概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

三元二次形式のペアと射影空間の幾何

石塚　裕大（九州大学 IMI）

概要

高次合成則のことを学ぶに当たって，ひとつの有用な観点となるのが射影空間とその幾何学である．この章では，できるだけ具体的に射影空間とその座標変換群を導入し，また必要な幾何学的な性質について概均質ベクトル空間の観点から議論しておく．ここで登場する観点は [佐野] においても基礎的である．

記号について：$K^2 \otimes K^2 \otimes K^3$ や $K^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 K^3$ などの空間を，K を省略して $2 \otimes 2 \otimes 3$ や $2 \otimes \mathrm{Sym}^2 3$ のように略記することがある．

1　射影直線

K を体とし，K^2 を二次元 K-ベクトル空間とする．このゼロベクトルを $\mathbf{0}$ と書く．

1.1　射影直線の定義

$K^2 \setminus \mathbf{0}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下で定義する．ゼロベクトルでないベクトル $(a_0, a_1), (b_0, b_1) \in K^2 \setminus \mathbf{0}$ について，

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff \exists \lambda \in K^*, (\lambda a_0, \lambda a_1) = (b_0, b_1)$$

で定義する．たとえば $a \neq 0$ なら $(a : 0) = (1 : 0)$ であるし，$(0 : a) = (0 : 1)$, また $(a : a) = (1 : 1)$ である．

この同値類は「比 $a_0 : a_1$ と $b_0 : b_1$ が等しい」と理解することができる．そこで $(a_0, a_1) \in K^2 \setminus \mathbf{0}$ の同値類を $(a_0 : a_1)$ と書く．K 上の**射影直線** *projective line* $\mathbb{P}^1(K)$ とは，この同値類全体の集合であるとする．

関連する事項を加えておこう．

- $\mathbb{P}^1(K)$ は K^2 内の一次元部分空間の集合と思うこともできる．実際，$[a_0 : a_1]$

について $K(a_0, a_1) \subsetneq K^2$ を対応させればよい．

- 実数体 $\mathbb{R}$ 上の射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ は円周 S^1 に同相である．また複素数体 $\mathbb{C}$ 上の射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は球面 S^2 に同相になる（Riemann 球面）．

$a \mapsto (a : 1)$ で定義される単射 $K \hookrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ を考えると，$(1 : 0)$ 以外の点は像に入る．これによりセル分解

$$\mathbb{P}^1(K) = K \sqcup \{(1 : 0)\}$$

を得る．仲間はずれの $(1 : 0)$ を無限遠点と呼ぶことがあり，その場合は ∞ で表したりする．いわば射影直線は直線 $K = \mathbb{A}^1(K)$ の無限遠点 ∞ による一点コンパクト化である．

1.2 射影直線の座標変換

直線だと言うなら座標変換を考えたい．射影直線の座標変換群は直線のそれより大きなものになっている．

K 成分の可逆行列 $g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$ を考える．このとき，$P = (a_0 : a_1) \in \mathbb{P}^1(K)$ について

$$Pg = (a_0 : a_1) \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} := (pa_0 + ra_1 : qa_0 + sa_1) \in \mathbb{P}^1(K)$$

とする．特にスカラー行列 $\lambda I_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ は

$$P \cdot \lambda I_2 = (\lambda a_0 : \lambda a_1) = (a_0 : a_1)$$

と自明に作用する．重要なのは次の性質である．

命題 1.1　$\mathbb{P}^1(K)$ への $\mathrm{GL}_2(K)$ の作用は三重推移的である．

三重推移的とは，異なる三点の組 $(P_0, Q_0, R_0), (P_1, Q_1, R_1) \in \mathbb{P}^1(K)^3$ を用意すると，ある $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ について

$$P_0 g = P_1,\ Q_0 g = Q_1,\ R_0 g = R_1$$

が成り立つということである．

証明 $W_0 = ((1:0),(0:1),(1:1))$ とする．(P_1,Q_1,R_1) は W_0 であると仮定して示せば十分である．

- 実際，(P_0,Q_0,R_0) を W_0 に移す行列を g_0, (P_1,Q_1,R_1) を W_0 に移す行列を g_1 とすれば，$g_0g_1^{-1}$ が (P_0,Q_0,R_0) を (P_1,Q_1,R_1) に移す．

いま $P_0 = (a_0:a_1), Q_0 = (b_0:b_1)$ とすると，$P_0 \neq Q_0$ という仮定から，行列

$$g = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$$

は可逆である．そして $P_0g^{-1} = (1:0)$ および $Q_0g^{-1} = (0:1)$ である．

また $R_0g^{-1} = (c_0 : c_1)$ とおくと，P_0, Q_0 は R_0 と異なるから P_0g^{-1}, Q_0g^{-1} は R_0g^{-1} と異なる．つまり c_0, c_1 はゼロではない．したがって

$$h = \begin{pmatrix} c_0^{-1} & 0 \\ 0 & c_1^{-1} \end{pmatrix}$$

を考えることができる．

そこで $g^{-1}h$ を作用させてみると，

$$P_0g^{-1}h = (1:0),\ Q_0g^{-1}h = (0:1)$$

は変わらず，$R_0g^{-1}h = (1:1)$ であることがわかる．つまり $g^{-1}h$ は (P_0,Q_0,R_0) を W_0 に移す． □

1.3　二元三次形式と三点集合

さて，[谷口 1] の記号を踏襲し，$V(K)$ を K 係数の二元三次形式の空間

$$V(K) = \mathrm{Sym}^3 K^2 = \{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \mid a,b,c,d \in K\}$$

