概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（1 変数の場合）

杉山和成（千葉工業大学数学教室）

概要

佐藤幹夫・新谷卓郎 [SS2] による，1 変数概均質ゼータ関数の理論について解説する．木村達雄 [Ki1] や佐藤文広 [Sa1, Sa2] など，すでにすぐれた成書や解説が数多くあるので，詳細については省略して，なるべく予備知識を仮定せずに，歴史や最近の結果などについても適宜触れつつ，1 変数の概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（関数等式など）について紹介する．本稿で解説されるゼータ関数やゼータ積分は，以降の記事で（一般化され形を変えながら）繰り返し登場する．

1 Introduction

概均質ゼータ関数の入門としては，[Ki1, pp. 8-9] や [Sa2, pp. 6-7] のように，Riemann ゼータ関数を概均質ベクトル空間の理論で扱い，局所関数等式を導入するのが定番である．しかし，時にはいつもと違う味わいを求めたいと思うのが人情で，本稿では，繰り返しを避けるという意味もあって，正定値 2 次形式に付随するゼータ関数を最初の例として取り扱う事にする．この例で現れる群はコンパクトなので，群作用を持ち出す必然性は実はあまりないのであるが，「大きな群の作用」が役割を果たしている様子が Riemann ゼータ関数のときより見やすいかもしれない[*1]．

$SO(n) = \{k \in SL_n(\mathbb{C})\,;\, {}^t kk = I_n\}$ とする．$G = GL_1(\mathbb{C}) \times SO(n), V = \mathbb{C}^n$ とし，G の V の上への表現 ρ を

$$\rho(g)v = tkv \qquad (g = (t,k) \in G, v \in V)$$

*1 定番メニューを希望される方は，[Sa2, pp. 6–7], [Sug, pp. 1–4] などをご覧ください．Web から入手できます．

により定義すると，(G, ρ, V) は概均質ベクトル空間になる．さらに，$P(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = v_1^2 + \cdots + v_n^2$ は (G, ρ, V) の相対不変式である．すなわち，

$$P(\rho(g)v) = t^2 \cdot P(v) \qquad (g = (t, k) \in G, v \in V)$$

である．Riemann ゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ の積分表示

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{\infty} t^{s/2-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} dt$$

を群論的に一般化して，(G, ρ, V) に対するゼータ関数を定義してみよう．まず，$G^+ = \mathbb{R}_{>0} \times SO(n)_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}^n - \{0\}$ に推移的に作用している．ここで，$SO(n)_{\mathbb{R}}$ はコンパクトな実型を考えていることに注意する．積分を定義するためには，群やベクトル空間上の不変測度を固定する必要があるが，$\mathbb{R}_{>0}$ 上の不変測度としては，$d^{\times}t = \dfrac{2dt}{t}$ をとり，$SO(n)_{\mathbb{R}}$ 上の不変測度 dk は，$\int_{SO(n)_{\mathbb{R}}} dk = 1$ をみたすように正規化しておく[*2]．これで G^+ 上の測度 $dg = d^{\times}tdk$ が決まる．次に，$dv = dv_1 \ldots dv_n$ を $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度すると，

$$\omega(v) = P(v)^{-n/2} dv$$

は G^+ の作用に関して不変な $\mathbb{R}^n$ 上の測度になる．$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して，

$$SO(n)_{v,\mathbb{R}} = \{k \in SO(n)_{\mathbb{R}} \,;\, kv = v\}$$

を v における等方部分群（isotropy subgroup, stabilizer）とすると，

$$\mathbb{R}_{>0} \times SO(n)_{\mathbb{R}} / SO(n)_{v,\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{1.1}$$

となっている[*3]．各 $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して，$SO(n)_{v,\mathbb{R}}$ 上の不変測度 $d\mu_v$ を次の積分公式が成り立つように正規化する: 任意の $F(g) = F(t, k) \in L^1(G^+)$ に対して，

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \int_{SO(n)_{\mathbb{R}}} F(t, k) d^{\times}t dk \\ &\qquad = \int_0^{\infty} \int_{SO(n)_{\mathbb{R}}/SO(n)_{v,\mathbb{R}}} \omega(t\dot{k}v) \int_{SO(n)_{v,\mathbb{R}}} F(t, \dot{k}h) d\mu_v(h) \end{aligned} \tag{1.2}$$

[*2] 不変測度，より一般に，局所コンパクト群上の Haar 測度については，小林・大島 [KO]，野村 [No] などを参照してください．

[*3] G^+ の v における等方部分群 G_v^+ を $\mathbb{R}_{>0}$ に射影した像は，単位群 $\{1\}$ である．また，$SO(n)_{v,\mathbb{R}} \cong SO(n-1)_{\mathbb{R}}$ であり，コンパクト群である．

が成り立つ．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数全体がなす空間[*4]であるとし，$s \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$Z(f;s) = \int_0^\infty t^{2s} d^\times t \int_{SO(n)_\mathbb{R}} \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f(tkv) dk \tag{1.3}$$

とおく．これが，(G, ρ, V) に付随するゼータ積分である．積分の収束性の確認は一旦留保して，$Z(f;s)$ からゼータ関数を取り出そう．和と積分の順番を変更して，

$$Z(f;s) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \int_0^\infty t^{2s} d^\times t \int_{SO(n)_\mathbb{R}} f(tkv) dk$$

として，積分公式 (1.2) を $F(t,k) = t^{2s} f(tkv)$ に対して適用すると，

$$Z(f;s) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \int_0^\infty \int_{SO(n)_\mathbb{R}/SO(n)_{v,\mathbb{R}}} t^{2s} f(t\dot{k}v) \omega(t\dot{k}v) \int_{SO(n)_{v,\mathbb{R}}} d\mu_v(h)$$

となる．G^+ が $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に推移的に作用していることから，積分公式 (1.2) を用いると，任意の $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $\int_{SO(n)_{v,\mathbb{R}}} d\mu_v(h)$ は一定値 c であることが証明できる[*5]．さらに，$t^{2s} = \dfrac{P(t\dot{k}v)^s}{P(v)^s}$, $\omega(v) = P(v)^{-n/2} dv$ に注意すると，

$$\begin{aligned} Z(f;s) &= c \cdot \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{P(v)^s} \int_0^\infty \int_{SO(n)_\mathbb{R}/SO(n)_{v,\mathbb{R}}} P(t\dot{k}v)^{s-n/2} f(t\dot{k}v) d(t\dot{k}v) \\ &= c \cdot \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{P(v)^s} \int_{\mathbb{R}^n} P(x)^{s-n/2} f(x) dx \end{aligned}$$

と変形できる．2 つめの等号では同型 (1.1) を用いているが，1 点集合 $\{0\}$ は測度 0 なので，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上の積分を $\mathbb{R}^n$ 上の積分に直している．ゼータ関数 $\zeta_P(s)$ と（無限素点における）局所ゼータ関数 $\Phi(f;s)$ を

$$\begin{aligned} \zeta_P(s) &= \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{P(v)^s} = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{(v_1^2 + \cdots + v_n^2)^s}, \\ \Phi(f;s) &= \int_{\mathbb{R}^n} P(x)^{s-n/2} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (x_1^2 + \cdots + x_n)^{s-n/2} f(x) dx \end{aligned}$$

[*4] C^∞-関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が，任意の $p, q \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $\sup_{v \in \mathbb{R}^n} |v^p D_v^q f(v)| < +\infty$ をみたすとき，f は急減少関数であるといわれる．ここで，$p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n)$ に対して $v^p = v_1^{p_1} \ldots v_n^{p_n}$, $D_v^q = (\partial/\partial v_1)^{q_1} \cdots (\partial/\partial v_n)^{q_n}$ である．

[*5] (1.2) の左辺に $F(t,k) = e^{-\pi P(tkv)}$ を代入した積分は v によらないことを用いればよい．

と定義する．$\zeta_P(s)$ は Epstein ゼータ関数とよばれているものである[*6]．$\zeta_P(s)$ と $\Phi(f;s)$ はともに $\mathrm{Re}(s) > n/2$ の範囲で絶対収束する[*7]ので，Fubini の定理より，この範囲で $Z(f;s)$ が収束することが分かり，形式的な計算が正当化される．よって，

命題 1.1　$\mathrm{Re}(s) > n/2$ のとき，次の等式が成り立つ．

$$Z(f;s) = c \cdot \zeta_P(s)\Phi(f;s).$$

命題 1.1 は，ゼータ積分が（大域）ゼータ関数と局所ゼータ関数の積であらわされるということを示しており，**ゼータ関数の積分表示**とよばれるものの一例である．

Poisson の和公式について復習しよう．まず，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の **Fourier 変換**を

$$\widehat{f}(v^*) = \int_{\mathbb{R}^n} f(v) e^{2\pi i \langle v, v^* \rangle} dv$$

と定義する．ここで，$v = (v_1, \ldots, v_n)$, $v^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle v, v^* \rangle = \sum_{i=1}^n v_i v_i^*$ としている．$\widehat{f}(v^*) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であるが，

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^n} f(v) = \sum_{v^* \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(v^*)$$

という等式が成り立つことが知られている（**Poisson の和公式**）．$g = (t,k) \in G^+$ に対して，$f_g(v) = f(tkv)$ とおくと，$\widehat{f_g}(v^*) = t^{-n} \widehat{f}(t^{-1} \cdot {}^t k^{-1} v^*)$ となることが簡単に確かめられるので，$g = (t,k) \in G^+, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^n} f(tkv) = t^{-n} \sum_{v^* \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(t^{-1} \cdot {}^t k^{-1} v^*) \tag{1.4}$$

となる．(1.3) の積分を少し修正して，$s \in \mathbb{C}, f^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$Z^*(f^*;s) = \int_0^\infty t^{-2s} d^\times t \int_{SO(n)_{\mathbb{R}}} \sum_{v^* \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} f^*(t^{-1} \cdot {}^t k^{-1} v^*) dk$$

[*6] 実は，$\zeta_P(s)$ の関数等式については，Hurwitz が Epstein より 10 年以上前に 1880 年代の終わりに見つけていた．Hurwitz の数学日記の中に論文の原稿が残っている．[Os] を参照．Epstein's zeta functions という呼称は Siegel と Deuring により広まったと思われる．Epstein は Siegel の Frankfurt 大学での同僚であったが，Epstein はユダヤ人であったため失職した．戦後，Siegel が Frankfurt 大学数学教室の歴史について講演をしているが，その中で自殺する直前の Epstein を訪問した時のことについても触れている．（講演録が上野 [U, 第 1 巻] に所収．）

[*7] $\Phi(f;s)$ の収束性は $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であることから分かる．$\zeta_P(s)$ の収束については，たとえば，[Ki1, p. 234] をみよ．

