概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

例で学ぶ概均質ベクトル空間

谷口隆（神戸大学大学院理学研究科）

概要

典型的で単純な概均質ベクトル空間 (G, V) の例を 8 個紹介し，それぞれのもっとも基本的な性質を解説する。特異集合（Zariski 開軌道の補集合）と (G, V) の相対不変式の関係を説明する。また，概均質ベクトル空間の基本的で個性的な例である 2 元 3 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^3(2)$ についてはやや詳しく調べる。非特異元の固定部分群を決定し，また有理軌道を初等的な方法で記述する。これらの例を通して概均質ベクトル空間についてイメージを持ってもらうことが目的である。

概均質ベクトル空間には一定の整然とした基礎理論があるが，ここではそれの正式な導入に替えて，基本的で単純な例を数例具体的に考え，本報告集の内容を理解する上で必要になる基本的な感覚を身につけてもらうことを目指す。正式な理論は木村 [13] を参照のこと。

1 節で代数群について簡単に説明する。また軌道を解釈するときに必要になる，有限次分離代数（有限次エタール代数）の概念を説明する。2 節で概均質ベクトル空間と相対不変式の定義を説明する。3 節で 7 個程度の概均質ベクトル空間の具体例について考える。より本格的な例は本報告集の石塚 [9, 10] などで現れる。4 節では，概均質ベクトル空間の有理軌道について考える。

1　予備知識

1.1　代数群とは？

概均質ベクトル空間は代数群の表現だが，代数群（あるいは位相群や Lie 群）の正式な導入を始めると，非常に多くの手間がかかり，なかなか概均質ベクトル空間の話が始められない。そこでここでは，本書の内容が理解できるための最低限の知識を，実例を通して説明することを試みる。

典型的な実例として，GL_2 について考えてみよう。任意の可換環 A に対し，$A^\times$ を A の単数群として，

$$\mathrm{GL}_2(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in A, ad - bc \in A^\times \right\}$$

が行列の乗法で群になる。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ などはその具体例である。

環 A に群 $\mathrm{GL}_2(A)$ を対応させるこの $A \mapsto \mathrm{GL}_2(A)$ は関手的であることに注意しよう。つまり，環準同型 $\phi\colon A \to B$ があれば，行列の成分ごとに ϕ で送ることで写像 $\mathrm{GL}_2(A) \to \mathrm{GL}_2(B)$ が定まり，これが群準同型写像になる。実際に群準同型であることは，手を動かしてみれば，ϕ が環準同型であることから直接にしたがうことが分かるだろう。たとえば環の標準単射 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ から単射 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ が定まり，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群である。また係数ごとに法 p を考えることで，群準同型 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ が定まるが，これは標準全射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ から誘導されたものである。

専門的には $\mathrm{GL}_2(A)$ はスキーム GL_2 の A 有理点であり，GL_2 を代数多様体やスキームとして論ずるときは，位相は Zariski 位相を考えることになる。たとえば GL_2 は Zariski 位相で連結である。しかし，実有理点の群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ については，$\mathbb{R}$ のユークリッド位相から定まる位相を考える。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は Lie 群で，Haar 測度が存在する。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は 2 つの連結成分からなり，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ が単位連結成分（単位元を含む連結成分）である。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群である。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ も $\mathbb{Q}_p$ の位相を考える。全不連結な，局所コンパクト位相群になる。

ここまで GL_2 で考えてきたが，GL_n で同様である。GL_1 の場合は，$\mathrm{GL}_1(A) = A^\times$ である。$\mathrm{GL}_n(A)$ は A^n の A 加群としての自己同型全体のなす群である。

環 A にその加法群 A を対応させる代数群（関手）を $\mathbb{G}_a$ で表す。また $\mathrm{GL}_1 = \mathbb{G}_m$ と書くことがある。a, m はそれぞれ additive, multiplicative の頭文字である。繰り返しになるが，$\mathbb{G}_a(A) = A$, $\mathbb{G}_m(A) = A^\times$ である。

例 1.1

$$B = \mathrm{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \middle| \, b = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \right\}$$

とする。これは $B(A) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(A) \mid b = 0 \right\}$ という関手である。定義からただちに $B(A) = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, d \in A^\times, c \in A \}$ と書ける。

B は GL_2 の Zariski 閉集合で，行列の積で閉じるので，GL_2 の閉部分群である。

B の部分集合を

$$T = \mathrm{T}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in B_2 \,\middle|\, c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \right\},$$
$$N = \mathrm{N}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in B_2 \,\middle|\, a = d = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \right\}$$

とおく。いずれも B の閉部分群で，$B = T \ltimes N$ である。同型

$$T \xrightarrow{\cong} \mathbb{G}_m^2, \qquad N \xrightarrow{\cong} \mathbb{G}_a$$

がそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto (a, d), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mapsto c$$

で定まる。

代数群の間にも準同型を考えることができる。たとえば代数群の準同型 $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ がある。各 A について，群準同型 $\det\colon \mathrm{GL}_n(A) \to \mathrm{GL}_1(A)$ が定まることが分かるだろう。正確には後者の det と前者の det は異なるが，同じ記号を用いることが通例である。SL_n は $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ の核である。これを $\mathrm{SL}_n := \{g \in \mathrm{GL}_n \mid \det g = 1\}$ のように表現することもある。

線型代数群（文脈から明らかな場合は単に代数群と呼ぶことが多い）とは，素朴には，ある GL_n の Zariski 閉部分群のことである。Zariski 閉とは，行列の各成分の多項式の共通零点ということで，体 K 上の代数群というのは，その多項式が K 上の多項式だということである。G が体 K 上の代数群であれば，任意の K 代数 A について，A 有理点の集合 $G(A)$ が群になり，$A \mapsto G(A)$ は K 代数から群への共変関手である。