として，二元三次形式 $x = x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \in V(K)$ を考えよう．いま

$$x(\lambda u, \lambda v) = \lambda^3 x(u,v)$$

であるから，一般には $x(\lambda a_0, \lambda a_1) \neq x(a_0,a_1)$ である．

しかし $x(a_0,a_1)$ がゼロか否かという点に限れば，$\lambda \in K^*$ について $(\lambda a_0, \lambda a_1)$ を考えても同じである．そこで，x の零点集合

$$Z_x = Z_x(K) \coloneqq \{(a_0:a_1) \in \mathbb{P}^1(K) \mid x(a_0,a_1) = 0\}$$

を矛盾なく考えることができる．

例 1.2　$w_0 = uv(u-v)$ について，

$$Z_{w_0}(\mathbb{Q}) = \{(1:0),(0:1),(1:1)\}$$

となり，これは上の命題で導入した W_0 と一致する．

例 1.3　一方で $x = u^3 - 2v^3$ とおくと，

$$\begin{aligned} Z_x(\mathbb{Q}) &= \emptyset, \\ Z_x(\mathbb{R}) &= \{(\sqrt[3]{2}:1)\}, \\ Z_x(\mathbb{C}) &= \{(\sqrt[3]{2}:1),(\zeta_3\sqrt[3]{2}:1),(\zeta_3^2\sqrt[3]{2}:1)\} \end{aligned}$$

となる（$\zeta_3 \in \mathbb{C}$ は 1 の原始三乗根とする）．どの体で考えるかによって元の数が異なることに注意しよう．

例 1.4　重根がある $x = u^2v$ のような場合は，

$$Z_x(\mathbb{C}) = \{(1:0),(0:1)\}$$

となって，複素数体で考えても二点しかない．$x \in V(K)$ が非退化，つまり判別式が消えないことと，$Z_x(\overline{K})$ が三点であることは同値である．

なお同様に K 係数の二元 n 次形式 $F(u,v) \in \mathrm{Sym}^n 2$ があると，その零点集合 $Z_F(K)$ を考えることができる．たとえば $n=1$ のときは $F(u,v) = pu + qv$ であるが，$F \neq 0$ なら

$$Z_{pu+qv}(K) = \{(q:-p)\}$$

という一点集合になる．逆に，一点集合 $\{(a_0:a_1)\} \in \mathbb{P}^1(K)$ があると，それは $\ell(u,v) = a_1u - a_0v$ についての $Z_\ell(K)$ と一致する．この ℓ は定数倍を除いて一意に決まることもわかる．次数の高い場合も，n 点集合 $W \subseteq \mathbb{P}^1(K)$ があると，$W = Z_F(K)$ となるような F が，定数倍を除いて一意に定まる．この事実は射影直線の場合にはシンプルだが，より次元の高い射影空間で考えると対応する事実を注意深く調べる必要がある．$n=3$ の場合にはあとで具体的に示しておく．

ここで，Z_x の性質を調べ，$\mathbb{P}^1(K)$ への $\mathrm{GL}_2(K)$ の作用が三重推移的であることと関連付けてみよう．[谷口 1] に述べられているとおり，$V(K)$ には $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{GL}_1(K) \times \mathrm{GL}_2(K)$ の作用が

$$gx(u,v) = g_1 x((u\ v)g_2)$$

により定義されていると考える．

命題 1.5　$x \in V(K)$, $g = (g_1, g_2) \in G(K)$ について $Z_x(K)g_2^{-1} = Z_{gx}(K)$ である．

証明　$P = (a_0 : a_1) \in Z_{gx}(K)$ とすると，定義から $(gx)(a_0, a_1) = 0$ である．ところで作用の定義から

$$(gx)(a_0, a_1) = g_1 x((a_0, a_1)g_2)$$

となる．これは $Pg_2 \in Z_x(K)$ を意味する．つまり $P \in Z_x(K)g_2^{-1}$ である．逆向きの包含は議論を逆にたどればよい． □

一つ用語を定義しておく．二元三次形式 $x \in V(K)$ が分裂するとは，x が K 上で三つの線形形式の積に分解し，なおかつそれらの線形形式が定数倍しても互いに相異なる状況を指す．平たく言えば，$Z_x(K)$ が $\mathbb{P}^1(K)$ に相異なる三点を定める場合である．

系 1.6　$x \in V(K)$ が分裂するとき，ある $g = (g_1, g_2) \in G(K)$ が存在して $x = gw_0$ である．

証明　x が分裂すると，$Z_x(K)$ は異なる三点になる．$\mathrm{GL}_2(K)$ の三重推移性から，ある g_2 について $Z_x(K)g_2^{-1} = Z_{w_0}(K)$ である．上の命題を使えば，$Z_{(1,g_2)x}(K) = Z_{w_0}(K) = W_0$ とも言える．

さらに命題の前に述べたとおり，$Z_y(K) = W_0$ となる $y(u, v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3$ は $w_0 = uv(u - v)$ の定数倍しかないのだが，これを後々との比較のために具体的に示しておこう．

- $(1 : 0) \in W_0$ で消えるから，$a = 0$.
- $(0 : 1) \in W_0$ で消えるから，$d = 0$.
- さらに $(1 : 1) \in W_0$ で消えるので，$b + c = 0$.
- 一方で K が標数 2 でなければ，$(1 : -1) \notin W_0$ である．するとこの上で y は消えないから，$-b + c \neq 0$. K の標数が 2 でないため，$b + c = 0$ と合わせれば $b \neq 0$ がわかる．K が標数 2 であれば別の点を選ぶ必要がある．

以上をまとめると，$y(u, v) = buv(u - v)$ $(b \neq 0)$ となる．

上の状況に戻ると，$(1, g_2)x = buv(u - v)$ $(b \neq 0)$ となっている．定数 b の逆数を g_1 とすれば $(g_1, g_2)x = w_0$ である． □