とおく．後述するが，$Z^*(f^*;s)$ は双対概均質ベクトル空間 (G,ρ^*,V^*) に付随するゼータ積分である．$P(t^{-1}\cdot {}^tk^{-1}v^*)=t^{-2}\cdot P(v^*)$ だから，t のべきが t^{2s} でなく t^{-2s} となっている．

Poisson の和公式を利用して，$Z(f;s)$ と $Z^*(f^*;s)$ の間の関係を導く．まず，t の積分範囲を 2 つに分けて，

$$Z_+(f;s)=\int_1^\infty t^{2s}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}f(tkv)dk,$$
$$Z_-(f;s)=\int_0^1 t^{2s}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}f(tkv)dk$$

とおく．明らかに $Z(f;s)=Z_+(f;s)+Z_-(f;s)$ であるが，$Z_+(f;s)$ は任意の $s\in\mathbb{C}$ に対して収束し，s の整関数を定める．というのも，$1\le t$ のとき，実数 a に対して，t^a は a についての単調増加関数になるからである．$Z(f;s)$ の s の関数としての極は，$Z_-(f;s)$ の方から出てくる．$Z^*(f^*;s)$ についても同様に，

$$Z_+^*(f^*;s)=\int_0^1 t^{-2s}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v^*\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}f^*(t^{-1}\cdot {}^tk^{-1}v^*)dk,$$
$$Z_-^*(f^*;s)=\int_1^\infty t^{-2s}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v^*\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}f^*(t^{-1}\cdot {}^tk^{-1}v^*)dk$$

と 2 つの積分に分ける．**積分範囲の取り方が反対になっている**ことに注意しよう．上で説明したのと同じ理由で，$Z_+^*(f^*;s)$ は s の整関数を定める．以下，$\mathrm{Re}(s)>n/2$ とする．(1.4) を使いたいが，$\{0\}$ の扱いに注意が必要で，

$$\begin{aligned}
Z_-^*(\widehat{f};s)&=\int_1^\infty t^{-2s}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v^*\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(t^{-1}\cdot {}^tk^{-1}v^*)dk-\widehat{f}(0)\int_1^\infty t^{-2s}d^\times t\\
&=\int_1^\infty t^{-2s+n}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v\in\mathbb{Z}^n}f(tkv)dk-\frac{\widehat{f}(0)}{s}\\
&=\int_1^\infty t^{-2s+n}d^\times t\int_{SO(n)_\mathbb{R}}\sum_{v\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}f(tkv)dk+f(0)\int_1^\infty t^{-2s+n}d^\times t-\frac{\widehat{f}(0)}{s}\\
&=Z_+\left(f;\frac{n}{2}-s\right)+\frac{f(0)}{s-\frac{n}{2}}-\frac{\widehat{f}(0)}{s}
\end{aligned}$$

となる．同様の変形を $Z_-\left(f;\frac{n}{2}-s\right)$ に対しても行う事が出来て，結局

$$Z^*(\widehat{f};s)=Z_+^*(f;s)+Z_+\left(f;\frac{n}{2}-s\right)+\frac{f(0)}{s-\frac{n}{2}}-\frac{\widehat{f}(0)}{s}=Z\left(f;\frac{n}{2}-s\right)$$

が示された．以上をまとめて，次の命題を得る．

命題 1.2（ゼータ積分の関数等式） $Z(f;s)$ および $Z^*(f^*;s)$ は全 $\mathbb{C}$ 平面に解析接続され，$s=0,\dfrac{n}{2}$ で 1 位の極を持つ．さらに，関数等式

$$Z^*(\widehat{f};s)=Z\left(f;\frac{n}{2}-s\right)$$

が成り立つ．

最後に局所ゼータ関数 $\Phi(f;s)$ の性質を引用する．$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)^2$ をラプラシアンとすると，部分積分などにより，

$$\Phi(\Delta f;s+1)=\int_{\mathbb{R}^n}P(x)^{s+1-n/2}(\Delta f)(x)dx=4s\left(s+1-\frac{n}{2}\right)\Phi(f;s)$$

となることが確かめられるが，この式を繰り返し使う事により $\Phi(f;s)$ は全 $\mathbb{C}$ 平面に有理型に解析接続される．さらに，次の等式が成り立つことが知られている．

命題 1.3（局所関数等式）

$$\Phi(\widehat{f};s)=\pi^{-2s+(n-2)/2}\Gamma(s)\Gamma\left(s-\frac{n-2}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{n}{2}-s\right)\Phi\left(f;\frac{n}{2}-s\right).$$

この命題の証明については，木村 [Ki1, 命題 4.23] を参照．いずれにせよ，これで準備がすべて終わって，命題 1.1, 1.2 より，

$$\zeta_P(s)\Phi(\widehat{f};s)=\zeta_P\left(\frac{n}{2}-s\right)\Phi\left(f;\frac{n}{2}-s\right)$$

がわかり，これと命題 1.3 をあわせて，次の定理を得る．

定理 1.4（ゼータ関数の関数等式） $\zeta_P(s)$ は関数等式

$$\zeta_P\left(\frac{n}{2}-s\right)=\pi^{-2s+(n-2)/2}\Gamma(s)\Gamma\left(s-\frac{n-2}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{n}{2}-s\right)\zeta_P(s)$$

をみたす．この関数等式は，次のように整理される．

$$\widehat{\zeta}_P\left(\frac{n}{2}-s\right)=\widehat{\zeta}_P(s),\qquad \text{ただし，}\widehat{\zeta}_P(s):=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_P(s).$$

注意 1.5 (1) $Z(f;s)$ は $s=0,\ \dfrac{n}{2}$ において 1 位の極を持つが，$s=0$ の方は $\Phi(f;s)$ からくる極である．$\zeta_P(s)$ は $s=\dfrac{n}{2}$ のみで 1 位の極を持ち，他では正則である．詳細は略す．

(2) ゼータ積分 (1.3) において $f_0(v)=e^{-\pi P(v)}$ とすると，$SO(n)_{\mathbb{R}}$ の積分は消えて，正定値 2 次形式 $P(v)$ に付随するテータ級数の Mellin 変換になり，この場合はテータ変換公式から直接 $\zeta_P(s)$ の関数等式が導かれて，局所関数等式は不要である[*8]．例えば，高瀬 [Ta, 2.5 節] を参照．

さて，$P(v)$ を不定値 2 次形式（例えば

$$P(v)=v_1^2+\cdots+v_p^2-v_{p+1}^2-\cdots-v_n^2$$

など）に対して上の方法を一般化しようとしても簡単には上手く行かない．

(A) まず，整数 m に対して，$P(v)=m$ をみたす $v\in\mathbb{Z}^n$ の個数が有限ではない．別の言い方をすると，不定値の場合，$SO(P)_{\mathbb{R}}\cong SO(p,n-p)_{\mathbb{R}}$ は非コンパクトでその数論的部分群も無限群になるため，無限個の $v\in\mathbb{Z}^n$ で $P(v)$ の値が同じになりうる．このため，$\sum|P(v)|^{-s}$ はこのままでは収束しない．

(B) 不定値の場合，f を f_0 のように特殊化しても $\Phi(f_0;s)$ は簡単な積分にならず，実は超幾何関数に関連する積分になる．

(C) 不定値だと，P の零点集合 S と $\mathbb{Z}^n$ の共通部分が $\{0\}$ より真に大きい．すなわち，$\{v\in\mathbb{Z}^n\,;\,P(v)=0\}\supsetneqq\{0\}$ となる．このことにより，ゼータ積分の主要部の計算が困難になる．

これらが，Siegel が不定値 2 次形式のゼータ関数を考えたときに直面した困難であり（論文は 1938-39 年に出版），一般に概均質ゼータ関数を定義し関数等式を証明するときも全く同様の障壁を乗り越えなければならない．概均質ベクトル空間の理論では，第 1 の問題 (A) については Siegel のアイディアを踏襲している．すなわち，密度とよばれる量 $\mu(v)$ を分子にのせて重みを付け，さらに Γ-軌道の代表点での和を考えることで収束する Dirichlet 級数を定義する．第 2，第 3 の問題 (B),(C) を扱うときに，テスト関数 f を導入したことの利益が享受できる．

[*8] $\Phi(f_0;s)$ がガンマ関数で表されるという事の反映である．実は，$\zeta_P(s)$ の関数等式が先に分かっているのであれば，局所関数等式が導かれる．命題 1.2，命題 1.3，定理 1.4 の 3 つの事実のうち，2 つが分かっていれば，残りの一つが導かれる，という仕組みになっている．

それでは，以下，Sato-Shintani [SS2] の概均質ゼータ関数の理論について，概観を見ていこう．

2 b-関数，局所関数等式

まず最初に，

- **[仮定 0]** (G, ρ, V) は $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間である

と仮定しよう．すなわち，以下の (i)〜(iv) を仮定する．

(i) G $(\subset GL_m(\mathbb{C}))$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された連結線形代数群である．

(ii) V は $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$ となる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $V_{\mathbb{Q}}$ を含む．（$V_{\mathbb{Q}}$ を V の $\mathbb{Q}$-構造とよぶ．）

(iii) $V_{\mathbb{Q}}$ の適当な基底をとり $V_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{C}^n \cong V$ とする．$g = (g_{ij}) \in G$ に対して，$\rho(g) = (\rho(g)_{kl}) \in GL_n(\mathbb{C})$ とかくとき，各行列成分 $\rho(g)_{kl}$ は g_{ij} の $\mathbb{Q}$-係数の有理関数になる．

(iv) ある $v_0 \in V$ が存在して，$\rho(G)v_0$ が V の Zariski 開集合になる．

このとき，$S := V - \rho(G)v_0$ を特異集合とよぶ．定義より，S は Zariski 閉集合（すなわち，幾つかの多項式の零点集合）になる．

次に，V^* を V の双対ベクトル空間とし，$\rho^* : G \to GL(V^*)$ を ρ の反傾表現とする．すなわち，ρ^* は $g \in G, v \in V, v^* \in V^*$ に対して，$\langle \rho(g)v, \rho^*(g)v^* \rangle = \langle v, v^* \rangle$ により定義される表現であり，V^* の適当な基底をとると，$\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$ $(n = \dim_{\mathbb{C}} V)$ となる．我々は常に，

- **[仮定 1]** G は簡約可能代数群[*9]であり，特異集合 S は $\mathbb{C}$ 上で既約な超曲面である

と仮定する．簡約可能という仮定から，$V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ の基底をうまくとると，${}^t\rho(G) = \rho(G) \subset GL_n(\mathbb{C})$ とできるので[*10]，双対三つ組 (G, ρ^*, V^*) はふたたび概均

[*9] 定義は [Ki1, § 1.4] を参照．代数群については，最近では，太田・西山 [ON] など日本語で書かれた良い教科書がある．「簡約可能」を単に「簡約」とする方が最近の傾向ではあるが、ここでは [Ki1] に合わせた。

