 特異部分は Bessel 関数を含む積分表示をもつことが示せる (詳細略)．この積分表示から次がしたがう．

補題 1.13　特異部分 $Z_q^{\pm,0}(\hat{f},\phi,\hat{V}_{\mathbb{Z}};s)$ は複素平面全体に正則に解析接続される．

最後に, 定理 1.2 の証明について, ごく簡単な方針だけ述べる．

証明の概略　関数 $F\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^+)$ と $X>0$ に対して

$$N'_{3,\pm}(\phi,F,X)=\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}F\left(\frac{\pm m}{X}\right)\sum_{i=1}^{h(m)}{}'\frac{\phi(g_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|}$$

とおく．ここで, Σ' は任意の素数 p において極大な 3 次環に対応する項のみの和を意味する．

Delone-Fadeev 対応によると, $N'_{3,\pm}(\phi,F,X)$ の和のうち S_3-体に対応する項は重さ 2 で, 3 次巡回体に対応する項は重さ $\frac{2}{3}$ でカウントされている．判別式が X 以下の 3 次巡回体の個数は $O(X^{\frac{1}{2}})$, 2 次以下の体の寄与は $O(\|\phi\|_{\infty})$ でなので,

$$N_{3,\pm}(\phi,F,X)=\frac{1}{2}N'_{3,\pm}(\phi,F,X)+O(\|\phi\|_{\infty}X^{\frac{1}{2}}).$$

以下, $N'_{3,+}(\phi,F,X)$ のみ考える．関数 F に対して $f\in C_c^\infty(V_\mathbb{R})$ を適当にとると, 右辺は次のように評価できる:

$$\begin{aligned} N'_{3,+}(\phi,F,X) &= \sum_q \mu(q)\sum_{m=1}^{\infty} F\left(\frac{m}{X}\right)\sum_{i=1}^{h(m)} \Phi_q(x_{i,m})\frac{\phi(g_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|} \\ &\ll \|\phi\|_\infty X^{\frac{3}{2}+\epsilon} + \frac{12}{\Lambda_{f_G,\phi}}\sum_{q\le X^{\frac{1}{3}}}\mu(q)\int_{\mathrm{Re}(s)=2} X^s Z_q^+(f,\phi,L;s)\frac{\mathrm{d}s}{s^2}. \end{aligned}$$

最初の等号は包除原理 ([谷口 23, 命題 3.2] の証明を参照) による．また, 最右辺の第 1 項と第 2 項は, それぞれ $q>X^{\frac{1}{3}}$ と $q\le X^{\frac{1}{3}}$ の寄与分である．最後の和は, 補題 1.13 の証明の過程で得られる $Z_q^+(f,\phi,L;s)$ の積分表示を使って評価する． □

2 トーラス周期

[SW20+] では, 2 次正方行列の対の空間の概均質ゼータ関数に保型形式をつけたものを考える．アデール群上の保型形式を扱いたいので, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の保型表現の導入的な説明をする．ただし, $\mathbb{A}=\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ のアデール環とする．より正確で詳しい説明は, 例えば [Bum98, §3.3] を参照.

群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ のコンパクト開部分群 K_{fin} を $K_{\mathrm{fin}}=\prod_p \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)=\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ とする．強近似定理 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})K_{\mathrm{fin}}$ より[*1], 包含写像 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\hookrightarrow\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ から誘導される写像

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{A}^\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/K_{\mathrm{fin}}$$

が全単射であることがわかる．したがって, 前節で考えた重さ k の Maass 形式 $\phi\colon\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の関数とみなせる．このとき, ϕ は左 $\mathbb{A}^\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$-不変かつ右 K_{fin}-不変であり, $\mathrm{SO}(2)$ が右から指標 χ_k で作用する.

L^2-関数 $\phi\in L^2(\mathbb{A}^\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ であって, 任意の $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ に対して

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}}\phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\mathrm{d}x=0 \tag{2.1}$$

[*1] 一般の代数体 F の場合, 剰余類 $\mathrm{GL}_2(F)\mathrm{GL}_2(F\otimes\mathbb{R})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_{\mathrm{fin}}$ の位数は F の類数に等しい.

を満たすもののなす部分空間を $L_0^2(\mathbb{A}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ と表わす．この部分空間は，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の右正則表現

$$(\rho(g)\phi)(x) = \phi(xg), \qquad g, x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}),\ \phi \in L_0^2(\mathbb{A}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$$

で安定である． 等式 (2.1) を満たす L^2-関数を**尖点的保型形式**といい，$L_0^2(\mathbb{A}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ の部分表現として実現される $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約表現を**尖点的保型表現**という[*2]．

尖点的保型表現 π は，アデール群の制限直積への分解 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \prod_v' \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_v)$ に応じて，制限テンソル積に分解する: $\pi = \otimes_v \pi_v$．ここで，各 π_v は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_v)$ の既約表現である．有限素点 v に対して，π_v が 0 でない $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_v)$-不変ベクトルをもつとき，$\pi_v$ は不分岐であるという．不分岐な表現は，佐武パラーメータと呼ばれる複素数 $\alpha_v \in \mathbb{C}$ でパラメトライズされる．

尖点的保型表現 π と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の有限次元表現 r に対して，**保型 L 関数** $L(s, \pi, r)$ が定まる．また，各素点 v に対して局所 L 因子 $L(s, \pi_v, r)$ が定義され，$L(s, \pi, r) = \prod_v L(s, \pi_v, r)$ が成り立つ．本稿で考えるのは，以下の 2 つの場合のみである．

- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^2$ への通常の作用で定まる 2 次元表現を standard 表現という．表現 r が standard 表現のとき，$L(s, \pi, r)$ を標準 L 関数といい，単に $L(s, \pi)$ と表わす．
- 3 次元空間 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) := \{X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ への $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の共役作用を随伴表現といい，Ad と表わす．付随する保型 L 関数 $L(s, \pi, \mathrm{Ad})$ を adjoint L-関数という．

次の定理は，ある保型形式付き概均質ゼータ関数の留数を計算することで得られる．

定理 2.1（[SW21+]） π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現とし，$L(\frac{1}{2}, \pi) \neq 0$ とする．S を素点の有限集合とし，$\infty \in S$ かつ任意の $v \notin S$ で π_v は不分岐とする[*3]．各 $v \in S$ に対して $\mathbb{Q}_v$ 上の étale 2 次代数 $\mathcal{E}_v$ をとる．$X(\mathcal{E}_S)$ を，任意の $v \in S$ に対して

[*2] 通常，保型形式は smooth K-finite, $\mathcal{Z}$-finite, moderate growth な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の関数と定義される．また，保型表現とは保型形式の空間の部分商として実現される $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \times (\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}), \mathrm{O}(2))$-加群のことをいう．また，ここでは中心指標が自明な表現のみを考えることにする．

[*3] 素点の有限集合 S は任意にとることができるが，簡単のためこのような条件を課しておく．

$E_v \cong \mathcal{E}_v$ となる 2 次体 E の全体とする．このとき, 極限

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} L(\tfrac{1}{2}, \pi\eta_E)$$

が存在し,

$$\frac{2L(1,\pi,\mathrm{Ad})}{\zeta_{\mathbb{Q}}(2)} \prod_{v\in S} \frac{\zeta_{\mathbb{Q}_v}(2)L(\frac{1}{2},\pi_v\eta_{E_v})}{2\zeta_{\mathbb{Q}_v}(1)L(1,\pi_v,\mathrm{Ad})} \prod_{p\notin S} \left\{1 - p^{-3} - \frac{p-1}{p+1}p^{-3}\lambda_p^2\right\}.$$

に等しい．ただし,

- $N(E,S) = \prod_{p\notin S} |D_E|_p^{-1}$,
  D_E は E の判別式, $|\cdot|_p$ は $|p|_p = p^{-1}$ を満たす p 進付値,
- $\eta_E = \prod_v \eta_{E_v} : \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \{\pm 1\}$: $E/\mathbb{Q}$ に対応する 2 次指標,
- $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \prod_v \zeta_{\mathbb{Q}_v}(s)$: 完備化された Riemann ゼータ関数,
- $\lambda_p := p^{\frac{1}{2}}(\alpha_p + \alpha_p^{-1})$, α_p は π_p の佐武パラメータ.

この定理は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ に限らず, 一般の代数体 F 上の四元数環 D の乗法群 $D_{\mathbb{A}_F}^\times$ の保型表現で成り立つ．ここでは簡単のため $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の場合だけを扱う[*4].

重さ k の正則尖点形式が生成する保型表現に対して上の定理を適用すると, 次のようになる:

定理 2.2 $f \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を重さ k の正則な Hecke 固有尖点形式とし, その Fourier 展開を $f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n q^n$, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ とする．また, $a_1 = 1$ となるように正規化されているとする．このとき, 極限

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{0<D_E<x} L(\tfrac{k}{2}, D_E, f)$$

が存在し,

$$\frac{3(4\pi)^k}{(k-1)!\pi}\langle f, f\rangle \prod_p \left\{1 - p^{-3} - \frac{p-1}{p+1}p^{-3}p^{k-1}a_p^2\right\}$$

に等しい．ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は Petersson 内積とし, $L(s,D,f) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{a_n}{n^s}$ とする.

[*4] 実際には, singular 軌道の数が少ない, 分裂トーラスをもたないなどの理由で, 四元数体の場合の方が概均質ゼータ関数の扱いは簡単になる.

2.1 周期積分

2 次体 E に対して, $E=\mathbb{Q}(\sqrt{\tau_E})$ となる $\tau_E\in\mathbb{Q}^\times$ をとる. 乗法群 $E^\times$ は

$$a+b\sqrt{\tau_E}\to\begin{pmatrix}a & b\tau_E\\ b & a\end{pmatrix}$$

により $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ に埋め込める. この埋め込みの像を $T_E(\mathbb{Q})$ とすると, T_E は代数群 GL_2 の部分トーラスを定める. 後の都合のため, 分裂 étale 代数 $E\cong\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ の場合も含めて考える. この場合, 対応するトーラス T_E は, 上の埋め込みで $\tau_E=1$ としたものとする.

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現 π と尖点的保型形式 $\phi\in\pi$ に対して,

$$\mathcal{P}_E(\phi)=\int_{\mathbb{A}^\times T_E(\mathbb{Q})\backslash T_E(\mathbb{A})}\phi(t)\mathrm{d}t$$

を ϕ の**トーラス周期**という.

定理 2.3（[Wal85]） 上の記号の下で, ϕ が $\phi=\otimes_v\phi_v\in\pi$ と分解されるならば

$$|\mathcal{P}_E(\phi)|^2=\frac{\zeta_{\mathbb{Q}}(2)L(\frac{1}{2},\pi)L(\frac{1}{2},\pi\eta_E)}{L(1,\pi,\mathrm{Ad})L(1,\eta_E)^2}\prod_v\alpha^{\#}_{E_v}(\phi_v,\phi_v)$$

が成り立つ. ただし, $L(s,\eta_E)$ は Hecke L-関数, $\alpha^{\#}_{E_v}(\phi_{1,v},\phi_{2,v})$, $\phi_{1,v},\phi_{2,v}\in\pi_v$ は行列係数の積分

$$\alpha_{E_v}(\phi_{1,v},\phi_{2,v}):=\int_{\mathbb{Q}_v^\times\backslash E_v^\times}\langle\pi_v(h)\phi_{1,v},\phi_{2,v}\rangle_v\mathrm{d}h$$

を次のように正規化して得られる局所因子:

$$\alpha^{\#}_{E_v}(\phi_{1,v},\phi_{2,v}):=\frac{L(1,\pi_v,\mathrm{Ad})L(1,\eta_{E_v})^2}{\zeta_{\mathbb{Q}_v}(2)L(\frac{1}{2},\pi_v)L(\frac{1}{2},\pi\eta_{E_v})}\alpha_{E_v}(\phi_{1,v},\phi_{2,v}).$$

これは $\mathrm{Hom}_{E_v^\times\times E_v^\times}(\pi_v\boxtimes\bar{\pi}_v,\mathbb{C})$ の元 (π_v 上の $E_v^\times\times E_v^\times$-不変 Hermite 形式) を定める. 特に, ある $\phi\in\pi$ に対して $\mathcal{P}_E(\phi)\neq 0$ ならば $L(\frac{1}{2},\pi)L(\frac{1}{2},\pi\eta_E)\neq 0$ がしたがう.

この等式を使うと, 定理 2.1 はトーラス周期の平均値公式の形に書き直せる.

2.2　2次正方行列の対の空間

正方行列の対の空間 $V = \mathrm{M}_2 \oplus \mathrm{M}_2$ への $G := \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ の右作用 ρ を

$$(x, y)\rho(g) = (g_1^{-1} x g_2, g_1^{-1} y g_2) g_3, \qquad (x, y) \in V,\ g = (g_1, g_2, g_3) \in G$$

で定義すると, (G, ρ, V) は概均質ベクトル空間である. このとき, V 上の多項式 $P(x, y) = -\det(x\iota(y) - y\iota(x))$ は, G の指標 $\chi(g) = \det(g_1^{-1} g_2 g_3)^2$ に関して $P(z\rho(g)) = \chi(g)P(z)$ を満たす, V の相対不変式である. ただし, ι は余因子行列をとる M_2 の対合

$$\iota(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} {}^t x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

とする. $V' = \{(x, y) \in V \mid P(x, y) \neq 0\}$, $S = V \setminus V'$ とおく.

また, 作用の核 $\ker \rho$ は

$$\ker \rho = \{(aI_2, bI_2, ab^{-1} I_2) \mid a, b \in \mathbb{G}_m\} \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$$

となる. $H = \ker \rho \backslash G$ とおき, G の表現 ρ を H の表現とみなす.

V 上の双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \mathrm{Tr}(x_1 x_2) + \mathrm{Tr}(y_1 y_2)$ で定める. この pairing に関する ρ の反傾表現を $\rho^\vee$ とすると,

$$(x_1, x_2)\rho^\vee(g) = (g_2^{-1} x_1 g_1, g_2^{-1} x_2 g_1)\, {}^t g_3^{-1}$$

となる. この表現 $(G, \rho^\vee, V)$ も概均質ベクトル空間で, $P(z\rho^\vee(g)) = \chi^{-1}(g)P(z)$ が成り立つ.

補題 2.4　概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) の特異軌道は 6 つあり, それぞれの代表元とその固定化群は以下の通り:

- $x_0 := (0, 0)$, $G_{x_0} = G$.
- $x_1 := \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$,

$$G_{x_1} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) \in G \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{G}_m,\ a = bc \right\}.$$

- $x_2 := (0, I_2)$, $G_{x_2} = \left\{ \left(g, h, \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) \in G \,\middle|\, g, h \in \mathrm{GL}_2,\ c \in \mathbb{G}_m,\ g = ch \right\}$.

- $x_3 := \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$, $G_{x_3} \cong G_{x_2}$.
- $x_4 := \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$, $G_{x_4} \cong G_{x_2}$.
- $x_5 := \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, I_2\right)$,

$G_{x_5} = \left\{ \left(\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ 0 & a_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ 0 & a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/c_3 & -c_2/c_1c_3\\ 0 & 1/c_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ 0 & c_3\end{pmatrix}\right) \in G \;\middle|\; a_1c_3 = a_3c_1 \right\}$.

E を 2 次体または $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ とし, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{\tau_E})$ となる $\tau_E \in \mathbb{Q}^\times$ をとる．ただし, $E = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ のときは $\tau_E = 1$ とする．また, similitude 直交群 $\mathrm{GO}_{2,E}$ を次のように定める:

$$\mathrm{GO}_{2,E} = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2 \;\middle|\; {}^t g \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\tau_E\end{pmatrix} g = \mu(g)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\tau_E\end{pmatrix},\ \exists\mu(g) \in \mathbb{G}_m \right\}.$$

さらに, $\mathrm{GO}_{2,E}$ の単位元を含む連結成分を $\mathrm{GSO}_{2,E}$ と表わす:

$$\mathrm{GSO}_{2,E} = \{g \in \mathrm{GO}_{2,E} \mid \mu(g) = \det(g)\}.$$

補題 2.5　各 E に対して $x_E = \left(I_2, \begin{pmatrix}0 & \tau_E\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) \in V_0$ とおくと, $\{x_E\}_E$ は $V_{\mathbb{Q}}$ における正則有理軌道の代表系であり, x_E の軌道は

$$V_E(\mathbb{Q}) := \{z \in V_{\mathbb{Q}} \mid P(z) \in \tau_E(\mathbb{Q}^\times)^2\}.$$

また, G_{x_E} の単位元を含む連結成分を $G^\circ_{x_E}$ とすると χ は $G^\circ_{x_E}$ 上自明であり,

$$[G_{x_E} : G^\circ_{x_E}] = 2, \qquad G^\circ_{x_E} \cong \mathrm{GSO}_{2,E} \times \mathrm{GSO}_{2,E}.$$

さらに, $H^\circ_{x_E} \cong (\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m \times (\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$.

2.3　保型形式付きゼータ積分

定義 2.6　尖点的保型形式 $\phi \in \pi$ と Schwartz-Bruhat 関数 $\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{A}})$ に対して,

$$Z(\Phi, \phi, s) = \int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H_{\mathbb{A}}} |\chi(g)|^s_{\mathbb{A}} \phi(g_1)\overline{\phi(g_2)} \sum_{z \in V'_{\mathbb{Q}}} \Phi(z\rho(g))\mathrm{d}g$$

とおく. ただし, $g = (g_1, g_2, g_3) \in H_{\mathbb{A}}$. また, 反傾表現 $(G, \rho^\vee, V)$ に付随するゼータ関数を $Z^\vee(\Phi, \phi, s)$ と表わす:

$$Z^\vee(\Phi, \phi, s) = \int_{H_{\mathbb{Q}} \backslash H_{\mathbb{A}}} |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{-s} \phi(g_1)\overline{\phi(g_2)} \sum_{z \in V'_{\mathbb{Q}}} \Phi(z\rho^\vee(g))\mathrm{d}g.$$

注意 2.7 [Sat06] では, 概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) の群 G を $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ に制限し, 保型形式として Maass 形式をとった場合の保型形式付き概均質ゼータ関数 (ゼータ積分から取り出される, 関数等式を満たす Dirichlet 級数) について詳しく調べられている. [Sat06] のゼータ関数と上で定義したゼータ積分の比較に関しては, 注意 2.13 で触れる.

また, 保型形式付き概均質ゼータ関数とその関数等式については, [佐藤 23, 5.3 節] を参照.

定理 2.8 tuncated ゼータ積分を

$$Z_+(\Phi, \phi, s) = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A}), |\chi(h)|_{\mathbb{A}} \geq 1} |\chi(h)|^s \phi(g_1)\, \overline{\phi(g_2)} \sum_{z \in V'_{\mathbb{Q}}} \Phi(z\rho(h))\, \mathrm{d}h$$

$$Z_+^\vee(\Phi, \phi, s) = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A}), |\chi^{-1}(h)|_{\mathbb{A}} \geq 1} |\chi^{-1}(h)|^s \phi(g_1)\, \overline{\phi(g_2)} \sum_{z \in V'_{\mathbb{Q}}} \Phi(z\rho^\vee(h))\, \mathrm{d}h$$

で定義する. また, **特異部分**を

$$I(\Phi, \phi, s) = \int_0^1 t^{2s} J(\Phi_t, \phi) \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

とおく. ただし, $\Phi_t(z) := \Phi(t^{\frac{1}{2}} z)$ かつ

$$\int_{H_{\mathbb{Q}} \backslash H^1_{\mathbb{A}}} \phi(g_1)\, \overline{\phi(g_2)} \left(\sum_{z \in V_{\mathbb{Q}} \backslash V'_{\mathbb{Q}}} \widehat{\Phi}(z\rho^\vee(h)) - \sum_{z \in V_{\mathbb{Q}} \backslash V'_{\mathbb{Q}}} \Phi(z\rho(h)) \right) \mathrm{d}h.$$

truncated ゼータ積分は正則関数であり, Poisson 和公式から

$$Z(\Phi, \phi, s) = Z_+(\Phi, \phi, s) + Z_+^\vee(\widehat{\Phi}, \phi, 2 - s) + I(\Phi, \phi, s)$$

が得られる.

定理 2.9　$\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき,

$$Z(\Phi,\phi,s)=Z_+(\Phi,\phi,s)+Z_+^\vee(\widehat{\Phi},\phi,2-s)+\frac{Z^{\mathrm{GJ}}(\Phi_1,\bar{\phi},1)}{2s-3}-\frac{Z^{\mathrm{GJ}}(\Phi_2,\phi,1)}{2s-1}$$

が成り立つ. ただし, $\Phi_1,\Phi_2\in\mathcal{S}(\mathrm{M}_2(\mathbb{A}))$ は Φ から定まる Schwartz-Bruhat 関数であり, Z^{GJ} は Godement-Jacquet ゼータ積分を表わす. 特に, $Z(\Phi,\phi,s)$ は有理型に解析接続され, $s=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ に高々 1 位の極をもつ.

証明の概略　特異部分 $I(\Phi,\phi,s)$ を計算すればよい. 特異軌道分解 $S_{\mathbb{Q}}=\coprod_{j=0}^5 x_j\rho(H_{\mathbb{Q}})$ に応じて, 分解 $J(\Phi,\phi)=\sum_{j=0}^5 J_j(\Phi,\phi)$ が得られる. ただし,

$$J_j(\Phi,\phi):=\int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H_{\mathbb{A}}^1}\phi(g_1)\overline{\phi(g_2)}\left(\sum_{x\in x_j\rho(H_{\mathbb{Q}}))}\widehat{\Phi}(x\rho^\vee(h))-\sum_{x\in x_j\rho(H_{\mathbb{Q}})}\Phi(x\rho(h))\right)\mathrm{d}h.$$

まず, 尖点的保型形式 ϕ は定数関数と直交するので, $J_0(\Phi,\phi)=0$ がわかる. 他の軌道の寄与について,

- $J_1(\Phi,\phi)+J_2(\Phi,\phi)=Z^{\mathrm{GJ}}(\Phi_1,\bar{\phi},1)-Z^{\mathrm{GJ}}(\Phi_2,\phi,1)$,
- $J_3(\Phi,\phi)+J_4(\Phi,\phi)=J_5(\Phi,\phi)=0$

が示せる. □

試験関数 Φ_2 と尖点的保型形式 $\phi\in\pi$ を適当にとると, Godement-Jacquet ゼータ積分 $Z^{\mathrm{GJ}}(\Phi_2,\phi,s+\frac{1}{2})$ は標準 L 関数 $L(s,\pi)$ の定数倍に等しい. このことから, 次の系が得られる.