この系で $K=\overline{K}$ とすれば，分裂する二元三次形式は gw_0 と表示できることがわかる．$x\in V(K)$ が $\overline{K}$ 上で分裂することは x が重根を持たないことで，これは $\mathrm{Disc}(x)\neq 0$ と同値であることを組み合わせれば，二元三次形式の空間 $V=\mathrm{Sym}^3 2$ が概均質ベクトル空間になることを示したことになる．もちろん判別式 $\mathrm{Disc}(x)$ が相対不変式である．

2　射影平面

次に射影平面を考えよう．K を体とし，今度は K 上の三次元数ベクトル空間 K^3 を考える．このゼロベクトルを再び $\mathbf{0}$ と書く．

2.1　定義と射影変換

前と同様に，$K^3\setminus\mathbf{0}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下で定義する．ゼロベクトルでないベクトル $(a_0,a_1,a_2),(b_0,b_1,b_2)\in K^3\setminus\mathbf{0}$ について，

$$(a_0,a_1,a_2)\sim(b_0,b_1,b_2)\iff\exists\lambda\in K^*,(\lambda a_0,\lambda a_1,\lambda a_2)=(b_0,b_1,b_2)$$

で定義する．元 $(a_0,a_1,a_2)\in K^3\setminus\mathbf{0}$ の同値類を $(a_0:a_1:a_2)$ と書く．K 上の**射影平面** *projective plane* $\mathbb{P}^2(K)$ とは，この同値類全体の集合であるとする．

セル分解も射影直線と同様に考えられる．$(a_0,a_1)\mapsto(a_0:a_1:1)$ で定義される写像 $K^2\hookrightarrow\mathbb{P}^2(K)$ を考えると，これは単射である．その像に入らないのは

$$\{(a_0:a_1:0)\mid(a_0,a_1)\in K^2\setminus\mathbf{0}\}$$

という点集合であり，これは $(a_0:a_1)\mapsto(a_0:a_1:0)$ という写像 $\mathbb{P}^1(K)\hookrightarrow\mathbb{P}^2(K)$ によって射影直線 $\mathbb{P}^1(K)$ と同一視できる．つまりセル分解は

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^2(K)&=K^2\sqcup\mathbb{P}^1(K)\\&=K^2\sqcup K^1\sqcup\{(1:0:0)\}\end{aligned}$$

と記述できる．この射影直線を無限遠直線と呼ぶことがある．

射影変換も射影直線と同様である．$(a_0:a_1:a_2)\in\mathbb{P}^2(K)$ および $g\in\mathrm{GL}_3(K)$ について，$(a_0:a_1:a_2)g$ をベクトル $(a_0,a_1,a_2)g$ の同値類として定義する．やはりスカラー行列は自明に作用する．

2.2　平面二次曲線と直線

事情が大きく異なってくるのは零点集合である．

とはいっても，定義自体は変わらない．K 係数の三元二次形式 $F = F(u, v, w) \in \mathrm{Sym}^2 3$ について，

$$Z_F(K) \coloneqq \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(K) \mid F(a_0, a_1, a_2) = 0\}$$

と定義する．前と同様に $F(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = \lambda^2 F(u, v, w)$ であることから定義できていることが従う．F が三元 n 次形式でも同様に定義ができる．

異なるのは，$Z_F(K)$ が一般に点集合ではなく，曲線になることである．

例 2.1　図的に理解しやすいので，K を実数体 $\mathbb{R}$ として考えよう．そして

$$F(u, v, w) = u^2 + v^2 - w^2$$

という例を取る．このとき

$$Z_F(\mathbb{R}) = \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 = 0\}$$

であるが，このままではよくわからない．

そこで，セル分解の K^2 の部分，つまり $a_2 \neq 0$ の部分に限って考えてみよう．K^2 の埋め込み写像 $(a_0, a_1) \mapsto (a_0 : a_1 : 1)$ を $\iota\colon K^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(K)$ と書けば,

$$\iota^{-1}(Z_F(\mathbb{R})) = \{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \mid a_0^2 + a_1^2 - 1 = 0\}$$

となって，これは原点中心，半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ であることがわかる．同様に $F = uw - v^2$ とすれば放物線 $y = x^2$ が，$F = u^2 - v^2 - w^2$ とすれば双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ が出てくる．

逆に,

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

という実係数の二次式について $f = 0$ で定義される $\mathbb{R}^2$ 内の二次曲線があれば，それは

$$F(u, v, w) = au^2 + buv + cv^2 + duw + evw + fw^2$$

という二次形式について $\iota^{-1}(Z_F(\mathbb{R}))$ だと理解することができる．つまり $Z_F \subseteq \mathbb{P}^2$ は二次曲線 $f=0$ を無限遠直線にまで補完した図形である．$\mathbb{P}^2$ を射影平面と呼ぶことを踏まえ，Z_F を**平面二次曲線** *conic* と呼ぶことがある[*1]．

例 2.2　$n \neq 2$ についての三元 n 次形式でもほぼ同様である．たとえば $n=1$ だと

$$f(x,y) = ax + by + c \quad ((a,b) \neq (0,0))$$

で定まる直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ に対応して，

$$F(u,v,w) = au + bv + cw$$

という線形形式を考えれば，$\iota^{-1}(Z_F(\mathbb{R})) = \ell$ である．つまり $Z_F(\mathbb{R})$ は ℓ を補完する図形である．補完する前が直線であることを踏まえ，一次形式 $F \neq 0$ についての Z_F を射影直線，あるいは単に直線と呼ぶことが多い．同型 $Z_F \cong \mathbb{P}^1$ が構成できるので，$\mathbb{P}^1$ を射影直線と呼んだこととも整合する．

なお $n=3$ だと楕円曲線（の K-form）が登場する．$n=4$ 以上だとより複雑な曲線が登場することになる．

多項式を一変数多い斉次多項式にしていることを踏まえ，f から F を考えることをしばしば斉次化 homogenization と呼ぶ.

