概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

本論のための準備

谷口隆（神戸大学大学院理学研究科）

概要

本論を理解する上で必要になる予備知識のうち，重要な 3 つを概説する。1 つ目は Galois コホモロジーである。これは石塚 [27] の有理軌道の記述で必要になると共に，佐野 [24] の Selmer 群の定義と記述，山本 [25] の大野・中川の鏡映定理の証明でも用いられる。2 つ目はアデールである。これはゼータ関数をアデール化して考える鈴木美 [30], 都築 [29] で現れる。最後の一つは篩法である。これは Thorne [21], 鈴木雄 [31], 鈴木美 [30] で密度定理を証明する際に用いられる。

1 Galois コホモロジー

本報告集では Galois コホモロジーは以下のように現れる。

	講演	目的
(A)	石塚 [27] ほか	非特異軌道の集合 $G(K)\backslash V'(K)$ の記述
(B)	佐野 [24]	セルマー群 $\mathrm{Sel}_n(E)$ の定義
(C)	山本 [25]	コホモロジー群上での調和解析

K 上の概均質ベクトル空間 (G, V) において，非特異集合 V' は $\overline{K}$ 上では単一の G 軌道だが，K 有理軌道はそうとは限らず，K 有理軌道の集合 $G(K)\backslash V'(K)$ の記述は基本的な問題である。本稿では，Galois コホモロジーの定義と必要な性質をまとめ，$G(K)\backslash V'(K)$ を記述する (A) について主に説明する。(B), (C) については本報告集の [24], [25] を参照のこと。

本節では (A) について，次を証明する。（Galois コホモロジー $\mathrm{H}^1(K, G)$ は次の 1.1 節で定義する。）

定理 1.1（定理 1.11） $w \in V'(K)$ とし，G_w をその固定部分群とする。自然な単射

$$G(K)\backslash V'(K) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(K, G_w)$$

が存在する。$\mathrm{H}^1(K, G) = \{1\}$ ならば，これは全単射である。

これにより，$G(K)\backslash V'(K)$ の理解は，非特異元の固定部分群 G_w やその Galois コホモロジー $\mathrm{H}^1(K, G_w)$ の分析と密接にかかわる。たとえば，標数 0 の局所体の Galois コホモロジーは必ず有限になることが知られているので，次が分かる。

系 1.2 (G, V) が $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間であるとき，$G(\mathbb{Q}_p)\backslash V'(\mathbb{Q}_p)$ および $G(\mathbb{R})\backslash V'(\mathbb{R})$ は有限集合である。

注意 1.3 Galois コホモロジーは群のコホモロジー $\mathrm{H}^i(G, M)$ の例であり，桂 [23] など Galois 理論の標準的な教科書で Galois コホモロジーが扱われている。ただし群のコホモロジーや Galois コホモロジーを考えるとき，多くの場合 M は可換群であるが，目的 (A) のためには，非可換群の Galois コホモロジーを考える必要がある。M が可換群のとき $\mathrm{H}^i(G, M)$ は可換群でコホモロジー群と呼ばれるが，非可換群の Galois コホモロジーは群構造は持たない。また次数も標準的には 1 次しまでしかない。非可換群の Galois コホモロジーは Serre [16, I§5, III] や雪江 [22] などを参照のこと。なお (B),(C) で用いられるのは可換群の Galois コホモロジーである。

なお，定理 1.1 は，齋藤裕氏により，概均質ベクトル空間のゼータ関数の “明示公式” を計算したり [14]，収束を証明したり [15] する際にも用いられた。アデールで書かれたゼータ積分を Galois コホモロジーを使って，局所体上の積分で書くことができる。本稿でも 1.5 節で少し触れるが，詳しくは齋藤 [14, 32] を参照のこと。

1.1 定義

簡単のため K は完全体，つまり K に非分離な代数拡大は存在しないとする。標数が 0 の体や有限体は完全体である。K の代数閉包 $\overline{K}$ を固定し，$\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ とする。Γ_K の作用は右作用とする。

注意 1.4 “正則” な概均質ベクトル空間に対しては，完全体でない K に対しても，分離閉包の Galois 群を考えることで同じ結論が得られる。詳細は [22] を参照のこと。

定義 1.5　G を K 上の代数群とする。

- $G(\overline{K})$ に離散位相を入れる。連続写像 $h\colon \Gamma_K \to G(\overline{K})$ は，すべての $\sigma, \tau \in \Gamma$ について $h(\sigma\tau) = h(\tau)h(\sigma)^\tau$ が成り立つとき，1-コサイクルであるという。
- h が 1-コサイクルなら，$g \in G(\overline{K})$ として，$h'(\sigma) = g^{-1}h(\sigma)g^\sigma$ で定まる h' も 1-コサイクルである。2 つの 1-コサイクル h, h' は，$h'(\sigma) = g^{-1}h(\sigma)g^\sigma$ がすべての σ について成り立つような $g \in G(\overline{K})$ が存在するとき，同値であるという。

1-コサイクルの同値類を G の 1 次 Galois コホモロジーといい，$\mathrm{H}^1(K, G)$ で表す。$\Gamma \ni \sigma \mapsto 1 \in G(\overline{K})$ を自明な 1-コサイクルといい，その類を自明類という。