例 1.2　S を K を成分にもつ n 次対称行列で，$\det(S) \neq 0$ とする。

$$\mathrm{O}_S := \{g \in \mathrm{GL}_n \mid gS\,{}^t\!g = S\}$$

を S の直交群という。これは K 上の代数群である。実際，S の成分が K であることから，$gS\,{}^t\!g = S$ は g の成分の K 係数多項式たちが 0 になるという条件である。任意の K 代数 A について，$\mathrm{O}_S(A) = \{g \in \mathrm{GL}_n(A) \mid gS\,{}^t\!g = S\}$ である。

$$\mathrm{SO}_S := \mathrm{O}_S \cap \mathrm{SL}_n$$

を特殊直交群という。これは SL_n の部分群であり，O_S の正規部分群である。$\mathrm{SO}_S(A) = \mathrm{O}_S(A) \cap \mathrm{SL}_n(A) = \{g \in \mathrm{SL}_n(A) \mid gS\,{}^t g = S\}$ である。

$$\mathrm{GO}_S := \{g \in \mathrm{GL}_n \mid gS\,{}^t g = tS, \exists t \in \mathrm{GL}_1\}$$

を相似直交群という。最後の $\exists t$ は少し略式の書き方で，意味は $\mathrm{GO}_S := \{(t,g) \in \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_n \mid gS\,{}^t g = tS\}$ である。この t は g から一意に決まるので，GO_S を GL_n の部分群とみなすことができる。

$$\mathrm{GO}_S \ni (t,g) \mapsto t \in \mathrm{GL}_1$$

は群準同型であり，この核が O_S である。

S が単位行列 I_n のとき，$\mathrm{GO}_S, \mathrm{O}_S, \mathrm{SO}_S$ をそれぞれ $\mathrm{GO}_n, \mathrm{O}_n, \mathrm{SO}_n$ と書く。

注意 1.3 これらの群を考えることは，3.5 節で扱う，n 次対称行列のなす概均質ベクトル空間 (G,V) を考えることと非常に近い。直交群は，(G,V) の非特異元 $S \in V'(K)$ の固定部分群である。

1.2 代数群の構造と簡約群

概均質ベクトル空間を考えるときに頻繁に現れる簡約群 (reductive group) という概念について，少しコメントしておく。

基本的には体 K 上の代数群 G についての条件である。K 上の連結代数群 G は，$\overline{K}$ に底変換した $G \times_K \overline{K}$ の "冪単根基 (nilpotent radical)" が自明になるとき，簡約群という。（簡約可能な群と呼ばれることもある。）が，実は著者は簡約群を扱うとき，あまり冪単根基に立ち戻って考えてはいない。簡約群の例としては，上述の $\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{GO}_S, \mathrm{O}_S, \mathrm{SO}_S$ や，斜交群 Sp_{2n}，一般斜交群 GSp_{2n} などがある。これらはいずれも $g \mapsto {}^t g^{-1}$ で閉じているという特徴がある。K が標数 0 の代数閉体のときは，G の適当な共役が $g \mapsto {}^t g^{-1}$ で閉じることが必要十分である。例 1.1 の B は簡約でない群の例である。

標数 0 の代数閉体上の代数群は一般に簡約な部分群 L と冪単部分群 U の半直積 $G = L \ltimes U$ の形に書け，簡約群 L はトーラス T と半単純群 S の積 $L = TS$ の形で，T の元と S の元の積は可換であるように表すことができる。ここに，冪単群とは対角成分がみな 1 の上三角群の部分群と同型になるもの，トーラスは $\mathbb{G}_m$ の直積と同型になるもの，半単純群は可換な連結部分群を持たないもののことである。

1.3　有限次分離代数

概均質ベクトル空間の非特異な軌道を考える上で基本的な役割をもつ，有限次分離代数の概念を簡単にまとめておく。なお分離代数はエタール代数と呼ばれることもある。

定義 1.4　F を K 上有限次の代数で，$\dim_K(F) = n$ とする。以下は同値である。

(1) 跡（トレース）$\mathrm{Tr}\colon F \to K$ の定める双線形形式 $F \times F \ni (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(xy) \in K$ が非退化である。

(2) F はある K の有限分離拡大 $F_1, \ldots, F_m$ の直積 $F_1 \times \cdots \times F_m$ と同型である。

(3) $F \otimes \overline{K} \cong (\overline{K})^n$ である。ただし $\overline{K}$ は K の代数閉包である。

この同値な条件をみたす F を K の n 次分離代数という。

これらの同値性についてはたとえば [1, V, §6 Proposition 2, §6 Theorem 4, §8 Propositoin 1] を参照されたい。

例 1.5　(1) n 次の多項式 $P \in K[X]$ について，K 上 n 次の代数 $K[X]/(P)$ が分離的であるのは，P が重根をもたないときである。

(2) K が代数閉体なら，K の n 次分離代数は K^n のみである。たとえば $\mathbb{C}$ の n 次分離代数は $\mathbb{C}^n$ のみである。

(3) $\mathbb{R}$ の n 次分離代数は $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ （ただし $r_1 + 2r_2 = n$）と書ける。

(4) $\mathbb{Q}$ の 2 次分離代数は $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ か 2 次体 L である。$\mathbb{Q}$ の 3 次分離代数は $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ か $\mathbb{Q}$ と 2 次体 L の直積 $\mathbb{Q} \times L$ か 3 次体 F かのいずれかである。

命題 1.6　K^n の K 代数としての自己同型群は，成分の置換による n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ である。