系 2.10　$L(\frac{1}{2},\pi)\neq 0$ と仮定する. このとき, $\Phi\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{A}})$ と尖点的保型形式 $\phi\in\pi$ であって, $Z(\Phi,\phi,s)$ が $s=\frac{1}{2}$ で極をもつようなものが存在する.

正則有理軌道ごとの和に分解すると, $Z(\Phi,\phi,s)=\sum_E Z_E(\Phi,\phi,s)$ と表わせる. ここで, E は 2 次体または $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ であり,

$$Z_E(\Phi,\phi,s):=\int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H_{\mathbb{A}}}|\chi(g)|_{\mathbb{A}}^s\phi(g_1)\overline{\phi(g_2)}\sum_{z\in V_E(\mathbb{Q})}\Phi(z\rho(g))\mathrm{d}g.$$

各 E に対して $Y_{x_E}=H_{x_E}^\circ\backslash H$ とおき, ν_{x_E} を自然な射影

$$Y_{x_E}=H_{x_E}^\circ\backslash H\to H_{x_E}\backslash H\cong V^0$$

とする．齋藤 [Sai99] の議論を適用すると, x_E の軌道の寄与をトーラス周期の積分に書き直すことができる．

補題 2.11　各 E に対して

$$Z_E(\Phi,\phi,s)=\frac{1}{2}\int_{Y_{x_E}(\mathbb{A})}|P(\nu_{x_E}(y))|_{\mathbb{A}}^s\mathcal{P}_E(\pi(g_1)\phi)\overline{\mathcal{P}_E(\pi(g_2)\phi)}\Phi(\nu_{x_E}(y)))\mathrm{d}y$$

が成り立つ．ただし, $y=H^{\circ}_{x_E}(g_1,g_2,g_3)\in Y_{x_E}(\mathbb{A})$.

証明の概略 [Sai99] の計算から, 以下のことがわかる:

- ν_{x_E} は全射 $Y_{x_E}(\mathbb{Q})\twoheadrightarrow V_E(\mathbb{Q})$ を誘導し，そのファイバーの位数は $|H^{\circ}_{x_E}\backslash H_{x_E}(\mathbb{Q})|=2$.
- $Y_{x_E}(\mathbb{Q})H(\mathbb{A})=Y_{x_E}(\mathbb{A})$.

したがって, $y_0=H^{\circ}_{x_E}\in Y_{x_E}(\mathbb{Q})$ とすると

$$\begin{aligned}Z_E(\Phi,\phi,s)&=\frac{1}{2}\int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H_{\mathbb{A}}}|\chi(h)|^s\phi(g_1)\overline{\phi(g_2)}\sum_{\gamma\in H^0_{x_E}(\mathbb{Q})\backslash H_{\mathbb{Q}}}\Phi(\nu_{x_E}(y_0\gamma h))\mathrm{d}h\\&=\frac{1}{2}\int_{H^{\circ}_{x_E}(\mathbb{Q})\backslash H_{\mathbb{A}}}|\chi(h)|^s\phi(g_1)\overline{\phi(g_2)}\Phi(\nu_{x_E}(y_0h))\mathrm{d}h\\&=\frac{1}{2}\int_{H^{\circ}_{x_E}(\mathbb{A})\backslash H_{\mathbb{A}}}|\chi(h)|^s\mathcal{P}_E(\pi(g_1)\phi)\overline{\mathcal{P}_E(\pi(g_2)\phi)}\Phi(\nu_{x_E}(y_0h))\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi_E}.\end{aligned}$$

ただし, $\mathrm{d}\xi_E$ は $H^0_{x_E}(\mathbb{A})$ の Haar 測度．ここで, $y_0H_{\mathbb{A}}=Y_{x_E}(\mathbb{Q})H_{\mathbb{A}}=Y_{x_E}(\mathbb{A})$ なので, 最後の積分は $Y_{x_E}(\mathbb{A})$ 上の積分に書き直すことができ, 求める式が得られる．　□

この補題から, ゼータ積分 $Z(\Phi,\phi,s)$ が関数として 0 でなければ, 少なくとも 1 つの E に対してトーラス周期 $\mathcal{P}_E$ は π 上の 0 でない線型形式であることがわかる．系 2.10 より, 特に $L(\frac{1}{2},\pi)\neq 0$ ならこの仮定は満たされる．

Waldspurger の式 (定理 2.3) を使うと, $Z_E(\Phi,\phi,s)$ のオイラー積分解

$$Z_E(\Phi,\phi,s)=\frac{\zeta_{\mathbb{Q}}(2)L(\frac{1}{2},\pi)L(\frac{1}{2},\pi\eta_E)}{2\,L(1,\pi,\mathrm{Ad})}\prod_v Z^{\#}_{E_v}(\Phi_v,\phi_v,s).$$

が得られる．ただし, $Z^{\#}_{E_v}(\Phi_v,\phi_v,s)$ は $\alpha^{\#}_{E_v}(\pi_v(g_1)\phi_v,\pi_v(g_2)\phi_v)$ を含む積分

$$\int_{H^{\circ}_{x_E,v}\backslash H_v}\alpha^{\#}_{E_v}(\pi_v(g_1)\phi_v,\pi_v(g_2)\phi_v)|\chi(g)|_v^{s-2}\Phi_v(x_E\rho(g))\mathrm{d}g.$$

の定数倍で与えられる局所因子. 不分岐な素点に対して局所因子を計算すると, ゼータ積分 $Z(\Phi, \phi, s)$ を次のような Dirichlet 級数の形で表わすことができる.

定理 2.12 十分大きい $\mathrm{Re}(s) > 0$ に対して,

$$Z(\Phi, \phi, s) = \sum_{\mathcal{E}_S} \left(\prod_{v \in S} Z_{\mathcal{E}_v}(\Phi_v, \phi_v, s) \right) \xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$$

が成り立つ. ただし, $\mathcal{E}_S = (\mathcal{E}_v)_{v \in S}$ は $\mathbb{Q}_v$ 上の étale 2 次代数の組全体を動き, $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ は

$$\begin{aligned}\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S) :=& \frac{\zeta_{\mathbb{Q}}^S(2s-1)\, L^S(2s-1, \pi, \mathrm{Ad})}{2\, \zeta_{\mathbb{Q}}^S(2)^3\, \alpha_{\mathcal{E}_S}(\phi, \phi)} \\ &\times \sum_{E \in X(\mathcal{E}_S)} \frac{L(1, \eta_E)^2\, \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)\, |\mathcal{P}_E(\phi)|^2\, \mathcal{D}_E^S(\pi, s)}{N(E, S)^{s-1}}\end{aligned}$$

で与えられる Dirichlet 級数. ここで, $\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)$ は

$$\prod_{v \in S} \frac{\alpha_{\mathcal{E}_v}(\phi_v, \phi_v)}{\alpha_{E_v}(\phi_v, \phi_v)}$$

の定数倍であり, 関数 $\mathcal{D}_E^S(\pi, s)$ はオイラー積

$$\mathcal{D}_E^S(\pi, s) = \prod_{p \notin S} (1 + \mathcal{R}_{E_p}(\pi_p, s) p^{-2s+1}),$$

$$\mathcal{R}_{E_p}(\pi_p, s) := \begin{cases} 1 + p^{-1} + p^{-2s} - 2\eta_{E_p}(p) p^{-1} \lambda_p & E_p/F_p \text{ が不分岐のとき} \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定める.

注意 2.13 注意 2.7 で述べたように, [Sat06, Theorem A] では $Z(\Phi, \phi, s)$ の類似にあたる保型形式付き概均質ゼータ関数を考察し, そのゼータ関数が, テータリフトで得られる重さ半整数の保型形式の Rankin-Selberg 積 Dirichlet 級数に等しいことを示している. 定理 2.12 で現われる Dirichlet 級数 $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ に対しても, 次のように [Sat06, Theorem A] の類似が成り立つ: 各記号を定理 2.12 の通りとし, 関数 $\varphi_E^S(\pi, s) := L^S(2s - \frac{1}{2}, \pi) L^S(2s, \eta_{E/F})^{-1}$ を

$$\varphi_E^S(\pi, s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{A(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^{2s}}$$

のように Dirichlet 級数の形に表わす．ただし, $A(\mathfrak{a}) \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{a}$ は S と素なイデアルを動くとし, $N(\mathfrak{a})$ はそのノルムとする．このとき, 直接計算により

$$L^S(2s-1, \pi, \mathrm{Ad})\mathcal{D}_E^S(\pi, s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{A(\mathfrak{a})^2}{N(\mathfrak{a})^{2s}}$$

が確かめられる．この式の左辺は $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ の定義に出てきていることに注意する．

関数 $\mathcal{D}_E^S(\pi, s)$ を与えるオイラー積は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し, $s \to 1+0$ で

$$\lim_{s \to 1+0} \mathrm{Re}(\mathcal{D}_E^S(\pi, s)) = +\infty$$

を満たす．このことを使うと, 次のようなトーラス周期の非消滅定理が得られる．

定理 2.14 $L(\frac{1}{2}, \pi) \neq 0$ と仮定する．このとき, étale 2 次代数 $\mathcal{E}_v/\mathbb{Q}_v$ の組 $\mathcal{E}_S = (\mathcal{E}_v)_{v \in S}$ であって, 以下の条件を満たす 2 次体 $E/\mathbb{Q}$ が無数に存在するようなものが存在する:

- 任意の $v \in S$ に対して $E_v \cong \mathcal{E}_v$,
- $\mathcal{P}_E$ は π 上の 0 でない線型形式.

証明の概略 系 2.10 より $Z(\Phi, \phi, s)$ が関数として 0 でないような Φ, ϕ がとれる．特に $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ が関数として 0 でないような $\mathcal{E}_S$ が存在する．ゼータ関数 $Z(\Phi, \phi, s)$ は $s = 1$ で正則である一方で, $\lim_{s \to 1+0} \mathrm{Re}(\mathcal{D}_E^S(\pi, s)) = +\infty$ となるので, Dirichlet 級数 $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ は有限和ではない．したがって, 条件を満たす 2 次体 $E/\mathbb{Q}$ は無数に存在する． $\square$

定理 2.1 は, この定理の精密化にあたる．定理 2.1 の証明では, Dirichlet 級数 $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ に Tauber 型の定理とフィルター化プロセスを適用する (フィルター化プロセスの詳しい説明については, [KY02] または [雪江 17] を参照).

定理 2.1 の証明の概略 素点の有限集合 T であって S を含むものに対して, 関数 $\mathscr{D}_S(s, \mathcal{E}_S, T)$ を次のように定める:

$$\mathscr{D}_S(s, \mathcal{E}_S, T) = \sum_{E \in X(\mathcal{E}_S)} \frac{L(1, \eta_E)^2 \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi) |\mathcal{P}_E(\phi)|^2 \mathcal{D}_E^T(\pi, s)}{N(E, S)^{s-1}}.$$

これは, ゼータ関数の級数表示である $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ の定義において, $\mathcal{D}_E^S(\pi, s)$ の部分を $\mathcal{D}_E^T(\pi, s)$ に置き換えたものである．

Dirichlet 級数 $\mathscr{D}_S(s+\frac{1}{2},\mathcal{E}_S,T)$ の m 番目の係数を $a_m(T)$ と表わす:

$$\mathscr{D}_S(s+\tfrac{1}{2},\mathcal{E}_S,T)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m(T)}{m^s}.$$

以下, $L(\frac{1}{2},\pi)\neq 0$ と仮定し, T は 13 以下の素数をすべて含むとする. このとき, $\mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$ は $s=\frac{3}{2}$ に 1 位の極をもつことが示せる. これは, [BB11] より任意の $p\notin T$ に対して $|\lambda_p|\leq p^{\frac{1}{2}}(p^{\frac{7}{64}}+p^{-\frac{7}{64}})$ なので, $a_m(T)\geq 0$ となることからしたがう.

この Dirichlet 級数に, 次の形の Tauber 型定理を適用する ([Nar74, Apendix Ⅱ] または [雪江 14, 第 4 章] を参照).

定理 2.15 非負実数列 a_m と正の実数 M が与えられたとする. Dirichlet 級数 $L(s):=\sum_{m=1}^{\infty}a_m m^{-s}$ が領域 $\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(s)>M\}$ 上で広義一様絶対収束し, $\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(s)\geq M\}$ に解析接続され, さらに $s=M$ に 1 位の極をもつとする. このとき, $s=M$ における $L(s)$ の留数を $A=\operatorname*{Res}_{s=M}L(s)$ とおくと,

$$\lim_{X\to\infty}X^{-M}\sum_{n<X}a_n=\frac{A}{M}$$

が成り立つ.

すると, 次の式が得られる:

$$\lim_{x\to\infty}x^{-1}\sum_{m<x}a_m(T)=\operatorname*{Res}_{s=1}\mathscr{D}_S(s+\tfrac{1}{2},\mathcal{E}_S,T). \tag{2.2}$$

ここで, $\mathscr{D}_S(s+\frac{1}{2},\mathcal{E}_S,T)$ の定義式を展開すると

$$a_m(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ nN(E,S)=m}}\frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2 b_n(E,T)}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}, \tag{2.3}$$

となることに注意する. ただし, $b_n(E,T)$ は Dirichlet 級数 $\mathcal{D}_E^T(\pi,s+\frac{1}{2})$ の n 番目の係数:

$$\mathcal{D}_E^T(\pi,s+\tfrac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(E,T)}{n^s}.$$

以降の議論の大まかなアイディアは以下のような内容である.

T を素点全体の集合に拡大する極限 $\lim\limits_{T\to\infty}$ に関して $\lim_{T\to\infty} b_n(E,T)=0$ かつ $b_1(E,T)=1$ なので, (2.2) の両辺の極限 $\lim\limits_{T\to\infty}$ をとると,

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2 \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{T\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$$

が得られる. あとは右辺に現われる留数 $\operatorname*{Res}\limits_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$ を計算すればよい.

このアイディアを正当化するには, 極限 $\lim\limits_{T\to\infty}$ に関するある種の「一様性」を示す必要がある. この「一様性」を示す議論を, [KY02] では**フィルター化プロセス (filtering process)** と呼んでいる.

まず, 関数 $\mathcal{D}_E^T(\pi, s+\frac{1}{2})$ の定義

$$\mathcal{D}_E^T(\pi, s+\tfrac{1}{2}) = \prod_{p\notin T} (1+\mathcal{R}_{E_p}(\pi_p, s)p^{-2s+1})$$

と [BB11] から, 任意の $n>1$ に対して $b_n(E,T)\geq 0$ となることがわかる. また, 簡単な計算により $b_1(E,T)=1$ が確かめられる. したがって, (2.3) で $n=1$ の項のみとり出して $m<x$ に関して和をとると,

$$\sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2 \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}} \leq \sum_{m<x} a_m(T).$$

この式の両辺の極限 $\lim\limits_{T\to\infty}$ をとると, 上からの評価が得られる:

$$\limsup_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2 \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}} \leq \lim_{T\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T).$$

次に, 下からの評価のために

$$C_p(s) := 1+2p^{-2s-1}+p^{-4s-3}, \qquad C^T(s) := \prod_{p\notin T} C_p(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(T)}{n^s}$$

とおく. [BB11] による $|\lambda_p|$ の評価から $b_1(E,T)=c_1(T)=1$, $b_n(E,T)\leq c_n(T)$ が

わかるので,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m<x} a_m(T) - \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}\\
&= \sum_{\substack{n\geq 2\\ E\in X(\mathcal{E}_S)\\ nN(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2 b_n(E,T)}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}\\
&\leq \sum_{\substack{n\geq 2\\ E\in X(\mathcal{E}_S)\\ nN(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2 c_n(T)}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} c_n(T) \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x/n}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

先に得られた上極限の評価を用いると, 最後の式は

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n(T)\cdot\frac{x}{n}\lim_{T'\to\infty}\operatorname*{Res}_{s=3/2}\mathscr{D}(s,\mathcal{E}_S,T') = x(C^T(1)-c_1(T))\lim_{T'\to\infty}\operatorname*{Res}_{s=3/2}\mathscr{D}(s,\mathcal{E}_S,T')$$

で上から抑えられる.

したがって,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}\\
&\geq \sum_{m<x} a_m(T) - x(C^T(1)-c_1(T))\lim_{T'\to\infty}\operatorname*{Res}_{s=3/2}\mathscr{D}(s,\mathcal{E}_S,T').
\end{aligned}\tag{2.4}$$

ここで, $\lim\limits_{T\to\infty}(C^T(1)-c_1(T))=0$ なので

$$\begin{aligned}
&\liminf_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}\\
&\geq \lim_{T\to\infty}\left(\liminf_{x\to\infty} x^{-1}(\text{式 (2.4) の右辺})\right)\\
&= \lim_{T\to\infty}\left(\liminf_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{m<x} a_m(T)\right) = \lim_{T\to\infty}\operatorname*{Res}_{s=3/2}\mathscr{D}(s,\mathcal{E}_S,T)
\end{aligned}$$

となる. ただし, 最後の等号は (2.2) による.

以上の lim sup と lim inf それぞれの評価を合わせると,

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S) \\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2 \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{T\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$$

が得られる.

あとは, 次の命題で与えられる留数 $\operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$ の値を代入して整理すると, 定理 2.1 が得られる.

命題 2.16 留数 $\operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$ は

$$\frac{L(\frac{1}{2},\pi)}{L^S(2,\pi,\mathrm{Ad})} \prod_{v\in S} \frac{L(1,\eta_{\mathcal{E}_v})}{2c_v\,|D_E|_v^{-\frac{1}{2}}\,L(\frac{1}{2},\pi_v)} \alpha_{\mathcal{E}_v}(\phi_v,\phi_v)$$
$$\times \prod_{p\in T\setminus S} L(2,\pi_p,\mathrm{Ad}) \left\{1-p^{-3}-\frac{p-1}{p+1}p^{-3}\lambda_p^2\right\}.$$

に等しい. ただし,

$$c_v := \begin{cases} 1 & v=\infty \text{ のとき}, \\ (1-p^{-1})^{-1} & v=p<\infty \text{ のとき}. \end{cases}$$

特に,

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T) \\ &= L(\tfrac{1}{2},\pi) \prod_{v\in S} \frac{L(1,\eta_{\mathcal{E}_v})\alpha_{\mathcal{E}_v}(\phi_v,\phi_v)}{2c_v\,|D_E|_v^{-\frac{1}{2}}\,L(\frac{1}{2},\pi_v)} \prod_{p\notin S} \left\{1-p^{-3}-\frac{p-1}{p+1}p^{-3}\lambda_p^2\right\}. \end{aligned}$$

□

謝辞

本稿は, 2023 年度 (第 30 回) 整数論サマースクール「概均質ベクトル空間論の発展」における筆者の講演内容に基づいています. サマースクールを企画・運営してくださった, 世話人の谷口隆先生, 杉山和成先生, 石塚裕大先生に感謝いたします.

参考文献

[BB11] V. Blomer, F. Brumley, *On the Ramanujan conjecture over number fields*, Ann. of Math. (2) **174**, no. 1, 581–605, (2011).

[BH16] M. Bhargava, P. Harron, *The equidistribution of lattice shapes of rings of integers in cubic, quartic, and quintic number fields*, Compositio Math. **152**, 1111–1120, (2016).

[Bum98] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge University Press, no. 55, (1998).

[Hou19] R. Hough, *The shape of cubic fields*, Res. Math. Sci. **6** (2019), no. 23, DOI:10.1007/s40687-019-0185-1, (electronic).

[Hou17+] R. Hough, *The shapfe of quartic fields*, arXiv preprint, (2017).

[KY02] A. Kable, A. Yukie, *The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields I*, Tohoku Math. J., **54**, 513–565, (2002).

[Nar74] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, Monogr. Mat., Tom 57, PWN–Polish Scientific Publishers, Warsaw, 630 pp. (1974)

[Sai99] H. Saito, *Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces*, Math. Ann., **315**, no. 4, 587–615, (1999).

[Sat94] F. Sato,*Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **104**, no. 1, 99–135, (1994).

[Sat06] F. Sato,*Zeta functions of* $(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{M}_2 \oplus \mathrm{M}_2)$ *associated with a pair of Maass cusp forms*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **55**, 77–95, (2006).

[Shi72] T. Shintani,*On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms*, J. Math. Soc. Japan **24**, no. 1, 132–188, (1972).

[SW20+] M. Suzuki, S. Wakatsuki,*Zeta functions and nonvanishing theorems for toric preiods on* GL(2), arXiv preprint, (2020).

[SW21+] M. Suzuki, S. Wakatsuki,*Explicit mean value theorems for toric periods and automorphic L-functions*, arXiv preprint, (2021).

[TT13] T. Taniguchi, F. Thorne,*Orbital L-functions for the space of binary cubic forms*, Canad. J. Math. **65**, no. 6, 1320–1383, (2013).

[Tho23] F. Thorne, Counting cubic fields using Shintani's zeta function, **本報告集**, (2023).

[Wal85] J.-L. Waldspurger, *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie*, Compositio Math., **54**, no. 2, 173–242, (1985).

[石塚 23] 石塚裕大, 有理軌道、整軌道の解釈, **本報告集**, (2023).

[佐藤 23] 佐藤文広, 概均質ゼータ関数の関数等式の一般化, **本報告集**, (2023).

[谷口 23] 谷口隆, 本論のための準備, **本報告集**, (2023).

[雪江 14] 雪江明彦, 整数論 3 解析的整数論への誘い, 日本評論社, (2014).

[雪江 17] 雪江明彦, 概均質ベクトル空間について (集中講義@九州大学原稿), (2017).