これらの確認には，$(g^{-1})^\sigma = (g^\sigma)^{-1}$，$(g_1g_2)^\sigma = g_1^\sigma g_2^\sigma$ に注意すればよい。$h\colon \Gamma_K \to G(\overline{K})$ を $h = (h_\sigma)$ と表すこともある。これは各 σ について $h_\sigma = h(\sigma) \in G(\overline{K})$ の意味である。群のコホモロジーとしての記号では正確には $\mathrm{H}^1(\Gamma_K, G(\overline{K}))$ であるが，$\mathrm{H}^1(K, G)$ の表記もそれなりに一般的である。G が非可換であれば $\mathrm{H}^1(K, G)$ は群構造をもたず，$\mathrm{H}^1(K, G)$ は自明類を基点とする基点付き集合 (pointed set) になる。定義から，$\mathrm{H}^1(K, G_1 \times G_2) = \mathrm{H}^1(K, G_1) \times \mathrm{H}^1(K, G_2)$ である。また $G_1 \to G_2$ が代数群の（K 上の）準同型であれば，$\mathrm{H}^1(K, G_1) \to \mathrm{H}^1(K, G_2)$ が誘導される。

次は良く知られている。

命題 1.6　任意の $n \geq 1$ で $\mathrm{H}^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{1\}$ である。

したがって, G が GL_n の直積であれば, やはり $\mathrm{H}^1(K, G) = \{1\}$ である。また, より一般に, A を中心的単純環とし, $A^\times$ を K 上の代数群と考えたとき, $\mathrm{H}^1(K, A^\times) = \{1\}$ である。A が n 次行列環の場合が命題 1.6 である。

1.2　完全系列

G_1, G_2, G_3 を K 上の代数群とする。K 上の準同型の系列

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_2 \xrightarrow{\phi_2} G_3 \longrightarrow 1$$

は，次がすべて成り立つとき，完全系列であるという。

- G_1 は G_2 の部分群で ϕ_1 は包含写像である

- $\ker(\phi_2) = G_1$ である
- $G_2(\overline{K}) \to G_3(\overline{K})$ が全射である

このとき，$G_3(K)$ が $\mathrm{H}^1(K, G_1)$ に右から次のように作用する。$g \in G_3(K)$, $\overline{h} \in \mathrm{H}^1(K, G_1)$ とする。$h = (h_\sigma)$ を，類 $\overline{h}$ に属する 1-コサイクルとする。$\phi_2(\tilde{g}) = g$ となる $\tilde{g} \in G_2(\overline{K})$ をとる。このとき任意の $\sigma \in \Gamma_K$ に対して，$h'_\sigma = \tilde{g}^{-1} h_\sigma \tilde{g}^\sigma \in G_2(\overline{K})$ とおく。$\phi_2(h'_\sigma) = g^{-1}\phi_2(h_\sigma) g^\sigma = g^{-1} g = 1$ より $h'_\sigma \in \ker\phi_2 = G_1(\overline{K})$ である。$h' = (h'_\sigma)$ は G_1 の 1-コサイクルである。h' の類 $\overline{h'}$ は $\tilde{g}$ と h の取り方によらずに定まり，$(g, \overline{h}) \mapsto \overline{h'}$ は $G_3(K)$ の右作用である。写像 $G_3(K) \to \mathrm{H}^1(K, G_1)$ が，$\mathrm{H}^1(K, G_1)$ の自明元に $G_3(K)$ の各元を作用させることにより定まる。次の証明は難しくない。

定理 1.7 上の条件のもとで，次の系列は完全である。

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow G_1(K) \longrightarrow G_2(K) \longrightarrow G_3(K) \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, G_1) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, G_2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(K, G_3) \end{aligned}$$

さらに，$\mathrm{H}^1(K, G_1)/G_3(K) \to \mathrm{H}^1(K, G_2)$ は単射である。ただし完全とは，自明類の逆像が，その前の写像の像と一致すること（確認！）である。

注意 1.8 これはいわゆる「長完全系列」である。$G_i(K) = G_i(\overline{K})^{\Gamma_K} = \mathrm{H}^0(\Gamma_K, G_i(\overline{K})) =: \mathrm{H}^0(K, G_i)$ は 0 次のコホモロジーである。なお，G が可換群のときは任意の $i \geq 0$ について $\mathrm{H}^i(\Gamma_K, G)$ が定義され，長完全系列が定まる。

例 1.9 $\mathrm{H}^1(K, \mathrm{SL}_n) = \{1\}$ である。

これは群の完全系列 $1 \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{GL}_n \overset{\det}{\to} \mathrm{GL}_1 \to 1$ に定理 1.7 を使えば，$\mathrm{H}^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{1\}$ と $\det\colon \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_1(K)$ が全射であることからしたがう。

注意 1.10 A を中心的単純環とし，A^1 を被約ノルム $N\colon A^\times \to \mathrm{GL}_1$ の核とすると，$\mathrm{H}^1(K, A^\times) = \{1\}$ は同様だが，K 有理点の準同型 $A^\times \to K^\times$ は一般に全射ではなく，全単射 $N(A^\times)\backslash K^\times \to \mathrm{H}^1(K, A^1)$ が定まる。

1.3 有理軌道と Galois コホモロジー

G を代数群とし，H をその (滑らかな) 閉部分群とする。このとき幾何学的商 $X = G/H$ が存在することが知られている（[8, pp. 98-99]）。X は通例群構造は持たないが，$G(\overline{K})/H(\overline{K}) \to X(\overline{K})$ が全単射であるため，$X(K) \to \mathrm{H}^1(K, H)$ が上と同様に定義される。具体的には，$x \in X(K)$ に対し，商写像で x に行く $g \in G(\overline{K})$ を取り，x に 1-コサイクル $(g^{-1}g^{\sigma})_{\sigma}$ の類を対応させる。類は g の取り方によらない。この写像については，次が成り立つ。証明は定理 1.7 と同様である。