証明　$\varphi\colon K^n \to K^n$ を自己同型とする。第 i 成分のみが 1 で他の成分は 0 である元を $e_i \in K^n$ とする。$e_1, \ldots, e_n$ は K^n の K 基底であり，また $\sum e_i = 1$, $e_i^2 = e_i$, $i \neq j$ のとき $e_ie_j = 0$ である。$f_i = \varphi(e_i) = \sum a_{ji}e_j$ とする。$f_i^2 = f_i$ より $a_{ji}^2 = a_{ji}$ である。したがって $a_{ij} \in K$ は $0, 1$ のいずれかである。$i \neq j$ とする。

$$f_if_j = \sum_{k,l} a_{ki}e_ka_{lj}e_l = \sum_k a_{ki}a_{kj}e_k = 0$$

より，任意の k について $a_{ki}a_{kj} = 0$ である。k を固定する。すべての i について $a_{ki} = 0$ なら φ による像が e_k を含まないので，$a_{ki} = 1$ となる i が存在する。$a_{ki}a_{kj} = 0$ より $j \neq i$ について $a_{kj} = 0$ となる。よってこの i は k に対してただ一つであり，それを $i = \tau(k)$ とする。$e_k = f_{\tau(k)}$ である。φ は単射なので $f_{\tau(k)}$ は異なる k に対しすべて異なるので τ は全単射である。$\sigma = \tau^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ とすると $f_i = e_{\sigma(i)}$ である。 $\square$

2 概均質ベクトル空間と相対不変式

本節では，概均質ベクトル空間とそのもっとも基本的で重要な役割を担う相対不変式を定義し，その性質をまとめる。基礎理論のより詳しい内容は [13, 2 章] を参照のこと。

K を体とし，G を K 上の連結な代数群とする。V を K 上の有限次元ベクトル空間とし，$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を (K 上の) 代数群としての準同型写像とする。このとき (G, ρ, V) を G の (K 上の) 表現という。ρ が固定されているときは単に (G, V) を書くこともある。このとき，$g \in G$, $x \in V$ に対し $\rho(g)x$ を gx と書く。

定義 2.1 G の表現 $(G, \rho, V) = (G, V)$ が**概均質ベクトル空間**であるとは，V に Zariski 開な軌道 V' が存在することをいう。

これは，$V'(\overline{K})$ が単一の $G(\overline{K})$ 軌道であるという意味である。このとき V' を**非特異集合**，$S := V \setminus V'$ を**特異集合**という。

定義 2.2 (G, V) を表現とする。V 上の有理関数 $f \in K(V)$ は，任意の $g \in G$ と $x \in V$ に対して $f(gx) = \chi(g)f(x)$ となる G の指標 $\chi\colon G \to \mathrm{GL}_1$ が存在するとき，**相対不変式**であるという。

ただし G の指標とは群準同型 $G \to \mathrm{GL}_1$ のことである。特に自明な指標に対する相対不変式を絶対不変式というが，概均質ベクトル空間については次が成り立つ。

補題 2.3 概均質ベクトル空間の絶対不変式は定数に限る。

証明 f が絶対不変式ならば，任意の $g \in G$, $x \in V$ に対して $f(gx) = f(x)$ が成り立つ。よって f は V' 上で定数である。したがってその Zariski 閉包である V 上で定数

である。 □

これより，同じ指標に対応する相対不変式は，定数倍を除いて一致することも分かる。（逆に，(G, V) が概均質ベクトル空間でなければ，定数でない絶対不変式が存在することが知られている。）

概均質ベクトル空間において，相対不変式と特異集合の関係は次の命題にまとめられる。

命題 2.4 (G, V) を概均質ベクトル空間とし，$n = \dim V$ とする。特異集合 S の $n-1$ 次元の既約成分を $S_1, \ldots, S_r$ とし，S_i を定める既約多項式を $P_i \in \overline{K}[V]$ とする。この P_i は相対不変式である。また $\overline{K}$ 上の任意の相対不変式 P は $P = c\prod_i P_i^{m_i}$, $c \in \overline{K}^\times, m_i \in \mathbb{Z}$ とあらわされる。

証明 G は連結なので既約である。よって GS_i は既約であり，$S_i \subset GS_i \subset S$ なので，$S_i = GS_i$ である。したがって S_i の既約性から各 $g \in G$ に対して $g^{-1}S_i = S_i$ である。これより既約多項式 $P_i(gx)$ は定数倍を除いて $P_i(x)$ と等しい。$P_i(gx) = \chi(g)P_i(x)$ とすると $\chi\colon G \to \mathrm{GL}_1$ は必然的に準同型で，P_i は相対不変式である。

P を相対不変式とし，$P = \prod_{1 \le j \le k} R_j$ を既約因子への分解とする。$P(gx) = \prod_{1 \le j \le k} R_j(gx)$ で $\overline{K}[V]$ は UFD なので，定数倍を除いて，$R_j(gx)$ は $R_1, \ldots, R_k$ のどれかと一致する。したがって群準同型 $G \to \mathfrak{S}_k$ が定まる。この核は指数有限なので，G が連結であることから，核は G と一致する。よって各 R_j は相対不変式である。R_j の零点集合は S の既約成分になるから，ある S_i と一致し，定数倍を除いて R_j は P_i と一致する。 □

定義 2.5 命題 2.4 の $P_1, \ldots, P_r \in \overline{K}[V]$ を (G, V) の**基本相対不変式**という。

基本相対不変式は概均質ベクトル空間 (G, V) のゼータ関数を定義するときに使われる。$K = \mathbb{Q}$ として，大まかにはゼータ関数は

$$\sum_{x \in \Gamma \backslash (L \cap V_i)} \frac{\mu_x}{|P_1(x)|^{s_1}|P_2(x)|^{s_2} \cdots |P_r(x)|^{s_r}}$$

という r 個の複素変数の関数である。L は $V(\mathbb{Q})$ 内の格子，Γ は L を不変にする $G(\mathbb{Q})$ の数論的部分群，V_i は $V'(\mathbb{R})$ の連結成分で，$\mu_x \in \mathbb{R}_{>0}$ は軌道 Γx の "大きさ" を測る量である。$r = 1$ の 1 変数の場合の一般論が本報告数の杉山 [8] で説明される。多変数の場合は本報告集の佐藤 [5] で扱われる。