2.3　三元二次形式の空間と平面二次曲線

ここで三元二次形式の空間 $\mathrm{Sym}^2 3$ について復習しておこう．この空間は

$$\mathrm{Sym}^2 3 = \{F(u,v,w) = au^2 + buv + cv^2 + duw + evw + fw^2 \mid a, b, \ldots, f \in K\}$$

と二次形式そのものを考えることもできるが，K が標数 2 でない場合は F に Gram 行列と呼ばれる対称行列

$$M_F \coloneqq \begin{pmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & d & e/2 \\ c/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$$

[*1] 一般の平面二次曲線は quadratic あるいは plane quadratic, 非特異な場合は円錐曲線 conic や conic section と呼ぶという区別もあり得るらしい.

を対応させせることで，次数 3 の対称行列の空間と考えることもできる．逆の対応は

$$F(u,v,w) = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} M_F \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

である．群 $\mathrm{GL}_3(K)$ の作用は

$$(gF)(u,v,w) = F((u,v,w)g),$$
$$M_{gF} = gM_F{}^t g$$

で与えられ，相対不変式 $P(F)$ は

$$P(F) = 4\det(M_F)$$

がある(整係数多項式になり, 標数 2 でも定義できている)．すると開軌道は $P(F) \neq 0$ つまり $\operatorname{rank} M_F = 3$ で与えられるが，このとき Z_F は非特異 nonsingular な平面二次曲線に対応する．ほかの $K = \overline{K}$ 上の軌道は $\operatorname{rank} M_F = 2, 1, 0$ に対応するが，それぞれ以下のように理解できる：

- $\operatorname{rank} M_F = 2$: 二直線の和集合．たとえば $F(u,v,w) = uv$ のときは直線 Z_u, Z_v の和集合で，共通零点 $(0:0:1)$ が特異点になっている．
- $\operatorname{rank} M_F = 1$: いわゆる二重直線．たとえば $F(u,v,w) = u^2$ のとき，点集合としては直線 $Z_{u^2}(K) = Z_u(K)$ である．スキームで考えると Z_{u^2} と Z_u にあたる空間に違いが出てくる．
- $\operatorname{rank} M_F = 0$: $F = 0$ に限られるので，$Z_F(K) = \mathbb{P}^2(K)$ である．

なお，K が標数 2 のときは $\mathrm{Sym}^2\, 3$ は自明でない $\mathrm{GL}_2(K)$ 部分表現を持つなど様子が異なってくるが，$P(F) \neq 0$ で定義される空間が開軌道であること，開軌道の要素は非特異な二次曲線に対応すること，および特異な二次曲線の分類は同じである．

2.4 三元二次形式のペアの空間

さて，本稿の主題である三元二次形式のペアの空間 $2 \otimes \mathrm{Sym}^2\, 3$ を考えよう．この空間は $\mathrm{Sym}^2\, 3 \oplus \mathrm{Sym}^2\, 3$ と思うことができるので，元 $x \in K^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 K^3$ を,

(1) 三元二次形式 $A(u,v,w), B(u,v,w)$ の対 $x = (A, B)$, あるいは

(2) 標数 2 以外なら三次対称行列 M_A, M_B の対 (M_A, M_B)

と考えることができる．代数群 G は $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ であり，$g = (g_2, g_3) \in G(K) = \mathrm{GL}_2(K) \times \mathrm{GL}_3(K)$ の作用は $g_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと

$$gx = \begin{cases} (p(g_3A) + q(g_3B), r(g_3A) + s(g_3B)) & ((1)\ \text{の理解}), \\ (pg_3M_A{}^tg_3 + qg_3M_B{}^tg_3, rg_3M_A{}^tg_3 + sg_3M_B{}^tg_3) & ((2)\ \text{の理解}) \end{cases}$$

で与えられる．以後 x としては 2 つの解釈を自由に行き来する．

相対不変式についても考えよう．不定元 u, v を用意し，$x = (A, B)$ について

$$f_x(u, v) := 4 \det(M_A u + M_B v) \in \mathrm{Sym}^3 2$$

とおく．これは二元三次形式だから，その判別式を取ることで

$$P(x) := \mathrm{Disc}\, f_x$$

を定義することができる．P は x の係数たちの整係数 12 次多項式になっており，また次のように相対不変式である：

命題 2.3 指標 $\chi\colon G \to \mathrm{GL}_1$ を $\chi(g) = \chi(g_2, g_3) := \det(g_2)^3 \det(g_3)^4$ で定めると，$P(g_3x) = \chi(g)^2 P(x)$ である．

この証明は $\det, \mathrm{Disc}$ の性質による．

2.5 三元二次形式のペアと一般の四点

次に，この空間を幾何的に理解しよう．

いま $x = (A, B) \in V(K)$ を取ったとき，対応する集合 $Z_x(K) \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ を

$$\begin{aligned} Z_x(K) &:= Z_A(K) \cap Z_B(K) \\ &= \{(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2(K) \mid A(a_0, a_1, a_2) = B(a_0, a_1, a_2) = 0\} \end{aligned}$$

で定義する．$g = (g_2, g_3) \in \mathrm{GL}_2(K) \times \mathrm{GL}_3(K)$ の作用についても，射影直線の場合と同様に，以下のように考えることができる．

- $(1, g_3)$ は $\mathbb{P}^2(K)$ の座標変換として作用する．つまり $Z_{(1,g_3)x}(K) = Z_x(K)g_3^{-1}$ が $\mathrm{Sym}^3 2$ と同様に証明できる．

- 一方 $(g_2,1)$ の作用だが，$g_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ は可逆なので

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (pA+qB)(a_0,a_1,a_2) = pA(a_0,a_1,a_2) + qB(a_0,a_1,a_2) = 0 \\ (rA+sB)(a_0,a_1,a_2) = rA(a_0,a_1,a_2) + sB(a_0,a_1,a_2) = 0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} A(a_0,a_1,a_2) = 0 \\ B(a_0,a_1,a_2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