定理 1.11　上の条件のもとで，$G(K)\backslash X(K) \to \mathrm{H}^1(K, H)$ は単射であり，

$$G(K)\backslash X(K) \to \mathrm{H}^1(K, H) \to \mathrm{H}^1(K, G)$$

は完全である。

特に $\mathrm{H}^1(K, G) = \{1\}$ ならば $G(K)\backslash X(K) \to \mathrm{H}^1(K, H)$ は全単射である。

1.4 K 型と Galois コホモロジー

Galois コホモロジーが与えられた K 上の対象の K 型を分類することを説明する。X を K 上の（連結とは限らない）代数多様体とする。$\overline{X} := X \times_K \overline{K}$ とする。このとき Γ_K が $\overline{X}$ に右から作用する。$\sigma \in \Gamma_K$ に対して，誘導された $\overline{X} \to \overline{X}$ を σ_X で表す。

$\mathrm{Aut}\,(X)$ を X の自己同型群とする。ここでは $\mathrm{Aut}\,(X)$ は X に右から作用するものとする。$\mathrm{Aut}\,(X)$ は K 上の群スキームになり，その A 有理点 $\mathrm{Aut}\,(X)(A)$ は $X \times_K A$ の A-自己同型群になることが知られている。Γ_K は $\mathrm{Aut}\,(X)(\overline{K}) = \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(\overline{X})$ に右から作用する。具体的には，$\alpha \in \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(\overline{X})$ と $\sigma \in \Gamma_K$ に対して α^{σ} を

$$\alpha^{\sigma} = \sigma_X \circ \alpha \circ \sigma_X^{-1}; \quad \overline{X} \xrightarrow{\sigma_X^{-1}} \overline{X} \xrightarrow{\alpha} \overline{X} \xrightarrow{\sigma_X} \overline{X}.$$

で定めると，$\alpha \mapsto \alpha^{\sigma}$ が右作用である。

定義 1.12　X を K 上の代数的な対象（たとえば代数多様体や代数群など）とする。2 つのそのような K 上の対象 X, Y について，$\overline{Y}$ が $\overline{X}$ と $\overline{K}$ 上同型であるとき，Y を X の K 型であるという。

Y を X の K 型とする。$\overline{K}$ 同型 $\psi\colon \overline{Y} \to \overline{X}$ を取る。$\sigma \in \Gamma_K$ に対し，

$$h_Y(\sigma) = \sigma_X \circ \psi \circ \sigma_Y^{-1} \circ \psi^{-1}; \quad \overline{X} \xrightarrow{\psi^{-1}} \overline{Y} \xrightarrow{\sigma_Y^{-1}} \overline{Y} \xrightarrow{\psi} \overline{X} \xrightarrow{\sigma_X} \overline{X},$$

と定めると，この $h_Y(\sigma)$ は $\mathrm{Aut}\,(X)(\overline{K}) = \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(\overline{X})$ の元である。これについて

$$\begin{aligned} h_Y(\tau)h_Y(\sigma)^\tau &= h_Y(\sigma)^\tau \circ h_Y(\tau) = \tau_X \circ h_Y(\sigma) \circ \tau_X^{-1} \circ h_Y(\tau) \\ &= \tau_X \circ \sigma_X \circ \psi \circ \sigma_Y^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \tau_X^{-1} \circ \tau_X \circ \psi \circ \tau_Y^{-1} \circ \psi^{-1} \\ &= (\sigma\tau)_X \circ \psi \circ (\sigma\tau)_Y^{-1} \circ \psi^{-1} \\ &= h_Y(\sigma\tau), \end{aligned}$$

であるので，h_Y は $\mathrm{Aut}\,(X)$ の 1-コサイクルである。簡単な計算で，このコホモロジー類は ψ の取り方によらないことがわかる。このコホモロジー類も同じ h_Y で表す。次の補題は簡単に証明できる。

補題 1.13　この対応 $Y \mapsto h_Y$ は，X の K 型の同型類の集合から $\mathrm{H}^1(K, \mathrm{Aut}\,(X))$ への単射を与える。この単射で，X（の同型類）は自明類に送られる。

次は，いわゆる「K 型の存在定理」である。証明はたとえば [22, §8] あるいは [16, III§1,Propostion 5] を参照のこと。

定理 1.14　X が（連結とは限らない）準射影代数多様体であれば，上の写像は全単射である。

1.5　概均質ベクトル空間の有理軌道の記述

2 元 3 次形式の概均質ベクトル空間 $(G, V) = (\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, V)$ を例にとって，有理軌道の記述を考えてみよう。$V = \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3\}$ に，GL_2 が変数 (u,v) の線形変換で，GL_1 が通常のスカラー倍で作用する。本報告集の谷口 [28] では次の命題を初等的に示したが，これの Galois コホモロジーによる証明を与えよう。

命題 1.15　$G(K)\backslash V'(K)$ は K の 3 次分離代数の同型類のなす集合 $\mathcal{A}_3(K)$ と自然に 1 対 1 に対応する。

証明　$w = w(u,v) = uv(u+v) \in V'(K)$ を取り，G_w をその固定部分群とする。

$G_w \cong \mathrm{GL}_1 \times \mathfrak{S}_3$ である。したがって次のように示される。

(1) $\mathrm{H}^1(K, G) = \mathrm{H}^1(K, \mathrm{GL}_1) \times \mathrm{H}^1(K, \mathrm{GL}_2) = \{1\}$ なので全単射 $G(K)\backslash V'(K) \to \mathrm{H}^1(K, G_w)$ が定まる（定理 1.11）。
(2) $\mathrm{H}^1(K, G_w) = \mathrm{H}^1(K, \mathfrak{S}_3)$ で，[28, 命題 1.6] により $\mathfrak{S}_3 \cong \mathrm{Aut}\,(K^3)$ だから，$\mathrm{H}^1(K, G_w)$ は K^3 の K 型の（同型類の）なす集合とみなせる。（定理 1.14）
(3) K^3 の K 型とは K の 3 次分離代数のこと [28, 定義 1.2] なので，$G(K)\backslash V'(K)$ は K の 3 次分離代数のなす集合 $\mathcal{A}_3(K)$ と一対一に対応する。