3　概均質ベクトル空間の例

それでは，概均質ベクトル空間 (G,V) の基本的な例を取り上げ，その性質を見ていこう。より本格的な例は [9, 10] などで扱われる。ここで取り上げる例では，3.3 節の $(B,V)=(\mathrm{B}_2,\mathrm{Sym}^2(2))$ を除き，(G,V) の特異集合 S は K 上定義された既約超曲面である。したがって命題 2.4 より (G,V) は唯一の基本相対不変式をもつ。なお，$(\mathrm{B}_2,\mathrm{Sym}^2(2))$ の特異集合は 2 つの既約成分を持ち，この概均質ベクトル空間には基本相対不変式が 2 つある。

3.1　1 次元の概均質ベクトル空間

もっとも単純な (G,V) として，1 次元空間 $V=K$ に $G=\mathrm{GL}_1$ が作用する場合を考えてみよう。$t\in G$, $x\in V$ に対し $\rho_1(t)x=tx$ によって $\rho_1\colon G\to\mathrm{GL}(V)$ を定める。$S=\{0\}$ とすると，$V'=V\setminus S=\{x\in V\mid x\neq 0\}$ は G の単一軌道である。この場合，$\overline{K}$ で考えなくても，K 上で $V'(K)$ は単一の $G(K)$ 軌道である。$P(x)=x$ は唯一の基本相対不変式で，$P(\rho_1(t)x)=tP(x)$ である。

G の V への作用は他にも考えることができる。今度は $t\in G$, $x\in V$ に対し $\rho_2(t)x=t^2x$ によって $\rho_2\colon G\to\mathrm{GL}(V)$ を定める。同じく $S=\{0\}$，$V'=V\setminus S=\{x\in V\mid x\neq 0\}$ とすると，$V'(\overline{K})$ は単一の $G(\overline{K})$ 軌道である。これは $x,y\in V(\overline{K})$ とすると，$t=\sqrt{y/x}\in G(\overline{K})=\overline{K}^\times$ が取れて，$y=t^2x$ となるからである。

一般の体 K 上で考えると，$x,y\in V'(K)$ は y/x の平方根が取れなければ同じ軌道にない。$\mathbb{R}$ 上では，$V'(\mathbb{R})=\mathbb{R}_{>0}\cup\mathbb{R}_{<0}$ と 2 個の $G(\mathbb{R})=\mathbb{R}^\times$ 軌道に分かれる。一般の体では，たとえば $K=\mathbb{Q}$ なら

$$G(\mathbb{Q})\backslash V'(\mathbb{Q})\ni x\longmapsto\mathbb{Q}(\sqrt{x})\in\{\mathbb{Q}\text{ の 2 次拡大 }\}\cup\{\mathbb{Q}\}$$

が全単射になる。K の標数が 2 でなければ，$\mathbb{Q}$ を K に変えても同様である。

注意 3.1　なお，$x\in V'(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ が $\mathbb{Q}$ の平方元のときは $\mathbb{Q}(\sqrt{x})=\mathbb{Q}$ であり，これが右辺にある $\mathbb{Q}$ である。実際には代数的により自然な対応物は $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ である。この場合，右辺の集合は $\mathbb{Q}$ の 2 次分離代数の (同型類の) なす集合になる。

この例からも明らかなように，G と V から ρ が一意に定まるわけではない。しかし，早い段階で ρ が定義され以降固定されるような場合は，ρ は省略されることもよ

くある。

3.2　正方行列の空間

n を正の整数とし，$G = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$, $V = \mathrm{M}_n$ とする。V は n 次正方行列全体のなす n^2 次元のベクトル空間である。$g = (g_1, g_2) \in G$, $x \in V$ に対し，$gx = g_1 x\, {}^t g_2$ として，$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ を定める。（g_2 の転置は群の作用を左作用にするためである。）これは行列の基本変形の群論的抽象化である。$x \in V$ に左から g_1 をかけることが x の行変形で，右から ${}^t g_2$ をかけることが x の列変形である。基本変形の理論から

$$G(K)\backslash V(K) \ni x \longmapsto \mathrm{rank}(x) \in \{i \mid 0 \le i \le n\}$$

は全単射である。$S = \{x \in V \mid \mathrm{rank}(x) < n\}$, $V' = V \backslash S = \{x \in V \mid \mathrm{rank}(x) = n\}$ とおく。V' は V の Zariski 開集合であり，$V'(K)$ は単一の $G(K)$ 軌道だから，(G, V) は概均質ベクトル空間である。また $P(x) = \det x$ とおけば，これは V 上の既約多項式で S は P の零点集合である。よって P は唯一の基本相対不変式で，実際 $\chi(g) = \det g_1 \cdot \det g_2$ とすると $P(gx) = \chi(g)P(x)$ は明らかである。

注意 3.2　$n \times m$ 次の長方行列のなす空間 V に $G = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ を作用させても同様のことが考えら，(G, V) は概均質ベクトル空間である。対称性から $n > m$ とすると，$V' = \{x \in V \mid \mathrm{rank}(x) = m\}$ が非特異集合である。ただしこの場合，$S = \{x \in V \mid \mathrm{rank}(x) < m\}$ はすべての m 次の小行列式が 0 であるという条件で，余次元は 2 以上になる。したがってこの (G, V) には相対不変式は存在しない。

3.3　2 元 2 次形式の空間

V を 2 元 2 次形式のなす 3 次元ベクトル空間とする：

$$V = \mathrm{Sym}^2(2) := \{x(u, v) = au^2 + buv + cv^2 \mid a, b, c \in K\} \cong K^3$$

$G = \mathrm{GL}_2$ が変数の線形変換で V に作用する：

$$(g \cdot x)(u, v) = x((u, v)g) = x(pu + rv, qu + sv), \qquad g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