余正則空間と楕円曲線の Selmer 群

佐野 薫 *

概要

概均質ベクトル空間を一般化した，余正則空間という概念がある．余正則空間の中には，その有理軌道が楕円曲線の Selmer 群の元と自然に対応するものがあることが知られており，Bhargava–Shankar はこの対応を通して数え上げを行うことで，Selmer 群の平均位数に関する結果を得ている．本稿では，この対応についての解説を行う．

目次

* 日本電信電話株式会社，NTT コミュニケーション科学基礎研究所，NTT 基礎数学研究センタ

1　はじめに

Bhargava–Shankar により執筆された論文のシリーズ [BS13a, BS13b, BS15a, BS15b] において，$2 \leq n \leq 5$ なる n に対し，楕円曲線の n-Selmer 群の平均位数が $\sigma(n)$ に一致することが証明された．その証明は，楕円曲線の n-Selmer 群の元を特定の余正則空間の有理軌道に対応させ，軌道の数え上げを行うものであった．$1 \leq n \leq 4$ のときのこの対応は Bhargava–Shankar 以前から古典的に知られている結果であり，$n = 5$ のときの対応は [Fis] で証明されている．

これらは [AKMMMP01] や [Fis06, Fis08] で簡潔にまとめられている．本稿では $n = 1, 2, 3, 4$ に対し，[Fis06, Fis08] の方法に沿って，n-Selmer 群の元と余正則空間の有理軌道との対応について述べる．

本稿の流れ　2 節では楕円曲線の Mordell–Weil 群の基本的な事実について証明なしに紹介する．3 節では Galois コホモロジーに幾何的な意味づけを行う．4.1 節で n-Selmer 群および Tate–Shafarevich 群を形式的に定義し，4.2 節では 3 節で述べた方法で n-Selmer 群に幾何的な意味づけを行う．ここまでは群作用と独立した，楕円曲線の一般論である．

5.1 節では $n = 1, 2, 3, 4$ に対し，種数 1 の曲線の n 次モデルと，その全体 X_n に作用する群 $\mathcal{G}_n$, $\tilde{\mathcal{G}}_n$ を定義する．5.2 節で余正則空間の定義を行い，$(X_n, \tilde{\mathcal{G}}_n)$ が余正則

空間になることなどのいくつかの性質を定理 5.4 で述べる．定理 5.4 の証明のため，5.4 節で Weierstrass モデルを定義し，不変式環の間の準同型 π_n^* を導く．これらを用いることで $(X_n, \mathcal{G}_n)$ が余正則空間になることが証明できる．この証明は 5.7 節で述べる．余正則空間の軌道と Selmer 群の元との対応を示すためには，ϕ から定まる曲線 C_ϕ に $E_{c_4(\phi),c_6(\phi)}$-トーサーの構造を自然に定める必要があるが，これを定めるために 5.6.2 節で C_ϕ の不変微分形式を明示的に定義する．5.6.1 節で一般に滑らかな種数 1 の曲線の不変微分形式から幾何不変量やトーサーの構造が定まることを見る．5.6.3 節では，群作用による不変微分形式の変化を観察し，π_n^* を通して Weierstrass モデルの場合に帰着することで，不変式と幾何不変量が一致することを証明する．この事実を用いることで，5.7 節で主定理の証明を行う．また，付録的な扱いになるが，6 節では代数幾何的な議論に不慣れな人のために，Riemann–Roch の定理や Hilbert 多項式など基本事項をいくつか述べたので参考にされたい．

本稿を通して，特に断りがなければ K は数体，F は一般の体とする．用語や記号に下線が引かれている場合は，そこでその用語や記号を定義していることを意味している．

2 楕円曲線の基本事項

2.1 定義と群演算

F を体とする．

定義 2.1 F 上定義された種数 1 の滑らかな射影曲線 E と，E の F-有理点 O の組 (E, O) を，F 上の楕円曲線という．

注意 2.2 種数 1 の滑らかな射影曲線だけでは楕円曲線とは呼ばないということに注意．ただし O を省略して単に E で書くことが多い．

定理 2.3 (E, O) を F 上の楕円曲線とすると，F 上で定義された射 $\phi_{\mathcal{L}(3(O))}$ により F は $\mathbb{P}^2$ に埋め込むことができる．またその像の定義方程式は，適宜定数倍の変数変換を行うことで

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3 \tag{2.1}$$

で表せる．

証明 5.1 節を見よ. □

定義 2.4（定義方程式，不変微分形式，幾何不変量） (2.1) の形の方程式，あるいは Z で非斉次化して得られる方程式

$$y^2 + a_1xy + a_3 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad (a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in F) \tag{2.2}$$

をWeierstrass 方程式と呼ぶ．F の標数が $2, 3$ のいずれでもないとき，Weierstrass 方程式 (2.2) の左辺を y に関して平方完成したのち，右辺を x に関して立方完成して変数変換を行うと

$$y^2 = x^3 - 27c_4x - 54c_6 \quad (c_4, c_6 \in F) \tag{2.3}$$

の形の方程式を得る．より具体的な c_4, c_6 の記述については 5.6 節を見よ．

$$\underline{\Delta} = (c_4^3 - c_6^2)/1728$$

とすると，(2.3) で定まる曲線が滑らかなことと $\Delta \neq 0$ であることは同値である．変数変換

$$x = u^2x', \quad y = u^3y' \quad (u \in \overline{F}^\times)$$

により

$$u^4c_4' = c_4, \quad u^6c_6' = c_6, \quad u^{12}\Delta' = \Delta$$

と変換されるが，この変換による任意性を除けば c_4, c_6 は E の F-同型類から一意に定まる不変量である．さらに不変微分形式も固定すると，これらの任意性もなく定まるということを 5.6 節で見る．また

$$\underline{j} = c_4^3/\Delta$$

で定まる不変量 j の値は E の $\overline{F}$ 上の曲線としての同型類と 1 対 1 に対応することが知られている．(2.3) 式で定まる楕円曲線を $\underline{E_{c_4,c_6}}$ で表す．

特に $F = \mathbb{Q}$ のとき，任意の楕円曲線 $E/\mathbb{Q}$ に対し，一意的な $c_4, c_6 \in \mathbb{Z}$ が存在し，任意の素数 p について $p^4 \nmid c_4$ または $p^6 \nmid c_6$ であり，かつ E は E_{c_4,c_6} と $\mathbb{Q}$ 上で同型である．こうした E_{c_4,c_6} のみを考え，この E_{c_4,c_6} の高さ $H(E_{c_4,c_6})$ を

$$H(E_{c_4,c_6}) = \max\left\{|c_4|^3,\ c_6^2\right\}$$

で定めることで，楕円曲線の $\mathbb{Q}$-同型類を並べることができる．

定義 2.5（群構造） (E, O) を (2.2) で定義される F 上の楕円曲線とする．E の 2 つの F-有理点を通る直線は，必ず E ともう一つの F-有理点で交わる．ただしある点で接する場合は重複して交わっているとみなす．E の F-有理点 P, Q について，P, Q を通る直線と E との 3 つ目の交点を R とする．R と O を通る直線と E との 3 つ目の交点を $\underline{P+Q}$ で表す．このようにして定められた演算 $+$ について $E(F)$ は O を単位元とするアーベル群をなす．このアーベル群 $E(F)$ のことを E の<u>Mordell–Weil 群</u>という．同じ点を n 回加える写像を $\underline{[n]}$ で表す．すなわち $[n](P) = P + P + \cdots + P$ である．$\ker([n]\colon E(\overline{F}) \longrightarrow E(\overline{F}))$ のことを $\underline{E[n]}$ で表す．

注意 2.6 ここで定義した演算でアーベル群になることのうち，結合律以外については容易に確認することができる．結合律については式変形を頑張ることでも証明できるが，$E(\overline{F}) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(E); P \mapsto (P) - (O)$ が $E(\overline{F})$ と $\mathrm{Pic}^0(E)$ との全単射を与えることおよび，演算を保ち Galois 作用と可換なことを示すのが標準的である．証明の詳細については [Sil92, III Propotision 3.4] を見よ．

2.2 Mordell–Weil 群のいくつかの予想と定理

この節では楕円曲線の Mordell–Weil 群についてのいくつかの事実を列挙する．K を数体とする．

定義，定理 2.7（Mordell–Weil の定理） E を K 上の楕円曲線とする．このとき Moredell–Weil 群 $E(K)$ は有限生成アーベル群である．したがって有限生成アーベル群の基本定理により

$$E(K) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p^{e_p}\mathbb{Z} \right)$$

の形に表せる．この r を E の <u>Mordell–Weil rank</u>，あるいは単に E の<u>階数</u>と呼ぶ．$E(K)$ の有限位数の元の全体を $E(K)$ の<u>ねじれ部分</u>と呼び $\underline{E(K)_{\mathrm{tor}}}$ で表す．

定理 2.7 は次の 2 つのステップに分けて証明される．
Step 1: 完全列

$$0 \longrightarrow E(K)/[n]E(K) \longrightarrow \mathrm{Sel}^{(n)}(E/K) \longrightarrow Ш(E/K)[n] \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

を与え，$\mathrm{Sel}^{(n)}(E/K)$ が有限群になることを示すことで $E(K)/[n]E(K)$ の有限性

(弱 Mordell–Weil の定理) を証明.

Step 2: 高さ関数と呼ばれる関数を用い，無限降下法により $E(K)$ の有限生成性を証明.

Step 1 の $\mathrm{Sel}^{(n)}(E/K), Ш(E/K)$ 及び完全列については 4 節で詳しく述べる．ねじれ部分については以下が知られている．詳しくは 2021 年の整数論サマースクール「モジュラー曲線と数論」の報告集を見よ.

定理 2.8 E を K 上の楕円曲線とする．このとき以下が成り立つ.

(a) ([Maz77, MG78]) $K = \mathbb{Q}$ のとき

$$E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} & N = 1, 2, \ldots, 10, 12, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z} & 1 \le N \le 4. \end{cases}$$

(b) ([KM95]) $[K : \mathbb{Q}] = 2$ のとき

$$E(K)_{\mathrm{tor}} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} & N = 1, 2, \ldots 16, 18, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z} & 1 \le N \le 6, \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3N\mathbb{Z} & 1 \le N \le 2, \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \end{cases}$$

(c) ([Mer98]) 任意の正整数 d について整数 $C(d)$ が存在し，$[K : \mathbb{Q}] \le d$ のとき

$$\# E(K)_{\mathrm{tor}} \le C(d)$$

が成り立つ.

階数については，固定した数体 K 上の楕円曲線の階数が有界か否かも未解決であり，$K = \mathbb{Q}$ のとき，Elkies により階数が 28 以上であるような楕円曲線が与えられているものが現在の世界記録である．(階数の世界記録に関しては [Duj] が詳しい．) 具体的な楕円曲線の階数の計算により経験的に以下が予想されている.

予想 2.9 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線を高さにより並べたとき，階数が 0 のものと 1 のものの割合はちょうど 1/2 ずつである.

注意 2.10 [PPVW19] で導入されたヒューリスティックモデルにおいては，階数 22 以上の $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の同型類は有限個であろうと帰結されている.

階数が $0, 1$ の楕円曲線の割合に関しては Bhargava–Shankar, Bhargava–Skinner により以下の定理が示された.

定理 2.11（[BS15b], [BS14]） $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線を高さにより並べたとき，階数が $0, 1$ の楕円曲線の割合はいずれも正である.

完全列 (2.4) があるため，$\mathrm{Sel}^{(n)}(E/K)$ の大きさの上界を与えれば $E(K)$ の階数の上界も得られる．これは重要な事実であり，実際，定理 2.11 は以下の定理を用いて証明されている.

定理 2.12（[BS13a, BS13b, BS15a, BS15b]） $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線を高さにより並べたとき，$n = 1, 2, 3, 4, 5$ に対し $\mathrm{Sel}^{(n)}(E/\mathbb{Q})$ の平均位数はそれぞれ $1, 3, 4, 7, 6$ である.

定理 2.12を受けて，$\mathrm{Sel}^{(n)}(E/\mathbb{Q})$ の平均位数については以下が予想されている.

予想 2.13 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線を高さにより並べたとき，任意の正整数 n に対し $\mathrm{Sel}^{(n)}(E/\mathbb{Q})$ の平均位数は n の正の約数の総和 $\sigma(n)$ である.

3 Galois コホモロジーの翻訳

本節では通して F を標数 0 の体とし，$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ とする．また E を F 上の楕円曲線とする．Galois コホモロジー $H^1(F, E[n])$ が以下のひねりの F-同型類をパラメータ付けすることが知られている．これらは [CFNSS08] で整理されている．このうち 1.，2. について述べるのが本節の目的である.

表 1　Galois コホモロジーの翻訳

		基本対象	ひねり
1.	トーサー因子類ペア	$(E, [n(O)])$	$(C, [D])$
2.	n-被覆	$(E, [n])$	(C, ν)
3.	トーサーの Brauer–Severi 図式	$[E \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}]$	$[C \longrightarrow S]$
4.	$E[n]$-トーサー	$(E[n], +)$	(C, μ)
5.	$E[n]$ の可換 $\mathbb{G}_m$ 拡大	$\mathbb{G}_m \times E[n]$	Λ
6.	テータ群	Θ_E	Θ

本節の内容は 4.1 節で n-Selmer 群の幾何的な意味づけを行う際に用いる．Galois コホモロジーの定義については谷口先生の “本論のための準備” を参考のこと．

本節の流れ　3.1 節においてひねりの定義を復習し，ひねりの F-同型類が Galois コホモロジーでパラメータ付けされる一般的な原理を説明する．この一般的な原理の典型例として 3.2 節では楕円曲線 E のトーサーを導入し，トーサーの F-同型類が $H^1(F, E)$ でパラメータ付けされることを見る．3.3 節ではさらに付加構造を課し，トーサーと次数 n の F-因子類のペアが $H^1(F, E[n])$ でパラメータ付けされることを見る．3.4 節では n-被覆の概念を導入し，n-被覆も $H^1(F, E[n])$ でパラメータ付けされることを見る．さらに，同じ $H^1(F, E[n])$ の元に対応するようなトーサー因子類ペアと n-被覆について，対応を具体的に確認する．いくらかの文献では $H^1(F, E[n])$ と n-被覆との対応が記述されているが，実際に余正則空間の有理軌道との対応付けを見る際には，1. を経由した方が，代数幾何的な構造を与える際に直接的に使えて便利であることに注意しておく．n-被覆との対応は本節で触れるのみで，本稿の以降の節では用いない．

3.1　ひねり

ひねりとは一般に以下の意味である．

定義 3.1　F 上の対象 X に対し，(Y, f) が X のひねりであるとは，F 上の対象 Y と $\overline{F}$-同型射 $f\colon Y \longrightarrow X$ の組のことである．ただし f は省略されることが多い．

X のひねり $(Y_1, f_1), (Y_2, f_2)$ が F-同型であるとは，$f_1 = f_2 \circ \psi$ を満たすような F-同型射 $\psi\colon Y_1 \longrightarrow Y_2$ が存在することとする．また $(Y_1, f_1), (Y_2, f_2)$ が F-同型であることを $(Y_1, f_1) \cong_F (Y_2, f_2)$ で表す．

Galois コホモロジーでひねりをパラメータ付けするときの一般的な原理は以下のとおりである．F 上の対象 X を固定し，基本対象と呼ぶことにする．A を基本対象 X の $\overline{F}$ 上の自己同型群とし，$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-作用をもつ群とみなす．このとき X のひねりの F 同型類は $H^1(F, A)$ でパラメータ付けされると期待される．より正確には，$f\colon Y \longrightarrow X$ を $\overline{F}$ 上の同型としたとき，$(\xi_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F/F})} = (\sigma(f) \circ f^{-1})_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F/F})}$ は $\mathrm{Gal}(\overline{F/F})$ の 1-コサイクルを定める．これにより X のひねりの F-同型類全体から Galois コホモロジー $H^1(F, A)$ への単射 φ が得られる．この単射が，我々の所望の

状況では全射でもある．実際，考える圏が準射影多様体の圏のときには Galois 降下により全射性が従う．これは谷口先生の “本論のための準備” の定理 1.14 と数学的には同じことである．証明は [Ser88, Chapter V, Corollary 2-Proposition 12],[Ser02, III§1, Proposition 5], あるいは [Yuk, §8] を参照のこと．

さらに付加構造付きの準射影多様体の圏でひねりを考える場合には，まず基本対象 X の準射影多様体としてのひねり (Y, f) を $\xi \in H^1(F, A)$ から構成し，$\overline{F}$-同型 f を通して X 上の付加構造を Y 上に持ち上げる．この持ち上げにより構成された Y の付加構造は Galois 不変になり，F 上で定義されていること，すなわち X の付加構造付きの準射影多様体としての F 上のひねりであることが示される．したがって φ の全射性が成り立つ．

以降の 3.2 節, 3.3 節, 3.4 節で見る Galois コホモロジーによるパラメータ付けはいずれも，

- 付加構造とその同型の定義
- 基本対象の定義
- 基本対象の $\overline{F}$ 上の自己同型群の計算

をルーチンワークとして行うことで確認される．

3.2 トーサー (主等質空間)

本節では楕円曲線のトーサーを導入し，3.1節の一般的な議論の典型例として，楕円曲線 E/F のトーサーの F-同型類を $H^1(F, E)$ でパラメータ付けする．

定義 3.2（E-トーサー） (i) （F 上の) <u>E-トーサー</u> (C, μ) とは，F 上の滑らかな種数 1 の射影曲線 C 及び，F 上で定義された射 $\mu\colon E \times C \longrightarrow C$ であって $\overline{F}$-有理点に単純推移的な作用を誘導するようなものとの組のこととする．
(2) 2 つの E-トーサー $(C_1, \mu_1), (C_2, \mu_2)$ について，同型 $\psi\colon (C_1, \mu_1) \xrightarrow{\sim} (C_2, \mu_2)$ とは E-作用と可換な曲線の同型のこととする．
(3) $(E, +)$ を E-トーサーの基本対象とする．

補題 3.3 任意の E-トーサーは基本対象 $(E, +)$ のひねりである．

証明 (C, μ) を E-トーサーとする．このとき $P_0 \in C(\overline{F})$ を固定すると $P \mapsto \mu(P, P_0)$

で定義される射は E-トーサーとしての $F(P_0)$-同型 $(E,+) \longrightarrow (C,\mu)$ を与える． □

補題 3.4 $\mathrm{Aut}(E,+) \cong E$.

証明 $(E,+)$ の E-トーサーとしての自己同型は，E の代数曲線としての自己同型であって平行移動写像と可換なものと言い換えられる．またそれは E の平行移動写像に他ならない． □

命題 3.5 E-トーサーを $(E,+)$ のひねりとみなすと，それらは F-同型を除いて $H^1(F,E)$ でパラメータ付けされる．

このように $H^1(F,E)$ を $(E,+)$ のひねりの F-同型類の集合として解釈したものをWeil–Châtelet 群と呼び $\mathrm{WC}(E/F)$ で表す．以降，μ を省略して単に C で E-トーサーを表すことがある．また，E が明らかな場合は省略して単にトーサーと呼ぶことがある．

以下の E-トーサーの自明性についての主張は 4.1 節で n-Selmer 群に幾何的な意味づけを行う際に用いる．

命題 3.6 E-トーサー (C,μ) が $(E,+)$ と F 上で同型であるための必要十分条件は C が F-有理点をもつことである．

証明 E-トーサー (C,μ) が $(E,+)$ と F 上で同型なときに，C が F-有理点を持つことは自明．逆に C が F-有理点 P_0 をもつとき，$P \mapsto \mu(P,P_0)$ は F-同型 $(E,+) \longrightarrow (C,\mu)$ を定める． □

定義 3.7（可解トーサー） 数体 K 上の楕円曲線 E のトーサー C が可解 (soluble) とは $C(K) \neq \emptyset$ であること，すなわち K 上で自明なトーサー $(E,+)$ に同型であることとする．C が局所可解(everywhere locally soluble) とは，任意の付値 $v \in \mathcal{M}_K$ に対して $C(K_v) \neq \emptyset$ であることとする．

3.3 トーサー因子類ペア

定義 3.8（トーサー因子類ペア） (i) n 次のトーサー因子類ペア $(C,[D])$ とは，E-トーサー C と F-有理因子類 $[D]$ の組で $\deg[D]=n$ を満たすもののこととする．
(2) 2 つの n 次トーサー因子類ペア $(C_1,[D_1]), (C_2,[D_2])$ について，トーサー因子類

ペアの同型射 $\psi\colon (C_1,[D_1]) \xrightarrow{\sim} (C_2,[D_2])$ とは，E-トーサーの同型 $\psi\colon C_1 \longrightarrow C_2$ であって，$\psi^* D_2 \sim D_1$ を満たすもののこととする．
(3) $(E,[n(O)])$ をトーサー因子類ペアの基本対象とする．

補題 3.9 任意の n 次トーサー因子類ペアは基本対象 $(E,[n(O)])$ のひねりである．

証明 $(C,[D])$ を n 次トーサー因子ペアとする．C を E-トーサーとしての $(E,+)$ のひねりとみなすことで $\overline{F}$-同型 $f\colon C \xrightarrow{\sim} E$ をとる．適宜平行移動と合成したものに取り換えることで $f^*(n(O)) \sim D$ を満たすようにできる． □

補題 3.10 $\mathrm{Aut}(E,[n(O)]) \cong E[n]$.

証明 $(E,+)$ の E-トーサーとしての自己同型はある $P \in E(\overline{F})$ による平行移動写像 τ_P であった．$P \in E[n]$ であることが $\tau_P^*(n(O)) \sim n(O)$ となるための必要十分条件であることが確認できるので，主張が従う． □

命題 3.11 n 次トーサー因子類ペアを $(E,[n(O)])$ のひねりとみなすと，それらは F-同型を除いて $H^1(F,E[n])$ でパラメータ付けされる．

3.4 n-被覆

定義 3.12（被覆） (i) 被覆 (C,ν) とは, 滑らかな射影曲線 C と非定数射 $\nu\colon C \longrightarrow E$ のこととする．
(ii) 2 つの被覆 (C_1,ν_1), (C_2,ν_2) について，被覆の同型 $\psi\colon (C_1,\nu_1) \xrightarrow{\sim} (C_2,\nu_2)$ とは，曲線としての同型 $\psi\colon C_1 \longrightarrow C_2$ であって $\nu_1 = \nu_2 \circ \psi$ を満たすもののこととする．
(iii) $(E,[n])$ を被覆の基本対象とする．

定義 3.13（n-被覆） 基本対象 $(E,[n])$ の被覆としてのひねりのことを n-被覆と呼ぶ．

注意 3.14 ひねりと言った時点で，固定された $\overline{F}$-同型を省略して表記していることに注意せよ．すなわち (C,ν) が n-被覆であるとは，$\overline{F}$-同型 $f\colon C \longrightarrow E$ と F 上の非定数射 $\nu\colon C \longrightarrow E$ の組であって $\nu = [n] \circ f$ を満たすもののことである．

補題 3.15 $\mathrm{Aut}(E,[n]) \cong E[n]$.