[*10] Mostow の定理を使う．例えば，Platonov-Rapinchuk [PR, Theorem 3.7] を参照．

質ベクトル空間になり，その特異集合 S^* は $\mathbb{C}$ 上既約な超曲面となる[*11]．すべての $v \in V_{\mathbb{Q}}$ に対して $\langle v, v^* \rangle \in \mathbb{Q}$ をみたすような $v^* \in V^*$ の全体を $V_{\mathbb{Q}}^*$ とすると，$V_{\mathbb{Q}}^*$ は V^* の $\mathbb{Q}$-構造になり，(G, ρ^*, V^*) はこの $\mathbb{Q}$-構造に対して $\mathbb{Q}$ 上定義される．[Ki1, 定理 2.9] より，

$$S = \{v \in V\,;\, P(v) = 0\}$$

とかくとき，$P(v)$ は (G, ρ, V) の相対不変式になるのであった．すなわち，G の有理指標 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ が存在して，

$$P(\rho(g)v) = \chi(g)P(v) \qquad (g \in G, v \in V) \tag{2.1}$$

が成り立つ．(G, ρ, V) が $\mathbb{Q}$ 上定義されているので，P は $\mathbb{Q}$-係数の絶対既約多項式にとれる．[Ki1, 命題 2.18] より，$d = \deg P$, $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ とすると，$d|2n$ であり，

$$\det \rho(g)^2 = \chi(g)^{\frac{2n}{d}} \tag{2.2}$$

が成り立つ．後でこの関係式は，ベクトル空間上の不変測度を構成するときなど頻繁に用いられる．b-関数を定義しよう．(G, ρ^*, V^*) の特異集合 S^* の定義方程式 P^* はやはり $\mathbb{Q}$-係数の絶対既約多項式にとれて，

$$P^*(\rho^*(g)v^*) = \chi(g)^{-1}P^*(v^*) \qquad (g \in G, v^* \in V^*) \tag{2.3}$$

をみたす．$P^*(D_v)$ を $P^*(D_v)e^{\langle v, v^* \rangle} = P^*(v^*)e^{\langle v, v^* \rangle}$ $(v \in V, v^* \in V^*)$ をみたす V 上の偏微分作用素とすると，$P^*(D_{\rho(g)v}) = \chi(g)^{-1}P^*(D_v)$ となる．よって，$P^*(D_v)P(v)^{s+1}$ は χ^s に対応する相対不変式になるので，$P(v)^s$ と（s に依存する）定数倍を除いて一致する．これより，

$$P^*(D_v)P(v)^{s+1} = b(s)P(v)^s \tag{2.4}$$

をみたす s の多項式 $b(s)$ が存在することが分かる．詳細については，[Ki1, 命題 2.22] を参照のこと．$b(s)$ を (G, ρ, V) の **b-関数**とよぶ．例えば，$P(v) = v_1^2 + \cdots + v_n^2$ に対しては，$P^*(D_v) = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial v_n}\right)^2$ ととれて，

$$P^*(D_v)P(v)^{s+1} = 4(s+1)\left(s + \frac{n}{2}\right)P(v)^s$$

が成り立つ．

[*11] ざっくり言えば，(G, ρ, V) と (G, ρ^*, V^*) は，（$\mathbb{C}$ 上では）そっくり同じと考えていい．

[仮定 0](i) のように $G \subset GL_m(\mathbb{C})$ と埋め込まれているとき，$G_{\mathbb{R}} = G \cap GL_m(\mathbb{R})$ とする．$G_{\mathbb{R}}$ には Lie 群の構造が入り，G^+ をその単位連結成分とする．$V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ とする．$G_{\mathbb{R}}$ や $V_{\mathbb{R}}$ の位相は Zariski 位相ではなくて，$\mathbb{R}$ の普通の位相で考える．G^+ は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ へ作用するが，この作用は推移的ではない．

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_\nu$$

を連結成分への分解とすると，各 V_i は G^+-軌道である．G^+ は $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ にも反傾表現で作用しているが，$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ は同じ個数の有限個の連結成分に分かれる．詳しくは，[Ki1, 系 4.4, 命題 4.5] を参照せよ．

例 2.1 (1) $G = GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$, $V = \mathbb{C}$ として，$x \mapsto tx \ \ (t \in G, x \in V)$ により G を V に作用させてできる 1 次元概均質ベクトル空間の場合，$P(v) = v$ であり，$S = \{0\}$ である．$G^+ = \mathbb{R}_{>0}$ で $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_{>0} \cup \mathbb{R}_{<0}$ と 2 つの連結成分に分かれる．b-関数 $b(s)$ は

$$\frac{d}{dv} v^{s+1} = (s+1)v^s, \qquad b(s) = s+1$$

である．

(2) $G = GL_n(\mathbb{C}), V = M_n(\mathbb{C})$ として，$\rho(g)v = gv \ (g \in G, v \in V)$ と定義すると，(G, ρ, V) は概均質ベクトル空間で，$P(v) = \det v$ であり，$S = \{v \in V \,;\, \det v = 0\}$ である．$G^+ = \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \,;\, \det g > 0\}$ で，

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \{v \in V_{\mathbb{R}} \,;\, \det v > 0\} \cup \{v \in V_{\mathbb{R}} \,;\, \det v < 0\}$$

と連結成分に分解する．b-関数 $b(s)$ は

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial v_{ij}}\right) \det(v)^{s+1} = \prod_{i=1}^{n} (s+i) \cdot \det(v)^s, \qquad b(s) = \prod_{i=1}^{n}(s+i)$$

となることが知られている．

(3) $G = GL_n(\mathbb{C})$ が対称行列の空間 $V = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ に $\rho(g)v = gv\,{}^t g \ (g \in G, v \in V_{\mathbb{R}})$ で作用しているとすると，(G, ρ, V) は概均質ベクトル空間で，$P(v) = \det v$, $S = \{v \in V \,;\, \det v = 0\}$ である．このとき，Sylvester の慣性法則より，

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_0^{(n)} \cup V_1^{(n)} \cup \cdots \cup V_n^{(0)}, \tag{2.5}$$
$$V_p^{(n)} = \text{符号}\,(p, n-p)\,\text{の非退化実対称行列}$$

と連結成分に分解される．ここでは，$G_{\mathbb{R}}$ でも G^{+} でも同じ分解になる．b-関数 $b(s)$ は

$$b(s)=\prod_{i=1}^{n}\left(s+\frac{i+1}{2}\right)$$

となることが知られている．

$V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}=V_1\cup\cdots V_\nu$ および $V_{\mathbb{R}}^{*}-S_{\mathbb{R}}^{*}=V_1^{*}\cup\cdots V_\nu^{*}$ を連結成分への分解とする[*12]．$\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}),\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^{*})$ をそれぞれ $V_{\mathbb{R}},V_{\mathbb{R}}^{*}$ 上の急減少関数の空間として，各連結成分ごとに

$$\Phi_i(f;s)=\int_{V_i}|P(v)|^{s-n/d}f(v)dv,\qquad (f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})\,;\,i=1,\ldots,\nu),\tag{2.6}$$

$$\Phi_i^{*}(f^{*};s)=\int_{V_i^{*}}|P^{*}(v^{*})|^{s-n/d}f^{*}(v^{*})dv^{*},\quad (f^{*}\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^{*})\,;\,i=1,\ldots,\nu),\tag{2.7}$$

と定義する．ただし，dv,dv^{*} は $V_{\mathbb{R}},V_{\mathbb{R}}^{*}$ 上の Lebesgue 測度である．$\Phi_i(f;s)$, $\Phi_i^{*}(f^{*};s)$ は $\mathrm{Re}(s)>n/d$ において絶対収束し s の正則関数を与えるが，b-関数を用いると，全 $\mathbb{C}$ 平面に有理型に解析接続される．詳細は，[Ki1, §4.1] を参照の事．$f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$, $f^{*}\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^{*})$ に対して，その Fourier 変換 $\widehat{f}\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^{*})$, $\widehat{f^{*}}\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ をそれぞれ，

$$\widehat{f}(v^{*})=\int_{V_{\mathbb{R}}}f(v)e^{2\pi i\langle v,v^{*}\rangle}dv,\qquad \widehat{f^{*}}(v)=\int_{V_{\mathbb{R}}^{*}}f^{*}(v^{*})e^{2\pi i\langle v,v^{*}\rangle}dv^{*}$$

と定義する．b-関数 $b(s)$ を 1 次式に分解して，$b(s)=b_0\prod_{i=1}^{d}(s+\alpha_i)$ とするとき，

$$\gamma(s)=\prod_{i=1}^{d}\Gamma(s+\alpha_i)$$

とおく．このとき，次の事実が知られている．

命題 2.2（局所関数等式） $i=1,\ldots,\nu$ とし，$f^{*}\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^{*})$ とする．f^{*} によらない整関数 $c_{ij}(s)$ が存在して，

$$\Phi_i\left(\widehat{f^{*}};s\right)=\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\sum_{j=1}^{\nu}c_{ij}(s)\Phi_j^{*}\left(f^{*};\frac{n}{d}-s\right)\tag{2.8}$$

が成り立つ．

[*12] 実際の応用上は，V_i,V_j^{*} は幾つかの連結成分の和集合になっているということも許容する．

局所関数等式が成り立つ理由について，簡単に説明したい．まず，収束などを無視して，形式的に

$$\int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle} dv$$

という V^* 上の関数を考える．この関数において v^* を $\rho^*(g)v^*$（ただし，$g \in G^+$）に置き換えると，

$$\begin{aligned}\int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle v,\rho^*(g)v^*\rangle} dv &= \int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle \rho(g)^{-1}v,v^*\rangle} dv \\ &= \int_{V_{\mathbb{R}}} P(\rho(g)v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle} d(\rho(g)v) \\ &= \chi(g)^{s-n/d} \int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle} \underbrace{\det\rho(g)}_{=\chi(g)^{n/d}} dv \\ &= \chi(g)^{s} \int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s} e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle} dv\end{aligned}$$

となり，G^+ の作用に関し，相対不変である．一方，$P^*(v^*)^{-s}$ も，

$$P^*(\rho^*(g)v^*)^{-s} = \chi^*(g)^{-s} P^*(v^*)^{-s} = \chi(g)^s P^*(v^*)^{-s} \quad (g \in G^+)$$

となるので，同じ指標 $\chi(g)^s$ に対応する相対不変式である．概均質ベクトル空間では同じ指標に対応する相対不変式は定数倍を除いて一致するのだから，s にのみに依存する関数 $c(s)$ が存在して，

$$\int_{V_{\mathbb{R}}} P(v)^{s-n/d} e^{2\pi i\langle v,v^*\rangle} dv = c(s) \cdot P^*(v^*)^{-s}$$