これは左作用，すなわち $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ である。$P(x)$ を $x(u, v)$ の判別式，つまり $P(x) = \mathrm{Disc}(x) = b^2 - 4ac$ とおくと，$P(gx) = (\det g)^2 P(x)$ となるので $P(x)$ は

相対不変式である。

補題 3.3 $V' = \{x \in V \mid P(x) \neq 0\}$ は $\overline{K}$ で単一軌道である。

証明 $w(u,v) := uv \in V'(K)(\subset V'(\overline{K}))$ とし，$x \in V(\overline{K})$ が w と同じ $G(\overline{K})$ 軌道であることを示す。$P(x) \neq 0$ であるとは，$x(u,v)$ が重根をもたないということである。$\overline{K}$ では $x(u,v) = (\alpha_1 u + \beta_1 v)(\alpha_2 u + \beta_2 v)$ と分解し，これが重根を持たないというのは，$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ が平行でないということで，したがって $\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \neq 0$ だということである。$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} w$ である。 □

したがって，(G, V) は $P(x) = \mathrm{Disc}(x)$ を唯一の基本相対不変式とする，概均質ベクトル空間である。

スカラー行列 $aI_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ は a^2 倍で作用する。だから，スカラー倍だけ違う二つの 2 元 2 次形式が，K 上で同じ軌道にあるとは限らない。たとえば $u^2 + v^2, 3u^2 + 3v^2 \in V'(\mathbb{Q})$ は同じ $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ 軌道にはないが，整数論的な考察のためにはこれらが同じ軌道にあった方がよいことがある。そのようなときは，$\tilde{G} = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ とし，$t \in \mathrm{GL}_1$ を普通の t 倍で作用させる表現を考えることがある。($\ker(\rho\colon \tilde{G} \to \mathrm{GL}(V)) = \{(t^{-2}, tI_2)\} \cong \mathbb{G}_m$ である。) この場合，自然な全単射

$$\tilde{G}(K) \backslash V'(K) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{K \text{ の 2 次分離代数 }\}$$

が定まる。$x \in V'(K)$ が K で 1 次因子に分解するときは $K \times K$ を，そうでないときは $x = a(u + \beta_1 v)(u + \beta_2 v)$ として，K の 2 次拡大 $K(\beta_1)$ を対応させればよい。これが全単射になることは比較的簡単に分かるので，証明は省略する。なお $\tilde{G}$ で考えた場合，特異集合 $S(K)$ は 2 つの $\tilde{G}(K)$ 軌道からなり，代表元として $v^2, 0$ が取れることも簡単に分かる。

また，$w = uv \in V'(K)$ とすると，固定部分群 $\tilde{G}_w = \{g \in \tilde{G} \mid gw = w\}$ は，

$$\tilde{G}_w = \left\{ \left(\frac{1}{ps}, \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{qr}, \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} \right) \right\} \cong \mathrm{GL}_1^2 \rtimes \mathfrak{S}_2$$

と分かる。実際，$g = (g_1, g_2) \in \tilde{G}_w$ とすると $g_2 \in \mathrm{GL}_2$ は，定数倍を除いて uv を変えないので，u, v を定数倍を除いて動かさないか入れ替えるかのどちらかである。前者の場合 g_2 は対角行列で，後者の場合は g_2 は反対角行列である。

最後に $G = \mathrm{GL}_2$ を，例 1.1 で定義した部分群 $B = \mathrm{B}_2$ に制限した表現 (B, V) について考えてみよう。今度は $x(u,v) = au^2 + buv + cv^2$ に対し，$Q(x) = a$ とすると，これも相対不変式であることがすぐに分かる。

補題 3.4 (B, V) は特異集合を $S = \{x \in V \mid P(x)Q(x) = 0\}$ とする概均質ベクトル空間である。

証明 $V' := \{x \in V \mid P(x)Q(x) \neq 0\}$ が $\overline{K}$ 上で単一の B 軌道であることを示す。$w := u^2 - uv = u(u-v) \in V'(K)$ とする。$x = au^2 + buv + cv^2 \in V'(\overline{K})$ とし，w と同じ $B(\overline{K})$ 軌道にあることを示す。$a \neq 0$ より $a^{-1/2} I_2 \in B(\overline{K})$ の作用で x を a^{-1} 倍して，$a = 1$ としてよい。$x = (u - \alpha v)(u - \beta v)$ とすると，$b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{smallmatrix}\right) \in B(\overline{K})$ として，$bx = u(u - \gamma v)$，ただし $\gamma = \beta - \alpha \neq 0$ となる。$b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \in B(\overline{K})$ として，$b'bx = w$ である。 □

この場合も群は，スカラー倍の作用をつけた $\tilde{B} = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{B}_2$ を考えることがある。この概均質ベクトル空間 $(\tilde{B}, V)$ に伴う 2 変数のゼータ関数が本報告集の都築 [12] で扱われる。

3.4 2 元 3 次形式の空間

V を 2 元 3 次形式のなす 4 次元ベクトル空間とする：

$$V = \mathrm{Sym}^3(2) := \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \mid a, b, c, d \in K\} \cong K^4$$

$G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ とし，作用を

$$(g \cdot x) = t_1 x((u,v)g_2), \qquad g = (t_1, g_2) \in G, x \in V$$

で定める。$T := \ker(\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)) = \{(t^{-3}, tI_2)\} \cong \mathrm{GL}_1$ である。

$$P(x) := \mathrm{Disc}(x) = b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$$