証明 $f \in \mathrm{Aut}(E,[n])$ をとると $[n] = [n] \circ f$ を満たす．したがって $[n] \circ (f - \mathrm{id}) = 0$ を満たす．このことから $f - \mathrm{id}$ が全射でない，すなわち定数射であることが従う．ゆえにある $P \in E(\overline{F})$ を用いて $f = \tau_P$ と表せるが，改めて $[n] = [n] \circ f = [n] \circ \tau_P = \tau_{[n]P} \circ [n]$ 及び $[n]$ の全射性から $P \in E[n]$ であることが従う．逆に $P \in E[n]$ に対して τ_P が $(E,[n])$ の被覆としての自己同型になることは明らかである． □

命題 3.16 n-被覆を $(E,[n])$ のひねりとみなすと，それらは F-同型を除いて $H^1(F,E[n])$ でパラメータ付けされる．

証明 3.1 節で述べた方法で証明されるが，ここでは後のため n-被覆から定まる $H^1(F,E[n])$ の元を具体的に構成しておく．(C,ν) を n-被覆とし，ひねりを定めている $\overline{F}$-同型を $f\colon (C,\nu) \longrightarrow (E,[n])$ とする．ひねりの定義から $[n] \circ f = \nu$ が成り立つ．ここで $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F/F})$ に対し

$$
\begin{aligned}
[n] \circ (\sigma(f) - f) &= \sigma([n] \circ f) - [n] \circ f \\
&= \sigma(\nu) - \nu = \nu - \nu = 0
\end{aligned}
$$

であるから，$\sigma(f) - f\colon C \longrightarrow E$ は $E[n]$ に値を取る定数射になる．この像を P_σ とすると $(P_\sigma)_\sigma$ は 1-コサイクルであり，$H^1(F,E[n])$ の元が定まる． □

命題 3.17 (i) n 次トーサー因子類ペア $(C,[D])$ に対し $\nu\colon C \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C) \cong E; P \mapsto [n(P) - D]$ は n-被覆となる．
(ii) (C,ν) が n-被覆であるとき，定義から $\overline{F}$-同型 $f\colon C \longrightarrow E$ であって $\nu = [n] \circ f$ をみたすものがある．$(P,Q) \mapsto f^{-1}(P + f(Q))$ で定まる射 $\mu\colon E \times C \longrightarrow C$ は C に E-トーサーの構造を与える．このトーサーの構造により $(C,[f^*(n(O))])$ は n 次トーサー因子類ペアとなる．
(iii) (i), (ii) の対応は $H^1(F,E)$ によるパラメータ付けと可換な対応であり，特に互いに逆の対応である．

証明 (i) $(E,n(O))$ のひねりを定めている $\overline{F}$-同型射 $f\colon (C,[D]) \longrightarrow (E,n(O))$ を考え，$D' = f^*(O)$ とする．このとき $\mathrm{Pic}^0(C) \cong E$ とみなすと $f\colon C \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C)$ は $f(P) = [(P) - D']$ に他ならない．また D' の定め方から明らかに $[n] \circ f = n[(P) - D'] = [n(P) - D] = \nu(P)$ が成り立ち，(C,ν) が n-被覆であることが確認される．

(ii) 主張の内，μ が F 上で定義されることだけがやや非自明なのでこれを示す．まず，命題 3.16 の証明中で述べたように，各 σ に対し $P_\sigma \in E[n]$ があり，$\sigma(f) - f$ は P_σ を値に取る定数射である．任意の $P \in E(\overline{F}), Q \in C(\overline{F})$ に対し $\sigma(\mu(P,Q)) = \mu(\sigma(P),\sigma(Q))$ であることが以下で確認でき，主張が示される．

$$\begin{aligned}
\sigma(\mu(P,Q)) &= \sigma(f^{-1}(P + f(Q))) \\
&= \sigma(f^{-1})(\sigma(P) + \sigma(f)(\sigma(Q))) \\
&= f^{-1}(-P_\sigma + \sigma(P) + (f(\sigma(Q)) + P_\sigma)) \\
&= \mu(\sigma(P),\sigma(Q)).
\end{aligned}$$

(iii) 確認せよ．

□

補題 3.18 $\mathrm{Aut}(E \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}, \omega_E) \cong E[n]$

証明 E の自己同型 α であって $\alpha^*\omega_E = \omega_E$ となるものは E の平行移動に他ならない．したがって $\alpha = \tau_P(P \in E(\overline{K}))$ と書ける．さらに $\phi_{\mathcal{L}(n(O))}\colon E \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ と可換であることから $\tau_P^*(n(O)) = n(O)$ であり，$P \in E[n]$ とわかる．逆に $P \in E[n]$ に対して τ_P^* が $(E \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}, \omega_E)$ の自己同型を定めることは直ちにわかる． □

命題 3.19 $(E \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}, \omega_E)$ のひねりは，F-同型を除いて $H^1(F, E[n])$ でパラメータ付けされる．

4 n-Selmer 群

4.1節で n-Selmer 群 $\mathrm{Sel}^{(n)}(E/K)$ 及び Tate–Shafarevich 群 $\text{Ш}(E/K)$ の定義を形式的に行い，完全列 (2.4) があることを見る．また，3 節で紹介した Galois コホモロジーの翻訳を用いて，4.2節で $\mathrm{Sel}^{(n)}(E/K)$ および $E(K)/[n]E(K)$ に幾何的な意味づけを行う．

4.1 n-Selmer 群と Tate–Shafarevich 群

定義 4.1 (n-Selmer 群) F を体, , E を F 上の楕円曲線とする．このとき $\mathrm{Gal}\,\overline{F}/F$-加群としての完全列

$$0 \longrightarrow E[n] \longrightarrow E \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

に対して長完全列を考えると

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E[n](F) \arrow[r] & E(F) \arrow[r, "{[n]}"] & E(F) \arrow[dll, rounded corners, "\delta"] \\
& H^1(F, E[n]) \arrow[r] & H^1(F,E) \arrow[r, "{[n]}"] & H^1(F,E) \arrow[dll, rounded corners] \\
& \cdots &
\end{tikzcd}$$

を得るので，この一部を取り出して

$$0 \longrightarrow E(F)/[n]E(F) \longrightarrow H^1(F, E[n]) \xrightarrow{\iota} H^1(F,E)[n] \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

を得る．完全列 (4.1) は任意の体 F 上で考えられるので，F が数体 K のときの楕円曲線 E/K 及び，K を各素点 v での完備化 K_v に拡大した場合に考えることで，可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E(K)/[n]E(K) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^1(K, E[n]) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] \arrow[dr, "①"] & H^1(K,E)[n] \arrow[r] \arrow[d, "②"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod\limits_{v \in \mathcal{M}_K} E(K_v)/[n]E(K_v) \arrow[r] & \prod\limits_{v \in \mathcal{M}_K} H^1(K_v, E[n]) \arrow[r, "\iota"] & \prod\limits_{v \in \mathcal{M}_K} H^1(K_v, E)[n] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る．この図式中の準同型を用いて $\mathrm{Sel}^{(n)}(E/K)$ 及び Ш(E/K) を

$$\underline{\mathrm{Sel}^{(n)}(E/K)} = \ker\left(①\colon H^1(K, E[n]) \longrightarrow \prod_{v \in \mathcal{M}_K} H^1(K_v, E)[n] \right)$$

$$\underline{Ш(E/K)} = \ker\left(②\colon H^1(K, E) \longrightarrow \prod_{v \in \mathcal{M}_K} H^1(K_v, E) \right)$$

により定める．

定義から直ちに次の命題が成り立つ．

命題 4.2　数体 K 上の楕円曲線 E に対して完全列 (2.4)

$$0 \longrightarrow E(K)/[n]E(K) \longrightarrow \mathrm{Sel}^{(n)}(E/K) \longrightarrow Ш(E/K)[n] \longrightarrow 0$$

がある．

4.2　n-Selmer 群の幾何的な翻訳

K を数体，E を K 上の楕円曲線とする．まず $H^1(K,E)$ と $H^1(K,E[n])$ の元はそれぞれ，E/K のトーサーの K-同型類の集合および，n 次トーサー因子類ペアの K-同型類の集合とみなせるのであった．

完全列 (4.1) 中の射 $\iota\colon H^1(K,E[n]) \xrightarrow{\iota} H^1(K,E)$ の構成を思い出すと，n 次トーサー因子類ペア $(C,[D])$ に対し C を対応させる写像になっている．δ により $E(K)/[n]E(K)$ を $H^1(K,E[n])$ の部分集合とみなすと，命題 3.6，定義 3.7より

$$E(K)/[n]E(K) = \ker\iota = \left\{(C,[D]) \;\middle|\; \begin{array}{c} n\text{ 次トーサー因子類ペア} \\ C\text{ は可解 }E\text{-トーサー} \end{array}\right\} / \cong_K$$

とみなせる．また同様に命題 3.6，定義 3.7 より，

$$\mathrm{Sel}^{(n)}(E/K) = \left\{(C,[D]) \;\middle|\; \begin{array}{c} n\text{ 次トーサー因子類ペア} \\ C\text{ は局所可解な }E\text{-トーサー)} \end{array}\right\} / \cong_K$$
$$Ш(E/K) = \{C \mid \text{局所可解な }E\text{-トーサー}\} / \cong_K$$

とみなせる．

5　余正則空間

5.1 節で種数 1 の曲線の n 次モデルとその全体 X_n 及び，X_n に作用する代数群 $\mathcal{G}_n, \tilde{\mathcal{G}}_n$ を定義する．5.2 節で余正則空間を定義する．$(X_n, \tilde{\mathcal{G}}_n)$ が余正則空間になることなど，いくつかの性質を定理 5.4 で述べる．5.4 節で Weierstrass モデルの定義をする．Weierstrass モデルを中心的に扱うことで，5.7 節で定理 5.4 の証明を得る．

楕円曲線 $E_{\mathcal{C}_4,\mathcal{C}_6}$ に対し，$\mathrm{Sel}^{(n)}(E_{\mathcal{C}_4,\mathcal{C}_6}/K)$ の元と，不変量 $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_6$ を持ち局所可解なモデルの $\tilde{\mathcal{G}}_n(K)$-軌道との対応（定理 5.25）を同じく 5.7 節で見る．

5.1　種数 1 の曲線の n 次モデル

K を数体とする．4.2 節で見たように，楕円曲線 E/K の n-Selmer 群の各元は n 次トーサー因子類ペア $(C,[D])$ であって C が局所可解なものに対応するのであった．本節では，局所可解なトーサー因子類ペア $(C,[D])$ に対して，$\mathcal{L}(mD)$ $(m = 1,2,3,\dots)$ を考えることで C の射影空間への良い埋め込みを見つけ，さらにこうし

た埋め込みの任意性が代数群の作用で記述できることを見る．これらの観察を通して，種数 1 の曲線の n 次モデルを定義する．種数 1 の曲線の n 次モデルがまさに余正則空間の元を定める．ここで，K 上の埋め込みを構成するためには次の事実が重要である．

定理 5.1（[Cas62, Lemma 7.1]） (C,μ) を局所可解な E-トーサーとし，$[D]$ を C の K-有理因子類とする．このとき $[D]$ を代表する K-有理因子 D' が存在する．

以下，一般に F を体，E/F を楕円曲線，$(C,[D])$ を E の n 次トーサー因子類ペアとし，D は F-有理因子とする．まず楕円曲線の定義から E の種数は 1 であり，$\overline{F}$ 上では C と E は同型なので C の種数も 1 である．定理 6.3 (v) より $m=1,2,3,\ldots$ に対して

$$\ell(mD)=\deg mD=mn$$

である．また D が F-有理因子であるので，定理 6.3 (viii) より $\mathcal{L}(D)$ には $F(C)$ の元からなる基底が存在する．以下ではこれらの事実を断りなく用いる．

以下，$n=1,2,3,4$ それぞれの場合に埋め込みの構成をし，構成された埋め込みを表すデータを動機づけとして n 次モデルを定義する．n 次モデル全体を$\underline{X_n}$で表す．また埋め込みのデータの任意性を見たのち，X_n に作用する群 $\underline{\mathcal{G}_n}$ を定義する．$\mathcal{G}_n$ の交換子群を $\underline{\tilde{\mathcal{G}}_n}$ とする．

$\underline{n=1}$

(埋め込みの構成) $\ell(D)=1\neq 0$ なので $f\in F(C)$ があり $\operatorname{div} f+D\geq 0$ である．これを改めて D とすることで以下では $D\geq 0$ とする．$\deg D=1$，$D\geq 0$，かつ D は F-有理因子なので，ある $O\in C(F)$ があり $D=(O)$ と表せる．したがってこの場合は (C,O) は楕円曲線である．

$\mathcal{L}(D)\supset\overline{F}$ と $\ell(D)=1$ より $\mathcal{L}$ は定数関数 $1\in F(C)$ を基底にもつ．1 は $\mathcal{L}(2D)$ の元でもある．$\ell(2D)=2$ なので 1 と $\overline{F}$ 上一次独立な元 $x\in F(C)$ が存在する．$1,x$ は $\mathcal{L}(3D)$ の元でもある．$\ell(3D)=3$ なのでこれらと $\overline{F}$ 上一次独立な $y\in F(C)$ が存在する．$\mathcal{L}(6D)$ には $1,x,y$ を用いて表される 1，x，y，x^2，xy，y^3，x^3 という 7 つの元があるが，$\ell(6D)=6$ なのでこれらは一次従属である．したがって $(A_1,A_2,\ldots,A_7)\in F^7\setminus\{(0,0,\ldots,0)\}$ が存在し，

$$A_1+A_2x+A_3y+A_4x^2+A_5xy+A_6y^2+A_7x^3=0$$

を満たす．もし A_6 または A_7 が 0 であれば，すべての項が O を極としてもち，かつその位数が異なるので，左辺は関数として 0 になり得ない．したがって A_6,A_7 はいずれも 0 でない．両辺を $A_6^3A_7^4$ で割り，x, y をそれぞれ $-A_6A_7x, A_6A_7^2y$ で置き換えることで，Weierstrass 方程式 (2.2)

$$y^2 + a_1xy + a_3 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

を得る．定理 6.3 (vii) より, $1, x, y$ で定まる $C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ は埋め込みであり．(2.2) は C の像の定義方程式である．したがって C を表すデータとして，係数 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_6) \in F^5$ が得られた．

(モデル)　F^5 の元のことを種数 1 の曲線の 1 次モデルという．1 次モデル $\phi = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_6)$ に対し，(2.2) で定まる曲線を C_ϕ で表す．

(データの任意性)　Weierstrass 方程式 (2.2) を保つような基底の取り換えは $u \in F^\times$, $r, s, t \in F$ を用いて

$$\begin{aligned} x &= u^2x' + r \\ y &= u^3y' + u^2sx' + t \end{aligned}$$

の形の変数変換を (2.2) に施したのちに u^6 で両辺を割ることで得られる．

(作用する群)　上記の方法で得られる変換 $[u; r, s, t]$ 全体のなす群のことを $\mathcal{G}_1$ で表す．このとき交換子群は

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = \{[1; r, s, t] \in \mathcal{G}_1\}$$

となる．$\mathcal{G}_1, \tilde{\mathcal{G}}_1$ は X_1 に作用する．

<u>$n = 2$</u>

(埋め込みの構成)　$\mathcal{L}(D)$ の基底を $x, z \in F(C)$ とする．$\mathcal{L}(2D)$ には一次独立な 3 つの元 x^2, xz, z^2 がある．$\ell(2D) = 4$ なのでこれらと一次独立な $y \in F(C)$ が存在する．$\mathcal{L}(4D)$ には x^4, x^3z, x^2z^2, xz^3, z^4, x^2y, xzy, z^2y, y^2 の 9 個の元がある．$\ell(4D) = 8$ なのでこれらは一次従属である．したがって $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, a, b, c, d, e) \in F^8 \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ が存在し，

$$y^2 + (\alpha_0x^2 + \alpha_1xz + \alpha_2z^2)y = ax^4 + bx^3z + cx^2z^2 + dxz^3 + ez^4 \tag{5.1}$$

をみたす．ここで定理 6.3 (vii) より，x, y, z で定まる $C \hookrightarrow \mathbb{P}(1, 2, 1)$ は埋め込みであり，(5.1) は C の像の定義方程式である．ただしここで，(5.1) の y^2 の係数が 0 であれば C が滑らかであることに矛盾するので，予めその係数で割ることで y^2 の係数を

1 にしていることに注意せよ．以上より，C を表すデータとして，2 次および 4 次の 2 元斉次式の組

$$\begin{aligned} p(x,z) &= \alpha_0 x^2 + \alpha_1 xz + \alpha_2 z^2 \\ q(x,z) &= ax^4 + bx^3 z + cx^2 z^2 + dxz^3 + ez^4 \end{aligned}$$

が得られ，C の定義方程式は

$$y^2 + p(x,z)y = q(x,z) \tag{5.2}$$

で与えられる．

(モデル)　2 次および 4 次の 2 元斉次式のペアのことを種数 1 の曲線の 2 次モデルという．2 次モデル $\phi = (p,q)$ に対し，(5.2) で定まる曲線を C_ϕ で表す．

(データの任意性)　上記で得たデータ p, q は，x, z 及び y の取り方と線形関係式の取り方に依存している．これらの任意性はすべて，$B \in \mathrm{GL}_2(F)$, $\mu \in F^\times$, $r_0, r_1, r_2 \in F$ を用いた変数変換

$$\begin{aligned} (x,z) &= (x',z')B \\ y &= \mu^{-1}y' + r_0 x'^2 + r_1 x'z' + r_2 z'^2 \end{aligned}$$

を (5.2) に施したのちに両辺を μ^2 倍することで得られる．

(作用する群)　上記の方法で得られる変換 $[\mu; r, B]$ 全体のなす群のことを $\mathcal{G}_2$ で表す．このとき交換子群は

$$\tilde{\mathcal{G}}_2 = \{[1; r, B] \in \mathcal{G}_2 \mid B \in \mathrm{SL}_2(F)\}$$

となる．$\mathcal{G}_2, \tilde{\mathcal{G}}_2$ は X_2 に作用する．

$\underline{n=3}$

(埋め込みの構成)　$\mathcal{L}(D)$ の基底を $x, y, z \in F(C)$ とすると $\mathcal{L}(3D)$ には x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, y^2x, y^2z, z^2x, z^2y, xyz の 10 個の元がある．$\ell(3D) = 9$ なのでこれらは一次従属である．したがって 3 元 3 次斉次式 $T(x,y,z)$ があり，

$$T(x,y,z) = 0 \tag{5.3}$$

となる．ここで定理 6.3 (vii) より，x, y, z で定まる $C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ は埋め込みであり．$T = 0$ は C の像の定義方程式である．以上より，C を表すデータとして，3 元 3 次斉次式 T が得られた．

(モデル) 3 元 3 次斉次式のことを種数の 3 次モデルという．3 次モデル $\phi = (T)$ に対し，(5.3) で定まる曲線を C_ϕ で表す．
(データの任意性) 上記で得たデータ f は，x, y, z の取り方と線形関係式の取り方に依存している．これらの任意性はすべて，$B \in \mathrm{GL}_2(F)$ を用いた変数変換

$$(x, y, z) = (x', y', z')B$$

を (5.3) に施したのちに両辺に $\mu \in F^\times$ を掛けることで得られる．
(作用する群) 上記の方法で得られる変換 $[\mu; B]$ 全体のなす群 $\mathbb{G}_m \times \mathrm{GL}_3$ のことを $\mathcal{G}_3$ で表す．このとき交換子群は

$$\tilde{\mathcal{G}}_3 = \mathrm{SL}_3$$

となる．$\mathcal{G}_3, \tilde{\mathcal{G}}_3$ は X_3 に作用する．
$\underline{n = 4}$
(埋め込みの構成) $\mathcal{L}(D)$ の基底を x_1, x_2, x_3, $x_4 \in F(C)$ とすると $\mathcal{L}(2D)$ には x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4 の 10 個の元がある．$\ell(2D) = 8$ なので線形写像

$$\begin{gathered} \overline{F}^{10} \longrightarrow \mathcal{L}(2D) \\ (a_1, a_2, \ldots, a_{10}) \mapsto a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots a_{10}x_3x_4 \end{gathered}$$

の核は 2 次元である．またこの写像は F 係数行列で表現できるので，核は F 係数のベクトルからなる基底をもつ．したがって F 係数 4 元 2 次式の組 ${}^t(q_1, q_2)$ があり，

$$\begin{pmatrix} q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{pmatrix} = 0 \tag{5.4}$$

となる．ここで定理 6.3 (vii) より，x_1, x_2, x_3, x_4 で定まる射 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ は埋め込みであり．(5.4) は C の像の定義方程式である．以上より，C を表すデータとして，2 元 2 次式の組 ${}^t(q_1, q_2)$ が得られた．
(モデル) 2 元 2 次式の組 ${}^t(q_1, q_2)$ のことを種数 1 のの 4 次モデルという．4 次モデル $\phi = {}^t(q_1, q_2)$ に対し，(5.4) で定まる曲線を C_ϕ で表す．
(データの任意性) 上記で得たデータ q_1, q_2 は，x_1, x_2, x_3, x_4 の取り方と線形関係式の取り方に依存している．従ってこれらの任意性は全て $B \in \mathrm{GL}_4(F)$ を用いた変数変換

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1', x_2', x_3', x_4')B$$

を (5.4) に施したのちに両辺に $A \in \mathrm{GL}_2(F)$ を掛けることで得られる．

(作用する群)　上記の方法で得られる変換 $[A,B]$ 全体のなす群 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_4$ のことを $\mathcal{G}_4$ で表す．このとき交換子群は

$$\tilde{\mathcal{G}}_4 = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_4$$

となる．$\mathcal{G}_4, \tilde{\mathcal{G}}_4$ は X_4 に作用する．

5.2　余正則空間と楕円曲線の Selmer 群

定義 5.2　F-ベクトル空間 V および V に作用する F 上の代数群 G について，$F[V]^G$ が環として多項式環に同型であるとき，(V,G) は<u>余正則空間</u>であるという．

定義 5.3　$n=1,2,3,4$ について X_n はそれぞれ次元が $N=5,8,10,20$ のアフィン空間であるので，その座標環 $F[X_n]$ は N 変数多項式環である．$n=3,4$ に対し，$F[X_n]$ を通常の次数により次数付けを行う．$n=1,2$ に対し，

$$\begin{aligned} F[X_1] &= F[a_1,a_2,a_3,a_4,a_6] \\ F[X_2] &= F[\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,a,b,c,d,e] \end{aligned}$$

で表したとき $\deg a_i = i$, $\deg \alpha_i = 1$, および $\deg a = \deg b = \ldots = \deg e = 2$ により次数付けを行う．不変式環 $F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n}$ を

$$F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n} = \{f \in F[X_n] \mid \text{すべての } g \in \tilde{\mathcal{G}}_n(\overline{F}) \text{ に対し } f \circ g = f\}$$