となるであろう，というのが素朴な期待であり，この期待を超関数の等式として正当化したのが (2.8) である．$\Phi_i(\widehat{f^*}; s)$, $\Phi_j^*(f^*; \frac{n}{d} - s)$ は同じ指標に対応する G^+-相対不変な超関数であり，V_j^* が G^+-軌道であるので，もし f^* の台が $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ に含まれているのであれば，軌道上の超関数で群の作用で不変なものは定数倍を除いて一意的に決まる，という定理[*13]から (2.8) は直ちにしたがう．しかし，一番テクニカルなのは，$V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ 上の超関数として得られた等式を $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の超関数の等式に拡張するところ（[Ki1, 命題 3.14] など）であり，$\mathbb{Q}_p$ 上の局所関数等式については，対応する結果が存在しないとのことである．

[*13] Bruhat, Harish-Chandra らの結果．例えば，[Ki1, 定理 3.24] を参照．

局所関数等式と b 関数の関係についても触れておこう．b-関数のガンマ関数部分 $\gamma(s-n/d)$ は b-関数から定まっているが，逆に局所関数等式が b-関数の明示式なしに計算できていれば，b-関数が計算できる．（実際に，局所関数等式が b-関数より先に分かる場合がある．）さらに，局所関数等式が存在することの系として，$b(s)$ が

$$b(s) = (-1)^d b\left(-s - \frac{n}{d} - 1\right). \tag{2.9}$$

という関数等式をみたすことがわかる．（詳しくは，[Ki1, 命題 4.19] を参照．）

局所関数等式の例

局所関数等式の例をいくつか紹介する．

(1) $G = GL_1(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}$ の場合，$P(v) = v$, $P^*(v^*) = v^*$ であり，任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^\infty |x|^{s-1}\widehat{f}(x)dx \\ \displaystyle\int_{-\infty}^0 |x|^{s-1}\widehat{f}(x)dx \end{pmatrix} = (2\pi)^{-s}\cdot\Gamma(s)\cdot\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}s}{2}} & e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}s}{2}} \\ e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}s}{2}} & e^{\frac{\pi\sqrt{-1}s}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^\infty |t|^{-s}f(t)dt \\ \displaystyle\int_{-\infty}^0 |t|^{-s}f(t)dt \end{pmatrix}$$

が成り立つ．[Ki1, 命題 4.21] を参照．

(2) 不定値 2 次形式の場合の局所関数等式について述べよう．一般に，$A \in GL_n(\mathbb{C})$, $x \in \mathbb{C}^n$ に対して，$A[x] = {}^t xAx$ と表す（Siegel の記号）．$n \geq 3$ と仮定する．$1 \leq p \leq n-1$ に対して，

$$I_{p,n-p} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

とおくと，$\mathbb{R}$ 上の符号 $(p, n-p)$ の不定値 2 次形式 $P(x)$ はある $B \in GL_n(\mathbb{R})$ を用いて

$$P(x) = ({}^t BI_{p,n-p}B)[x]$$

と表される．$SO(P) = \{g \in SL_n(\mathbb{C})\ ;\ P(gx) = P(x)\}$ とおき，$G = GL_1 \times SO(P)$ の $V = V^* = \mathbb{C}^n$ への作用 ρ, ρ^* を $\rho(g)x = \alpha\, Ax$, $\rho^*(g)x = \alpha^{-1}\, {}^t A^{-1}x$ $(g = (\alpha, A) \in G, x \in \mathbb{C}^n)$ で定めると，(G, ρ, V) は正則概均質ベクトル空間になり，$P(x)$ は (G, ρ, V) の既約相対不変式で，$Q(y) = (B^{-1}I_{p,n-p}{}^t B^{-1})[y]$ は (G, ρ^*, V^*) の既約相対不変式である．(G, ρ, V) の特異集合は $S = \{x \in V\ ;\ P(x) = 0\}$ で

与えられ，(G, ρ^*, V^*) の特異集合は $S^* = \{y \in V^* \ ; \ Q(y) = 0\}$ で与えられる．$\sqrt{|\det P|} = |\det B|$ とかく．

$V_\pm = \{x \in V_\mathbb{R} \ ; \ \pm P(x) > 0\}$，$V^*_\pm = \{y \in V^*_\mathbb{R} \ ; \ \pm Q(y) > 0\}$ とおくと，$V_\mathbb{R} - S_\mathbb{R} = V_+ \cup V_-$，$V^*_\mathbb{R} - S^*_\mathbb{R} = V^*_+ \cup V^*_-$ と分解する．これらは $G_\mathbb{R}$-軌道分解ではあるが，一般に連結ではない（$p = 1$ あるいは $= n-1$ の場合）．しかし特に支障はない．このとき，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int_{V^*_+} |Q(y)|^{s-\frac{n}{2}} \widehat{f}(y)dy \\ \displaystyle\int_{V^*_-} |Q(y)|^{s-\frac{n}{2}} \widehat{f}(y)dy \end{pmatrix} = A(s) \cdot \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{V_+} |P(y)|^{-s} f(y)dy \\ \displaystyle\int_{V_-} |P(y)|^{-s} f(y)dy \end{pmatrix},$$

但し，

$$\begin{aligned} A(s) &= \Gamma(s+1-\frac{n}{2})\ \Gamma(s)\ \sqrt{|\det P|} \\ &\qquad \cdot\ \pi^{-2s+\frac{n}{2}-1} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\pi(s-\frac{p}{2}) & \sin\frac{\pi p}{2} \\ \sin\frac{\pi(n-p)}{2} & -\sin\pi(s-\frac{n-p}{2}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.10}$$

である．この局所関数等式は，Gelfand-Shilov による一般化関数（generalized functions）の本の中で最初に登場した．[Sug] に詳細な計算が書かれている．

(3) 正方行列の空間 $G = GL_n(\mathbb{C})$, $V = M_n(\mathbb{C})$ の場合について考えよう．上で述べたように，$V_\mathbb{R} - S_\mathbb{R}$ は 2 つの連結成分に分かれるが，本質的に局所ゼータ関数は同じものなので，連結成分に分けずに局所関数等式をかくことにすると，$f \in \mathcal{S}(M_n(\mathbb{R}))$ に対して，

$$\begin{aligned} &\int_{M_n(\mathbb{R})} |\det x|^{s-n} \widehat{f}(x)dx \\ &\qquad = (2\pi)^{-ns} \cdot (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^n \cdot \cos\frac{\pi s}{2} \cdots \cos\frac{\pi(s-n+1)}{2} \\ &\qquad\quad \times \Gamma(s)\Gamma(s-1)\cdots\Gamma(s-n+1) \cdot \int_{M_n(\mathbb{R})} |\det y|^{-s} f(y)dy \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる．符号で分けた行列型の関数等式の係数については，数学の歩み [SS1] の中に Shintani の結果 [Sh1, Theorem 1.1] を使った計算法がかかれている．[Sug] の中にそれが引き写されている．

(4) 対称行列のなす概均質ベクトル空間の局所関数等式は，Shintani [Sh2] により計算された．$G = GL_n(\mathbb{C}), V = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ として，$\rho(g)v = gv\,{}^t g$ $(g \in G,\, v \in V)$ とする．$S = \{v \in V\,;\, \det v = 0\}$ とおくと，$V - S$ は単一の G-軌道である．この例では，V と V^* を $\langle v, v^* \rangle = \mathrm{tr}\, vv^*$ により同一視する．$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の連結成分への分解は (2.5) のように与えられている．$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して，

$$\Phi_i(f;s) = \int_{V_i^{(n)}} |P(v)|^{s-(n+1)/2} f(v)dv \qquad (\mathrm{Re}(s) > (n+1)/2, 0 \le i \le n)$$

と定義する．

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(s + \frac{i+1}{2}\right) \tag{2.12}$$

とおき，さらに，$0 \le i, j \le n$ に対して，

$$\begin{aligned} u_{ij}(s) = &\sqrt{-1}^{(n+1)(i+j-n/2)}(-1)^{(n-j)(n-j+1)/2} \\ &\times \sum_{r=\max(0,i+j-n)}^{\min(i,j)} (-1)^{r(n+1)} \alpha_{j,r}\alpha_{n-j,i-r} \cdot \boldsymbol{e}\left[\frac{2r-i-j}{2}\right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

とおく．$\alpha_{i,j}$ はある定数で，定義は [Sh2, Lemma 14] を参照の事．このとき，

$$\Phi_i(\widehat{f};s) = \pi^{n(n-1)/4}(2\pi)^{-ns}\gamma\left(s - \frac{n+1}{2}\right)\boldsymbol{e}\left[\frac{ns}{4}\right]\sum_{j=0}^{n} u_{ij}(s)\Phi_j\left(f; \frac{n+1}{2} - s\right)$$

となる．詳細については原論文を参照してください．

(5) 2 元 3 次形式の空間の局所関数等式は，Shintani [Sh1] で計算された．$G = GL_2(\mathbb{C})$ とし，V を 2 元 3 次形式の空間

$$\{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^4$$

とする．G は V に u, v への変数変換として作用する．

$$P(x) = b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$$

を判別式とすると，$P(x)$ は (G,V) の相対不変式である．$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の連結成分への分解は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup V_2$，ただし，$V_i = \{x \in V_{\mathbb{R}}\,;\, (-1)^{i-1}P(x) > 0\}$，となる．$V$ と

V^* をある内積で同一視する．このとき，$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \int_{V_1} |P(x)|^{s-1} \widehat{f}(x)dx \\ \int_{V_1} |P(x)|^{s-1} \widehat{f}(x)dx \end{pmatrix} = \frac{3^{3s-2}}{2\pi^{4s}} \Gamma(s)^2 \Gamma\left(s - \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(s + \frac{1}{6}\right) \\ \times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s & \sin \pi s \\ 3\sin \pi s & \sin 2\pi s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{V_1} |P(x)|^{-s} f(x)dx \\ \int_{V_2} |P(x)|^{-s} f(x)dx \end{pmatrix}$$

が成立する．詳細は原論文を参照していただきたいが，かなり面倒な計算である．F. Sato [Sa4] は，$c_{ij}(s)$ の計算を退化主系列の絡作用素の計算に帰着させるという公式を示したが，その応用例として，上の関数等式の別証明が与えられている．

注意 2.3 (1) 第 1 節「Introduction」の最後で述べた問題 (B) について，Siegel は不定値 2 次形式の場合に（f を特殊化した）局所ゼータ関数を超幾何関数を用いてあらわし，超幾何関数についての公式を用いて局所関数等式を計算した．しかし，一般の場合に $\mathbb{R}$ 上の局所ゼータ関数が既知の関数であらわされるかどうかは分からない．むしろ，$\Phi(f;s)$ の明示的な計算よりも局所関数等式の計算の方がやさしい場合が多いのである．

(2) Shintani [Sh1, Theorem 1.1] は，$c_{ij}(s)$ が $e^{\pi\sqrt{-1}s/2}$, $e^{-\pi\sqrt{-1}s/2}$ の d 次以下の多項式として表されるという事を証明した．[Ki1, § 4.3] に詳細な解説がある．しかし，この結果も $c_{ij}(s)$ の完全な明示式を与えているわけはなく，命題 2.2 は厳密にいえば局所関数等式の「存在定理」である．