が相対不変式で，$\chi(g) = t_1^4 (\det g_2)^6$ とすると，$P(gx) = \chi(g)P(x)$ である。

補題 3.5 $V' = \{x \in V \mid P(x) \neq 0\}$ は $\overline{K}$ で単一軌道である。

証明 $x \in V'(\overline{K})$ とし，$w = uv(u-v) \in V'(K)$ と同じ軌道にあることを示す。

$$x = (\alpha_1 u - \beta_1 v)(\alpha_2 u - \beta_2 v)(\alpha_3 u - \beta_3 v)$$

x は重根をもたないから，$\alpha_1 u - \beta_1 v \mapsto u$, $\alpha_2 u - \beta_2 v \mapsto v$ とする $g_2 \in \mathrm{GL}_2(\overline{K})$ が存在する。よって x はある $y = uv(\alpha u - \beta v) \in V'(\overline{K})$ と同じ軌道にある。$y \in V'(\overline{K})$ より $\alpha\beta \neq 0$ で，$g = (\alpha\beta, \left(\begin{smallmatrix} \alpha^{-1} & \\ & \beta^{-1} \end{smallmatrix}\right)) \in G(\overline{K})$ とすると，$gy = w$ である。 □

補題 3.6 $G_w/T \cong \mathfrak{S}_3$ である。ただし $\mathfrak{S}_3$ は 3 次対称群である。

証明 $g = (t_1, g_2) \in G_w$ とすると，g_2 は $u, v, u-v$ を $K^\times$ 倍を除きそのどれかに移す。したがって群準同型 $G_w \to \mathfrak{S}_3$ が定まる。$u, v, u-v$ の置換としては，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が $u \leftrightarrow v$ で $u-v$ は（定数倍を除いて）動かさず，また，$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が，（定数倍を除いて）$u \mapsto u+v \mapsto v \mapsto u$ と巡回的に置換することから，$G_w \to \mathfrak{S}_3$ は全射である。これの核を考える。u, v をそれぞれ $K^\times$ 倍するなら，g_2 は対角行列で，$g_2 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{smallmatrix}\right)$ とすると，g_2 で $u+v \mapsto \alpha u + \beta v$ である。これが $u+v$ の $K^\times$ 倍になるので $\alpha = \beta$ である。$g = (\alpha^{-3}, \alpha I_2) \in T$ と分かる。よって $G_w/T \cong \mathfrak{S}_3$ である。 □

3.3 節の 2 元 2 次形式の空間もそうであったように，2 元 3 次形式の空間においても，$V'(K)$ は単一の $G(K)$ 軌道ではない。軌道 $G(K)\backslash V'(K)$ は 4 節で改めて考える。2 元 3 次形式の概均質ベクトル空間とそのゼータ関数は本報告集の Thorne [3] や鈴木美 [14] で整数論的に考察される。また，本報告集の山本 [7] で，この空間の類数についての鏡映定理が解説される。

注意 3.7 V を 2 元 n 次形式の空間，$G = \mathrm{GL}_2$ とすると，$n \leq 3$ では (G, V) は概均質ベクトル空間である。他方，$n \geq 4$ の場合は，$\dim V = n+1 \geq 5$ であり，また $\dim G = 4$ だから，軌道の次元は最大でも 4 である。したがって軌道は Zariski 開になることはない。ただし，$n = 4$ のときは余正則空間で，佐野 [6] で扱われる。

つまり，(G, ρ, V) が概均質ベクトル空間であれば，$\dim(G/\ker\rho) \geq \dim V$ である。

3.5 対称行列の空間/2 次形式の空間

$n \geq 1$ とし，$V = \mathrm{Sym}^2(n) := \{x \in \mathrm{M}_n \mid {}^t x = x\}$ を対称行列の空間とする。$G = \mathrm{GL}_n$ が $(g, x) \mapsto gx{}^t g$ で作用する。（${}^t(gx{}^t g) = g{}^t x{}^t g = gx{}^t g$ である。）$P(x) = \det x$ は相対不変式である。$V' = \{x \in V \mid P(x) \neq 0\}$ とおくと，$V'(\overline{K})$ が単一の $G(\overline{K})$ 軌道であることはよく知られている。$w = I_n \in V'(K)$ の固定部分群

は $G_w = \{(t,g) \mid g^t g = I_n\} \cong \mathrm{O}_n$ である。

$K = \mathbb{R}$ とする。$x \in V'(\mathbb{R})$ に対し，重複を込めた正の固有値の個数 p と負の固有値の個数 q の組 (p,q) を対応させることで，

$$G(\mathbb{R})\backslash V'(\mathbb{R}) \longrightarrow \{(p,q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \mid p+q=n\}$$

が定まる。これが全単射であるというのが Sylvester の慣性律である。

K の標数は 2 でないとする。V を 2 次形式の空間と考えることもできる。$v = (v_1,\dots,v_n)$ を n 個組の変数とし，対称行列 $x \in V$ に対し $x(v) = vx^t v$ とすると，これは $v_1,\dots,v_n$ の斉次 2 次式である。$x = (x_{ij})$ なら，$x(v) = \sum_{i,j} x_{ij} v_i v_j$ である。$w(v) = \sum_{i,j} \delta_{ij} v_i v_j = v_1^2 + \cdots + v_n^2$ である。この $x \mapsto x(v)$ によって V を 2 次形式の空間と同一視できる。こう考えると

$$(gx)(v) = v(gx^t g)^t v = (vg)x^t(vg) = x(vg)$$

だから，$G = \mathrm{GL}_n$ は変数の線形変換で 2 次形式の空間 V に作用する。

$n = 2$ なら

$$x = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \mapsto x(v) = (v_1\ v_2) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = av_1^2 + bv_1v_2 + cv_2^2$$

であり，また $\det x = ac - \frac{1}{4}b^2 = -\frac{1}{4}\mathrm{Disc}(x(v))$ である。

この表現も，$G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_n$ で考えることがある。この場合，

$$G_w = \{(t,g) \mid tg^t g = I_n\} \cong \{g \in \mathrm{GL}_n \mid g^t g = t' I_n\ \exists t' \in \mathrm{GL}_1\} = \mathrm{GO}_n$$

である。2 次形式は Q とも書く。2 次形式 Q が非退化であるのは $P(Q) \neq 0$ のときで，この場合に $\mathrm{O}(Q)$, $\mathrm{GO}(Q)$ はそれぞれ $G = \mathrm{GL}_n$ および $G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_n$ のときの Q の固定部分群のことである。