で定める．また有理指標 $\det\colon \mathcal{G}_n \longrightarrow \mathbb{G}_m$ を

$$\begin{array}{lll} n=1 & [u;r,s,t] & \mapsto u^{-1} \\ n=2 & [\mu,r,B] & \mapsto \mu \det B \\ n=3 & [\mu,B] & \mapsto \mu \det B \\ n=4 & [A,B] & \mapsto \det A \det B \end{array}$$

で定める．

重さ k の不変式の空間 $F[X_n]_k^{\tilde{\mathcal{G}}_n}$ を

$$F[X_n]_k^{\tilde{\mathcal{G}}_n} = \{f \in F[X_n] \mid \text{すべての } g \in \mathcal{G}_n(\overline{K}) \text{ に対し } f \circ g = (\det g)^k f\}$$

で定める．重さにより $F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n}$ に次数付き環の構造が定まる．

定理 5.4　$n=1,2,3,4$ とする．それぞれ重さ $4,6,12$ の不変式 $c_4, c_6, \Delta \in F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n}$ が存在し，$c_4^3 - c_6^2 = 1728\Delta$ および次を満たす．

(i) F の標数が $2,3$ でないとき，$F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n} = F[c_4, c_6]$．すなわち $(X_n, \tilde{\mathcal{G}}_n)$ は余正則空間である．

(ii) $\phi \in X_n$ について，C_ϕ が滑らかな種数 1 の曲線であることと $\Delta(\phi) \neq 0$ は同値．

(iii) F の標数が $2,3$ でないとする．$\phi \in X_n$ が $\Delta(\phi) \neq 0$ をみたすとき E を

$$y^2 = x^3 - 27c_4(\phi) - 54c_6(\phi)$$

で定まる楕円曲線とすると，C_ϕ には自然に E-トーサーの構造が入り，E は C_ϕ の Jacobi 多様体となる．

定理 5.4の証明の概略は 5.7節で述べる．

5.3 n 次モデルにより定まる滑らかな曲線の種数

F を代数閉体とする．本節では次の定理を証明する．

定理 5.5 $n = 1, 2, 3, 4$ とし，n 次モデル $\phi \in X_n$ を考える．C_ϕ が滑らかなとき，C_ϕ は種数 1 の曲線となる．$n = 3, 4$ で C_ϕ が滑らかなとき，$C_\phi \subset \mathbb{P}^{n-1}$ は次数 n の曲線となる．

証明 $n = 1, 2$ ではよく知られた事実であるので，以降，本節中は $n = 3, 4$ とする．R_n を F 係数の n 変数多項式環とする．C_ϕ の定義イデアルを $I_\phi \subset R_n$ とおく．このとき $n = 3, 4$ のそれぞれで R_n/I_ϕ の Hilbert 多項式が以下のように計算できる．

$\underline{n = 3}$ I_ϕ は一つの 3 次斉次多項式 $T \in R_3$ で生成される．したがって完全列

$$0 \longrightarrow R_3(-3) \xrightarrow{T} R_3 \longrightarrow R_3/I_\phi \longrightarrow 0$$

があり，定理 6.6 (ii),(iii) より

$$h_{C_\phi}(t) = \binom{t+2}{2} - \binom{t-1}{2} = 3t$$

となる．

$\underline{n = 4}$ I_ϕ は 2 次斉次多項式 $q_1, q_2 \in R_4$ で生成される．C_ϕ は 1 次元なので q_1, q_2 は互いに素であり，完全列

$$0 \longrightarrow R_4(-4) \xrightarrow{\binom{-q_2}{q_1}} R_4(-2)^2 \xrightarrow{(q_1\, q_2)} R_4 \longrightarrow R_4/I_\phi \longrightarrow 0$$

がある．短完全列に分解して計算することで定理 6.6 (ii),(iii) より

$$h_{C_\phi}(t) = \binom{t+3}{3} - 2\binom{t+1}{3} + \binom{t-1}{3} = 4t$$

となる．

$n = 3, 4$ いずれの場合についても，仮定から C_ϕ が滑らかであることに注意すると，定理 6.6 (v) より $g = 1$ および次数 n であることがわかる． □

5.4 Weierstrass モデル

本節では n 次の Weierstrass モデルを定義し，$\pi_n^*\colon F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n} \longrightarrow F[X_1]^{\tilde{\mathcal{G}}_1}$ を定める．Weierstrass モデルと π_n^* は $(X_n, \tilde{\mathcal{G}}_n)$ が余正則空間であることの証明で中心的な役割を担う．

E を (2.2) で定まる楕円曲線とし，E を定める 1 次モデルを ϕ とする．$(E, [n(O)])$ を n 次トーサー因子類ペアとみなしたとき，$n = 2, 3, 4$ に対し埋め込み

$$\begin{array}{llll} n=2 & E \longrightarrow \mathbb{P}(1,2,1); & (x,y) \mapsto (x:y:1) \\ n=3 & E \longrightarrow \mathbb{P}^2; & (x,y) \mapsto (x:y:1) \\ n=4 & E \longrightarrow \mathbb{P}^3; & (x,y) \mapsto (1:x:y:x^2) \end{array}$$

が定まる．この像を表す n 次モデルを $\pi_n(\phi) \in X_n$ とする．$\pi_n(\phi)$ を計算するとそれぞれ

$$\begin{aligned} \pi_2(\phi) &= (a_1xz + a_3z^2,\ x^3z + a_2x^2z^2 + a_4xz^3 + a_6z^4) \\ \pi_3(\phi) &= (x_1x_3^2 + a_1x_1x_2x_3 + a_3x_1^2x_3 - x_2^3 - a_2x_1x_2^2 - a_4x_1^2x_2 - a_6x_1^3) \\ \pi_4(\phi) &= \begin{pmatrix} x_1x_4 - x_2^2 \\ x_3^2 + a_1x_2x_3 + a_3x_1x_3 - x_2x_4 - a_2x_2^2 - a_4x_1x_2 - a_6x_1^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．また $g = [u; r, s, t] \in \mathcal{G}_1$ を作用させてから同様に計算して得られるモデル

は，上記で計算したモデルに以下の $\gamma_n(g) \in \mathcal{G}_n$ を作用させたものになる．

$$\gamma_2(g) = \left[u^{-3};\ (0, u^2, s, t),\ \begin{pmatrix} u^2 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}\right]$$
$$\gamma_3(g) = \left[u^{-6};\ \begin{pmatrix} 1 & r & t \\ 0 & u^2 & u^2 s \\ 0 & 0 & u^3 \end{pmatrix}\right]$$
$$\gamma_4(g) = \left[\begin{pmatrix} u^{-4} & 0 \\ u^{-6r} & u^{-6} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & r & t & r^2 \\ 0 & u^2 & u^2 s & 2u^2 r \\ 0 & 0 & u^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^4 \end{pmatrix}\right]$$

以上の式により，一般に $\phi \in X_1$ と $g \in \mathcal{G}_1$ に対して $\pi_n(\phi)$ と $\gamma_n(g)$ を定めることで射

$$\pi_n \colon X_1 \longrightarrow X_n, \quad \gamma_n \colon \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_n$$

が定まり，多項式環の準同型

$$\pi_n^* \colon F[X_n] \longrightarrow F[X_1];\ f \mapsto f \circ \pi_n$$

が定まる．また，直接計算することで以下が分かる．

命題 5.6 $n = 2, 3, 4$ とする．

(i) $\phi' = \pi_n(\phi)$ のとき C_ϕ と $C_{\phi'}$ は曲線として同型.

(ii) γ_n は群スキームの準同型を定める．

(iii) 任意の $g \in \mathcal{G}_1$ と $\phi \in X_1$ に対し $(\gamma_n g)(\pi_n \phi) = \pi_n(g\phi)$.

(iv) 任意の $g \in \mathcal{G}_1$ に対し $\det(\gamma_n g) = \det g$.

したがって次数付き F-代数としての準同型

$$\pi_n^* \colon F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n} \longrightarrow F[X_1]^{\tilde{\mathcal{G}}_1}$$

が誘導される．

命題 5.7 $F = \overline{F}$ かつ F の標数が $2, 3$ でないとする．C_ϕ が滑らかな種数 1 の曲線であるような n 次モデル ϕ に対し，一意的な $A, B \in F$ が存在し，ある $g \in \tilde{\mathcal{G}}_n$ について

$$g\phi = \pi_n(0, 0, 0, A, B)$$

を満たす．

証明 まず $g \in \mathcal{G}_n$ と $A', B' \in F$ で $g'\phi = \pi_n(0,0,0,A',B')$ を満たすものが存在することはよく知られている．g を適宜定数倍すると $\det g = 1$ であるように取れる．このときの $g\phi$ を $\pi_n(0,0,0,A,B)$ とすればよい．$\mathcal{G}_n$-作用による不変微分形式の変化を命題 5.23 で計算する．A, B の一意性はこの計算から従う． □

5.5 不変式 $c_4, c_6, \Delta \in F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n}$ の存在

本節では π_n^* を通して，不変式 c_4, c_6, Δ の存在を証明する．詳細が気になる場合は [Fis08] を見よ．

補題 5.8 F の標数が $2, 3$ でないとき，1 次モデル $\phi \in X_1$ に対して c_4, c_6 を 2節で述べた方法で定義された不変式とすると $F[X_1]^{\tilde{\mathcal{G}}_1} = F[c_4, c_6]$ が成り立つ．

証明 $\phi \in X_1$ について，C_ϕ が滑らかなとき，(2.3) で定まる楕円曲線と F 上で同型である．このことと $\tilde{\mathcal{G}}_1$-作用で移りあう Weierstrass 方程式の標準的な計算により，

$$\iota \colon \mathbb{A}^2 \longrightarrow X_1; \quad (c_4, c_6) \mapsto (0,0,0,-c_4/48,-c_6/864)$$

が同型 $\iota^* \colon F[X_1]^{\tilde{\mathcal{G}}_1} \longrightarrow F[c_4, c_6]$ を導くことがわかる． □

補題 5.9 $f \in \overline{F}[X_1]^{\tilde{\mathcal{G}}_1} = \overline{F}[c_4, c_6]$ を斉次元とすると非負整数 p, q, r, s および $t_j \in \overline{F} \setminus \{0,1\}$ $(1 \le j \le s)$，$\alpha \in \overline{F}^\times$ があり

$$f = \alpha c_4^p c_6^q \Delta^r \prod_{j=1}^{s} (c_4^3 - t_j c_6^2)$$

と表せる．

証明 次数 $4, 6, 12$ の斉次元は以下に挙げたものの定数倍で尽くされる．

次数	斉次元
4	c_4
6	c_6
12	$c_4^3,\ c_6^2,\ c_4^3 - tc_6^2\ (t \in \overline{F} \setminus \{0,1\})$

f の既約分解を

$$f = \prod_{j=1}^{u} f_j$$

とする．f_j は自然に斉次元になることに注意．$\deg f_j \equiv 4 \mod 12$ のとき，c_4 が f_j を割り切り，既約性から f_j は c_4 の定数倍である．$\deg f_j \equiv 6 \mod 12$ のとき，c_6 が f_j を割り切り，既約性から f_j は c_6 の定数倍である．$\deg f_j \equiv 2, 8, 10$ のとき，c_4c_6 が f_j を割り切るがこれは f_j の既約性に反する．$\deg f_j \equiv 0 \mod 12$ のとき，f_j は c_4^3, c_6^2 に関する斉次多項式である．したがって $\tilde{f}_j = f_j / c_6^{2\cdot\frac{\deg f_j}{12}}$ は c_4^3/c_6^2 に関する 1 変数の多項式であり，f_j の既約性から $\overline{F}$ 上でただ一つの根 t_j をもつ．ゆえに f_j は $c_4^3 - t_j c_6^2$ の定数倍である．ただし $t_j = 1$ のときは Δ の定数倍である．以上より主張が従う． □

命題 5.10 $n = 1, 2, 3, 4$ について

$$X_n^{\mathrm{sing}} = \{\phi \in X_n \mid C_\phi \text{は種数 1 の滑らかな曲線でない}\}$$

を考えるとこれは X_n の既約な真の Zariski 閉集合である．

証明 C_ϕ が滑らかであるとする．このとき定理 5.5より C_ϕ の種数は 1 である．$F = \overline{F}$ のときに示せば十分である．このとき X_n^{sing} は C_ϕ が滑らかでないような ϕ の全体である．$n = 1, 2$ では判別式 Δ で定義される部分なので主張が従う．$n = 3, 4$ について述べる．Zariski 閉集合になることに関しては Jacobi 行列の階数が落ちることが係数に関する方程式で書けることから従う．また

$$B_3 = \{x_1 f_1(x_2, x_3) + f_2(x_2, x_3) \in X_3\} \subset X_3$$
$$B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda x_1 x_2 + g_1(x_2, x_3, x_4) \\ g_2(x_2, x_3, x_4) \end{pmatrix} \in X_4 \right\} \subset X_4$$

を考えると，X_n^{sing} は $\mathcal{G}_n \times B_n \longrightarrow X_n$ の像と同一視でき，また $\mathcal{G}_n, B_n$ が既約なことから X_n^{sing} の既約性が従う． □

補題 5.11 写像 $\pi_n^* \colon F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n} \longrightarrow F[X_1]^{\tilde{\mathcal{G}}_1}$ は次数付き代数の単射である．

証明 F が代数閉体のときに証明すれば十分である．$f \in \ker \pi_n^*$ とする．閉体上で考えているので，任意の $\phi \in X_n \setminus X_n^{\mathrm{sing}}$ に対し $g \in \mathcal{G}_n$ が存在して $g \cdot \phi$ は Weierstrass モデルになる．したがって f の取り方から $\det(g) f(\phi) = f(g \cdot \phi) = 0$ となり，$\det(g) \neq 0$ なので $f(\phi) = 0$ が従う．つまり f は $X_n \setminus X_n^{\mathrm{sing}}$ 上で 0 である．命題 5.10より X_n^{sing} は真の Zariski 閉集合なので，f は X_n 全体で恒等的に 0 である．したがって π_n^* は単射である． □

補題 5.12 F を代数閉体とする．C_ϕ が滑らかな種数 1 の曲線であるような $\phi \in X_n$ について，ϕ の $\mathcal{G}_n$-軌道の Zariski 閉包は既約な不変式 $f \in K[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n}$ の零点集合になる．さらに，$\phi' \in X_n$ について $f(\phi') = 0$ であることと，ϕ と ϕ' の $\mathcal{G}_n$-軌道が一致することは同値である．

証明 $\mathbb{P}(X_n)$ では，ϕ の $\tilde{\mathcal{G}}_n$-軌道と $\mathcal{G}_n$-軌道は一致する．$\mathcal{G}_n$-作用の安定化部分群が有限なことが容易に確認でき，$\overline{\tilde{\mathcal{G}}_n\phi}$ の次元は $\mathcal{G}_n$ の次元に等しい．また $\dim \tilde{\mathcal{G}}_n = \dim X_n - 2$ に注意すると，$\overline{\tilde{\mathcal{G}}_n\phi}$ は $\mathbb{P}(X_n)$ の中で余次元 1 である．$\tilde{\mathcal{G}}_n$ の既約性から既約多項式 $f \in \overline{F}[X_n]$ が存在して $\overline{\tilde{\mathcal{G}}_n\phi} = (f = 0) \subset \mathbb{P}(X_n)$ となる．また ϕ の $\tilde{\mathcal{G}}_n$-軌道から f はスカラー倍を除いて一意的に定まるので f は $\tilde{\mathcal{G}}_n$-不変である．

ϕ, ϕ' の $\mathcal{G}_n$-軌道が一致することから $f(\phi') = 0$ が従うことは，f の定め方から明らか．逆の主張を示す．$f(\overline{\phi'}) = 0$ とする．ϕ' に対しても同様にして $\overline{\tilde{\mathcal{G}}_n\phi'} = (f' = 0)$ を満たす既約な不変式 f' がある．一方 $\phi' \in \overline{\tilde{\mathcal{G}}_n\phi}$ なので $\overline{\tilde{\mathcal{G}}_n\phi'} \subset \overline{\tilde{\mathcal{G}}_n\phi}$ であり，次元が等しい既約な閉部分集合なのでこれらは一致する．$\overline{\tilde{\mathcal{G}}_n\phi'} = \overline{\tilde{\mathcal{G}}_n\phi}$ は $\tilde{\mathcal{G}}_n\phi', \tilde{\mathcal{G}}_n\phi$ をいずれも開部分集合として稠密に含むので，これらは共通部分を持つ．したがって ϕ, ϕ' の $\mathcal{G}_n$-軌道は一致する． $\square$

補題 5.13 F を標数が $2, 3$ でない代数閉体とする．このとき既約な不変式 $f_4, f_6 \in F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n}$ と正の整数 p, q があり，$\pi_n^*(f_4) = c_4^p$, $\pi_n^*(f_6) = c_6^q$ を満たす．

証明 C_ϕ の j-不変量が 0 であるような Weierstrass モデル $\phi \in X_n$ をとる．ϕ から補題 5.12 により定まる既約な不変式を f_4 とすると，$\pi_n^*(f_4)$ は斉次元である．

$$\pi_n^*(f_4) = \alpha c_4^p c_6^q \Delta^r \prod_{j=1}^{s} (c_4^3 - t_j c_6^2)$$

を補題 5.9 で得られる既約分解とする．f_4 を定数倍で取り直すことで $\alpha = 1$ としてよい．

$C_{\phi'}$ の j-不変量が 0 でない滑らかな種数 1 の曲線であるような, 任意の Weierstrass モデル $\phi' = \pi_n^*(\phi_1) \in X_n$ に対し，f_4 の定め方から $f_4(\phi') \neq 0$ である．このことから $q = s = 0$ となる．次に C'_ϕ が j-不変量が 0 でなく滑らかでもないような，任意の Weierstrass モデル $\phi' = \pi_n^*(\phi_1) \in X_n$ に対し，f_4 の定め方から $f_4(\phi') \neq 0$ である．このことから $r = 0$ となる．

f_6 については，C_ϕ の j-不変量が 1728 であるような Weierstrass モデル $\phi \in X_n$ から始めて同様の議論をすればよい． $\square$

補題 5.14 F が標数 0 の代数閉体のとき，c_4, c_6 は π_n^* の像の元であり，したがって $\pi_n^*\colon F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n} \longrightarrow F[X_1]^{\tilde{\mathcal{G}}_1}$ は全射である．

証明 $\mathbb{F}$ を関数体 $F(X_n)$ とし，$\phi \in X_n(\mathbb{F})$ を生成的モデルとする．例えば $n = 2$ のときには X_2 の元は係数を抜き出すことで 8 次元のアフィン空間の元 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, a, b, c, d, e)$ と同一視できるが，各成分を文字とみなして得られるモデル $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, a, b, c, d, e) \in X_n(\mathbb{F})$ を考える．$n = 3, 4$ でも同様．このとき $\det g = 1$ であるような $g \in \mathcal{G}_n(\overline{\mathbb{F}})$ および一意的な $A, B \in \overline{\mathbb{F}}$ が存在して，$g\phi = \pi_n(0, 0, 0, A, B)$ $(A, B \in \overline{\mathbb{F}})$ となる．ここで一意性より，A, B が Galois 不変であることが従い，つまり $A, B \in \mathbb{F}$ となる．

$f_4, f_6 \in F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n}$ を補題 5.13 で構成した既約な不変式とする．このとき

$$\begin{aligned} f_4 &= f_4(\phi) = f_4(g\phi) = f_4(\pi_n(0, 0, 0, A, B)) \\ &= \pi_n^* f_4(0, 0, 0, A, B) = (-48A)^p \\ f_6 &= f_6(\phi) = f_6(g\phi) = f_6(\pi_n(0, 0, 0, A, B)) \\ &= \pi_n^* f_6(0, 0, 0, A, B) = (-864B)^q \end{aligned}$$

となる．$\mathbb{F}$ の中で $K[X_n]$ は整閉なので $-48A, -864B$ はいずれも $F[X_n]$ の元であることが分かり，また f_4, f_6 の既約性から $p = q = 1$ となる． □

補題 5.15 補題 5.14を $F = \overline{\mathbb{Q}}$ に適用すると，π_n^* による像が c_4, c_6, Δ である元 $f_4, f_6, \tilde{\Delta}$ が得られる．これらは $\mathbb{Z}[X_n]$ の元である．

証明 $c_4, c_6 \in \mathbb{Z}[X_1]$ であったことに注意すると，f_4, f_6 の Galois 共役の π_n^* による像もまた c_4, c_6 である．π_n^* の単射性から f_4, f_6 が Galois 不変であることが従い，ゆえに f_4, f_6 は $\mathbb{Q}[X_n]$ の元である．f を $f_4, f_6, \tilde{\Delta}$ のいずれかとする．$f \notin \mathbb{Z}[X_n]$ と仮定すると $p^{r+1} f \in \mathbb{Z}_p[X_n]$, $p^r f \notin \mathbb{Z}_p[X_n]$ であるような素数 p と整数 $r \geq 0$ が存在する．$g = p^{r+1} f \mod p \in \mathbb{F}_p[X_n]$ とすると，r の取り方から $p^{r+1} f$ の係数には p で割り切れないものがあり $g \neq 0$ である．ところが

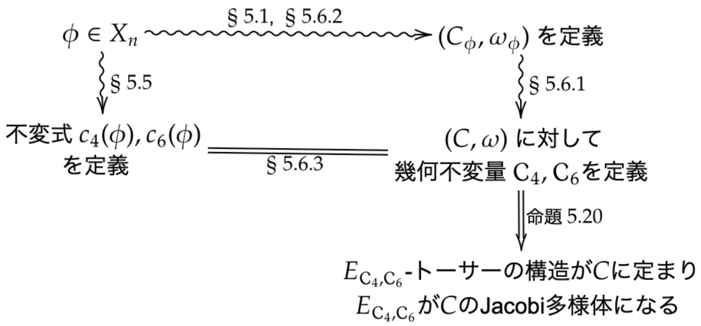
$$\pi_n^* g = p^{r+1} \pi_n^* f \mod p = 0$$

となり，これは π_n^* の単射性に矛盾する． □

$f_4, f_6, \tilde{\Delta} \in \mathbb{Z}[x_n]$ のことも c_4, c_6, Δ で表すことにする．

5.6　幾何不変量

本節では幾何不変量 $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_6$ を定義し，不変式 c_4, c_6 と一致することを証明する．主な構造は以下の通りである．