□

一般の概均質ベクトル空間 (G, V) においてはこの議論はもう少し複雑になる。$\mathrm{H}^1(K, G) = \{1\}$ である場合は多く，このとき $G(K)\backslash V'(K) \to \mathrm{H}^1(K, G_w)$ は全単射であるが，たとえば $(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合だと [28, 3.3 節] で見たように $w = w(u, v) = uv \in V'(K)$ に対して $G_w \cong \mathrm{GL}_1^2 \rtimes \mathfrak{S}_2$ である。直積であれば上と同様になるが，半直積なのが問題である。

G_w° を G_w の単位連結成分とする。(G, V) が既約正則で放物型とよばれる概均質ベクトル空間であれば，ある $1 \le i \le 5$ について $G_w/G_w^\circ \cong \mathfrak{S}_i$ である。つまり完全系列

$$1 \to G_w^\circ \to G_w \to \mathfrak{S}_i \to 1 \tag{1.1}$$

が成り立つ。ここから

$$\mathrm{H}^1(K, G_w) \to \mathrm{H}^1(K, \mathfrak{S}_i) \tag{1.2}$$

が誘導される。$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合は $G_w^\circ \cong \mathrm{GL}_1^2$ で，$G_w \cong \mathrm{GL}_1^2 \rtimes \mathfrak{S}_2$ と半直積になるということは，完全系列 (1.1) が分裂するということである。したがって (1.2) は全射である。(1.2) の各点のファイバーがどうなっているかが問題である。

(1.2) は単射とは限らない。定理 1.7 の完全系列により，各点の逆像は，$\mathrm{H}^1(K, G_x^\circ)$ により記述される。すべての $x \in V'(K)$ で $\mathrm{H}^1(K, G_x^\circ) = \{1\}$ であれば，(1.2) は単射である。$(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2(2))$ の場合はそうなっているので，$G(K)\backslash V'(K) \to \mathrm{H}^1(K, \mathfrak{S}_2)$ が全単射になる。つまり，$G(K)\backslash V'(K)$ は K 上の 2 次分離代数と一対一に対応する。これらのことについては，谷口 [20] も参照されたい。

なお，(1.2) は斎藤裕氏のゼータ関数の “明示公式” の理論でも基本的な役割を持つ。詳しくは齋藤 [14, 32] を参照のこと。

局所体上の Galois コホモロジーは有限になる（[16, III§4,Theorem 4]）。

定理 1.16　K を局所体とする。$\mathrm{H}^1(K,G)$ は有限集合である。

このことから，局所体 K 上で，概均質ベクトル空間の非特異集合 $V'(K)$ は有限個の $G(K)$ 軌道からなることが分かる。

2　アデール

有理点の集合を $G(\mathbb{R})$, $V(\mathbb{Z})$ のように書くと本節は式の記述がやや煩雑になるので，$G(\mathbb{R}) =: G_{\mathbb{R}}$, $V(\mathbb{Z}) =: V_{\mathbb{Z}}$ などで表すことにする。(G,V) が $\mathbb{Z}$ 上定義されているとして，格子 $V_{\mathbb{Z}}$ に伴うゼータ関数の積分表示は，本報告集の杉山 [26] で説明されるように，古典的には

$$Z^{\mathrm{cl}}(\Phi_\infty, s) := \int_{G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}} |\chi(g_\infty)|^s \sum_{x\in V'_{\mathbb{Q}}\cap V_{\mathbb{Z}}} \Phi_\infty(g_\infty x) dg_\infty \tag{2.1}$$

で与えられる（試験関数を Φ_∞ と書きまた $G_{\mathbb{R}}$ の元を g_∞ と書く理由はすぐに明らかになる）。他方，(G,V) を一般の代数体 F 上で考え，$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ をそのアデール環として，ゼータ積分はアデールを使って

$$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) := \int_{G_{\mathbb{A}}/G_F} |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^s \sum_{x\in V'_F} \Phi(gx) dg \tag{2.2}$$

で定義されることもある。ただし $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ はイデールノルムである。本報告集でも都築 [29] や鈴木美 [30] ではゼータ積分はアデールを使って定式化される。本節ではアデリックなゼータ積分 (2.2) について，(2.1) との関係や取り扱いの方法について簡単に説明する。

2.1　アデールの定義の復習

$\mathbb{Q}$ 上のアデール $\mathbb{A}$ は，制限直積

$$\mathbb{A} = \prod_{p\le\infty}{}' \mathbb{Q}_p$$

で定義される。p は素数または ∞ で，p が素数のときは $\mathbb{Q}_p$ は p 進数体で，$\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$ とする。$\prod'$ は制限直積の記号で，$\mathbb{A}$ は $x = (x_p)_p$, $x_p \in \mathbb{Q}_p$ としたとき，有限個以外の p で $x_p \in \mathbb{Z}_p$ であるようなもの全体のなす集合であることを表す。$\mathbb{A}$ は環にな