3.6　2 次空間

Q を K 上の非退化な n 元 2 次形式とする。$V = K^n$ とし，$G = \mathrm{GO}(Q) \subset \mathrm{GL}_n$ とする。G を V に普通の行列倍で作用させる。$Q(x)$ は相対不変式であり，$V' = \{x \in V \mid Q(x) \neq 0\}$ は $\overline{K}$ で単一軌道である。

4 概均質ベクトル空間の有理軌道

4.1 2 元 3 次形式の空間の非特異軌道

ここまでの例で，非特異な有理軌道の集合 $G(K)\backslash V'(K)$ についても考えてきた。これは 1 点になることもあったが，そうでないこともあった。3.1 節の $(\mathrm{GL}_1, \rho_2, K)$ や 3.3 節の $(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ では，$G(K)\backslash V'(K)$ は K の 2 次拡大（正確には 2 次分離代数）の同型類と 1 対 1 に対応した。したがってこれらの (G, V) は，何らかの意味で K の 2 次拡大を記述する概均質ベクトル空間だと考えることができる。

V を 2 元 3 次形式の空間とし，$G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ とする。この場合，有理軌道は K の 3 次分離代数と対応する。

命題 4.1 有理軌道の集合 $G(K)\backslash V'(K)$ と K の 3 次分離代数の同型類のなす集合の間に自然な全単射がある。

証明 $x \in V'(K)$ に対し，K の 3 次分離代数 F_x を次のように定める。

(1) x が K 上で 1 次式の積に分解するときは $F_x = K \times K \times K$ とする。

(2) x が K 上で 1 次式 $au + bv$ と 2 次既約式 $y(u, v)$ の積に分解するときは，α を $y(u, 1)$ の根として，$F_x = K \times K(\alpha)$ とする。

(3) x が K 上で既約なときは，α を $x(u, 1)$ の根として，$F_x = K(\alpha)$ とする。

任意の 3 次分離代数はある F_x と同型である。また，$x, y \in V'(K)$ とすると，これらが同じ $G(K)$ 軌道にあれば，$F_x \cong F_y$ であることも定義からすぐ分かる。よって逆に，$F_x \cong F_y$ のときに x, y が同じ $G(K)$ 軌道にあることが示せればよい。

(1) $F_x \cong K^3$ のとき，補題 3.5 とまったく同じ証明で x は $w = w(u, v) = uv(u+v)$ と同じ $G(K)$ 軌道にあることが分かるので，x, y は同じ $G(K)$ 軌道にある。

(2) $F_x \cong K \times L$ で L/K は 2 次の体拡大であるとする。$F_x \cong F_y$ とする。同型を固定して $F_x = F_y$ であるとする。K 上の 1 次式 $au + bv$ は $\mathrm{GL}_2(K)$ で v に移せるので，$x = v(u - \alpha v)(u - \alpha' v)$ $y = v(u - \beta v)(u - \beta' v)$, $L = K(\alpha) = K(\beta)$ としてよい。$\beta = a + b\alpha$, $a \in K$, $b \in K^\times$ と書ける。$g_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -a & b \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(K)$ とすると，$g = (b^{-1}, g_2) \in G(K)$ について，$gx = y$ である。

(3) F_x が K の 3 次拡大であるとする。$F_x \cong F_y$ とする。同型を固定して $F_x = F_y$

であるとする。$\alpha \in F_x$ は $x(u,1)$ の根，$\beta \in F_y$ は $y(u,1)$ の根とする。$\alpha, \beta \in F_y = F_x$ で，$1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ は K 上 1 次従属だから，$b\alpha\beta + d\beta - a\alpha - c = 0$ となるすべては 0 でない $a, b, c, d \in K$ が存在する。$\alpha = \frac{a\beta+c}{b\beta+d}$ なので $ad - bc \neq 0$ かつ，$x(\frac{a\beta+c}{b\beta+d}, 1) = 0$ であり，したがって β は $x(au+c, bv+d)$ の根である。β の K 上の最小多項式は 3 次だから，$x(au+c, bv+d)$ と $y(u,1)$ は $K^\times$ 倍を除いて一致する。斉次化すれば，$y(u,v) = tx(au+cv, bu+dv)$ とできる。 $\square$

本報告集の谷口 [11] でこの命題の Galois コホモロジーを使った証明を述べる。4 次や 5 次の分離代数を記述する概均質ベクトル空間もあり，本報告集の石塚 [9, 10] で扱われる。

4.2 分離代数と関手性

1.1 節で代数群を関手性の観点を踏まえて説明したが，そのこととの関係を簡単に述べておきたい。3.1 節で述べたが，K 上 2 次の分離代数の集合は K 上の 2 次以下の分離拡大体と一対一に対応する。3 次でも事情は同様である。4 次以上になるとそうはならないものの，この記事の範疇では体でなく分離代数で考える理由がはっきりしにくいかも知れないが，意図があって，その一つは関手性である。

K 代数の準同型 $\phi\colon A \to B$ があれば，群準同型 $G(A) \to G(B)$ および K 加群の準同型 $V(A) \to V(B)$ が定まる。どちらも ϕ で表すことにすると，この ϕ はそれぞれの作用を保つ。つまり $\phi(gx) = \phi(g)\phi(x)$ が任意の $g \in G(A)$, $x \in V(A)$ に対してなりたつ。したがって軌道の集合の間にも写像 $G(A)\backslash V(A) \to G(B)\backslash V(B)$ が誘導される。K' が K の拡大である場合は $G(K)\backslash V'(K) \to G(K')\backslash V'(K')$ が定まる。軌道の解釈として K 上の代数を考えるときは，代数の側では K 代数 F はテンソルで $F \mapsto F \otimes K'$ と送るのが自然で，これと整合的であることが望ましい。