であり，$Z_{(g_2,1)x}(K) = Z_x(K)$ がわかる．

$Z_x(\overline{K})$ はどのような集合だろうか？　例を見てみよう．

例 2.4　$x = (u^2+v^2-2w^2, u^2+2v^2-3w^2)$ としてみよう．$K=\mathbb{R}$ とし，さらにセル $\mathbb{R}^2 \subsetneq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の部分で考えると，

$$\mathbb{R}^2 \cap Z_x(\mathbb{R}) = \{(a_0,a_1) \in \mathbb{R}^2 \mid a_0^2 + a_1^2 = 2, a_0^2 + 2a_1^2 = 3\} \quad = \{(\pm 1, \pm 1)\}$$

となる．これは図に描いてみると円と楕円が四点で交わっている例であり，$Z_x(\mathbb{C})$ もこの四点由来のものしかないことがわかる．

例 2.5　$w_0 = (A_0 = u(v-w), B_0 = v(u-w))$ とおく．するとそれぞれ階数が 2 の行列に対応しているので，Z_{A_0}, Z_{B_0} は二直線の和集合

$$\begin{aligned} Z_{A_0}(K) &= Z_u(K) \cup Z_{v-w}(K) \\ Z_{B_0}(K) &= Z_v(K) \cup Z_{u-w}(K) \end{aligned}$$

である．その共通零点 $Z_{w_0}(K)$ は直線ごとに分けて考えればよく，直線と直線は一点で交わるので，四点であることが期待できる．実際に計算すると

$$Z_{w_0}(K) = \{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1), (1:1:1)\}$$

と四点集合になる．この四点の集合を W_0 と置くことにする．

ところでこの四点，ただの四点ではない．どの三つを選んでも同一直線上にない，という性質を持っている．この性質を持つ四点の集合 $W \subsetneq \mathbb{P}^2(K)$ を**一般の四点** *generic four points* と呼ぶことにする．一般の四点については，以下のように三重推移性の類似が成立する：

命題 2.6　一般の四点 $W \subsetneq \mathbb{P}^2(K)$ について，ある $g_3 \in \mathrm{GL}_3(K)$ が存在して $Wg_3 = W_0$.

証明は三重推移性の命題と同様である．まず三つの点の座標を

$$P_0 = (a_0 : a_1 : a_2), P_1 = (b_0 : b_1 : b_2), P_2 = (c_0 : c_1 : c_2)$$

とおくと，この（類の代表の）成分を並べた

$$g = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

という行列が可逆であることと，P_0, P_1, P_2 が同一直線上にないことが同値である．このとき g^{-1} は P_0, P_1, P_2 をそれぞれ $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$ に移動する．すると 4 つ目の点 $P_3 g^{-1}$ は，三点が同一直線上にないことを活用すればどの座標もゼロでないことがわかるので，対角行列で $(1:1:1)$ に調節できる．

この命題から次の性質を証明できる．

系 2.7 $Z_x(K)$ が一般の四点なら，ある $g = (g_2, g_3) \in G(K)$ について $gx = w_0$.

証明 実際，直前の命題からある g_3 について $Z_{(1,g_3)x}(K) = Z_{w_0}(K)$ である．すると $(1, g_3)x = (A, B)$ について，A, B は W_0 の四点でゼロになる．三元二次形式 $F(u,v,w) = au^2 + buv + cuw + dv^2 + evw + fw^2$ が W_0 で消える条件をチェックしてみると，

- $F(1,0,0) = 0$ から $a = 0$.
- $F(0,1,0) = 0$ から $d = 0$.
- $F(0,0,1) = 0$ から $f = 0$.
- $F(1,1,1) = 0$ から $b + c + e = 0$.

となって，結局

$$F(u,v,w) = (-c)u(v-w) + (-e)v(u-w)$$

と，w_0 の 2 つの二次形式の線形結合で書けてしまう．$(0:1:1), (1:0:1) \notin Z_{(1,g_3)x}(K)$ から，A, B は K 上一次独立であることもわかり，ある $g_2 \in \mathrm{GL}_2(K)$ について $(g_2, 1)(A, B) = w_0$ であることがわかる． □

この系と次の事実を合わせれば，$2 \otimes \mathrm{Sym}^2 3$ が概均質ベクトル空間であることを幾何的に理解できたことになる．

定理 2.8　$P(x) \neq 0$ なら，$Z_x(\overline{K})$ は一般の四点である．

証明をやや具体的な方法で与えておこう．

証明 K を最初から $\overline{K}$ にしてしまってよい．これまでの $x = (A, B)$ という記号を踏襲する．さらに K の標数が 2 でないとして，対称行列を使って考えることにする．標数 2 でも対応する議論を二次形式で証明できる．

$P(x) = \mathrm{Disc}(f_x)$ だったから，$P(x) \neq 0$ なら $\mathrm{Disc}(f_x) = 0$ は $\mathbb{P}^1(K)$ の三つの相異なる点を定める．適当に $g_2 \in \mathrm{GL}_2(K)$ を使ってこの三点が

$$\{(1:0), (0:1), (1:1)\}$$

であるとしてよい．すると，行列 $M_A, M_B, M_A + M_B$（とそれらの定数倍）が階数 2 以下であり，他の線形結合 $a_0 M_A + a_1 M_B$ は階数 3 である．

ゼロでない M_A の核 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(M_A)$ を選ぶ．万が一 $M_B \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ なら，

$$(a_0 M_A + a_1 M_B)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

となるので，「他の線形結合 $a_0 M_A + a_1 M_B$ は階数 3」に矛盾する．つまり $M_A, M_B, M_A + M_B$ の核はそれぞれ相異なる．