5.6.1　幾何不変量とトーサー

C を F 上の滑らかな種数 1 の曲線とし，C 上の F 上で定義された 0 でない正則微分形式 ω を固定する．ω を C の不変微分形式と呼ぶ．本節では (C,ω) に対して幾何不変量 c_4, c_6 を定め，幾何不変量と Jacobi 多様体の関係について述べる．

定義 5.16　$\overline{F}$ 上では (C,ω) は

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

および

$$\omega = dx/(2y + a_1x + a_3)$$

と表せる．

$$\begin{aligned}
b_2 &= a_1^2 + 4a_2 \\
b_4 &= 2a_4 + a_1a_3 \\
b_6 &= a_3^2 + 4a_6 \\
c_4 &= b_2^2 - 24b_4 \\
c_6 &= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6
\end{aligned}$$

とする．c_4, c_6 は $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_6)$ は (C, ω) のみに依存しており，従って Galois 不変である．ゆえに F の元である．これら c_4, c_6 を (C, ω) の<u>幾何不変量</u>と呼ぶ．混乱を避けるため，以降では幾何不変量を $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_6$ で表す．

補題 5.17 F を標数が $2, 3$ でない体とする．E を F 上の楕円曲線，ω を E の不変微分形式とする．α を E の代数多様体としての自己同型とする．このとき α が平行移動写像であることとは $\alpha^*\omega = \omega$ であることと同値である．

証明 $P \in E$ による平行移動写像を $\tau_P \colon E \longrightarrow E$ で表す．すると $P \mapsto \tau_P^*\omega/\omega$ が射 $E \longrightarrow \mathbb{G}_m$ を定めるが，これは定数写像しかない．特に $P = O$ とすると $\tau_P^*\omega = \omega$ が従う．

逆に α が平行移動写像でないと仮定すると $\alpha - \mathrm{id}$ は定数写像ではなく，従って全射である．特に $O \in \mathrm{Im}(\alpha - \mathrm{id})$ なので α は固定点を持つ．この点による平行移動で共役を取ることで，固定点は O であるとしてよい．このとき α は群同型である．また標数の仮定から E は (2.3) で与えられるとしてよい．このとき (E, O) の自己同型 α は $(x, y) \mapsto (u^2x, u^3y)$ の形で与えられるが，ω は dx/y の定数倍なので α により不変である． □

補題 5.18 E/F を楕円曲線とし，C を E-トーサーとする．$Q_0 \in C(\overline{F})$ を固定して

$$\begin{aligned} \mathrm{sum} \colon \mathrm{Div}^0(C) &\longrightarrow E \\ \sum n_i(Q_i) &\longmapsto \sum [n_i](Q_i - Q_0) \end{aligned}$$

で定まる写像を考える．このとき以下が成り立ち, E は C の Jacobi 多様体となる．

(a) 以下の完全列がある

$$1 \longrightarrow \overline{F}^\times \longrightarrow \overline{F}(C)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^0(C) \xrightarrow{\mathrm{sum}} E \longrightarrow 0.$$

(b) 写像 sum は Q_0 の取り方に依らない．

(c) 写像 sum は $\mathrm{Div}^0(C)$ および E への $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-作用と可換である．特に

$$\mathrm{Pic}^0_F(C) \cong E(F)$$

が成り立つ．

証明 [Sil92, Chapter X, Theorem 3.8] を見よ． □

補題 5.19 F の標数が $2,3$ でないとする．楕円曲線 E と滑らかな種数 1 の曲線 C がいずれも F 上で定義されているとする．ω_E, ω_C をそれぞれ E, C の不変微分形式とする．もし $\alpha^*\omega_E = \omega_C$ を満たすような同型射 $\alpha\colon C \longrightarrow E/\overline{F}$ があれば，C には自然に E-トーサーの構造が定まる．

証明 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ に対し，自己同型 $\xi_\sigma = \sigma(\alpha)\alpha^{-1}$ を考える．すると $\xi_\sigma^*\omega_E = \omega_E$ を満たすので補題 5.17 から ξ_σ は平行移動写像である．これを $P_\sigma \in E$ による平行移動であるとすると，C は $(P_\sigma) \in H^1(K, E)$ に対応する E のひねりである．特に

$$\mu(P, Q) = \alpha^{-1}(P + \alpha(Q))$$

で定まる $\mu\colon E \times C \longrightarrow C$ により C に E-トーサーの構造が定まる． □

命題 5.20 F の標数は $2,3$ でないとする．F 上の滑らかな種数 1 の曲線 C と F 上で定義された不変微分形式 ω に対し，幾何不変量が $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_6$ であるとき，E を

$$y^2 = x^3 - 27\mathcal{C}_4 - 54\mathcal{C}_6$$

で定めると C には自然に E-トーサーの構造が定まる．

証明 (C, ω) と $(E, 3dx/y)$ は同じ幾何不変量をもつので $\overline{F}$ 上では同型である．補題 5.19 により主張が従う． □

5.6.2 n 次モデルから定まる不変微分形式

本節では C_ϕ が滑らかな種数 1 の曲線であるような n 次モデル ϕ $(n = 1, 2, 3, 4)$ に対して，C_ϕ 上の不変微分形式 ω_ϕ を定め，$\mathcal{G}_n$-作用による ω_ϕ の変化を見ることで，(C_ϕ, ω_ϕ) の幾何不変量 c_4, c_6 と不変式 $c_4(\phi), c_6(\phi)$ が一致することを証明する．

定義 5.21（不変微分形式） n 次モデル ϕ に対し，C_ϕ 上の不変微分形式 $\underline{\omega_\phi}$ を以下で定める．

$$
\begin{array}{lll}
n=1 & \omega_\phi = \dfrac{dx}{2y+a_1x+a_3} & \text{for } \phi=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_6) \\[2ex]
n=2 & \omega_\phi = \dfrac{z^2 d(x/z)}{2y+a_1xz+a_3z^2} & \text{for } \phi=(p(x,z),q(x,z)) \\[2ex]
n=3 & \omega_\phi = \dfrac{x_1^2 d(x_2/x_1)}{\partial T/\partial x_3} & \text{for } \phi=(T) \\[2ex]
n=4 & \omega_\phi = \dfrac{x_1^2 d(x_2/x_1)}{\frac{\partial q_1}{\partial x_4}\frac{\partial q_2}{\partial x_3} - \frac{\partial q_1}{\partial x_3}\frac{\partial q_2}{\partial x_4}} & \text{for } \phi=\begin{pmatrix} q_1(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ q_2(x_1,x_2,x_3,x_4)\end{pmatrix}
\end{array}
$$

とする．ここで $n=3,4$ のとき，定理 5.5 の証明中で用いた完全列を

$$
\mathcal{F}_\bullet(\phi)\colon 0 \longrightarrow \mathcal{F}_{n-2} \xrightarrow{\varphi_{n-2}} \mathcal{F}_{n-3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} R_n \longrightarrow R_n/I_\phi \longrightarrow 0
$$

とすると

$$
\omega_\phi = \frac{x_1^2 d(x_2/x_1)}{(\partial\varphi_1/\partial x_3)\cdots(\partial\varphi_{n-2}/\partial x_n)}
$$

であることに注意せよ．ただし分母の行列の偏微分は，各成分ごとの偏微分を表している．

ω_ϕ の定義は一見アドホックに見えるが，次の補題が成り立つように定めている．

補題 5.22 $n=2,3,4$ とする．C_{ϕ_1} が滑らかな種数 1 の曲線であるような 1 次モデル ϕ_1 に対し，Weierstrass モデル $\phi=\pi_n(\phi_1)$ を考える．このとき自然に定まる同型 $\gamma\colon C_{\phi_1} \longrightarrow C_\phi$ について $\gamma^*\omega_\phi=\omega_{\phi_1}$ を満たす．

証明 π_n と ω_ϕ の定義から直接的な計算で確認できる． □

命題 5.23 C_ϕ が滑らかな種数 1 の曲線であるような n 次モデル ϕ を考える．$g\in\mathcal{G}_n$ に対して $\phi'=g\phi$ とし，g によって誘導される曲線の同型を $\gamma\colon C_{\phi'} \longrightarrow C_\phi$ とすると，

$$
\gamma^*\omega_\phi = (\det g)\omega_{\phi'}
$$

を満たす．

証明 $n=1,2$ に対してはよく知られた事実であるので $n=3,4$ に対して証明する．$\mathcal{G}_n$ の生成元に対して示せば良い．$g=[1,B]$ であって，B の対角成分が全て 0 でな

く，対角成分以外に高々 1 つだけ 0 でない成分がある場合，主張は容易に確認できる．$n = 3$ かつ $g = [\mu, I_3]$ の場合も容易に確認できる．$n = 4$ かつ $g = [A, I_4]$ の場合，$\mathcal{F}_\bullet(\phi')$ と $\mathcal{F}_\bullet(\phi)$ についての可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_4(-4) \arrow[r, "\varphi_2'"] \arrow[d, "\det A"] & R_4(-2)^2 \arrow[r, "\varphi_1'"] \arrow[d, "{}^tA"] & R_4 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_4(-4) \arrow[r, "\varphi_2"] & R_4(-2)^2 \arrow[r, "\varphi_1"] & R_4 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

がある．

$$\frac{\partial \varphi_2'}{\partial x_4} = \frac{\partial\left(({}^tA)^{-1}\varphi_2 \det A\right)}{\partial x_4} = ({}^tA)^{-1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4}\det A$$
$$\frac{\partial \varphi_1'}{\partial x_3} = \frac{\partial(\varphi_1 {}^tA)}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\cdot {}^tA$$

に注意すると

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} = \det A \frac{\partial \varphi_1'}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_2'}{\partial x_4}$$

が従い，これにより

$$\gamma^*\omega_\phi = \frac{x_1^2 d(x_2/x_1)}{(\partial\varphi_1/\partial x_3)(\partial\varphi_2/\partial x_4)} = \det A\frac{x_1^2 d(x_2/x_1)}{(\partial\varphi_1'/\partial x_3)(\partial\varphi_2'/\partial x_4)} = (\det g)\omega_{\phi'}$$

を得る．

あとは $g = [1, B]$ で B が置換行列の場合に証明すればよい．さらにその置換が隣接互換 $(a\ b)$ の場合に主張を証明すればよい．$(a\ b) = (1\ 2)$ のとき

$$x_1^2 d(x_2/x_1) = x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = -x_2^2 d(x_1/x_2)$$

なのでよい．また φ_1 の成分が I_ϕ の元であることと $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}x_i = (\deg \varphi_1)\varphi_1$ が成り立つことに気をつけると

$$\begin{aligned}
&x_1^2 \sum_{i=2}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} d\left(\frac{x_i}{x_1}\right) = \sum_{i=2}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x_1 dx_i - x_i dx_1) \\
&= \sum_{i=2}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} x_1 dx_i - \deg \varphi_1 \cdot \varphi_1 dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} x_1 dx_1 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} x_1 dx_i = x_1 d\varphi_1 = 0 \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

を得る．$n=3$,（$a\ b$）$=(2\ 3)$ のときの主張はこれから従う．

$n=4$ とし, $\varphi = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ とする．$(a\ b)=(3\ 4)$ のとき

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial q_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial q_2}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial x_4} \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{\partial q_1}{\partial x_3}\frac{\partial q_2}{\partial x_4} + \frac{\partial q_2}{\partial x_3}\frac{\partial q_1}{\partial x_4} = -\gamma^*\omega_\phi$$

が成り立つことから主張が従う．$(a\ b)=(2\ 3)$ のとき

$$\frac{x_1^2 d\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_4}} = -\frac{x_1^2 d\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_4}}$$

を示せばよいが，(5.5) を用いると両辺の差が 0 であることがわかる． □

5.6.3 幾何不変量と不変式の一致

命題 5.24 F の標数が $2,3$ でないとし，$n=1,2,3,4$ とする．n 次モデル ϕ で，C_ϕ が滑らかな種数 1 の曲線であるとする．(C_ϕ,ω_ϕ) の幾何不変量を $\mathcal{C}_4,\mathcal{C}_6$ とすると

$$c_4(\phi)=\mathcal{C}_4, \quad c_6(\phi)=\mathcal{C}_6$$

が成り立つ.

証明 命題 5.7より，$\tilde{\mathcal{G}}_n(\overline{F})$-作用で ϕ は Weierstrass モデルに移る．命題 5.23 および補題 5.22 により $n=1$ の場合に帰着される．$n=1$ のときは c_4,c_6 と幾何不変量の定義は一致しているので自明. □

5.7 主定理の証明

定理 5.4の証明 (i) $c_4,c_6,\Delta\in\mathbb{Z}[X_n]$ の $F[X_n]$ での像を改めて c_4,c_6,Δ で表す．これらは 0 でない．補題 5.11, 5.8 より

$$\pi_n^*\colon F[X_n]^{\tilde{\mathcal{G}}_n} \longrightarrow F[X_1]^{\tilde{\mathcal{G}}_1} = F[c_4,c_6]$$

が単射であり，$c_4,c_6\in F[X_n]$ が $\mathbb{Z}$ 上で定義されていたことから全射性が従う．

(ii) F は代数閉体であると仮定してよい．C_ϕ が滑らかな種数 1 の曲線を定めるような $\phi \in X_n$ は $\tilde{\mathcal{G}}_n$ 作用により Weierstrass モデル移る．このとき $\Delta(\phi) \neq 0$ となる．したがって包含関係

$$\{\phi \in X_n \mid \Delta(\phi) = 0\} \subset X_n^{\mathrm{sing}}$$

がある．命題 5.10 から X_n^{sing} は既約なので，この包含は実際は等号であることが従う．
(iii) 命題 5.24 より $c_4(\phi), c_6(\phi)$ は (C_ϕ, ω_ϕ) の幾何不変量に一致する．ゆえに補題 5.20 から主張が従う．

□

定理 5.25 K を数体とし，$n = 2, 3, 4$ とする．$\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_6 \in K$ とする．

$$y^2 = x^3 - 27\mathcal{C}_4 x - 54\mathcal{C}_6$$

で定まる楕円曲線 E/K に対し，集合

$$\{\phi \in X_n \mid c_4(\phi) = \mathcal{C}_4,\ c_6(\phi) = \mathcal{C}_6,\ C_\phi \text{は局所可解}\}$$

の $\tilde{\mathcal{G}}_n(K)$-軌道と，$\mathrm{Sel}^{(n)}(E/K)$ の元とが 1 対 1 に対応する．

証明 局所可解な n 次トーサー因子類ペア $(C, [D])$ から n 次モデル ϕ' が $\mathcal{G}_n(K)$-作用の任意性を除いて一意に定まることは 5.1節で見た．$(C, [D])$ が $E_{\mathcal{C}_4,\mathcal{C}_6}$-トーサーであることから，$c_4(\phi) = \mathcal{C}$ かつ $c_6(\phi) = \mathcal{C}_6$ を満たすような n 次モデル ϕ が，この ϕ' の $\tilde{\mathcal{G}}_n(K)$-軌道上に $\tilde{\mathcal{G}}_n(K)$-作用を除いて一意に存在する．

逆の対応について述べる．$\phi \in X_n$ を $\Delta(\phi) \neq 0$ かつ C_ϕ が局所可解な n 次モデルで，不変量 $c_4(\phi) = \mathcal{C}_4$, $c_6(\phi) = \mathcal{C}_6$ をもつものとする．このとき定理 5.4 (ii) から C_ϕ は滑らかな種数 1 の曲線である．$n = 1$ のとき，$\Delta(\phi) \neq 0$ なら C_ϕ は次数 1 の K-有理因子 $D = (0 : 1 : 0)$ をもつ．$n = 2$ のとき，y について平方完成を行うことで，ϕ は $\tilde{\mathcal{G}}_n(K)$-作用により $(0, q)$ の形の 2 次モデルに移る．このモデルについては $D = (1 : \sqrt{a} : 0) + (1 : -\sqrt{a} : 0)$ が次数 2 の K-有理因子である．一般には平方完成の操作を逆にたどって D を引き戻せばよい．$n = 3, 4$ のとき，D を $C_\phi \subset \mathbb{P}^{n-1}$ の超平面切断とすると D は次数 n の K-有理因子である．また定理 5.4 (iii) から C_ϕ に自然に $E_{\mathcal{C}_4,\mathcal{C}_6}$-トーサーの構造が入り，これにより $(C_\phi, [D])$ は $E_{\mathcal{C}_4,\mathcal{C}_6}$ の n 次トーサー因子類ペアになる．これらは互いに逆の対応を与える． □

6　曲線の代数幾何の基本事項

本節は代数幾何的な言葉遣いや取扱いに不慣れな方のための付録である．内容は [Har77] 及び [Sil92] を参考にした．詳細が気になる場合はこれらを見よ．

6.1　曲線，因子

曲線とは，次元 1 の射影代数多様体のこととする．以下，C を体 F 上の曲線とする．

定義 6.1　C の因子群 $\mathrm{Div}(C)$ とは $C(\overline{F})$ の元で生成される自由生成アーベル群のこととし，その元を因子と呼ぶ．因子 D は一般に有限個以外は 0 であるような整数 n_P を用いて

$$D = \sum_{P \in C(\overline{F})} n_P(P)$$

と表せる．楕円曲線の加法との混同を避けるため，$P \in C(\overline{F})$ を因子とみなす際は括弧をつけて (P) で表記する．

$f \in \overline{F}(C)^\times$ に対して

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in C(\overline{F})} \mathrm{ord}_P(f)(P)$$

により因子が構成される．ここで $\mathrm{ord}_P(f)$ は f の P での位数を表している．このように構成される因子のことを主因子 (Principal divisor) と呼び，主因子全体の集合のことを $\mathrm{Princ}(C)$ で表す．$\mathrm{Princ}(C)$ は $\mathrm{Div}(C)$ の部分群をなす．$\mathrm{Div}(C)$ の $\mathrm{Princ}(C)$ による剰余群のことを $\mathrm{Pic}(C)$ で表し，C のPicard 群と呼ぶ．因子 D で代表される $\mathrm{Pic}(C)$ の元のことを $[D]$ で表す．2 つの因子 D_1, D_2 について $D_1 - D_2$ が $\mathrm{Princ}(C)$ の元であるとき $D_1 \sim D_2$ と表す．

定義 6.2（Galois 作用）　C の因子 $D = \sum n_P(P)$ と $\sigma \in G_F$ に対して $\sigma(D)$ を

$$\sum_{P \in C(\overline{F})} n_P(\sigma(P))$$

で定義する．任意の $\sigma \in G_F$ に対して $\sigma(D) = D$ が成り立つような因子 D 全体の集合を $\mathrm{Div}_F(C)$ で表し，その元のことを F-有理因子と呼ぶ．また任意の $\sigma \in G_F$ に

対して $\sigma(D) \sim D$ が成り立つ，つまり $[\sigma(D)] = [D]$ が成り立つような因子 D 全体の集合を $\underline{\mathrm{Pic}_F(C)}$ で表し，その元を $\underline{F\text{-有理因子類}}$と呼ぶ.

6.2　完備線形系

F を体，C を F 上の滑らかな射影曲線とする．C の因子 $D = \sum n_P(P)$ について，すべての P に対して $n_P \geq 0$ であることを$\underline{D \geq 0}$ で表す．また因子 D について

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \overline{F}(C)^\times \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

は自然に有限次元 $\overline{F}$-ベクトル空間の構造をもつ．この空間の次元を

$$\ell(D) = \dim_{\overline{F}} \mathcal{L}(D)$$

で表す．$D = \sum n_P(P)$ としたとき，$\mathrm{div}(f) + D \geq 0$ が成り立つことは，$n_P \geq 0$ であるような P については f が P を高々位数 n_P の極にもち，$n_P \leq 0$ であるような P については f が P を $-n_P$ 以上の位数の零点にもつことを意味する.

$D = \sum n_P(P)$ の次数 $\deg D$ を $\sum n_P$ で定める.

定理 6.3　(i) C を F 上の滑らかな射影曲線とする．このとき標準因子と呼ばれる因子 K_C 及び整数 $g \geq 0$ があり，任意の因子 $D \in \mathrm{Div}(C)$ に対して

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg D - g + 1$$

が成り立つ．この g を C の (幾何) 種数と呼ぶ.

(ii) $\ell(K_C) = g$.

(iii) $\deg K_C = 2g - 2$.

(iv) $f \in \overline{F}(C)^\times$ について $\deg \mathrm{div}(f) = 0$.

(v) $\deg D > 2g - 2$ のとき

$$\ell(D) = \deg D - g + 1$$

が成り立つ.

(vi) $\deg D \geq 2g$ のとき D は base point free である．つまり $\mathcal{L}(D)$ の元に共通零点はなく，$\mathcal{L}(D)$ の基底を並べることで定まる有理写像 $C \dashrightarrow \mathbb{P}^{\dim \mathcal{L}(D) - 1}$ は射になる.

(vii) $\deg D \geq 2g + 1$ のとき D は非常に豊富であり，$\mathcal{L}(D)$ の基底を並べることで定まる射 $C \longrightarrow \mathbb{P}^{\dim \mathcal{L}(D) - 1}$ は埋め込みになる.