(3) 命題 2.2 は，1961 年頃に佐藤幹夫氏により発見されたとのことである．佐藤幹夫氏が概均質ベクトル空間の定義にたどり着いた元々の動機は，「斉次多項式で与えられる定数係数偏微分作用素のうち，その基本解がふたたび何らかの斉次多項式を用いて明示的に表されるようなものの一般的な枠組みを知りたい」ということであった[*14]．初期の頃には，概均質ベクトル空間の理論が代数解析学の手法の「実験台」として機能し，b-関数の超局所計算法などが誕生し（柏原 [Ka] を参照），その成果の結晶として，既約正則という最も基本的なクラスの概均質ベクトル空間の b-関数が超局所計算法を用いてすべて計算され

*14 基本解の構成は，$1/P(v)$ の Fourier 変換と関係している．命題 2.2 は，多項式の複素冪の超関数としての Fourier 変換がふたたび多項式の複素冪になっている，と解釈できることに注意せよ．命題 2.2 を，**概均質ベクトル空間の基本定理**とよぶこともある．

た．一方，関数等式の係数 $c_{ij}(s)$ についても超局所計算法が開発されたが[*15]，こちらは上手く行かない部分があるらしく，既約正則の場合でも，幾つかの例では $c_{ij}(s)$ が計算されていない．

3 ゼータ積分とゼータ関数の定義

[仮定 **0**], [仮定 **1**] に加え，次の仮定をおく．これはゼータ関数を考えるうえで基本的なものである．

- [仮定 **2**] 任意の $v \in (V - S) \cap V_{\mathbb{Q}}$ に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(G_v^\circ, GL_1) = \{1\}$ となる．ここで，G_v° は，v における等方部分群 $G_v = \{g \in G\,;\, \rho(g)v = v\}$ の（代数群としての）単位連結成分である．

実 Lie 群 $G_{\mathbb{R}}$ の単位連結成分を G^+ とし，

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_\nu, \quad V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^* = V_1^* \cup \cdots \cup V_\nu^*$$

を連結成分への分解とする．$n = \dim_{\mathbb{C}} V, d = \deg P$ として

$$\omega(v) = |P(v)|^{-n/d} dv \tag{3.1}$$

とおく．(2.2) より，$\omega(v)$ は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 上の G^+-不変測度を与える．ただし，dv は $V_{\mathbb{R}}$ 上の Lebesgue 測度である．dg を G^+ の Haar 測度とする．$v \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ に対して，$G_v^+ = G^+ \cap G_v$ とおくと，[仮定 **2**] より，G_v^+ はユニモジュラーな Lie 群になる[*16]．そこで G_v^+ 上に両側不変測度 $d\mu_v$ が存在するが，(1.2) のように，$d\mu_v$ を次のように正規化する: 任意の $F \in L^1(G^+)$ に対して，積分公式

$$\int_{G^+} F(g)dg = \int_{G^+/G_v^+} \omega(\rho(\dot{g}v)) \int_{G_v^+} F(\dot{g}h) d\mu_v(h) \tag{3.2}$$

が成り立つ．

さて，L を $V_{\mathbb{Q}}$ の格子とする．すなわち，$V_{\mathbb{Q}}$ の基底を適当にとると，

$$V_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n \supset \mathbb{Z}^n \cong L$$

[*15] 超局所計算法のアイディアや，それが開発された頃のエピソードが [Ki2] で紹介されている．

[*16] ユニモジュラー Lie 群の定義は，[Ki1, p. 211] などを参照の事．[仮定 **2**] の下では，G_v は $\mathbb{Q}$ 上 split するトーラスを持たないので，いわゆるモジュラス指標が自明になるのである．

となるとする．また，$\varGamma$ を $G_{\mathbb{Q}} \cap G^+$ に含まれる数論的部分群[*17]であって，$\rho(\varGamma)L \subset L$ をみたすものとする．前節で述べたように，**[仮定 0]** より，相対不変式 P は $\mathbb{Q}$-係数の多項式にとれるが，適当に定数倍して P は L 上で整数値をとるようにしておく．$v \in L - S$ に対して，$\varGamma_v = G_v^+ \cap \varGamma$ とおき，

$$\mu(v) = \int_{G_v^+/\varGamma_v} d\mu_v(h) \tag{3.3}$$

とする．**[仮定 2]** および Borel と Harish-Chandra [BH] の結果より，$\mu(v) < +\infty$ であることが保証される．$\mu(v)$ を v の属する $\varGamma$-軌道 $\rho(\varGamma)v$ の**密度**とよぶことがある．この量 $\mu(v)$ の意味については後述する．

以上でゼータ関数を定義する準備が整った．L が $\varGamma$-不変であることより，$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して，

$$\psi(g) = \sum_{v \in L-S} f(\rho(g)v)$$

は $\psi(g\gamma) = \psi(g)$ をみたす．よって $\psi(g)$ は $G^+/\varGamma$ 上の関数になり，

$$Z(f, L; s) = \int_{G^+/\varGamma} \chi(g)^s \sum_{v \in L-S} f(\rho(g)v)dg \tag{3.4}$$

という積分を考えることができる．これを，(G, ρ, V) のゼータ積分とよぶ．ゼータ積分は $\varGamma$ にも依存するが，$\varGamma$ を取り替えても，ゼータ積分は定数倍しか変わらない．(数論的部分群の定義からわかる．) それで，ゼータ積分の表記は $Z(f, L, \varGamma; s)$ などではなく，$Z(f, L; s)$ とする．積分の収束については最後にコメントすることにして，先程と同じように形式的に計算する．まず，$L - S$ を

$$L - S = \bigcup_{i=1}^{\nu} L \cap V_i = \bigcup_{i=1}^{\nu} \bigcup_{v \in \varGamma \backslash L \cap V_i} \rho(\varGamma)v$$

と分解する．2 つめの等号は $L \cap V_i$ を $\rho(\varGamma)$-軌道に分けて，軌道の代表点 $v \in \varGamma \backslash L \cap V_i$ にわたる和を考えるという意味である．さらに，$\rho(\varGamma)v \cong \varGamma/\varGamma_v$ という 1 対 1 対応があるので，まとめると

$$L - S = \bigcup_{i=1}^{\nu} L \cap V_i = \bigcup_{i=1}^{\nu} \bigcup_{v \in \varGamma \backslash L \cap V_i} \rho(\varGamma)v = \bigcup_{i=1}^{\nu} \bigcup_{v \in \varGamma \backslash L \cap V_i} \bigcup_{\gamma \in \varGamma/\varGamma_v} \rho(\gamma)v$$

[*17] $[\varGamma : \varGamma \cap G_{\mathbb{Z}}] < +\infty$ かつ $[G_{\mathbb{Z}} : \varGamma \cap G_{\mathbb{Z}}] < +\infty$ をみたす群のこと．詳しくは，[Ki1, § 5.1] を参照．

という分解ができる．これを (3.4) に挿し込む．形式的に積分と和の順序を交換して，

$$Z(f,L;s)=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{v\in\Gamma\backslash L\cap V_i}\int_{G^+/\Gamma}\chi(g)^s\sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_v}f(\rho(g)\rho(\gamma)v)dg$$

となる．[Ki1, 補題 5.9] より，$P(L)\subset\mathbb{Z}$ となっているならば，任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して $\chi(\gamma)=1$ であるから，

$$\begin{aligned}Z(f,L;s)&=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{v\in\Gamma\backslash L\cap V_i}\int_{G^+/\Gamma}\chi(g\gamma)^s\sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_v}f(\rho(g\gamma)v)dg\\&=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{v\in\Gamma\backslash L\cap V_i}\int_{G^+/\Gamma_v}\chi(g)^sf(\rho(g)v)dg\end{aligned}$$

となる．G^+/Γ 上の積分と Γ/Γ_v 上の和をまとめたのである．最右辺の積分において，積分公式 (3.2) *18および $\chi(g)^s=\dfrac{|P(\rho(g)v)|^s}{|P(v)|^s}$ となることを用いると，

$$\begin{aligned}\int_{G^+/\Gamma_v}\chi(g)^sf(\rho(g)v)dg&=\frac{1}{|P(v)|^s}\int_{G^+/\Gamma_v}|P(\rho(g)v)|^sf(\rho(g)v)dg\\&=\frac{1}{|P(v)|^s}\int_{G^+/G_v^+}|P(\rho(\dot g v)|^sf(\rho(\dot g v)\omega(\rho(\dot g v))\int_{G_v^+/\Gamma_v}d\mu_v(h)\\&=\frac{\mu(v)}{|P(v)|^s}\int_{G^+/G_v^+}|P(\rho(\dot g v)|^{s-n/d}f(\rho(\dot g v)d(\rho(\dot g)v)\end{aligned}$$

となる．最後の等号については，(3.1), (3.3) をみよ．$v\in V_i$ のとき，G^+/G_v^+ 上の積分は V_i の積分にできて，

$$\int_{G^+/G_v^+}|P(\rho(\dot g v)|^{s-n/d}f(\rho(\dot g v)d(\rho(\dot g)v)=\int_{V_i}|P(x)|^{s-n/d}f(x)dx=\Phi_i(f;s)$$

となる．局所ゼータ関数の定義 (2.6) を思い出そう．以上をすべてまとめて，

$$Z(f,L;s)=\sum_{i=1}^{\nu}\left\{\sum_{v\in\Gamma\backslash L\cap V_i}\frac{\mu(v)}{|P(v)|^s}\right\}\cdot\Phi_i(f;s)$$

*18 正確には，

$$\int_{G^+/\Gamma_v}F(g)dg=\int_{G^+/G_v^+}\omega(\rho(\dot g v))\int_{G_v^+/\Gamma_v}F(\dot g h)d\mu_v(h)$$

という積分公式を用いている．(3.2) からこの積分公式を導出する方法については，[Ki1, (5.2)] を参照の事．

と計算できた．

定義 3.1（概均質ゼータ関数の定義）

$$\xi_i(L;s) := \sum_{v\in\Gamma\backslash L\cap V_i} \frac{\mu(v)}{|P(v)|^s} \qquad (i=1,\dots,\nu)$$

を (G,ρ,V) に付随する概均質ゼータ関数と定義する．

H. Saito [Sai] の結果より，$\xi_i(L;s)$ は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき絶対収束することが分かる*19．したがって，上の形式的な計算は正当化されて，次の命題を得る．

命題 3.2（ゼータ関数の積分表示） $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき，ゼータ積分 $Z(f,L;s)$ は任意の $f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して絶対収束し，

$$Z(f,L;s) = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(L;s)\Phi_i(f;s)$$