さらに $M_A, M_B, M_A + M_B$ のゼロでない核を $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B, \boldsymbol{v}_{A+B}$ とおく．これらが一次独立であることを示そう．適当に $g_3 \in \mathrm{GL}_3(K)$ で動かして，

$$\boldsymbol{v}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおいてよい．すると行列の形は $a, b \neq 0$ について

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} b & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$$

という表示になる．もし $\boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{v}_A + \beta \boldsymbol{v}_B$ であるなら

$$(M_A + M_B)\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} b\alpha^2 \\ a\beta^2 \\ * \end{pmatrix}$$

であり，$(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ のときは決してゼロベクトルにならない．つまり $\boldsymbol{v}_{A+B}$ は $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$ の一次結合ではないことがわかる．前段落の結果と合わせて，$\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B, \boldsymbol{v}_{A+B}$ は一次独立である．

$\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B, \boldsymbol{v}_{A+B}$ が一次独立であるから，適当に $g_3 \in \mathrm{GL}_3(K)$ で動かして

$$\boldsymbol{v}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_{A+B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるとしてよい．すると行列の形はさらに絞られて

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

となる．さらに対角行列で座標変換すれば，$a = -1, b = c = 1$ と考えてよく，このとき $Z_x(K) = W_0$ である． □

3 $\mathbb{P}^3$ の五点について

ここでは講義で触れなかった，射影空間 $\mathbb{P}^3$ の五点の場合にまつわる幾何学の一部を紹介する．

3.1 射影空間 $\mathbb{P}^3$ と一般の $n+2$ 点

上記の $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2$ の構成は $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ でも同様に $K^{n+1} \setminus \mathbf{0}$ の同値類として構成できる：つまり，$K^{n+1} \setminus \mathbf{0}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下で定義する．ゼロベクトルでないベクトル

$$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n) \in K^{n+1} \setminus \mathbf{0}$$

について，

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} \iff \exists \lambda \in K^*, \lambda a_i = b_i \ (0 \leq i \leq n)$$

で定義する．元 $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^{n+1} \setminus \mathbf{0}$ の同値類を $(a_0 : a_1 : a_2 : \cdots : a_n)$ と書く．K 上の n **次元射影空間** *projective plane* $\mathbb{P}^n(K)$ とは，この同値類全体の集合であるとする．これまた以前と同じように，$\mathbb{P}^n(K)$ には右から $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ が作用する．$P = (a_0 : a_1 : a_2 : \cdots : a_n), g \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ について，Pg は $(a_0, a_1, \ldots, a_n)g$ の類である．

$n+1$ 元 r 次形式 $F = F(u_0, u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{Sym}^r K^{n+1}$ について，**超曲面** *hypersurface*[*2]

$$Z_F(K) = \{(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n(K) \mid F(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

が定義される．特に $r = 1$ の場合，$Z_F(K)$ は**超平面** *hyperplane* という．

$\mathbb{P}^n(K)$ の部分集合 $W \subsetneq \mathbb{P}^n(K)$ が**一般の** $n+2$ **点** *generic* $n+2$ *points* とは，ここでは「どの $n+1$ 点も同一超平面上に乗らないこと」と定義しよう（他の定義もあり得る）．これは「どの $n+1$ 点の座標を並べて作った $n+1$ 次正方行列も可逆」に同値になる．そして命題 2.6 と同様に，「一般の $n+2$ 点には $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ が推移的に作用する」ことが証明できる．

ところが，$n \geq 3$ の場合，$n+2$ 点と表現の軌道との対応はあまり明らかでない．特に $n \geq 4$ の場合は現在も活発に研究が行われている．以下では具体例を通じて，$n = 3$ の場合と概均質ベクトル空間 $4 \otimes \bigwedge^2 5$ との対応を紹介しよう．

注意 3.1（[佐野] との関連） なお，この射影空間の構成は数ベクトル空間 K^{n+1} から始まっているが，一般にベクトル空間から出発しても同様の構成ができる．つまり K-ベクトル空間 V について，$v, w \in V$ をゼロベクトルでないとするとき，

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in K^*, \lambda v = w$$

として同値関係を導入して，その商集合を考えるのである．

さらにその変種として，数ベクトル空間 K^{n+1} から出発した別の空間を考えることもある．K^{n+1} について、重み $m_0, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ というデータを固定する．すると**重み付き射影空間** *weighted projective space* $\mathbb{P}(m_0, m_1, \ldots, m_n)$ は，ゼロベクトルでないベクトル

$$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n) \in K^{n+1} \setminus \boldsymbol{0}$$

について，

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} \iff \exists \lambda \in \overline{K}^*, \lambda^{m_i} a_i = b_i \ (0 \leq i \leq n)$$

で定義される $K^{n+1} \setminus \boldsymbol{0}$ 上の同値関係 $\sim$ による商空間である．これらは [佐野] にて登場する．

[*2] $n = 3$ の場合は**曲面** *surface* や**平面** *plane* と呼ぶ．

3.2 $\mathbb{P}^3(K)$ 中の一般の五点

我々が考えるのは $n = 3$ の場合である.「一般の 5 点」とは，点集合 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 であって，どの 4 点も同一平面上に乗らないもののことであった. 代表例としては,

$$W_0 \coloneqq \{(1:0:0:0), (0:1:0:0), (0:0:1:0), (0:0:0:1), (1:1:1:1)\}$$

がある. 一般の $n+2$ 点については，適切な $g_4 \in \mathrm{GL}_4(K)$ によって $Wg_4 = W_0$ とできる.

いま軌道が何に対応するかわからないので，ひとまず系 2.7 と同様に，W_0 上で消える二次形式 $F(u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathrm{Sym}^2 K^4$ の集合を確認してみよう.