り，$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{A}$ に対角に埋め込まれて部分環になる。$\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ はコンパクトである。$p=\infty$ を除いた制限直積を $\mathbb{A}_{\mathrm{f}} = \prod'_{p<\infty} \mathbb{Q}_p$ と書き，$\mathbb{Q}$ の有限アデール環という。定義から $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{\mathrm{f}}$ である。

$\mathbb{A}$ の単数群 $\mathbb{A}^\times$ をイデール群という。$t=(t_p)_p$, $t_p \in \mathbb{Q}_p^\times$ で，有限個以外の p で t_p は $\mathbb{Z}_p^\times$ の元であるようなもの全体のなす集合である。したがって

$$\mathbb{A}^\times = \prod_{p\le\infty}{}' \mathbb{Q}_p^\times$$

である。Π' は，$p<\infty$ について，$\mathbb{Q}_p^\times$ の部分群 $\mathbb{Z}_p^\times$ に関する制限直積であることを表す。これは，$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$ が $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ の，部分群 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}_p)$ $(p<\infty)$ に関する制限直積だということである。これは GL_n で正しい。

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) = \prod_{p\le\infty}{}' \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$$

で，Π' は $p<\infty$ について $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の部分群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 関する制限直積だということである。

$\mathbb{Z}$ の副有限完備化を $\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/(n)$ とする。中国剰余定理により $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ である。また，$\mathbb{A}_{\mathrm{f}} = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ である。

一般の代数体 F に対しても，F のアデール環 $\mathbb{A}_F$ は同様の構成で定義されるが，$\mathbb{A}_F = \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Q}} F$ と定義してもよい。F が固定されていて誤解のおそれがないときは，F のアデール環を $\mathbb{A}$ と書くこともある。

2.2 両者の関係

$F=\mathbb{Q}$ のとき，適当な条件のもとで $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi,s) = Z^{\mathrm{cl}}(\Phi_\infty,s)$ が成り立つ。この意味で (2.2) は (2.1) の一般化である。具体的には次が成り立つ。

定理 2.1 $F=\mathbb{Q}$ とし，G について $G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{R}} G_{\widehat{\mathbb{Z}}} G_{\mathbb{Q}}$ が成り立っているとする。$G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{A}_{\mathrm{f}}}$ の Haar 測度 dg が直積測度 $dg = dg_\infty dg_{\mathrm{f}}$ で dg_{f} は $\int_{G_{\widehat{\mathbb{Z}}}} dg_{\mathrm{f}} = 1$ となるように規格化されているとする。また $V_{\mathbb{A}} = V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{A}_{\mathrm{f}}}$ 上の試験関数 Φ は $\Phi = \Phi_\infty \otimes \Phi_{\mathrm{f}}$ の形でかつ Φ_{f} は $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ の指示関数であるとする。このとき

$$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi,s) = Z^{\mathrm{cl}}(\Phi_\infty,s)$$

である。

証明 条件より $G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{R}}G_{\widehat{\mathbb{Z}}}G_{\mathbb{Q}}/G_{\mathbb{Q}} \cong G_{\mathbb{R}}G_{\widehat{\mathbb{Z}}}/(G_{\mathbb{R}}G_{\widehat{\mathbb{Z}}} \cap G_{\mathbb{Q}})$ である。$\mathbb{Q} \cap \widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ に注意すれば，$G_{\mathbb{R}}G_{\widehat{\mathbb{Z}}} \cap G_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Z}}$ であるから，

$$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = \int_{(G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}) \times G_{\widehat{\mathbb{Z}}}} |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{s} \sum_{x \in V'_{\mathbb{Q}}} \Phi_{\infty}(g_{\infty}x)\Phi_{\mathrm{f}}(g_{\mathrm{f}}x) dg_{\infty} dg_{\mathrm{f}}$$

である。ここで $g_{\mathrm{f}} \in G_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ のとき $\chi(g_{\mathrm{f}}) \in \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ なのでそのイデールノルムは 1 であり，よって $|\chi(g)|_{\mathbb{A}} = |\chi(g_{\infty})|_{\mathbb{A}}|\chi(g_{\mathrm{f}})|_{\mathbb{A}} = |\chi(g_{\infty})|_{\mathbb{A}} = |\chi(g_{\infty})|$ である。また $V_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ は $G_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ 不変なので $g_{\mathrm{f}} \in G_{\widehat{\mathbb{Z}}}$ のとき $\Phi_{\mathrm{f}}(g_{\mathrm{f}}x) = \Phi_{\mathrm{f}}(x)$ である。よって，$V_{\mathbb{Q}} \cap V_{\widehat{\mathbb{Z}}} = V_{\mathbb{Z}}$ であることから，

$$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = \int_{G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}} |\chi(g_{\infty})|^{s} \sum_{x \in V'_{\mathbb{Q}} \cap V_{\mathbb{Z}}} \Phi_{\infty}(g_{\infty}x) dg_{\infty} \cdot \int_{G_{\widehat{\mathbb{Z}}}} dg_{\mathrm{f}}$$

である。$\int_{G_{\widehat{\mathbb{Z}}}} dg_{\mathrm{f}} = 1$ なのでこれは $Z^{\mathrm{cl}}(\Phi_{\infty}, s)$ と一致する。 □

定理 2.1 の G の条件については，次がよく知られている。

命題 2.2 $G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{R}}G_{\widehat{\mathbb{Z}}}G_{\mathbb{Q}}$ は G が GL_n や，そのブロック下三角な行列のなす部分群のとき正しい。