(viii) $D \in \mathrm{Div}_F(C)$ のとき，$\mathcal{L}(D)$ には $F(C)$ の元からなる基底が存在する．

証明 (i) [Har77, IV Theorem 1.3] を見よ

(ii) $\mathcal{L}(0) = \overline{F}$ に注意し，$D = 0$ に対して (i) を適用すると分かる．

(iii) $D = K_C$ に対して (i) を適用すると分かる．

(iv) f で定まる射 $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を考える．$D = (Q)$ の引き戻し $f^*(Q)$ は $\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_f(P)(P)$ で定められる．ここで $e_f(P)$ は f の P での分岐指数である．一般の因子の引き戻しはこの定義を $\mathbb{Z}$-線形に拡張して得られる．すると Riemann–Hurwitz の公式から $\deg f^*(Q) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_f(P) = \deg f$ が成り立ち，従って

$$\deg \operatorname{div}(f) = \deg f^*((0) - (\infty)) = \deg f - \deg f = 0$$

と計算できる．

(v) $\ell(K_C - D) = 0$ を示せば，(i) と合わせることで主張が従う．$\deg D > 2g - 2$ のとき，(iii) より $\deg K_C - D < 0$ なので，$\deg(\operatorname{div}(f) + K_C - D) < 0$ が任意の $f \in \overline{F}(C)^\times$ に対して成り立つ．従って $\ell(K_C - D) = 0$ である．

(vi) [Har77, IV Corollary 3.2 (a)] を見よ．

(vii) [Har77, IV Corollary 3.2(b)] を見よ．

(viii) D が F 上で定義されているので，任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ と任意の $f \in \mathcal{L}(D)$ に対して

$$\sigma(f) \in \mathcal{L}(\sigma(D)) = \mathcal{L}(D)$$

である．したがって $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ は $\mathcal{L}(D)$ に作用する．主張は次の補題から従う．

□

補題 6.4 V を $\overline{F}$-ベクトル空間とし，$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ が V に $\overline{F}$ の作用と可換かつ連続に作用しているとき

$$V_F = V^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)} = \{v \in V \mid \text{任意の } \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \text{ に対し } \sigma(v) = v\}$$

とすると

$$V \cong \overline{F} \otimes_F V_F$$

が成り立つ．

注意 6.5 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ が V に連続に作用するとは任意の $v \in V$ に対して

$$\mathrm{Stab}(v) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \mid \sigma(v) = v\}$$

が $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の有限指数の部分群であることとする．

証明 任意の $v \in V$ が V_F の元の $\overline{F}$-線形和で書けることを示せばよい．指数有限正規部分群 $\mathrm{Stab}(v) \subset \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ に対応する F の有限次ガロア拡大を L とする．$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ を L/F の基底とし，$\mathrm{Gal}(L/F) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ とする．各 $1 \leq i \leq n$ についてベクトル

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(\alpha_i v) = \mathrm{Tr}_{L/F}(\alpha_i v)$$

を考えると，w_i は $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ 不変なので V_F の元である．また行列 $(\sigma_j(\alpha_i))_{1 \leq i,j \leq n}$ が正則であることは体論でよく知られた事実である．したがって任意の j について $\sigma_j(v)$ は w_i たちの L-線形和で表せ，特に $v = \mathrm{id}(v)$ は w_i たちの L-線形和で表せる． □

6.3 Hilbert 多項式と算術種数

定義，定理 6.6 F を代数閉体とし，$R_n = F[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ とする．

(i) R_n 上の有限生成次数付き加群 $M = \bigoplus_{l \geq 0} M_l$ に対して，一意的な $\mathbb{Q}$-係数多項式 $h_M(t)$ が存在し，十分大きな任意の l について

$$h_M(l) = \dim_F M_l$$

が成り立つ．この多項式 $h_M(t)$ を M のHilbert 多項式という．さらに $Z(\mathrm{Ann}\, M) \subset \mathbb{P}^n$ を斉次イデアル $\mathrm{Ann}\, M$ から定まる閉部分スキームとすると，$\dim Z(\mathrm{Ann}\, M) = \deg h_M(t)$ を満たす．

(ii) R_n 自身を多項式の次数により次数付き R_n-加群とみなし，次数 d の部分を $(R_n)_d$ で表すことにすると Hilbert 多項式は二項係数を用いて

$$h_{R_n}(t) = \binom{t+n-1}{n-1}$$

で表せる．また k を整数とすると，$(R_n(k))_d = (R_n)_{d+k}$ により次数付けした次数付き加群 $R_n(k)$ に対する Hilbert 多項式は

$$h_{R_n(k)}(t) = \binom{t+k+n-1}{n-1}$$

となる．

(iii)　R_n 上の有限生成次数付き加群の短完全列

$$0 \longrightarrow M^{(1)} \longrightarrow M^{(2)} \longrightarrow M^{(3)} \longrightarrow 0$$

があるとき

$$h_{M^{(1)}}(t) - h_{M^{(2)}}(t) + h_{M^{(3)}}(t) = 0$$

が成り立つ．

(iv)　$Y \subset \mathbb{P}^n$ を r 次元の閉部分スキームとし，Y を定める斉次イデアルを $I(Y)$ とする．このとき Y の斉次座標環 $R_n/I(Y)$ に対する Hilbert 多項式を単に h_Y で表す．h_Y の最高次係数に $r!$ をかけた値を，Y の次数という．$C \subset \mathbb{P}^{n-1}$ が滑らかな次数 d 種数 g の射影曲線のとき，Hirbert 多項式 h_C は

$$h_C(t) = dt + (1-g)$$

となる．

(v)　r 次元射影代数多様体 Y に対し，算術種数 $p_a(Y)$ を $(-1)^r(h_Y(0)-1)$ で定める．C が滑らかな射影曲線のとき $p_a(C)$ は幾何種数 $g(C)$ に一致する．

証明 (i)　[Har77, I Theorem 7.5] を見よ．

(ii)　$h_{R_n}(t)$ についての主張は標準的な計算から従う．また $R_n(k)$ と Hilbert 多項式の定義から $h_{R_n(k)}(t) = h_{R_n}(t+k)$ となる．

(iii)　各次数の F 上の次元の加法性と Hilbert 多項式の定義から明らか．

(iv)　次数の定義と算術種数の定義及び (iv) から従う．

(v)　算術種数及び幾何種数にはいずれにも，コホモロジーを用いた表示方法がある．滑らかな射影曲線のときにはこれらは Serre 双対性で結ばれ，等しい値になる．詳しくは [Har77, III Remark 7.12.2] を見よ．

□

謝辞

準備段階でのアドバイスや当日のきめ細やかな運営をしていただいた，整数論サマースクール 2023 世話人の谷口隆さん，杉山和成さん，石塚裕大さんに感謝いたします．特に石塚さんには講演者としての推薦，準備段階でのセミナー，参考文献の提示や，私の不理解な部分へのアドバイスなど，たいへんお世話になりました．私は概均質ベクトル空間や余正則空間については全くの素人でしたが，今回の講演の準備を通して大変勉強になりました．このことに関しましても，改めましてオーガナイザーの皆様に感謝を申し上げます．また，予稿を入念に読みたくさんの誤植をご指摘くださった小野雅隆さんに感謝いたします．

参考文献

[AKMMMP01] S. Y. An, S. Y. Kim, C. C. Marshall, S. H. Marshall, W. G. MaCallum, and A. R. Perlis, *Jacobians of genus one curves*, J. Number Theory **90** (2001) 304–315.

[BH16] M. Bhargava and W. Ho, *Coregular spaces and genus one curves*, Camb. J. Math **4** (2016), no. 1, 1–119.

[BS13a] M. Bhargava and A. Shankar, *The average number of elements in the 4-Selmer groups of elliptic curves is 7*, Preprint, arXiv: 1312.7333

[BS13b] M. Bhargava and A. Shankar, *The average size of the 5-Selmer group of elliptic curves is 6, and the average rank is less than 1*, Preprint, arXiv: 1312.7859

[BS15a] M. Bhargava and A. Shankar, *Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves*, Ann. of Math. **181** (2015), 191–242.

[BS15b] M. Bhargava and A. Shankar, *Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0*, Ann. of Math. **181**(2015), 587–621.

[BS14] M. Bhargava and C. Skinner, *A positive proportion of elliptic curves over $\mathbb{Q}$ have rank one*, preprint, arXiv: 1401.0233.

[Cas62] J.W.S. Cassels, *Arithmetic on Curves of Genus 1. IV. Proof of the Hauptvermutung.*, vol.1962, no. 211 (1962), 95–112.

[CFNSS08] J. E. Cremona, T. A. Fisher, C. O'Neil, D. Simon, and M. Stoll, *Explicit n-descent on elliptic curves, I. Algebra*, vol. 2008, no.615 (2008), 121–155

[Duj] A. Dujella, *History of elliptic curves rank records*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/tors/rankhist.html`

[Fis] T. A. Fisher, *Genus one curves defined by Pfaffians*, Preprint, `http://dpmms.cam.ac.uk/~taf1000/`

[Fis06] T. A. Fisher, *Testing equivalence of ternary cubics*, Algorithmic Number Theory, Lecture Notes in Comput. Sci. **4076**, Springer-Verlag, New York, 2006, 333–345.

[Fis08] T. A. Fiisher, *The invariants of a genus one curves*, Proc. London Math. Soc. (3) **97** (2008), 753–782.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry* volume 52 of Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1977.

[KM95] S. Kamienny and B. Mazur, *Rational torsion of prime order in elliptic curves over number fields*, in Columbia university number theory seminar - New York, 1992, Astérisque, no. 228 (1995), 81–98.

[Maz77] B. Mazur, *Modular curves and the eisenstein ideal*, Publications Mathématiques de L'Institut des Hautes Scientifiques **47**, (1977) 33–186.

[MG78] B. Mazur and D. Goldfeld, *Rational isogenies of prime degree*, Invent Math **44** (1978), 129–162

[Mer98] Loïc Merel. *Rational points and Dirichlet series (Points rationnels et séries de Dirichlet)*, Documenta Mathematica, (1998), 183–186.

[PPVW19] J. Park, B. Poonen, J. Voight, and M. Wood, *A heuristic for boundedness of ranks of elliptic curves*, J. Eur. Math. Soc. **21**, (2019) 2859–2903.

[Ser88] J.-P. Serre, *Algebraic Groups and Class Fields*, volume 117 of Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, NewYork-Berlin, 1988.

[Ser02] J.-P. Serre, *Galois cohomology*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, english edition, 2002. Translated from the French by Patrick Ion and revised by the author.

[Sil92] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1992, Corrected reprint of the 1986 original.

[Yuk] A. Yukie, *Rational orbit decomposition of prehomogeneous vector spaces*, available from `https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~yukie/`.

大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性

山本 修司（慶應義塾大学理工学部）

概要

二元三次形式の類数に関する大野・中川の鏡映定理 (reflection theorem) について，最近，O'Dorney [6] が別証明を考案し，一般の代数体に拡張した．本稿ではこの新しい証明について，特に「Galois コホモロジー群の上で Poisson 和公式を使って局所的な等式から大域的な等式を導く」という部分に焦点を当てて解説する．

1 イントロダクション

標題の大野・中川型鏡映定理 (reflection theorem of Ohno-Nakagawa type) の原型は，大野 [8] により予想され，中川 [4] によって証明された，次の等式である[*1]：

$$h_3(-27D) = \begin{cases} 3h(D) & (D > 0), \\ h(D) & (D < 0). \end{cases} \tag{1.1}$$

記号の定義は以下の通りである．$D \in \mathbb{Z}$ に対し，判別式 D の整数係数二元三次形式の集合

$$\mathcal{V}^D(\mathbb{Z}) \coloneqq \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Disc}(x) = D\}$$

を考える（なお判別式 $\mathrm{Disc}(x)$ の明示式は

$$\mathrm{Disc}(x) = 18abcd + b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$$

である）．この集合には群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が左から

$$(gx)(u,v) \coloneqq x\big((u,v)g\big)$$

*1 鏡映定理もしくは鏡映原理 (reflection principle) という名称は，イデアル類群の p-rank に関する Scholz や Leopoldt の古典的な結果 ([10, §10.2], [2, II.5 b)]) に遡る．実際，等式 (1.1) から Scholz の定理の精密化を導くことができる ([4, Remark 0.9]).

と作用する．この作用に関する軌道を，固定部分群の位数の逆数で重みづけて数えた

$$h(D) \coloneqq \sum_{[x]\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathcal{V}^D(\mathbb{Z})} \frac{1}{\#\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_x}$$

を二元三次形式の「類数」と呼ぶ．これが (1.1) の右辺の量である．また左辺の h_3 は，$\mathcal{V}^D$ を

$$\mathcal{V}_3^D(\mathbb{Z}) \coloneqq \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \in \mathcal{V}^D(\mathbb{Z}) \mid b, c \in 3\mathbb{Z}\}$$

という部分集合に置き換えて，同様に

$$h_3(D) \coloneqq \sum_{[x]\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathcal{V}_3^D(\mathbb{Z})} \frac{1}{\#\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_x}$$

と定義する．

等式 (1.1) は，新谷ゼータ関数

$$\xi^{\pm}(s) \coloneqq \sum_{D\in\mathbb{Z},\,\pm D>0} \frac{h(D)}{|D|^s}, \qquad \xi_3^{\pm}(s) \coloneqq \sum_{D\in\mathbb{Z},\,\pm D>0} \frac{h_3(D)}{|D|^s}$$

の関係式として

$$\xi_3^{+}(s) = 3^{-3s}\xi^{-}(s), \qquad \xi_3^{-}(s) = 3^{1-3s}\xi^{+}(s) \tag{1.2}$$

と書くこともできる．この関係式も「大野・中川の鏡映定理」と呼ばれる．

本稿の目的は，O'Dorney [6] によって与えられた鏡映定理 (1.1) の新証明，および代数体への一般化を解説することである．ただし残念ながら筆者の力不足により，証明全体をくまなくフォローすることは断念せざるを得なかった．そこでここでは，O'Dorney の証明のなかでも特に，新しく，発展性があると思われるアイデアに焦点を当てる．それは一言でいえば「等式 (1.1) を Poisson 和公式から導く」というアイデアである．Poisson 和公式といえばゼータ関数の関数等式への応用が連想されるが，ここではゼータ関数の関係式 (1.2) ではなく，あくまでも個々の Dirichlet 係数の関係式 (1.1) を Poisson 和公式から示す，という点を強調しておきたい．

さて Poisson 和公式とは次のような定理であった：局所コンパクト Abel 群 G とその離散かつ余コンパクトな部分群 H に対して，G の Pontryagin 双対を $\widehat{G}$，H の零化域を $H^{\perp} \subset \widehat{G}$ と書くとき，G 上の「良い」関数 f に対して

$$\sum_{\alpha\in H} f(\alpha) = c \sum_{\beta\in H^{\perp}} \widehat{f}(\beta) \tag{1.3}$$

が成り立つ（ただし $\widehat{f}$ は f の Fourier 変換を表し，c は Haar 測度のとり方から定まる，f に依らない定数である）．したがって (1.1) を Poisson 和公式から導くに際して，まず群 G, H の選択が問題になる．O'Dorney の証明では（アデール的）Galois コホモロジー群 $G = H^1(\mathbb{A}_K, M^D)$ を使う（M^D は判別式 D ごとに定義される有限 Galois 加群）．この場合の Pontryagin 双対は Galois コホモロジー同士のカップ積によって記述される（Poitou-Tate 双対性）．この記述を使って，大域的な量（類数）の間の等式 (1.1) を，局所的な量の間の等式（局所鏡映定理）から導くことができるのである．

Poisson 和公式を使って局所的な鏡映定理から大域的な鏡映定理を導くこの仕組みを，O'Dorney は "local-to-global reflection engine" と称し，その適用環境として "composed variety" というある一般的な枠組みを構築している．この枠組みは二元三次形式の空間だけでなく，二元二次形式 [6, §5] や n 元二次形式のペア ($n \geq 3$) [7] にも適用され，それぞれ鏡映定理への応用が論じられている．また三元二次形式のペアの考察に伴って二元四次形式の鏡映定理も得られる ([7, §1.3])．なお二元四次形式の空間や n 元二次形式のペアの空間（$n \geq 4$）は概均質ベクトル空間の範疇には含まれないことに注意しておく．

本稿では composed variety の一般論そのものを述べることはせず，二元三次形式の場合に限って（ただしできるだけ一般論に沿う形で）説明する．原論文 [6, 7] への導入として役に立てば幸いである．

1.1 記号

集合 X に群 G が左から作用しているとき，$x \in X$ の固定部分群を G_x で表す．また軌道 Gx をしばしば $[x]$ で表す．

体 K の分離閉包を $\overline{K}$，絶対 Galois 群を $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ で表す[*2]．連続 Γ_K 加群 M に対し，コホモロジー群 $H^i(\Gamma_K, M)$ を $H^i(K, M)$ と書く．

体 K における 1 の n 乗根全体，およびベキ根全体のなす群をそれぞれ $\mu_n(K)$, $\mu(K)$ で表す．特に $\mu_n(\overline{K})$, $\mu(\overline{K})$ は離散 Γ_K 加群となるが，これらをしばしば単に μ_n, μ で表す．

[*2] 原論文 [6, 7] では代数群を Γ，Galois 群を G で表しているが，概均質ベクトル空間を扱う文脈では代数群を G で表すことが多いようなので，本稿では代数群を G，Galois 群を Γ で表すことにした．他にもいくつか，原論文とは異なる記号を採用した部分がある．

2　Poitou-Tate 双対性

この節では，Galois コホモロジーの Poitou-Tate 双対性と Poisson 和公式についての準備を行う．重要な結果は主に Milne [3, Chap. I] からの引用であり，証明はほとんど行わない．

K を代数体，M を有限 Γ_K 加群とする．このとき M の Tate 双対 M' が

$$M' \coloneqq \mathrm{Hom}(M, \mu) = \mathrm{Hom}(M, \mu(\overline{K}))$$

と定義される．これは再び有限 Γ_K 加群となる．

2.1　局所双対性

K の各素点 v に対し，分解群 $\Gamma_v \subset \Gamma_K$ を固定しておく（これらは共役を除いて定まることに注意）．また v が有限素点のとき，その惰性群を $I_v \subset \Gamma_v$ で表す．Galois 加群 M が v において不分岐である（すなわち I_v の M への作用が自明である）とき，単射準同型 ([9, Chap. VII, §6])

$$\mathrm{Inf}\colon H^1(\Gamma_v/I_v, M) \longrightarrow H^1(\Gamma_v, M) = H^1(K_v, M)$$

の像を $H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M)$ で表す．

K の有限素点 v に対して，カップ積

$$\cup\colon H^1(K_v, M) \times H^1(K_v, M') \longrightarrow H^2(K_v, \mu)$$

と invariant map ([9, Chap. XIII, §6])

$$\mathrm{inv}_v\colon H^2(K_v, \mu) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

および同型 $\exp(2\pi i\,\cdot\,)\colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mu(\mathbb{C})$ の合成を

$$\langle\ ,\ \rangle_v\colon H^1(K_v, M) \times H^1(K_v, M') \longrightarrow \mu(\mathbb{C})$$

で表す．

K の無限素点 v に対しても同様に，

$$\langle\ ,\ \rangle_v\colon H^1(K_v, M) \times H^1(K_v, M') \xrightarrow{\cup} H^2(K_v, \mu) \xrightarrow{\cong} \begin{cases} \{\pm 1\} & (K_v \cong \mathbb{R}), \\ \{1\} & (K_v \cong \mathbb{C}) \end{cases}$$

と定義する．

定理 2.1（**[3, Chap. I, §2]**） v を K の素点とする．

(1) $H^1(\Gamma_v, M)$, $H^1(\Gamma_v, M')$ は有限 Abel 群である．

(2) $\langle\ ,\ \rangle_v$ は完全ペアリングである．これにより $H^1(\Gamma_v, M)$ と $H^1(\Gamma_v, M')$ とは互いの Pontryagin 双対と同一視される．

(3) v が有限素点であり，M, M' が v において不分岐であるとき，

$$H^1_{\mathrm{ur}}(\Gamma_v, M) \subset H^1(\Gamma_v, M) \text{ と } H^1_{\mathrm{ur}}(\Gamma_v, M') \subset H^1(\Gamma_v, M')$$

はペアリング $\langle\ ,\ \rangle_v$ に関して互いの零化域である．

2.2 大域双対性

定義 2.2 アデール的 Galois コホモロジー群 $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ を

$$H^1(\mathbb{A}_K, M) = \prod_v{}' H^1(K_v, M)$$

で定義する．ただし v は K の素点全体をわたり，$\prod'$ は $H^1(K_v, M)$ の部分群

$$\begin{cases} H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M) & (v \text{ は有限素点かつ } M \text{ は } v \text{ で不分岐}), \\ H^1(K_v, M) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

に関する制限直積を表す．各因子 $H^1(K_v, M)$ において離散位相を考えることにより，制限直積 $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ は局所コンパクト Abel 群となる．

$\alpha = (\alpha_v) \in H^1(\mathbb{A}_K, M)$ と $\beta = (\beta_v) \in H^1(\mathbb{A}_K, M')$ に対して

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \prod_v \langle \alpha_v, \beta_v \rangle_v$$

と定義する（有限個を除くすべての v に対して $\alpha_v \in H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M)$ かつ $\beta_v \in H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M')$，したがって $\langle \alpha_v, \beta_v \rangle_v = 1$ (定理 2.1 (3)) となるから，この積は実質的に有限積である）．これにより，ペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle \colon H^1(\mathbb{A}_K, M) \times H^1(\mathbb{A}_K, M') \longrightarrow \mu(\mathbb{C})$$

が定まる．

定理 2.3（**[3, Chap. I, §4]**）　(1) ペアリング $\langle\ ,\ \rangle$ により，局所コンパクト Abel 群 $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ と $H^1(\mathbb{A}_K, M')$ とは互いの Pontryagin 双対と同一視される．

(2) 制限写像 $H^1(K, M) \longrightarrow H^1(K_v, M)$ の積は $H^1(K, M) \to H^1(\mathbb{A}_K, M)$ を定める．またその核は有限，像は離散的，余核はコンパクトである．

(3) $H^1(K, M)$ の $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ における像と，$H^1(K, M')$ の $H^1(\mathbb{A}_K, M')$ における像とは，ペアリング $\langle\ ,\ \rangle$ に関して互いの零化域である．

2.3　Poisson 和公式

定理 2.3 から，アデール的 Galois コホモロジー群の上で次の形の Poisson 和公式が成り立つ．

定理 2.4　f を $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ 上の複素数値関数で，局所定数かつコンパクト台を持つものとし，その Fourier 変換を $\hat{f}$ で表す（これは $H^1(\mathbb{A}_K, M')$ 上の，同様の性質を持つ関数である）．このとき

$$\sum_{\alpha \in H^1(K,M)} f(\alpha) = c_M \sum_{\beta \in H^1(K,M')} \hat{f}(\beta) \tag{2.1}$$

が成り立つ．ただし $c_M > 0$ は f に依らない定数である．また $\alpha \in H^1(K, M)$ の $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ における像での f の値を $f(\alpha)$ と略記した．$\hat{f}(\beta)$ についても同様.