- $F(1,0,0,0) = 0$ から u_0^2 の係数はゼロ.
- 同様に，$F(0,1,0,0) = F(0,0,1,0) = F(0,0,0,1) = 0$ から u_1^2, u_2^2, u_3^2 の係数はゼロである.
- すると残った係数を並べてみれば,

$$F = a_{01}u_0u_1 + a_{02}u_0u_2 + a_{03}u_0u_3 + a_{12}u_1u_2 + a_{13}u_1u_3 + a_{23}u_2u_3$$

  と書き出せる. 最後の条件 $F(1,1,1,1) = 0$ から

$$a_{01} + a_{02} + a_{03} + a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$$

  である.

すると W_0 で消える二次形式全体は五次元空間をなす. これを $Q(W_0)$ とおこう. この基底としては以下のものがある：

$$\begin{aligned}
Q_0 &= u_1(u_2 - u_3), \\
Q_1 &= u_3(u_2 - u_0), \\
Q_2 &= u_0(u_1 - u_3), \\
Q_3 &= u_2(u_1 - u_0), \\
Q_4 &= (u_1 - u_2)(u_0 - u_3),
\end{aligned}$$

を取ることができる. つまり一般の五点からは，四元二次形式を五個選ぶことができ，その選びかたの任意性は基底の取替え，つまり $\mathrm{GL}_5(K)$ の作用に対応することがわかる.

$n=2$ の場合ではこのように考えて得られる二次形式二つが答えだった．実際，一般の三元二次形式を二つ選べば，一般の四点を定めてしまうからだ．ところが一般の四元二次形式を五つ選んでも，その零点集合は五点にならない．やや極端な場合だが，たとえば

$$u_0^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2$$

という四つを選ぶだけで，共通零点が空集合になってしまう．発見的には，一つ二次形式を追加するごとに一つ次元が下がると期待できるので，三次元の $\mathbb{P}^3$ において十分一般的な四つの二次形式の共通零点は空集合になると期待される．つまり上記の $Q_0, Q_1, \ldots, Q_4$ は何らかの意味で特別な二次形式の五つ組である．

3.3 関係式加群と交代行列

二次形式の組の特別性はいろいろあり得るが，今回は**関係式** *syzygy* があることがわかる．たとえば今の場合，以下のような関係式が成立する：

$$u_0Q_0 - u_1Q_1 - u_2Q_2 + u_3Q_3 = 0.$$

直前に出てきた四つの二次式 $u_0^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2$ ではどうか．$Q_i' = u_i^2$ $(0 \le i \le 3)$ とおいて調べてみると，

$$u_i^2 Q_j' - u_j^2 Q_i' = 0$$

という関係式は見つかるが，これは言い換えれば $Q_i'Q_j' - Q_j'Q_i' = 0$ ということであり，二次式であれば常に見つけられる関係式である．ほかにも

$$(u_1^2u_2 - u_1u_3^2)Q_0' + (u_2^2u_3 - u_0^2u_2)Q_1' + (u_0u_3^2 - u_1^2u_3)Q_2' + (u_0^2u_1 - u_2^2u_0)Q_3' = 0$$

などのような関係式は見つかるが，上の関係式にさらに多項式をかけて足したものであり，本質的には上の関係式で尽きていることまでわかる（より詳細な意味は後述）．とくに，Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 のときのような一次式をかけて得られる関係式は存在しない．

Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 の間に成り立つ関係式すべてを記述してみよう．そのために記号を準備する．まず $S = K[u_0, u_1, u_2, u_3]$ とおく．$\boldsymbol{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ の**関係式加群** *syzygy module* とは，自由加群 S^5 の部分集合 $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q}) \subseteq S^5$ として，

$$p_0Q_0 + p_1Q_1 + \cdots + p_4Q_4 = 0$$

を満たす $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^5$ 全体として定義される．関係式に多項式をかけても，また関係式同士を足してもまた関係式になるので，この集合 $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q})$ は S^5 の部分加群になる．他の場合，つまり $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n) \in S^n$ についても，関係式加群 $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{F})$ を考えられる．特に関係式加群の関係式加群，その関係式加群というように一連の加群の列を考えることができる．これらを同時に射影分解として表示することもできる（[佐野] にも暗に登場する）．

例 3.2　まず $\boldsymbol{Q}' = (Q'_0, Q'_1, Q'_2, Q'_3)$ の場合の関係式加群 $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q}') \subseteq S^4$ を考えてみよう．上記の考察から，たとえば

$$
\begin{aligned}
&(u_1^2, -u_0^2, 0, 0), (u_2^2, 0, -u_0^2, 0), (u_3^2, 0, 0, -u_0^2),\\
&(u_1^2u_2 - u_1u_3^2, u_2^2u_3 - u_0^2u_2, u_0u_3^2 - u_1^2u_3, u_0^2u_1 - u_2^2u_0) \in \mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q}')
\end{aligned}
$$

がわかる．ところが最後のものについては,

$$
\begin{aligned}
&(u_1^2u_2 - u_1u_3^2, u_2^2u_3 - u_0^2u_2, u_0u_3^2 - u_1^2u_3, u_0^2u_1 - u_2^2u_0) =\\
&u_2(u_1^2, -u_0^2, 0, 0) + u_3(0, u_2^2, -u_1^2, 0) + u_0(0, 0, u_3^2, -u_2^2) + u_1(-u_3^2, 0, 0, u_0^2)
\end{aligned}
$$

なので,

$$R_{i,j} \coloneqq u_i^2 e_j - u_j^2 e_i \quad (0 \le i < j \le 3)$$

とすれば $R_{i,j}$ たちの S-線形結合で書けてしまう．実は $R_{i,j}$ たちは $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q}')$ の生成元であることがわかる．これが「本質的には上の関係式で尽きている」の意味である．