が成り立つ．

主定理を述べる前に，ゼータ関数 $\xi_i(L;s)$ の定義に至った Siegel のアイディアについて説明しよう．詳しくは，伊吹山 [I1, 第 7 章 3.3], 佐藤 [Sa1] を参照の事．

正整数 m に対して $\{v\in L\cap V_i\,;\,P(v)=\varepsilon_i m\}$ という集合を考える．ここで，$P(v)$ の符号は V_i 上で一定なので，それを ε_i と記している．最初の節で述べたように，これが無限集合になるのが問題であったが，実は，次のような定理がある．

補題 3.3（[BH, Theorem 6.9]） H を $\mathbb{Q}$ 上定義された簡約可能な代数群とし，$\rho : H\to GL(V)$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された有理表現，X は H-軌道で閉集合になっているものとする．このとき，$V_{\mathbb{Q}}$ 内の $H_{\mathbb{Z}}$-不変格子について，$X\cap L$ は有限個の $H_{\mathbb{Z}}$-軌道に分かれる．

$H=\mathrm{Ker}\,\chi$ とすると，(G,ρ,V) が概均質ベクトル空間であることより，$\{v\in L\cap V_i\,;\,P(v)=\varepsilon_i m\}$ は H-軌道で，かつ閉集合である．よって，上の定理が適用で

*19 概均質ゼータ関数の収束の証明は，理論の創成期の頃からの問題であったが，[Sai] により完全に解決された．

きて，

$$\{v \in L \cap V_i\,;\, P(v) = \varepsilon_i m\} = \overset{\text{有限和}}{\bigsqcup_{\substack{v \in \Gamma\backslash L\cap V_i \\ P(v)=\varepsilon_i m}}} \rho(\Gamma)v = \overset{\text{有限和}}{\bigsqcup_{\substack{v \in \Gamma\backslash L\cap V_i \\ P(v)=\varepsilon_i m}}} \Gamma/\Gamma_v$$

のように，有限個の $\rho(\Gamma)$-軌道に分解する*20．各 Γ-軌道は無限個の格子点を含んでいるので，このままでは有限の量が取り出せないが，先程定義した密度 $\mu(v)$ は G_v^+/Γ_v の体積で，Γ_v の「サイズ」の逆数に比例しているのだから，Γ/Γ_v の「サイズ」を測っていると考えていいだろう，というのが本質的なアイディアである．

$\xi_i(L;s)$ の定義に戻って，$\xi_i(L;s)$ を通常の Dirichlet 級数の形にかくと，

$$\xi_i(L;s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_i(L;m)}{m^s}, \quad N_i(L;m) = \sum_{\substack{v \in \Gamma\backslash L\cap V_i \\ P(v)=\varepsilon_i m}} \mu(v)$$

となる．$N_i(L;m)$ は有限の量の有限の和だから有限値であり，これが $\{v \in L \cap V_i\,;\, P(v) = \varepsilon_i m\}$ という集合の「サイズ」を測っていると考えられる．不定値 2 次形式のゼータ関数のときに，Siegel は $N_i(L;m)$ を**表現の測度**（measure of representations, *Darstellungsmaß*）とよんだが，それはいわゆる Siegel の主定理に関係している．Siegel のゼータ関数と Siegel の主定理の関係については，伊吹山 [I1] を参照．また，上野 [U, 第 2 巻] にも（主として正定値の場合についてであるが），Siegel の 2 次形式論についての解説がある．2 次形式の場合に限らず一般に，$\mu(v)$ や $N_i(L;m)$ を厳密に測度として取り扱う方法が，Sato [Sa3]，Hironaka–Sato [HS] により与えられている．他方，Γ_v **が有限群となる場合は**，$\mu(v)$ は $\sharp(\Gamma_v)^{-1}$ におきかえることができ，$\xi_i(L;s)$ は

$$\sum_{v \in \Gamma\backslash L\cap V_i} \frac{\sharp(\Gamma_v)^{-1}}{|P(v)|^s}$$

という Dirichlet 級数になるが，これは，おおよそ類数の母関数というべきものになる．2 元 3 次形式の空間のゼータ関数がその典型例である．

4　ゼータ関数の関数等式

前節までと同様に，[**仮定 0**], [**仮定 1**], [**仮定 2**] を仮定する．

*20 類数の有限性を想起せよ．

上で (G, ρ, V) のゼータ積分とゼータ関数の定義を述べたが，双対概均質ベクトル空間 (G, ρ^*, V^*) についても同様に定義できる．第 2 節で述べたように，(G, ρ^*, V^*) の特異集合 S^* の定義方程式 P^* は $\mathbb{Q}$-係数の絶対既約な多項式にとれて，$\chi^* = \chi^{-1}$ に対応する相対不変式になる (cf. (2.3))．(G, ρ^*, V^*) の局所ゼータ関数 $\Phi_i^*(f^*; s)$ を (2.7) のように定義する．このようにほぼ同様に定義していくが，$V_{\mathbb{Q}}^*$ 内の格子 L^* は勝手な格子ではなく，L の**双対格子**をとる[*21]．すなわち，$V_{\mathbb{Q}}$ 内の格子 L に対して，

$$L^* = \{v^* \in V_{\mathbb{Q}}^* \,;\, \langle L, v^* \rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

と定義する．L^* は Γ-不変な格子である．このとき，(G, ρ^*, V^*) のゼータ関数 $\xi_j^*(L^*; s)$ $(j = 1, \dots, \nu)$ を

$$\xi_j^*(L^*; s) = \sum_{v^* \in \Gamma \backslash L^* \cap V_j^*} \frac{\mu^*(v^*)}{|P^*(v^*)|^s}, \quad \mu^*(v^*) := \int_{G_{v^*}^+ / \Gamma_{v^*}} d\mu_{v^*}(h) \tag{4.1}$$

と定義する．ここで，$G_{v^*}^+$ 上の不変測度 $d\mu_{v^*}$ は，(3.2) に相当する積分公式を通じて正規化しておく．さらに，$f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$, $s \in \mathbb{C}$ に対して，(G, ρ^*, V^*) のゼータ積分を

$$Z^*(f^*, L^*; s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi^*(g)^s \sum_{v^* \in L^* - S^*} f^*(\rho^*(g) v^*) dg \tag{4.2}$$

と定義する．このとき，命題 3.2 と全く同様にして，$\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき，

$$Z(f^*, L^*; s) = \sum_{j=1}^{\nu} \xi_j^*(L^*; s) \Phi_j^*(f^*; s) \tag{4.3}$$

となることがわかる．

さて，第 1 節でやったように，ゼータ積分を積分範囲で 2 つに分ける．

$$Z_+(f, L; s) = \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g) \geq 1}} \chi(g)^s \sum_{v \in L - S} f(\rho(g) v) dg,$$
$$Z_-(f, L; s) = \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g) \leq 1}} \chi(g)^s \sum_{v \in L - S} f(\rho(g) v) dg$$

と定義する．第 1 節で説明したのと同じ理由で，$Z_+(f, L; s)$ は任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して絶対収束し，s の整関数を定める．$Z_-(f, L; s)$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ のとき絶対収束する．

[*21] Poisson の和公式を使うため．

同様に，$Z^*(f^*, L^*; s)$ も二つの積分に分けるが，積分領域に注意が必要である．

$$\begin{aligned}
Z_+^*(f^*, L^*; s) &= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi^*(g)\geq 1}} \chi^*(g)^s \sum_{v^*\in L^*-S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)dg \\
&= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \boldsymbol{\chi(g)\leq 1}}} \chi(g)^{\boldsymbol{-s}} \sum_{v^*\in L^*-S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)dg, \\
Z_-^*(f^*, L^*; s) &= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi^*(g)\leq 1}} \chi^*(g)^s \sum_{v^*\in L^*-S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)dg \\
&= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \boldsymbol{\chi(g)\geq 1}}} \chi(g)^{\boldsymbol{-s}} \sum_{v^*\in L^*-S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)dg
\end{aligned}$$

とおくと，$Z_+^*(f^*, L^*; s)$ は任意の $s\in\mathbb{C}$ に対して絶対収束し，s の整関数を定める．$Z_-(f^*, L^*; s)$ は $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ のとき絶対収束する．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 4.1（ゼータ積分の関数等式） $f^*\in\mathcal{S}(V_\mathbb{R}^*)$ を $S_\mathbb{R}^*$ に制限すると 0 になり，かつ f^* の Fourier 変換 $\widehat{f^*}$ を $S_\mathbb{R}$ に制限すると 0 になるとする．つまり，f^* が条件

$$f^*\big|_{S_\mathbb{R}^*} = 0, \qquad \widehat{f^*}\big|_{S_\mathbb{R}} = 0 \tag{4.4}$$

をみたすとする．このとき，関数等式

$$Z\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right) = v(L^*)Z^*\left(f^*, L^*\,;\, \frac{n}{d} - s\right)$$

が成り立ち，両辺は s の整関数に解析接続される．

証明 上で見たように，2 つのゼータ積分をそれぞれ，

$$\begin{aligned}
Z\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right) &= Z_+\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right) + Z_-\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right), \\
Z^*\left(f^*, L^*\,;\, s\right) &= Z_+^*\left(f^*, L^*\,;\, s\right) + Z_-^*\left(f^*, L^*\,;\, s\right)
\end{aligned}$$

と分解する．Z_+ と Z_-^* の積分範囲が同じであり，Z_- と Z_+^* の積分範囲が同じであることに改めて注意せよ．さて，Poisson の和公式（[Ki1, 定理 4.34]）

$$\sum_{v\in L}\widehat{f^*}(v) = v(L^*)\sum_{v^*\in L^*} f^*(v^*), \quad v(L^*) := \int_{V_\mathbb{R}^*/L^*} dv^*$$

において，$f^*(v^*)$ を $f_g^*(v^*) := f^*(\rho^*(g)v^*)$ $(g\in G^+)$ に置き換える．(4.4) という

条件から和をとる範囲が両辺とも小さくなり，

$$\begin{aligned}\sum_{v \in L-S} \widehat{f^*}(\rho(g)v) &= v(L^*) \det \rho(g)^{-1} \sum_{v^* \in L^*-S^*} f^*(\rho^*(g)v^*) \\ &= v(L^*)\chi(g)^{-n/d} \sum_{v^* \in L^*-S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)\end{aligned}$$

が成り立つ．二つ目の等号で，(2.2) を使った．すると，$\mathrm{Re}(s) \gg 0$ の範囲で，

$$\begin{aligned}Z_-\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right) &= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g)\le 1}} \chi(g)^s \sum_{v \in L-S} \widehat{f^*}(\rho(g)v)dg \\ &= v(L^*) \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g)\le 1}} \chi(g)^{s-n/d} \sum_{v^* \in L^*-S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)dg \\ &= v(L^*) \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi^*(g)\ge 1}} \chi^*(g)^{n/d-s} \sum_{v^* \in L^*-S^*} f^*(\rho^*(g)v^*)dg \\ &= v(L^*)Z_+^*\left(f^*, L^*\,;\, \frac{n}{d} - s\right)\end{aligned}$$

