概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

概均質ゼータ関数の関数等式の一般化

佐藤　文広 (立教大学)

谷口隆・杉山和成両氏の報告（本報告集 [59], [57]）では，概均質ベクトル空間の定義，例，および，付随する 1 変数ゼータ関数の基本性質について解説されている．ここでは，ゼータ関数を一般化し，その関数等式を論ずる．本稿で扱うゼータ関数の一般化とは，

- 多変数ゼータ関数,
- Dirichlet 型の L 関数,
- 多項式係数のゼータ関数
- 保型形式の周期を係数とするゼータ関数

である．以下，§1 では，まず，概均質ベクトル空間の基本性質について，[59], [57] で触れられなかったことを含めて説明した後，[57] で解説された概均質ベクトル空間に付随する 1 変数ゼータ関数の関数等式について，その証明の仕組みについて復習する．それを確認することによって，一般化の際に何が拡張されねばならないのかがはっきりしてくるだろう．§2 では，複数の基本相対不変式を持つ概均質ベクトル空間に対して多変数のゼータ関数を定義し，その関数等式・解析接続について，知られていることをまとめる．§3 では，§4, §5 で解説されるゼータ関数の一般化について，古典的な例を簡単に説明する．それを踏まえて，§4 では，概均質ベクトル空間のゼータ関数の Dirichlet 型 L 関数への拡張を説明する．§5 では，多項式係数，および，保型形式の周期を係数とするゼータ関数について解説する．§6 では，概均質ベクトル空間の相対不変式ではない多項式でも，概均質ベクトル空間の理論が与えるような関数等式を満たす（少なくとも局所）ゼータ関数が定義できる例が存在することを見る．したがって，概均質ベクトル空間がこの種の理論の究極の設定というわけではないのかもしれない．

全体として，結果を精密に述べるよりは，考え方や関数等式の成立つ仕組みを説明することに重点を置いたので，証明を含め詳しいことに関心がある場合は原論文を見ていただければ幸いである．

1　概均質ベクトル空間の基本性質とゼータ関数の関数等式の根拠

1.1　複数の基本相対不変式を持つ概均質ベクトル空間

まず，より一般化されたゼータ関数の関数等式について解説する都合上，概均質ベクトル空間の基本的な代数的性質も [59], [57] より多少一般的な形で復習しておこう（詳しくは [47], [49], [15, Chapter 2] 参照）．

F を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体を固定する．（実際には，$F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のみを考える．）G $(\subset GL_N(\mathbb{C}))$ を F 上定義された線型代数群，V を F-構造（すなわち，$V = V(F) \otimes_F \mathbb{C}$ となる部分 F-ベクトル空間 $V(F)$）を持つ有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間，$\rho : G \to GL(V)$ を G の V 上の有理表現とする．ρ も F 上定義されているとする．このとき，(G, ρ, V) は F 上で定義されているという．（定義体に関する説明は [15, p. 12] を見よ．[59] にも簡単な説明があった．）F の拡大体 L に対し，

L-有理点の集合 $G(L) := G \cap GL_N(L)$，$V(L) = V(F) \otimes_F L$ を考えると，$G(L)$ も群であり，ρ は $G(L)$ の $V(L)$ 上の表現を引き起こす．$G = G(\mathbb{C}), V = V(\mathbb{C})$ である．

定義 1.1.1 (G, ρ, V) が**概均質ベクトル空間** $\overset{\text{def}}{\iff}$ V に G の（Zariski-）開軌道 Ω が存在する．Ω の補集合 $S := V \setminus \Omega$ を**特異集合**という．

(**注.** [59], [57] の記号では，Ω でなく V' を用いている．)

以下，(G, ρ, V) は F 上定義された概均質ベクトル空間だとする．

命題 1.1.2 特異集合 S を

$$S = \underbrace{S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n}_{\text{余次元 1，超曲面}} \cup \underbrace{S_1' \cup S_2' \cup \cdots \cup S_{n'}'}_{\text{余次元 } >1}$$

と F 上で既約成分に分解する．このとき，余次元 1 の既約成分 S_i $(1 \leq i \leq n)$ に対して，

$$S_i = \{v \in V \mid P_i(v) = 0\}$$

となる F 上既約な多項式 P_i が 0 でない有理数倍を除いて一意的に定まる．これらの P_i は相対不変式であり，そして， 任意の F-係数相対不変式は，$P_1, P_2, \ldots, P_n$ の冪積で表される．

この命題によって与えられる $P_1, P_2, \ldots, P_n$ を F **上の基本相対不変式**という．ρ が既約表現ならば $n = 1$ (or 0)（すなわち，相対不変式は存在しないか，または，既約相対不変式はただ 1 つ）であるが，一般には $n \geq 2$ の場合も生ずる．