例 3.3　今度は本筋の $\mathrm{Syz}(\boldsymbol{Q}) \subseteq S^5$ を考えてみる．計算は省略するが，書き出してみると

$$
\begin{aligned}
R_0 &\coloneqq (0, -u_0 + u_1, u_0 - u_2, u_0 - u_3, -u_0),\\
R_1 &\coloneqq (u_0 - u_1, 0, -u_1 + u_2, u_1 - u_3, u_1),\\
R_2 &\coloneqq (-u_0 + u_2, u_1 - u_2, 0, -u_2 + u_3, u_2),\\
R_3 &\coloneqq (-u_0 + u_3, -u_1 + u_3, u_2 - u_3, 0, -u_3),\\
R_4 &\coloneqq (u_0, -u_1, -u_2, u_3, 0)
\end{aligned}
$$

が生成元であることがわかる．

いま試みにこれを並べて正方行列で書いてみよう．すると,

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & -u_0 + u_1 & u_0 - u_2 & u_0 - u_3 & -u_0\\
u_0 - u_1 & 0 & -u_1 + u_2 & u_1 - u_3 & u_1\\
-u_0 + u_2 & u_1 - u_2 & 0 & -u_2 + u_3 & u_2\\
-u_0 + u_3 & -u_1 + u_3 & u_2 - u_3 & 0 & -u_3\\
u_0 & -u_1 & -u_2 & u_3 & 0
\end{pmatrix}
$$

となる．交代行列だ！　変数はいま u_0, u_1, u_2, u_3 の 4 つがあるから，それぞれの係数を取り出して

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という四枚の五次交代行列が得られたことになる．つまり，$4 \otimes \bigwedge^2 5$ の要素 $\boldsymbol{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ が見つかったわけだ．しかも $0 \leq i \leq 3$ について A_i は i 行か i 列にしか成分が存在せず，成分は各行各列で $1, -1$ がそれぞれ偶数個になっている．

ちなみに，$A_0 + A_1 + A_2 + A_3$ を考えてみると，

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．これが点 $(1:1:1:1)$ に対応する「五番目の」交代行列である．

さらに奇数次の交代行列 A から二次式を復元することもできる．A から第 i 行と第 i 列を取り除いた主小行列 $A^{(i)}$ は交代行列になるが，この**パフィアン** *Pfaffian* を取るという操作で i ごとに二次式が得られ，もとの $\boldsymbol{Q}$ が（定数倍を除いて）復元されるのである．

たとえば今の場合は，A のうち第 1 行・第 1 列を取り除くと

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & -u_1 + u_2 & u_1 - u_3 & u_1 \\ u_1 - u_2 & 0 & -u_2 + u_3 & u_2 \\ -u_1 + u_3 & u_2 - u_3 & 0 & -u_3 \\ -u_1 & -u_2 & u_3 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．このパフィアンは

$$\begin{aligned} \mathrm{Pf} A^{(1)} &= (-u_1 + u_2)(-u_3) - (u_1 - u_3)u_2 + u_1(-u_2 + u_3) \\ &= u_1u_3 - u_2u_3 - u_1u_2 + u_2u_3 - u_1u_2 + u_1u_3 = 2u_1(-u_2 + u_3) = -2Q_0 \end{aligned}$$

となる．同様に計算すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}A^{(2)} &= 2Q_1,\\ \mathrm{Pf}A^{(3)} &= -2Q_2,\\ \mathrm{Pf}A^{(4)} &= 2Q_3,\\ \mathrm{Pf}A^{(5)} &= -2Q_4\end{aligned}$$

であり，もとの基底に戻ってくる！　実際 $\mathrm{Ker}\,A$ は $\mathrm{Frac}(S) = K(u_0, u_1, u_2, u_3)$ 係数の行列として一次元の核を持ち，

$$\mathrm{Ker}\,A = K(u_0, u_1, u_2, u_3)\begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}$$

であることがわかるのである．

3.4 背景事情

残った問題はいくつかある．A を得るために選んだ $Q_0, Q_1, \ldots, Q_4$ やその関係式 $R_0, R_1, \ldots, R_4$ はどのように選んだのか．またいつでも選ぶことが可能なのか？

これらのうち，存在についてのみコメントをしておく．可換環論における Buchsbaum–Eisenbud の定理によると，Gorenstein である余次元 3 のイデアルは，関係式加群から同様にして奇数次の交代行列を構成できるのである（[BE77]）．今の場合は $\mathbb{P}^3$ 中の一般的な五点の定義イデアルがこの定理の適用範囲にあるために，五次交代行列 A が得られると考えられる．なお，$n \geq 4$ の場合は可換環論の問題としても研究対象であるようだ（たとえば $\mathbb{P}^n$ 中の $n+2$ 点の定義イデアルと n 次環の構造定数の関係については [FR21] を参照）．

また，$4 \otimes \bigwedge^2 5$ の不変式については一切触れなかった．これについては [AFK02] や [KY04] を参照してほしい．

参考文献

[AFK02] K. Amano, M. Fujigami and T. Kogiso, Construction of irreducible relative invariant of the prehomogeneous vector space $(\mathrm{SL}_5 \times \mathrm{GL}_4, \bigwedge^2(\mathbb{C}^5) \otimes \mathbb{C}^4)$. *Lin. Alg. and its Appl.* **155** (2002), 215–222.

[BE77] D.A. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebraic structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension 3. *Amer. J. Math.* **99** (1977), 447–485.

[FR21] T. Fisher and L. Radičević, Computing structure constants for rings of finite rank from minimal free resolutions. arXiv: 2109.07845.

[KY04] A.C. Kable and A. Yukie, On the space of quadruples of quinary alternating forms. J. Pure and Appl. Alg. **186** (2004), 277–295.

[佐野] 佐野薫，余正則空間と楕円曲線のセルマー群．**本報告集**，2023.

[谷口 1] 谷口隆，例で学ぶ概均質ベクトル空間．**本報告集**，2023.