が成り立つが，最右辺が s の整関数なので，これにより最左辺の積分が全 $\mathbb{C}$ 平面に正則に解析接続された．同様にして，$\mathrm{Re}(s) \ll 0$ の範囲で，

$$v(L^*)Z_+^*\left(f^*, L^*\,;\, \frac{n}{d} - s\right) = Z_+\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right)$$

が成り立つが，これにより左辺の積分が整関数に解析接続される．したがって，

$$\begin{aligned}Z\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right) &= Z_+\left(\widehat{f^*}, L\,;\, s\right) + v(L^*)Z_+^*\left(f^*, L^*\,;\, \frac{n}{d} - s\right) \\ &= v(L^*)Z^*\left(f^*, L^*\,;\, \frac{n}{d} - s\right)\end{aligned}$$

となり，関数等式が示された．また，この式から，関数等式の両辺が s の整関数に解析接続されていることに注意せよ． □

いよいよ主定理を述べる．

定理 4.2（ゼータ関数の関数等式） ゼータ関数 $\xi_i(L; s)$ および $\xi_j^*(L^*; s)$ を，それぞれ定義 3.1 および (4.1) のように定義する．

(1) $\xi_i(L; s)$, $\xi_j^*(L^*; s)$ は全 $\mathbb{C}$ 平面に有理型に解析接続される．

(2) $b(s)$ を b-関数とする．$b(-s)\xi_i(L; s)$, $b(-s)\xi_j^*(L^*; s)$ は s の整関数になる．つまり，ゼータ関数の極の位置の候補が b-関数で記述される．

(3) 関数等式

$$v(L^*)\xi_j^*\left(L^*; \frac{n}{d} - s\right) = \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right)\sum_{i=1}^{\nu} c_{ij}(s)\xi_i(L; s) \qquad (j = 1, \ldots, \nu)$$

が成り立つ．ただし，記号は命題 2.2 と同じである．

証明 (1), (2)　$f_0(v) \in C_0^\infty(V_i)$ をとり，$f(v) = P^*(D_v)f_0(v)$ とおくと，明らかに $f\big|_{S_\mathbb{R}} = 0$ である．$P^*(D_v)e^{\langle v, v^*\rangle} = P^*(v^*)e^{\langle v, v^*\rangle}$ より，

$$\widehat{f}(v^*) = \int_{V_\mathbb{R}} P^*(D_v)f_0(v)e^{2\pi i\langle v, v^*\rangle}dv = (-2\pi i)^d P^*(v^*)\widehat{f_0}(v^*)$$

となり，$P^*(v^*)$ が掛かっているから，$\widehat{f}\ \big|_{S_\mathbb{R}^*} = 0$ である．f の逆 Fourier 変換を $f^*(v^*)$ とかくと，$\widehat{f^*}(v) = f(v)$ であり，結局，この f^* が条件 (4.4) をみたすことがわかる．よって，この f を $Z(f, L; s)$ に代入すると，s の整関数になるが，命題 3.2 より，

$$Z(f, L; s) = \xi_i(L; s) \cdot \Phi_i(f; s)$$

となる．$f_0(v) \in C_0^\infty(V_i)$ に注意せよ．$\Phi_i(f; s)$ は s の有理型関数に解析接続されるので，

$$\xi_i(L; s) = \frac{Z(f, L; s)}{\Phi_i(f; s)}$$

も s の有理型関数に解析接続される．さらに，$f(v) = P^*(D_v)f_0(v)$ より，部分積分のテクニックで，

$$\begin{aligned}\Phi_i(f; s) &= \int_{V_i} |P(v)|^{s-n/d}P^*(D_v)f_0(v)dv \\ &= (-1)^d\varepsilon_i b\left(s - \frac{n}{d} - 1\right)\Phi_i(f_0; s-1) \\ &= \varepsilon_i b(-s)\Phi_i(f_0; s-1)\end{aligned}$$

である．ここで，V_i 上の $P(v)$ の符号を ε_i と記した．また，最後の等号では，b-関数の関数等式 (2.9) を用いている．任意の s に対して，$\Phi_i(f_0; s-1) \neq 0$ をみたす $f_0 \in C_0^\infty(V_i)$ を見つけることができるので，

$$b(-s)\xi_i(L; s) = \varepsilon_i \cdot \frac{Z(f, L; s)}{\Phi_i(f_0; s-1)}$$

は $\mathbb{C}$ 上の正則関数になる．$\xi_j^*(L^*; s)$ についても同様に証明できる．

(3) 局所関数等式との関係を見やすくするため，ベクトルの等式としてかく．記号は，命題 2.2 のとおりとし，$C(s) := (c_{ij}(s))_{1\le i,j\le\nu}$ を関数等式の係数が作る $\nu\times\nu$ 行列とする．このとき，命題 2.2 は

$$\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_\nu\end{bmatrix}\left(\widehat{f^*}; s\right) = \gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\cdot C(s)\begin{bmatrix}\Phi_1^*\\ \vdots\\ \Phi_\nu^*\end{bmatrix}\left(f^*; \frac{n}{d}-s\right)$$

とかける．すると，ゼータ関数の積分表示（命題 3.2）とあわせて，

$$\begin{aligned} Z\left(\widehat{f^*}, L; s\right) &= [\xi_1,\ldots,\xi_\nu](L;s)\cdot\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_\nu\end{bmatrix}\left(\widehat{f^*}; s\right)\\ &= \gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\cdot[\xi_1,\ldots,\xi_\nu](L;s)\cdot C(s)\begin{bmatrix}\Phi_1^*\\ \vdots\\ \Phi_\nu^*\end{bmatrix}\left(f^*; \frac{n}{d}-s\right) \qquad (4.5)\end{aligned}$$

となる．一方，(4.3) より，

$$v(L^*)Z^*\left(f^*, L^*; \frac{n}{d}-s\right) = v(L^*)\,[\xi_1^*,\ldots,\xi_\nu^*]\left(L^*; \frac{n}{d}-s\right)\cdot\begin{bmatrix}\Phi_1^*\\ \vdots\\ \Phi_\nu^*\end{bmatrix}\left(f^*; \frac{n}{d}-s\right) \qquad (4.6)$$

である．各 $1\le j\le\nu$ に対して，$f_0^*(v^*)\in C_0^\infty(V_j^*)$ をとり，$f^*(v^*) := P(D_{v^*})f_0^*(v^*)$ とおくと，$\widehat{f^*}(v) = (-2\pi i)^d P(v)\widehat{f_0^*}(v)$ であるから，f^* は条件 (4.4) をみたし，f^* に対して，(4.5) と (4.6) は等しい．さらに，$1\le k\le\nu$ に対して，局所ゼータ関数 $\Phi_k^*(f^*; \frac{n}{d}-s)$ は $k\ne j$ のとき恒等的に 0 であり，$\Phi_j^*(f^*; \frac{n}{d}-s)$ は 0 ではない．したがって，

$$v(L^*)\,[\xi_1^*,\ldots,\xi_\nu^*]\left(L^*; \frac{n}{d}-s\right) = \gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\cdot[\xi_1,\ldots,\xi_\nu](L;s)\cdot C(s)$$

という行ベクトルの等式が得られる．つまり，

$$v(L^*)\begin{bmatrix}\xi_1^*\\ \vdots\\ \xi_\nu^*\end{bmatrix}\left(L^*; \frac{n}{d}-s\right) = \gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)\cdot{}^tC(s)\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\nu\end{bmatrix}(L;s)$$

のように，関数等式の係数行列が局所関数等式のそれの転置行列になっている．この等式の第 j 行目が，定理の関数等式である． □

注意 4.3 (1) 第 1 節の終わりの問題 (C) のところで述べたように，一般には $L \cap S$ や $L^* \cap S^*$ が $\{0\}$ より真に大きく，それが関数等式の証明を困難なものにする．そこで，条件 (4.4) をみたす関数を構成して，その困難を回避する．ここで，テスト関数を自由に取れるようにしておいた意味が出てくる．

(2) もちろん，本来はこの条件をつけずに一般に計算できた方が良く，計算できれば，極や留数の詳しい情報が分かる．ただし，その時には積分

$$I(f;s) = \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g)\leq 1}} \chi(g)^s \Bigg\{ \chi(g)^{-\frac{n}{d}} v(L^*) \sum_{v^* \in L^* \cap S^*} f^*(\rho^*(g)v^*) - \sum_{v \in L \cap S} \widehat{f^*}(\rho(g)v) \Bigg\} dg$$

を計算しなければならないが，Shintani [Sh1, Sh2] や Yukie [Yu] などの計算例をみると分かるように，一般には非常に難しく、計算できていない例も多い。この計算を回避しても，b-関数を使った議論により，極の位置の候補までは特定できる．

(3) 条件 (4.4) をみたす関数を利用するという議論は，[SS2] では，論文の最後の Additional Remark として記述があり，Professors M. Kuga and G. Shimura に suggest された，と謝辞が書かれている[*22]．

5 概均質ゼータ関数の例といくつかのコメント

概均質ゼータ関数の関数等式の例を挙げよう．また，最近の結果で，[SS2] のゼータ関数やその関数等式の理論に関わっているようなものついて，いくつかコメントしたい[*23]．

(1) $G = GL_1(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}$ という 1 次元概均質ベクトル空間を考える．$L = \mathbb{Z} \supset \mathbb{Q} = V_{\mathbb{Q}}$ としたときのゼータ関数は，Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

[*22] 微分作用素を使って特異集合上の寄与を消す，というテクニックは，Selberg や Maaß などによってそれ以前から知られていたようである．

[*23] もちろん，筆者の力量では網羅的に解説することはできません．ほんの一部の結果の紹介にとどまっていることを深くお詫びします．

である．$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_{>0} \cup \mathbb{R}_{<0}$ と 2 つの連結成分に分かれるが，どちらも同じ Riemann ゼータ関数になり，

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\frac{\pi s}{2} \mathit{\Gamma}(s)\zeta(s)$$

という関数等式をみたす．

(2) 不定値 2 次形式の Siegel ゼータ関数は概均質ゼータ関数の prototype である．$n \geq 5$ とし，局所関数等式の例 (2) と同じ記号を使う．格子は $L = \mathbb{Z}^n$ をとり，数論的部分群は $\mathit{\Gamma} = SO(P)_{\mathbb{Z}} = SO(P) \cap SL_n(\mathbb{Z})$ をとる．ゼータ関数は，

$$\xi_{\pm}(s) = \sum_{x \in SO(P)_{\mathbb{Z}} \backslash \mathbb{Z}^n \cap V_{\pm}} \frac{\mu(x)}{|P(x)|^s}, \quad \xi^*_{\pm}(s) = \sum_{y \in SO(P)_{\mathbb{Z}} \backslash \mathbb{Z}^n \cap V^*_{\pm}} \frac{\mu(y)}{|Q(y)|^s}$$