F 上の基本相対不変式 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ に対応する G の有理指標を $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ とおく．すなわち，

$$P_i(\rho(g)v) = \chi_i(g)P_i(v) \quad (g \in G, v \in V)$$

が成立っているとする．このとき，有理指標 χ_i $(1 \leq i \leq n)$ も F 上定義されている．

$$X_\rho(G)_F = \text{相対不変式に対応する } G \text{ の } F \text{ 上定義された有理指標の全体}$$

とおくと，$X_\rho(G)_F$ は乗法群であり，$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ で生成される階数 n の自由アーベル群となっている．F 上の基本相対不変式の個数 n ($= \operatorname{rank} X_\rho(G)_F$) を概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) の F-**ランク**という．

(G, ρ, V) が有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義されていて，その $\mathbb{Q}$-ランク n が 2 以上のときには，自然に

$$\sum_v \frac{\mu(v)}{|P_1(v)|^{s_1} |P_2(v)|^{s_2} \cdots |P_n(v)|^{s_n}}$$

のような多変数のゼータ関数が考えられるのである．($\mu(v)$ や和の取り方の正確な意味などは、§2 で解説する．)

複数の基本相対不変式を持つ概均質ベクトル空間の例をあげておこう．

例 1.1.3 $Y \in M_m(\mathbb{C})$, ${}^tY = Y$ を 非退化対称行列とし,

$$G = SO_Y \times B_{m-1}, \quad V = M_{m,m-1}(\mathbb{C}), \quad \rho(g,b)v = gvb^{-1}.$$

$$SO_Y = \left\{ g \in GL_m(\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^tgYg = Y \right\},$$

$$B_{m-1} := \left\{ b = \begin{pmatrix} b_1 & b_{12} & \cdots & b_{1,m-1} \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{m-2,m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in GL_{m-1}(\mathbb{C}) \right\} \quad \text{(上三角行列群)}$$

を考える．このとき，(G, ρ, V) は

$$\Delta_i(A) := \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1i} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ii} \end{pmatrix} : \text{行列 } A \text{ の } i \text{ 次首座行列式}$$

とおくと,

$$S = \bigcup_{i=1}^{m-1} \left\{ v \in V \;\middle|\; \Delta_i({}^tvYv) = 0 \right\}$$

を特異集合とする概均質ベクトル空間であり，Y の成分が $\mathbb{C}$ の部分体 F に属しているとき、この概均質ベクトル空間は F 上定義されている．そして、F 上の基本相対不変式とそれに対応する G の有理指標は

$$\Delta_i({}^tvYv), \quad \chi_i(g,b) = (b_1 b_2 \cdots b_i)^{-2} \quad (i = 1, \ldots, m-1)$$

で与えられる．

例 1.1.4 Y は例 1 と同じとし,

$$G = SO_Y \times GL_{m-1}(\mathbb{C}) \times GL_{m-2}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_1(\mathbb{C}),$$

$$V = M_{m,m-1}(\mathbb{C}) \oplus M_{m-1,m-2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{2,1}(\mathbb{C}),$$

$$\begin{aligned} &\rho(g_m, g_{m-1}, g_{m-2}, \ldots, g_1)(v_{m-1}, v_{m-2}, \ldots, v_1) \\ &\quad = (g_m v_{m-1} g_{m-1}^{-1}, g_{m-1} v_{m-2} g_{m-2}^{-1}, \ldots, g_2 v_1 g_1^{-1}) \end{aligned}$$

を考える．このとき，(G, ρ, V) は

$$S = \bigcup_{i=1}^{m-1} \left\{ v \in V \;\middle|\; \det \left[{}^t(v_{m-1} v_{m-2} \cdots v_i) Y (v_{m-1} v_{m-2} \cdots v_i) \right] = 0 \right\}$$

を特異集合とする概均質ベクトル空間であり，Y の成分が体 F に含まれていれば，やはり F 上定義されている．基本相対不変式とそれに対応する G の有理指標は

$$P_i(v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_1) := \det \left[{}^t(v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_i) Y (v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_i) \right]$$

$$\chi_i(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1) = (\det g_i)^{-2}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

で与えられる．

1.2 双対概均質ベクトル空間と正則概均質ベクトル空間

杉山 [57] によると，ゼータ関数の関数等式とは次のようなものであった：

$$(*)\qquad (G,\rho,V)\ \text{のゼータ関数} \xleftrightarrow{\text{両者を結びつける関係}} \text{双対}\ \ (G,\rho^*,V^*)\ \text{のゼータ関数}.$$

ここで，概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) の**双対**とは，

$V^* = V$ の双対空間,
$\rho^* = \rho$ の反傾表現，すなわち，$\langle \rho(g)v, \rho^*(g)v^*\rangle = \langle v, v^*\rangle$ で定まる G の V^* 上の有理表現

で与えられる (G,ρ^*,V^*) のことであり，(G,ρ,V) が体 F 上定義されているとき，V の F-構造から V^* の F-構造が自然に定まって，(G,ρ^*,V^*) も F 上定義されている．

上の図式 $(*)$ を考えると，関数等式が成り立つようなゼータ関数を得るには，双対概均質ベクトル空間が元の概均質ベクトル空間とよく似ていなくてはならないであろう．だが，一般には概均質ベクトル空間の双対はもとの概均質ベクトル空間の性質を受け継がない．例えば,