F が K の 3 次拡大体であっても，$F \otimes K'$ は K' の 3 次拡大体であるとは限らない。しかし，F が K 上の 3 次分離代数であれば，$F \otimes K'$ は K' 上の 3 次分離代数である。つまり，分離代数は体の拡大で安定な概念である。

具体例で見てみよう。2 元 3 次形式の空間 (G, V) を $K = \mathbb{Q}$ 上で考える。$x(u,v) = u^3 - 2v^3 \in V'(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であり，対応する 3 次分離代数 $F_x := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ は $\mathbb{Q}$ の拡大体である。他方，$K' = \mathbb{R}$ とすると，$\mathbb{R}$ の 3 次拡大体は存在せず，$\mathbb{R}$ 上 3 次の分離代数は $\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ の 2 個である。これが $G(\mathbb{R})\backslash V'(\mathbb{R})$ が 2 個の元からなることと対応する。$x \in V'(\mathbb{R})$ に対応する $\mathbb{R}$ 上の 3 次分離代数は $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ であり，これは

$F_x \otimes \mathbb{R}$ と同型である。

3 次体 F は $F \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ のとき総実といい，$F \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ のとき虚という。3 次拡大でなく 3 次分離代数を考えることで，自然な写像 $G(\mathbb{Q})\backslash V'(\mathbb{Q}) \to G(\mathbb{R})\backslash V'(\mathbb{R})$ と整合的な対応になる。

また，軌道に関わるデータを記述するときも，分離代数で考えた方が整合的になることが多い。例えば，$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合，$x \in V'(K)$ に対応する 2 次分離代数を F_x とすると，$G_x(K) \cong F_x^\times \rtimes \mathrm{Aut}(F_x)$ である。

4.3 特異軌道は

特異軌道の集合 $G(K)\backslash S(K)$ の記述は $G(K)\backslash V'(K)$ の記述とは別の問題である。これもゼータ積分の “特異積分” を計算するときに必要になる（本報告集では鈴木美 [14], 都築 [12]) など，概均質ベクトル空間 (G, V) を研究する上で欠かせない。3.1, 3.2, 3.3 節では特異軌道も含めた $G(K)\backslash V(K)$ の記述を与えたが，ここで，2 元 3 次形式の空間の特異軌道を考えてみよう。

補題 4.2 $uv^2, v^3, 0 \in S(K)$ は相異なる $G(K)$ 軌道にあり，これらの軌道の和集合が $S(K)$ である。

証明 $0 \neq x \in V(K)$ について，$x \in S(K)$ とは $x(u,v)$ が $\overline{K}$ で重複する因子をもつことである。次数を考えるとそれは K 上の 1 次因子になる。重複する因子を $\mathrm{GL}_2(K)$ で v に動かせばよい。3 重の場合は av^3, $a \in K$ となり，2 重の場合は $(au+bv)v^2$, $a \in K^\times$, $b \in K$ で後者は $au + bv \mapsto u$, $v \mapsto v$ とすればよい。 □

K 上で 3 次の非分離代数（の同型類）は 3 個あり，$K \times K[v]/(v^2)$, $K[v]/(v^3)$, $K[u,v]/(u^2, uv, v^2)$ である。補題 4.2 の 3 個の軌道と順に対応させるのは自然で，これにより命題 4.1 が $G(K)\backslash V(K)$ と 3 次代数の同型類のなす集合との対応に延長されたことになる。

そこで，このような延長が一般に可能であるか考えるのは自然であるが，これはあまり単純には解決しない。非特異集合 $V'(K)$ の軌道が 2 次分離代数と対応する場合を考えてみよう。3.1 節と 3.3 節でそのような概均質ベクトル空間を紹介した。それぞれ，$(\mathrm{GL}_1, \rho_2, K)$ と $(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ である。K 上 2 次の非分離代数は $K[v]/(v^2)$ の 1 個だけである。$(\mathrm{GL}_1, \rho_2, K)$ の特異集合は 1 個の軌道からなるので，$K[v]/(v^2)$ と対応させればよい。しかし，$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合は 3.3 節で

述べたように，特異集合は 2 個の軌道からなるので，2 次非分離代数と一対一に対応させせることができない。

$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合は，2 次代数だけでなく，それの適当な加群との組を考えることで，特異集合を含めた一対一を考えることができることが分かっている [4]。$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^3(2))$ の場合の対応は，Levi-Delone-Faddeev 対応が特異集合にも延長できる [2] ことが背景にある。そのような命題を得るためには，抽象的な一般論ではない，個々の表現の具体的な考察が必要になるようである。

参考文献

[1] Nicolas Bourbaki. *Algebra II. Chapters 4–7.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, french edition, 2003.

[2] W.T. Gan, B. Gross, and G. Savin. Fourier coefficients of modular forms on G_2. *Duke Math. J.*, 115:105–169, 2002.

[3] F. Thorne. Counting cubic fields using shintani's zeta function. 本報告集, 2023.

[4] Melanie Matchett Wood. Gauss composition over an arbitrary base. *Adv. Math.*, 226(2):1756–1771, 2011.

[5] 佐藤文広. 関数等式の一般化. 本報告集, 2023.

[6] 佐野薫. 余正則空間と楕円曲線のセルマー群. 本報告集, 2023.

[7] 山本修司. 大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性. 本報告集, 2023.

[8] 杉山和成. 概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（1 変数の場合）. 本報告集, 2023.

[9] 石塚裕大. 三元二次形式のペアと射影空間の幾何. 本報告集, 2023.

[10] 石塚裕大. 有理軌道、整軌道の解釈. 本報告集, 2023.

[11] 谷口隆. 本論のための準備. 本報告集, 2023.

[12] 都築正男. 新谷二重ゼータ関数. 本報告集, 2023.

[13] 木村達雄. **概均質ベクトル空間**. 岩波書店, 1998.

[14] 鈴木美裕. 保型形式と概均質ゼータ関数. 本報告集, 2023.