と定義され，

$$\begin{pmatrix} \xi_+\left(\frac{n}{2} - s\right) \\ \xi_-\left(\frac{n}{2} - s\right) \end{pmatrix} = {}^t A(s) \begin{pmatrix} \xi^*_+(s) \\ \xi^*_-(s) \end{pmatrix}$$

という関数等式を満たす．ただし，$A(s)$ は (2.10) であたえられる 2×2 行列である．伊吹山 [I1] は，n が偶数のときの Siegel ゼータ関数に対する明示公式を示した．（2 つの Dirichlet L-関数の積たちの $\mathbb{Q}$-線形和の形に表される．）

(3) 正方行列の行列式のゼータ関数を

$$\xi_{\det}(s) = \sum_{v \in GL_n(\mathbb{Z}) \backslash M_n(\mathbb{Z}) \cap GL_n(\mathbb{R})} \frac{1}{|\det v|^s}$$

と定義する．(2.11) などを使うと，

$$\begin{aligned} \xi_{\det}(n-s) = (2\pi)^{-ns} \cdot (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^n \cdot \cos\frac{\pi s}{2} \cdots \cos\frac{\pi(s-n+1)}{2} \\ \times \mathit{\Gamma}(s)\mathit{\Gamma}(s-1)\cdots\mathit{\Gamma}(s-n+1) \cdot \xi_{\det}(s) \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．$\xi_{\det}(s)$ は単純環のゼータ関数の特別な場合であり，Zorn などによって調べられている．実は，

$$\zeta_{\det}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)\cdots\zeta(s-n+1)$$

である．

(4) 対称行列のなす空間のゼータ関数について．記号は，局所関数等式の例 (4) のところと同じとする．$\varGamma = SL_n(\mathbb{Z})$ とし，$L \subset V_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Q})$ を任意の $\varGamma$-不変な格子とする．ゼータ関数を

$$\xi_i(L;s) = \sum_{v \in \varGamma \backslash L \cap V_i^{(n)}} \frac{\mu(v)}{|\det v|^s}$$

とする．このとき，関数等式

$$\xi_i\left(L; \frac{n+1}{2} - s\right) = v(L^*)\pi^{n(n-1)/4}(2\pi)^{-ns} \times \gamma\left(s - \frac{n+1}{2}\right) \boldsymbol{e}\left[\frac{ns}{4}\right] \sum_{j=0}^{n} u_{ji}(s)\xi_j(L^*;s)$$

が成り立つ．ただし，$\gamma(s), u_{ij}(s)$ はそれぞれ，(2.12), (2.13) で与えられた通りで，L^* は L の双対格子であり，$v(L^*)$ は $V_{\mathbb{R}}/L^*$ の体積である．Ibukiyama-Saito [IS, IS2] は $\xi_i(L;s)$ に対する明示公式を証明し，もっと簡単な形の関数等式があることを示した．また，Ibukiyama-Katsurada [IK] は，Koecher-Maass 級数とよばれる一種の概均質ゼータ関数に対して同様の明示公式を証明し，関数等式の簡略化を行った．本報告集所収の [I2] に，明示公式の発見に至った経緯なども含めて解説されている．

(5) 2 元 3 次形式のゼータ関数について．この例では，G_v が有限群であるから，第 3 節の終わりで述べたように，ゼータ関数は

$$\sum_{v \in \varGamma \backslash L \cap V_i} \frac{\sharp(\varGamma_v)^{-1}}{|P(v)|^s}$$

という Dirichlet 級数になり，2 元 3 次形式の類数に関係するゼータ関数になる．Shintani [Sh1] は，そのような類数に関連する 4 つの Dirichlet 級数 $\xi_i(L;s), \xi_j(\widehat{L};s)$ $(i,j=1,2)$ を定義し，関数等式

$$\begin{pmatrix} \xi_1(L;1-s) \\ \xi_2(L;1-s) \end{pmatrix} = \frac{3^{3s-2}}{2\pi^{4s}} \varGamma(s)^2 \varGamma\left(s - \frac{1}{6}\right) \varGamma\left(s + \frac{1}{6}\right) \times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s & \sin \pi s \\ 3\sin \pi s & \sin 2\pi s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(\widehat{L};s) \\ \xi_2(\widehat{L};s) \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示した．L と $\widehat{L}$ の定義など，詳細は原論文を参照してください．Ohno [O] は，この 4 つのゼータ関数の係数を具体的に書き出し，2 組ずつが本質的に同じであると予想した．この予想は，Nakagawa [Na] により証明された．格子を取り換えた場合について，Ohno-Taniguchi-Wakatsuki [OTW] などにより研究されている．山本修司氏の解説 [Ya] も参照のこと．

(6) 多変数化あるいは保型形式付きなどのゼータ関数の一般化，およびその応用については，本報告集所収の他の論説（佐藤文広 [Sa6], 鈴木美裕 [Suz], 都築正男 [Tsu]）を参照してください．

M. Sato-Shintani [SS2] の理論は，「大きな群の作用」に関する相対不変式から，関数等式など良い性質を持つ Dirichlet 級数が構成できることを示した理論で，それにより実際に，対称行列の行列式や 2 元 3 次形式の判別式から新しいゼータ関数が構成された．さらに，その整数論への応用も見つかった．[SS2] の理論は明快で，これにより「ゼータ関数の関数等式」の背後にある数学的な構造が一般に明らかにされたかのように見えるが，実はそうではない．佐藤 [Sa2] の最後の節に，概均質ゼータ関数と Eisenstein 級数の（正規化された）周期との関係について議論されているが，概均質ゼータ関数と保型形式の L-関数との関連についてはまだ明らかにされるべきことが残されていると思う．また，最近，F. Sato [Sa5], T. Kogiso–F. Sato [KS] により，非概均質的局所関数等式の例が見つかっている．『関数等式はなぜ成り立つか』という問いに対する答えを我々はまだ持ち合わせていないのである．

謝辞

佐藤文広先生，広中由美子先生，谷口隆さんは，原稿を読んで有益なコメントを下さいました．2002 年のサマースクールで同じテーマについて講演しましたが，私の理解不足のため，不得要領な話になってしまいました．今回，再チャレンジの機会を頂いたと思い，学び直しのつもりで講演の予稿を執筆しましたが，昔の記憶が呼び起されるたび，多くの方との議論を通じて沢山のことを教わってきたのだと改めて実感しました．大学院時代の指導教官である木村達雄先生をはじめ，これまでお世話になった皆様に対し，この場をお借りして厚く御礼申し上げます．

参考文献

[BH] A. Borel and Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. Math.* **75**(1962), 485-535.

[HS] Y. Hironaka and F. Sato, Eisenstein series on reductive symmetric spaces and representation of Hecke algebras, *J. reine angew. Math.* **445**(1993), 45–108.

[I1] 伊吹山知義，保型形式特論，共立出版，2016.

[I2] 伊吹山知義，概均質ベクトル空間: Retrospective account, 本報告集.

[IK] T. Ibukiyama and H. Katsurada, Koecher Maass Series for Real Analytic Siegel Eisenstein Series, in *Automorphic Forms and Zeta Functions* (ed. by S. Boecherer, T. Ibukiyama, M. Kaneko, F. Sato), World Scientific (2006),170–197.

[IS] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices I. An explicit form of zeta functions, *Amer. J. Math.* **117**(1995), 1097–1155.

[IS2] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices II. Functional equations and special values, *Nagoya Math. J.* **208**(2012), 263–315.

[Ka] 柏原正樹，代数解析概論，岩波書店，2000.

[Ki1] 木村達雄，概均質ベクトル空間，岩波書店，1998.

[Ki2] 木村達雄編，佐藤幹夫の数学（増補版），日本評論社，2014.

[KO] 小林俊行・大島利雄，Lie 群と表現論，岩波書店，2005.

[KS] T. Kogiso and F. Sato, Clifford quartic forms and local functional equations of non-prehomogeneous type, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **23**(2016), 791–866.

[O] Y. Ohno, A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms, *Amer. J. Math.* **119**(1997), 1083–1094.

[OTW] Y. Ohno, T. Taniguchi and S. Wakatsuki, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms, *Amer.*

J. Math. **131**(2009), 1525–1541.

[ON] 太田琢也・西山享，代数群と軌道，数学書房，2015.

[Os] N. Oswald, An unpublished paper 'Über einige durch unendliche Reihen definirte Functionen eines complexen Argumentes' by Adolf Hurwitz, *Historia Mathematica* **44**(2017), 252–279.

[Na] J. Nakagawa, On the relations among the class numbers of binary cubic forms, *Invent. Math.,* **134**(1998), 101–138.

[No] 野村隆昭，球面調和関数と群の表現，日本評論社，2018.

[Sai] H. Saito, Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces, *Nagoya Math. J.* **170**(2003), 1–31.

[PR] V. Platonov and A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics **139**, Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen, Academic Press, 1994.

[Sa1] 佐藤文広，概均質ベクトル空間のゼータ関数入門，数理解析研究所講究録 **924**(1995), 46–60.

[Sa2] 佐藤文広，Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間のゼータ関数，Rokko lectures in mathematics **2** (1996).

[Sa3] F. Sato, Siegel's main theorem of homogeneous spaces, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **41**(1992), 141–167.

[Sa4] F. Sato, Functional equations of prehomogeneous zeta functions and intertwining operators, *J. Math. Soc. Japan* **58**(2006), 995–1008.

[Sa5] F. Sato, Quadratic maps and nonprehomogeneous local functional equations, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **56**(2007), 163–184.

[Sa6] 佐藤文広，概均質ゼータ関数の関数等式の一般化，本報告集.

[SS1] 佐藤幹夫述，新谷卓朗記，概均質ベクトル空間の理論，数学の歩み **15**, 85–157.

[SS2] M. Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogenous vector spaces, *Ann. of Math.* **100**(1974), 131–170.

[Sh1] T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, *J. Math. Soc. Japan* **24**(1972), 132–188.

[Sh2] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **22**(1975), 25–65.

[Sug] 杉山和成，概均質ベクトル空間の基本定理，第 10 回整数論サマースクール報告集所収.

[Suz] 鈴木美裕，保型形式つき概均質ゼータ関数，本報告集.

[Ta] 高瀬幸一，保型形式とユニタリ表現，数学書房，2014.

[Tsu] 都築正男，新谷 2 重ゼータ関数，本報告集.

[U] 上野健爾，ジーゲル 1「人と数学」，ジーゲル 2「2 次形式論の発展と現代数学」，現代数学社，2022.

[Ya] 山本修司，大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性，本報告集.

[Yu] A. Yukie, *Shintani zeta functions*, London Math. Soc. Lecture Note Series **183**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.