また，G_1, G_2 で正しければ $G_1 \times G_2$ でも正しい。

注意 2.3 $Z^{\mathrm{cl}}(\Phi_{\infty}, s)$ と $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s)$ のどちらがよいかは目的にもよる。一般の代数体で考えたい場合や，$\mathbb{Q}_p$ 上の緻密な局所理論を考えたい場合は，やはり $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s)$ の方が便利であるが，そうでなければアデリックな定式化にこだわる必要がないこともある。なお，杉山 [26] で説明されるゼータ関数 $\xi_i(L, s)$ の格子 L の任意性は，(2.2) では Φ_{f} の取り方の任意性に対応する。

2.3 アデリックな積分の取り扱い

ゼータ積分の解析接続と関数等式を証明する方法は，Z^{cl} と Z^{ad} であまり違いはない。Z^{cl} の場合は杉山 [26, 命題 4.1] で扱われているので，ここでは Z^{ad} が並行した扱いになることを簡単に説明しておく。(2.2) の右辺の積分が $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で収束しているとする。（これは例外的な場合を除き正しい。正確には [15] を参照。）積分領域を $|\chi(g)| \geq 1$ の部分と $|\chi(g)| \leq 1$ の部分に分け，$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = Z^{\mathrm{ad}}_{+}(\Phi, s) + Z^{\mathrm{ad}}_{-}(\Phi, s)$ と

する。$Z_+^{\mathrm{ad}}(\Phi, s)$ の積分は任意の s で収束し，s の整関数になる。Z_-^{ad} の方に Poisson 和公式を用いる。

V^* を V の双対空間とする。非自明な加法指標 $\psi\colon \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}$ を固定し，Φ の Fourier 変換 $\widehat{\Phi}\colon V_{\mathbb{A}}^* \to \mathbb{C}$ を

$$\widehat{\Phi}(y) = \int_{V_{\mathbb{A}}} \Phi(x)\psi([x,y])dx$$

で定める。ただし $[x,y]$ は $x \in V$ と $y \in V^*$ のペアリングであり，$V_{\mathbb{A}}$ の Haar 測度 dx は $\int_{V_{\mathbb{A}}/V_F} dx = 1$ となるように規格化しているとする。Poisson 和公式は $\sum_{x\in V_F} \Psi(x) = \sum_{y\in V_F^*} \widehat{\Psi}(y)$ である。これを $Z_-^{\mathrm{ad}}(\Phi, s)$ の和に適用するために，$\Psi(x) = \Phi(gx)$ とおいてそのフーリエ変換 $\widehat{\Psi}$ を計算すると，

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(y) &= \int_{V_{\mathbb{A}}} \Phi(gx)\psi([x,y])dx = |\det\rho(g)|_{\mathbb{A}}^{-1} \int_{V_{\mathbb{A}}} \Phi(x)\psi([g^{-1}x,y])dx \\ &= |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{-n/d} \int_{V_{\mathbb{A}}} \Phi(x)\psi([x,g^*y])dx = |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{-n/d}\widehat{\Phi}(g^*y)\end{aligned}$$

である。ただし $\rho^*\colon G \to \mathrm{GL}(V^*)$ は反傾表現で，$\rho^*(g)y = g^*y$ と書いた。また $n = \dim V$ で d は相対不変式 P の次数である。したがって

$$\sum_{x\in V_F} \Phi(gx) = |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{-n/d} \sum_{y\in V_F^*} \widehat{\Phi}(g^*y)$$

である。これより

$$Z_-^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = Z_+^{\mathrm{ad}*}(\widehat{\Phi}, n/d - s) + I(\Phi, s),$$

ただし

$$I(\Phi, s) = \int_{\substack{G_{\mathbb{A}}/G_F \\ |\chi(g)|\le 1}} |\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{s} \Biggl(|\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{-n/d} \sum_{y\in S_F^*} \widehat{\Phi}(g^*y) - \sum_{x\in S_F} \Phi(gx) \Biggr) dg$$

と表される。ゼータ積分 $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s)$ の式に代入すれば

$$Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = Z_+^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) + Z_+^{\mathrm{ad}*}(\widehat{\Phi}, n/d - s) + I(\Phi, s)$$

で，右辺の前の 2 つの項は s の整関数であるなので，極の主要部は $I(\Phi, s)$ の分析に帰着される。$\Phi|_{S_F} \equiv \widehat{\Phi}|_{S_F^*} \equiv 0$ となるように Φ を取れば $I(\Phi, s) = 0$ であり，この Φ に対して $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s)$ は整関数であり，関数等式 $Z^{\mathrm{ad}}(\Phi, s) = Z^{\mathrm{ad}*}(\widehat{\Phi}, n/d - s)$ が成り立つ。

3　篩法入門

篩法とは，素数の分布や素数の条件で定まる集合の個数を調べる一つの手法である。Eratosthenes の篩に起源をもち，今日では非常に多種多様な篩法が知られている。概均質ベクトル空間からも，篩法を用いて示すことのできる密度定理がある。本報告集では Thorne [21], 鈴木雄 [31], 鈴木美 [30] で篩法が登場するが，これらはいずれも無平方篩 (squarefree sieve) という種類の篩と考えることができる。

X を正の実数とし，$N_{\mathrm{sf}}(X)$ で $1 \leq n \leq X$ であるような無平方な整数 n の個数を表す。$X \to \infty$ のときの $N_{\mathrm{sf}}(X)$ の挙動を調べるのは，無平方篩のもっとも基本的な問題だと考えることができる。本節では $N_{\mathrm{sf}}(X)$ の挙動を 2 通りの方法で調べることで，無平方篩の考え方を説明する。

3.1　誤差評価のない漸近式

次は Gegenbauer の定理として古典的に知られている。

命題 3.1（**Gegenbauer の定理**）

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_{\mathrm{sf}}(X)}{X} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