定数 c_M は Haar 測度のとり方によって定まる．また $\mathrm{Ker}(H^1(K, M) \to H^1(\mathbb{A}_K, M))$ および $\mathrm{Ker}(H^1(K, M') \to H^1(\mathbb{A}_K, M'))$ の位数のぶんだけ通常の Poisson 和公式 (1.3) からのずれが生じるが，これも定数 c_M に吸収させている．以下，具体的に Haar 測度を決めて，c_M を計算しよう．

各素点 v に対し，有限 Abel 群 $H^1(K_v, M)$ 上の Haar 測度を，一点集合の測度が $1/\#H^0(K_v, M)$ となるように規格化する．したがって $H^1(K_v, M)$ 上の関数 f の Fourier 変換は

$$\hat{f}(\beta) = \frac{1}{\#H^0(K_v, M)} \sum_{\alpha \in H^1(K_v,M)} f(\alpha)\langle \alpha, \beta \rangle_v \qquad (\beta \in H^1(K_v, M'))$$

と定義される．制限直積 $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ の Haar 測度は，これらの測度の積として定める．$H^1(K_v, M')$ および $H^1(\mathbb{A}_K, M')$ においても同様に（M を M' に置き換えて）定義する．

命題 2.5　上の規格化のもとで，$c_M = \#H^0(K, M)/\#H^0(K, M')$ が成り立つ．

証明 $\mathcal{L} = (L_v)_v$ を，各素点 v に対する部分群 $L_v \subset H^1(K_v, M)$ の族で，有限個の v を除いて $L_v = H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M)$ が成り立つようなものとする．このような $\mathcal{L}$ に対して

$$H^1_{\mathcal{L}}(K, M) \coloneqq \mathrm{Ker}\left(H^1(K, M) \longrightarrow \bigoplus_v H^1(K_v, M)/L_v\right)$$

とおく（局所条件 $\mathcal{L}$ に伴う Selmer 群）．$H^1(K_v, M')$ における L_v の零化域を $L_v^{\perp}$ と書くと，族 $\mathcal{L}^{\perp} = (L_v^{\perp})_v$ は $H^1(K_v, M')$ において同様の条件を満たすので，同様に $H^1_{\mathcal{L}^{\perp}}(K, M')$ が定義される．このとき，次の等式が成り立つ ([1, Theorem 2.19])：

$$\frac{\#H^1_{\mathcal{L}}(K, M)}{\#H^1_{\mathcal{L}^{\perp}}(K, M')} = \frac{\#H^0(K, M)}{\#H^0(K, M')} \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(K_v, M)} \tag{2.2}$$

（なお，不分岐な v において完全系列

$$0 \longrightarrow H^0(K_v, M) \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{Frob}_v - 1} M \longrightarrow H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M) \longrightarrow 0$$

があるため，有限個の v を除いて $\#L_v = \#H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M) = \#H^0(K_v, M)$ となり，右辺の積は実質的に有限積である）．

いま，$L_v \subset H^1(K_v, M)$ および $L_v^{\perp} \subset H^1(K_v, M')$ の特性関数をそれぞれ f_v, g_v とすると，

$$\widehat{f_v}(\beta) = \frac{1}{\#H^0(K_v, M)} \sum_{\alpha \in L_v} \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\#L_v}{\#H^0(K_v, M)} g_v(\beta)$$

が成り立つ．よって $\prod_v L_v \subset H^1(\mathbb{A}_K, M)$ および $\prod_v L_v^{\perp} \subset H^1(\mathbb{A}_K, M')$ の特性関数をそれぞれ f, g とすれば，

$$\widehat{f}(\beta) = \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(K_v, M)} \cdot g(\beta)$$

となる．ここで f に Poisson 和公式 (2.1) を適用すると

$$\begin{aligned}\#H^1_{\mathcal{L}}(K, M) &= \sum_{\alpha \in H^1(K, M)} f(\alpha) = c_M \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(K_v, M)} \sum_{\beta \in H^1(K, M')} g(\beta) \\ &= c_M \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(K_v, M)} \#H^1_{\mathcal{L}^{\perp}}(K, M)\end{aligned}$$

となり，これを (2.2) と比較して主張の等式を得る．　□

3　大野・中川型鏡映定理

3.1　二元三次形式の軌道空間

K を代数体とする．$D \in K^\times$ に対して，判別式が D であるような二元三次形式全体の空間[*3]

$$V = V^D \coloneqq \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \mid \mathrm{Disc}(x) = D\}$$

を考え，K 上の代数多様体とみなす．V は K 上の代数群 $G = \mathrm{SL}_2$ による左作用

$$(gx)(u,v) = x\big((u,v)g\big)$$

を持ち，以下の条件を満たす：

- V は K 有理点を持つ：例えば $x_0(u,v) \coloneqq u^2v - \frac{D}{4}v^3 \in V(K)$ である．
- $\overline{K}$ 上では，作用は推移的である：$V(\overline{K}) = G(\overline{K}) \cdot x_0$．これは与えられた $x \in V(\overline{K})$ の三つの零点，すなわち $x(u_0, v_0) = 0$ を満たす $(u_0 : v_0) \in \mathbb{P}^1(\overline{K})$ を x_0 の零点
$$(\pm\sqrt{D}/2 : 1),\ (1:0) \in \mathbb{P}^1(\overline{K})$$
に移す一次分数変換を考えることで示される．
- 固定部分群 $M = M^D \coloneqq G(\overline{K})_{x_0}$ は有限 Abel 群である：具体的には
$$M^D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \pm\frac{1}{\sqrt{D}} \\ \mp\frac{3\sqrt{D}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} (\text{複号同順}) \right\}.$$
よって Abel 群としては $M^D \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，また Γ_K 集合としては $M^D \cong \{0, \sqrt{D}, -\sqrt{D}\}$ となる．

注意 3.1　これらの条件を満たす代数多様体 V と代数群 G および作用 $G \curvearrowright V$ の組を，一般に composed variety[*4]と呼ぶ ([6, Definition 4.1])．論文 [6, 7] で扱われている主な例は以下の通りである：

[*3] 判別式 D を固定しているので（概均質）ベクトル空間ではない．この V は vector space でなく variety の頭文字と思うべきであろう．

[*4] いわゆる高次合成則 (higher composition law) にちなんで名付けられた由．なお今のところ適切な訳語がなく，本稿では英語のまま書くことにした．

V	G	M	文献
二元二次形式	$\left\{\left(\begin{smallmatrix} u & t \\ 0 & u^{-2} \end{smallmatrix}\right)\right\} \subset \mathrm{GL}_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	[6, §5]
二元三次形式	SL_2	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	[6, §6]
三元二次形式のペア	SL_3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	[7, §2–3]
n 元二次形式のペア	SL_n	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$	[7, §4]

ただし正確には，多様体 V はそれぞれ適当な不変式（二元三次形式の場合でいえば判別式）の値を固定することで決定される．詳しくは各文献を参照されたい．

$M = M^D$ は有限 Γ_K 加群であり，M を係数とする Galois コホモロジー群に対して前節の議論が適用される．一方，1 次 Galois コホモロジー $H^1(K, M)$ は有理軌道の集合 $G(K)\backslash V(K)$ の解釈にも使うことができる：

命題 3.2　自然な全単射

$$\psi = \psi_{x_0} \colon G(K)\backslash V(K) \longrightarrow H^1(K, M)$$

がある．

証明（非可換群係数の）群コホモロジー論 ([12, 定理 1.11]) により，全単射

$$\psi_{x_0} \colon G(K)\backslash V(K) \longrightarrow \mathrm{Ker}\big(H^1(K, M) \to H^1(K, G)\big)$$

が構成される．ここで $G = \mathrm{SL}_2$ に対して $H^1(K, G) = \{1\}$ ([12, 例 1.9]) であるから主張の通りである．□

補題 3.3　任意の $x \in V(K)$ に対して $G(K)_x \cong G(K)_{x_0} = H^0(K, M)$ である．

証明 $x = gx_0$ なる $g \in G(\overline{K})$ をとると，$\overline{K}$ 上の固定部分群の同型

$$M \xrightarrow{\cong} G(\overline{K})_x;\ s \longmapsto gsg^{-1}$$

がある．いま任意の $\gamma \in \Gamma_K$ に対して

$$\gamma(gsg^{-1}) = g \cdot \big(g^{-1}\gamma(g)\big) \cdot \gamma(s) \cdot \big(g^{-1}\gamma(g)\big)^{-1} \cdot g^{-1}$$

であるが，$g^{-1}\gamma(g)$ と $\gamma(s)$ とは共に M に属するからこれらは可換であって，結局

$$\gamma(gsg^{-1}) = g\gamma(s)g^{-1}$$

を得る．したがって $s \in M = G(\overline{K})_{x_0}$ に対して

$$
\begin{aligned}
s \in H^0(K, M) &\iff s \text{ は } \Gamma_K \text{ 不変} \\
&\iff gsg^{-1} \text{ は } \Gamma_K \text{ 不変} \iff gsg^{-1} \in G(K)_x
\end{aligned}
$$

となる．すなわち上の同型 $M \xrightarrow{\cong} G(\overline{K})_x$ は同型 $H^0(K, M) \xrightarrow{\cong} G(K)_x$ を引き起こす. □

さて，鏡映定理 (1.1) の両辺には二つの判別式 D と $-27D$ とが現れている．次の同型から，これらが双対的な関係にあることが見てとれる.

補題 3.4 Γ_K 加群 M^D の Tate 双対について,

$$(M^D)' \cong M^{-3D} \cong M^{-27D}$$

が成り立つ.

証明 M^D の位数は 3 なので $(M^D)' = \mathrm{Hom}(M^D, \mu_3)$ であり，これからまず抽象群としての同型が分かる．Galois 作用が一致することは, 1 の原始 3 乗根が $(-1 \pm \sqrt{-3})/2$ と書けることから導かれる. □

3.2 整モデル

$\mathfrak{a}$ は K の分数イデアル，$\mathfrak{t}$ は 3 を割り切る整イデアルで，$D \in \mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{t}^3$ を満たすものとする．このとき，$V^D(K)$ の部分集合

$$\mathcal{V}^D_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(O_K) := \left\{ x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \in V^D(K) \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{t} \\ c \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{t},\ d \in \mathfrak{a}^{-2} \end{array} \right\}$$

は，$G(K)$ の部分群

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{a}}(O_K) := \mathrm{SL}(O_K \oplus \mathfrak{a}) = \left\{ g \in \begin{pmatrix} O_K & \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}^{-1} & O_K \end{pmatrix} \;\middle|\; \det(g) = 1 \right\}$$

の作用を持つ．以下，$\mathcal{V}^D_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}$ と $\mathcal{G}_{\mathfrak{a}}$ をそれぞれ $V = V^D$, G の O_K 上のモデルとみなし，必要のないときには添え字を省略して $\mathcal{V}$，$\mathcal{G}$ と表す．例えば K の素点 v に対して

$$\mathcal{G}(O_v) = \mathcal{G}_{\mathfrak{a}}(O_v) = \left\{ g \in \begin{pmatrix} O_v & \mathfrak{a}O_v \\ \mathfrak{a}^{-1}O_v & O_v \end{pmatrix} \;\middle|\; \det(g) = 1 \right\}$$

などとなる．ただし

$$O_v \coloneqq \begin{cases} K_v \text{ の整数環} & (v \text{ が有限素点のとき}), \\ K_v & (v \text{ が無限素点のとき}). \end{cases}$$

すると $\mathcal{V}(O_v)$ は $V(K_v)$ の部分集合，$\mathcal{G}(O_v)$ は $G(K_v)$ の部分群になり，$\mathcal{V}(O_v)$ は $\mathcal{G}(O_v)$ の作用を持つ．

定義 3.5 上の記号のもとで，二元三次形式の類数を

$$h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D) \coloneqq \sum_{[x]\in\mathcal{G}(O_K)\backslash\mathcal{V}(O_K)} \frac{1}{\#\mathcal{G}(O_K)_x} \tag{3.1}$$

と定める．

類数 $h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D)$ を Poisson 和公式 (2.1) が適用可能な形に書くのが次の公式である：

補題 3.6

$$h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D) = \frac{1}{\#H^0(K,M)} \sum_{\alpha\in H^1(K,M)} \prod_v f_v(\mathrm{res}_v(\alpha)). \tag{3.2}$$

ここで $M = M^D$ は §3.1 と同様，V の有理点における固定部分群 $M = G(\overline{K})_{x_0}$ を表す．また K の各素点 v に対し，$H^1(K_v, M)$ 上の関数 f_v は次のように定義される：$\psi_{x_0}([x_\alpha]) = \alpha$ を満たす $x_\alpha \in V(K_v)$ を一つとって

$$f_v(\alpha) \coloneqq \#\bigl\{[g] \in \mathcal{G}(O_v)\backslash G(K_v) \bigm| g\, x_\alpha \in \mathcal{V}(O_v)\bigr\} \tag{3.3}$$

とおく[*5]．

証明 $G = \mathrm{SL}_2$ の強近似定理により，対角埋め込み

$$\mathcal{G}(O_K)\backslash G(K) \longrightarrow \bigoplus_v \mathcal{G}(O_v)\backslash G(K_v)$$

は全単射である．このことから，$\alpha \in H^1(K,M)$ および対応する $x_\alpha \in V(K)$ を固定

[*5] Composed varieties の一般論 ([6, §4]) では，元の個数 (3.3) のかわりに適切に選ばれた $\mathcal{G}(O_K)\backslash\mathcal{V}(O_K)$ 上の重み関数 w_v の和 f_{v,w_v} を扱う．ここで考えている二元三次形式の場合には $w_v \equiv 1$ でよい．

したとき，

$$\prod_v f_v(\mathrm{res}_v(\alpha)) = \#\left\{ ([g_v])_v \in \bigoplus_v \mathcal{G}(O_v)\backslash G(K_v) \;\middle|\; g_v x_\alpha \in \mathcal{V}(O_v) \right\}$$
$$= \#\bigl\{ [g] \in \mathcal{G}(O_K)\backslash G(K) \bigm| g x_\alpha \in \mathcal{V}(O_K) \bigr\}$$

が分かる．右辺の集合は，写像

$$\mathcal{G}(O_K)\backslash G(K) \longrightarrow \mathcal{G}(O_K)\backslash V(K);\ \ [g] \longmapsto [g x_\alpha]$$

に関する $\mathcal{G}(O_K)\backslash\mathcal{V}(O_K)$ の逆像に他ならず，各点 $[x] \in \mathcal{G}(O_K)\backslash\mathcal{V}(O_K)$ の逆像の大きさは 0 または

$$\frac{\#G(K)_x}{\#\mathcal{G}(O_K)_x} = \frac{\#H^0(K,M)}{\#\mathcal{G}(O_K)_x}$$

に等しい（ここで補題 3.3 を使った）．以上を整理すると

$$\sum_{\substack{[x]\in\mathcal{G}(O_K)\backslash\mathcal{V}(O_K) \\ \mathcal{G}(O_K)x\subset G(K)x_\alpha}} \frac{1}{\#\mathcal{G}(O_K)_x} = \frac{1}{\#H^0(K,M)} \prod_v f_v(\mathrm{res}_v(\alpha))$$

が得られ，これを $\alpha \in H^1(K,M)$ にわたって加えれば (3.2) が示される． □

3.3　局所鏡映定理

$(D, \mathfrak{a}, \mathfrak{t})$ を §3.2 と同様にとり，$M = M^D$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}^D_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\mathfrak{a}$ などの記号を引き続き用いる．ここで Γ_K 加群 $M = M^D$ の Tate 双対が M^{-27D} であったことを思い出そう（補題 3.4）．そこで，$(-27D, \mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3}, 3\mathfrak{t}^{-1})$ が $(D, \mathfrak{a}, \mathfrak{t})$ と同じ条件を満たすことに注意して，$M' = M^{-27D}$, $\mathcal{V}' = \mathcal{V}^{-27D}_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3},3\mathfrak{t}^{-1}}$, $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3}}$ などと書く．

K の各素点 v に対して，$H^1(K_v, M)$ 上の関数 f_v が (3.3) によって定義されていた．同様にして定義される $H^1(K_v, M')$ 上の関数を f'_v で表す．$H^1(K_v, M)$ と $H^1(K_v, M')$ とは Pontryagin 双対をなし，f の Fourier 変換

$$\widehat{f_v}(\beta) = \frac{1}{\#H^0(K_v,M)} \sum_{\alpha\in H^1(K_v,M)} f_v(\alpha)\langle\alpha,\beta\rangle_v$$

は $H^1(K_v, M')$ 上の関数となるのだった．この $\widehat{f_v}$ と f'_v とを比較するのが次の「局所鏡映定理 (local reflection theorem)」である．

定理 3.7（O'Dorney [6, Theorem 6.2]）

$$f'_v = c_v \cdot \widehat{f}_v,$$

ただし

$$c_v = \begin{cases} 1/\#(O_v/\mathrm{t}O_v) & (v \text{ が有限素点}), \\ 1 & (v \text{ が実素点で } D < 0), \\ 3 & (v \text{ が複素素点，または実素点で } D > 0). \end{cases}$$

この定理は代数体上の二元三次形式における大野・中川型鏡映定理の核心部分といってもよいのだが，その証明はかなり長く複雑であって，ここでは割愛せざるを得ない．原論文 [6, §6] または [5, §11] を参照されたい（実は [6] の §2, §3 も大部分がこの証明のための準備である）．一応，証明の流れをごく大雑把に述べておく．

- 無限素点の場合は簡単である．実際，この場合 $H^1(K_v, M) = H^1(K_v, M') = 0$，$O_v = K_v$，$f_v = f'_v = 1$ であって，定理の係数に現れる 1 または 3 は $H^0(K_v, M)$ の位数（Haar 測度の規格化に用いた定数）である．
- 有限素点の場合は，高次合成則を使って問題を O_v 上の三次環の議論に帰着する（三次環の高次合成則については [11, 定理 2.8] も参考にされたい）．さらに $v \nmid 3$ のとき (tame case) と $v \mid 3$ のとき (wild case) に場合分けする．
- Tame case では，まず問題を 0 における等式 $f'_v(0) = \widehat{f}_v(0)$, $f_v(0) = \widehat{f'_v}(0)$ の証明に帰着する（この部分は巧妙だがおおよそ初等的な議論である）．次に

  $$f_v(0) \overset{?}{=} \widehat{f'_v}(0) = \frac{1}{\#H^0(K_v, M')} \sum_{\beta \in H^1(K_v, M')} f'_v(\beta)$$

  を示すのだが（対称性によりこちらだけ示せばよい），これは高次合成則によって

  $$\#\bigl\{ K_v \times K_v[\sqrt{D}] \text{ の判別式 } D \text{ の整環} \bigr\} \overset{?}{=} \frac{\#\bigl\{ \text{判別式 } -3D \text{ の三次整環の同型類} \bigr\}}{\#H^0(K_v, M')}$$

  と翻訳される．この等式は，右辺の集合から左辺の集合への全射を具体的に構成し，各元の逆像の大きさが $\#H^0(K_v, M')$ に等しいことを示すことによって証明される．

- Wild case については，[5, §11] において “computational proof” と “bijective proof” という二通りの証明が与えられており，[6] では後者が採用されている．いずれの証明も，$H^1(K_v, M)$ の元に対して “level” という数を定義し，それを使って $H^1(K_v, M)$ を細分することから出発している．

3.4 大域鏡映定理

定理 3.8（O'Dorney [6, Theorem 1.2]） K を代数体，$\mathfrak{a}$ をその分数イデアル，$\mathfrak{t}$ を 3 を割り切る整イデアルとし，判別式 $D \in \mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{t}^2$ の二元三次形式の類数を (3.1) で定義する．このとき

$$h_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3},3\mathfrak{t}^{-1}}(-27D) = \frac{3^{\#\{v|\infty,\, D\in(K_v^\times)^2\}}}{N(\mathfrak{t})} h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D)$$

が成り立つ[*6]．

証明 $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ 上の関数 f を $f\big((\alpha_v)_v\big) = \prod_v f_v(\alpha_v)$ で定義すると，定理 3.7 により

$$\widehat{f}\big((\beta_v)_v\big) = \prod_v \widehat{f}_v(\beta_v) = \prod_v c_v^{-1} f'_v(\beta_v) = \frac{N(\mathfrak{t})}{3^{\#\{v|\infty,\, D\in(K_v^\times)^2\}}} f'\big((\beta_v)_v\big)$$

が成り立つ（f' は f と同様に定義した $H^1(\mathbb{A}_K, M')$ 上の関数）．したがってこの関数 f に対する Poisson 和公式 (2.1) は

$$\sum_{\alpha\in H^1(K,M)} f(\alpha) = c_M \frac{N(\mathfrak{t})}{3^{\#\{v|\infty,\, D\in(K_v^\times)^2\}}} \sum_{\beta\in H^1(K,M')} f'(\beta)$$

と書ける．補題 3.6 を使うと，これは

$$\#H^0(K, M)\cdot h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D) = c_M \frac{N(\mathfrak{t})}{3^{\#\{v|\infty,\, D\in(K_v^\times)^2\}}} \cdot \#H^0(K, M')\cdot h_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3},3\mathfrak{t}^{-1}}(-27D)$$

と書き直せる．最後に命題 2.5 で計算した値 $c_M = \#H^0(K, M)/\#H^0(K, M')$ を代入して整理すれば主張の等式を得る． □

[*6] [6, Theorem 1.2] の式は両辺の $h_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3},3\mathfrak{t}^{-1}}(-27D)$ と $h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D)$ が逆に書かれてしまっている．実際，$K = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{t} = \mathbb{Z}$ としたときに等式 (1.1) を復元するのはここに書いた等式である．

参考文献

[1] H. Darmon, F. Diamond, R. Taylor, Fermat's Last Theorem, *Current Developments in Mathematics* **1**, 1995, International Press, 1–154.
`https://dx.doi.org/10.4310/CDM.1995.v1995.n1.a1`

[2] G. Gras, *Class Field Theory: From Theory to Practice*, Springer-Verlag, 2003.

[3] J. S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems, Second Edition*, BookSurge Publishing, 2006. `https://www.jmilne.org/math/Books/`

[4] J. Nakagawa, On the relations among the class numbers of binary cubic forms, *Invent. Math.* **134** (1998), 101–138.

[5] E. M. O'Dorney, Reflection theorems for number rings, Princeton University Doctoral Dissertation, 2021.
`http://arks.princeton.edu/ark:/88435/dsp01r207ts47r`

[6] E. M. O'Dorney, Reflection theorems for number rings generalizing the Ohno-Nakagawa identity, preprint, arXiv:2111.09784.

[7] E. M. O'Dorney, Reflection theorems of Ohno-Nakagawa type for quartic rings and pairs of n-ary quadratic forms, preprint, arXiv:2204.10924.

[8] Y. Ohno, A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms, *Amer. J. Math.* **119** (1997), 1083–1094.

[9] J.-P. Serre, *Local Fields*, Graduate Texts in Mathematics **67**, Springer-Verlag, 1979.

[10] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics **83**, Springer-Verlag, 1997.

[11] 石塚裕大，有理軌道，整軌道の解釈，本報告集，2023.

[12] 谷口隆，本論のための準備，本報告集，2023.

書名	第 30 回整数論サマースクール報告集 「概均質ベクトル空間論の発展」
編集・発行	谷口隆（神戸大)、杉山和成（千葉工業大)、石塚裕大（九州大）
発行日	2024 年 1 月 31 日
連絡先	657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院理学研究科　谷口隆
印刷・製本	株式会社ルネック