証明 Y を実数とする。$1 \leq n \leq X$ となる整数 n で，$p < Y$ であるすべての素数 p について p^2 で割れないようなものの個数を $N_Y(X)$ とする。中国剰余定理から

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_Y(X)}{X} = \prod_{p<Y}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \tag{3.1}$$

である。$N_{\mathrm{sf}}(X) \leq N_Y(X)$ なので，

$$\limsup_{X\to\infty} \frac{N_{\mathrm{sf}}(X)}{X} \leq \prod_{p<Y}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

である。Y は任意だから，

$$\limsup_{X\to\infty} \frac{N_{\mathrm{sf}}(X)}{X} \leq \prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)}$$

である。一方，$N_Y(X)$ では数えられるが $N_{\mathrm{sf}}(X)$ では数えられない整数 n は，ある素数 $p \geq Y$ について，p^2 で割れる。

$$(X \text{ 以下の正の整数で } p^2 \text{ で割れるものの個数}) \leq \frac{X}{p^2} \tag{3.2}$$

であることから

$$N_Y(X) - N_{\mathrm{sf}}(X) \leq \sum_{p \geq Y} \frac{X}{p^2} \leq X \sum_{k \geq Y} \frac{1}{k^2} \leq \frac{X}{Y-1}$$

である。したがって

$$\frac{N_{\mathrm{sf}}(X)}{X} \geq \frac{N_Y(X)}{X} - \frac{1}{Y-1} \underset{X\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{p<Y}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{Y-1}$$

である。Y は任意だから

$$\liminf_{X\to\infty} \frac{N_{\mathrm{sf}}(X)}{X} \geq \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)}$$

である。これで証明された。 □

証明を振り返ってみよう。$N_Y(X)$ は，$p < Y$ について p^2 で割れる数は除去したという意味で “篩にかけた” 集合の個数である。$N_Y(X)$ の $X \to \infty$ の極限は中国剰余定理で簡単に求められるが，これは $N_Y(X)$ が数える整数は有限個の素数の条件で定まっているからである。$N_{\mathrm{sf}}(X)$ の n が無平方という条件は，「すべての素数 p について $p^2 \nmid n$ である」という，無限個の素数の条件であるために，直接の扱いが難しい。そこで有限個の素数の条件で規定されている $N_Y(X)$ で近似したのだが，命題 3.1 を証明するためにはこの近似がよいこと，すなわち $N_{\mathrm{sf}}(X)$ と $N_Y(X)$ の差が適切に小さいことを示す必要がある。(3.2) は単純な評価だが，これが $|N_Y(X) - N_{\mathrm{sf}}(X)|$ の小ささを保証するものとなっている。

3.2 誤差評価

実際には $N_{\mathrm{sf}}(X)$ について，命題 3.1 より強い，次の評価を証明することができる。上の証明とは独立に，この命題を示そう。

命題 3.2

$$N_{\mathrm{sf}}(X) = \frac{1}{\zeta(2)} X + O(X^{1/2}).$$

証明 q を無平方な正の整数として，無平方な正整数 q について，

$$N(q;X) := (1 \le n \le X \text{ で } q^2 \text{ の倍数となる } n \text{ の個数})$$

と定める．包除原理 (inclusion-exclusion principle) によって

$$N_{\mathrm{sf}}(X) = \sum_q \mu(q) N(q;X) \tag{3.3}$$

である．ただし $\mu(q)$ は Möbius 関数で，q は無平方な正の整数全体をわたる。ここで，$N(q;X) = \lfloor q^{-2}X \rfloor$ だから，q, X について一様な評価

$$N(q;X) = q^{-2}X + O(1), \tag{3.4}$$

$$N(q;X) = O(q^{-2}X), \tag{3.5}$$

が成り立つ．パラメーター Q を用意し，(3.3) の和を次のように分ける．

$$N_{\mathrm{sf}}(X) = \sum_{q \le Q} \mu(q) N(q;X) + \sum_{q > Q} \mu(q) N(q;X). \tag{3.6}$$

第 1 項には (3.4) を，第 2 項には (3.5) を用いると，

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{sf}}(X) &= X \sum_{q \le Q} \frac{\mu(q)}{q^2} + O\left(\sum_{q \le Q} 1\right) + O\left(X \sum_{q > Q} q^{-2}\right) \\ &= X\left(\sum_q \frac{\mu(q)}{q^2} + O(\sum_{q>Q} q^{-2})\right) + O(Q) + O(XQ^{-1}) \\ &= X \sum_q \frac{\mu(q)}{q^2} + O(Q + XQ^{-1}) \end{aligned}$$

となる．$Q = XQ^{-1}$ となるよう Q を選ぶ．このとき $Q = X^{1/2}$，$O(Q + XQ^{-1}) = O(X^{1/2})$ であり，また $\sum_q \frac{\mu(q)}{q^2} = \prod_p (1 - \frac{1}{p^2}) = 1/\zeta(2)$ なので示された． □

こちらの証明でも，無限個の素数の条件で定まる $N_{\mathrm{sf}}(X)$ を直接は扱わず，包除原理 (3.3) により，有限個の素数の条件で定まる $N(q;X)$ と結び付けて考えている。(3.6) は，Q 以下の無平方数 q で “篩にかけ” て，その誤差を評価する方針であることを意味する。こちらの証明では，やはり成立する理由は単純だが，$N(q;X)$ の 2 つの評価 (3.4), (3.5) が鍵になっている。

3.3 概均質ベクトル空間における篩

概均質ベクトル空間で篩法が用いられた初めての著名な例は 1971 年の Davenport-Heilbronn [10] と言ってよいと思われる。ここで，$|\mathrm{Disc}(F)| < X$ となる 3 次体 F の同型類の個数を $N_3(X)$ としたとき

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_3(X)}{X} = \frac{1}{3\zeta(3)} \tag{3.7}$$

であることが示された。篩法の適用方法としては命題 3.1 の証明の流れである。以来，概均質ベクトル空間で同様の篩法によって，Datskovsky, Wright, Kable, 雪江, 谷口, Bhargava, 鈴木美裕, 若槻 [9, 13, 12, 19, 2, 3, 18] らにより密度定理が示されてきた。

概均質ベクトル空間でも命題 3.2 のような包除原理による篩が有効であることが一般的に指摘されたのは，比較的最近の Belabas-Bhargava-Pomerance [1] による。[1] では $N_3(X)$ については (3.7) の改良として

$$N_3(X) = \frac{1}{3\zeta(3)}X + O(X^{7/8}\log^2 X) \tag{3.8}$$

が示された。以来，Bhargava, Shankar, 谷口, Thorne, Tsimerman, Hough [7, 6, 17, 11] などにより，誤差評価を含む成果が得られている。

現在は余正則空間においても篩法から密度定理が示されるようになった。ただし [4, 5] では今のところ主要項のみが決定されていて，誤差項の評価は得られていない。数える対象が複雑な場合は，(3.2) や (3.4), (3.5) に対応する評価を得るのは難しいことも多い。問題に応じて様々なアプローチが取られている。

参考文献

[1] M Belabas, M. Bhargava, and C. Pomerance. Error estimates for the Davenport-Heilbronn theorems. *Duke. Math. J.*, 153:173–210, 2010.

[2] M. Bhargava. The density of discriminants of quartic rings and fields. *Ann. Math.*, 162:1031–1063, 2005.

[3] M. Bhargava. The density of discriminants of quintic rings and fields. *Ann. Math.*, 172:1559–1591, 2010.

[4] M. Bhargava and A. Shankar. Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves. *Ann. Math.*, 181:191–242, 2015.

[5] M. Bhargava and A. Shankar. Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0. *Ann. Math.*, 181:587–621, 2015.

[6] M. Bhargava, A. Shankar, and J. Tsimerman. On the Davenport-Heilbronn theorems and second order terms. *Invent. Math.*, 193:439–499, 2013.

[7] Manjul Bhargava, Takashi Taniguchi, and Frank Thorne. Improved error estimates for the Davenport-Heilbronn theorems. *Math. Ann., to appear: arXiv:2107.12819*, 2023.

[8] A. Borel. *Linear algebraic groups.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2nd edition, 1991.

[9] B. Datskovsky and D.J. Wright. Density of discriminants of cubic extensions. *J. Reine Angew. Math.*, 386:116–138, 1988.

[10] H. Davenport and H. Heilbronn. On the density of discriminants of cubic fields. II. *Proc. Royal Soc.*, A322,:405–420, 1971.

[11] Robert Hough. The shape of cubic fields. *Res. Math. Sci.*, 6(3):Paper No. 25,, 2019.

[12] A.C. Kable and D.J. Wright. Uniform distribution of the Steinitz invariants of quadratic and cubic extensions. *Compos. Math.*, 142:84–100, 2006.

[13] A.C. Kable and A. Yukie. The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields, I. *Tohoku Math. J.*, 54:513–565, 2002.

[14] H. Saito. Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vecotr spaces. *Math. Ann.*, 315:587–615, 1999.

[15] H. Saito. Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces. *Nagoya. Math. J.*, 170:1–31, 2003.

[16] Jean-Pierre Serre. *Galois cohomology.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, english edition, 2002. Translated from the French by Patrick Ion and revised by the author.

[17] A. Shankar and J. Tsimerman. Counting S_5-fields with a power saving error term. preprint, arXiv:1310.1998.

[18] Miyu Suzuki and Satoshi Wakatsuki. Explicit mean value theorems for toric periods and automorphic L-functions. *arXiv preprint arXiv:2103.04589*, 2021.

[19] T. Taniguchi. A mean value theorem for the square of class number times regulator of quadratic extensions. *Ann. Inst. Fourier*, 58-2:625–670, 2008.

[20] T. Taniguchi. On parameterizations of rational orbits of some forms of prehomogeneous vector spaces. 125-2:169–100, 2008. Manuscripta Math.

[21] F. Thorne. Counting cubic fields using shintani's zeta function. 本報告集, 2023.

[22] A. Yukie. Rational orbit decomposition of prehomogeneous vector spaces. available from https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~yukie/.

[23] 桂利行. 代数学 *III* 体とガロア理論. 東京大学出版会, 2005.

[24] 佐野薫. 余正則空間と楕円曲線のセルマー群. 本報告集, 2023.

[25] 山本修司. 大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性. 本報告集, 2023.

[26] 杉山和成. 概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（1 変数の場合）. 本報告集, 2023.

[27] 石塚裕大. 有理軌道、整軌道の解釈. 本報告集, 2023.

[28] 谷口隆. 例で学ぶ概均質ベクトル空間. 本報告集, 2023.

[29] 都築正男. 新谷二重ゼータ関数. 本報告集, 2023.

[30] 鈴木美裕. 保型形式と概均質ゼータ関数. 本報告集, 2023.

[31] 鈴木雄太. 整数軌道の数え上げ：数の幾何と平均法. 本報告集, 2023.

[32] 齋藤裕. ゼータ関数の具体的表示について. 第 *10* 回整数論サマースクール報告集, 2003.