- 概均質ベクトル空間の双対は，概均質ベクトル空間になるとは限らない．
- 相対不変式を持つ概均質ベクトル空間の双対が概均質ベクトル空間であっても,
  - 双対は相対不変式を持たないかもしれない．
  - また，どちらも相対不変式を持っていたとしても，基本相対不変式の個数が同じとは限らない．言い換えれば，概均質ベクトル空間としてのランクは等しいとは限らない．

例 1.2.1 r, s を正整数とし，$G_1 \subset GL_r(\mathbb{C})$, $G_2 \subset GL_s(\mathbb{C})$ を体 F 上定義された線型代数群とする．ρ_1, ρ_2 で，それぞれ，この包含関係による G_1, G_2 の自然な $V_1 := \mathbb{C}^r$, $V_2 := \mathbb{C}^s$ 上の表現を表す．

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ g_3 & g_2 \end{pmatrix} \in GL_{r+s}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, \\ g_3 \in M_{s,r}(\mathbb{C}) \end{array} \right\}, \quad V = V_1 \oplus V_2 = \mathbb{C}^{r+s}$$

とおく．G の自然な V 上の表現 ρ，すなわち，$\rho(g)v = gv$ $(g \in G,\ v \in V)$ で定まる表現を考える．V の双対空間 V^* を内積 $\langle v, v^*\rangle = \sum_{i=1}^{r+s} v_i v_i^*$ によって $V = \mathbb{C}^{r+s}$ と同一視すると，ρ の反傾表現 ρ^* は $\rho^*(g)v^* = {}^t g^{-1} v^*$ $(g \in G,\ v^* \in V^*)$ で与えられる．このとき,

$$(G,\rho,V)\ \text{が概均質ベクトル空間} \Longleftrightarrow (G_1,\rho_1,V_1)\ \text{が概均質ベクトル空間}$$

であり，これが成り立つとき，(G_1,ρ_1,V_1) の特異集合を S_1 とすると，(G,ρ,V) の特異集合 S は $S = S_1 \times V_2$ で与えられる．したがって，その F 上の基本相対不変式は (G_1,ρ_1,V_1) の F 上の基本相対不変式を V_2 に属す変数を含まぬ V 上の多項式とみなしたもので与えられる．同様に,

$$(G,\rho^*,V^*)\ \text{が概均質ベクトル空間} \Longleftrightarrow (G_2,\rho_2^*,V_2^*)\ \text{が概均質ベクトル空間}$$

であり，これが成り立つとき，(G_2,ρ_2^*,V_2^*) の特異集合を S_2^* とすると，(G,ρ^*,V^*) の特異集合 S^* は $S^* = V_1^* \times S_2^*$ で与えられる．したがって，F 上の基本相対不変式は (G_2,ρ_2^*,V_2^*) の F 上の基本相対不変式を V_1^* に属す変数を含まぬ V^* 上の多項式とみなしたもので与えられる．

これより，(G_1, ρ_1, V_1) が概均質ベクトル空間だが，(G_2, ρ_2^*, V_2^*) が概均質ベクトル空間でなければ，(G, ρ, V) は概均質ベクトル空間だが，その双対 (G, ρ^*, V^*) は概均質ベクトル空間ではない．例えば，

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}^\times,\ b \in \mathbb{C} \right\}$$

が具体例である．

次に (G, ρ, V)，(G, ρ^*, V^*) がともに概均質ベクトル空間だったとしよう．このとき，(G_1, ρ_1, V_1) が非自明な相対不変式を持つが，(G_2, ρ_2^*, V_2^*) は非自明な相対不変式を持たないならば，(G, ρ, V) は非自明な相対不変式を持つが，その双対 (G, ρ^*, V^*) は非自明な相対不変式を持たない．例えば，

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}^\times,\ b \in \mathbb{C}^s,\ c \in GL_s(\mathbb{C}) \right\} \quad (s \geq 2)$$

が具体例である．

最後に，(G_1, ρ_1, V_1) の F-ランクと (G_2, ρ_2^*, V_2^*) の F-ランクが異なれば，(G, ρ, V) の F-ランクと (G, ρ^*, V^*) の F-ランクも異なる．例えば，

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & a_r & & & \\ \hline b_{11} & \cdots & b_{1r} & c_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ b_{s1} & \cdots & b_{sr} & 0 & & c_s \end{array} \right) \,\middle|\, \begin{array}{l} a_1, \ldots, a_r, c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{C}^\times, \\ b_{ij} \in \mathbb{C}\ (1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq r) \end{array} \right\}, \quad V = V^* = \mathbb{C}^{r+s}$$

が具体例である．この空間は $\mathbb{Q}$ 上定義されており，(G, ρ, V) の $\mathbb{Q}$-ランクは r，(G, ρ^*, V^*) の $\mathbb{Q}$-ランクは s で $r \neq s$ ならば，ランクは異なっている．（この例では $\mathbb{Q}$-ランクと $\mathbb{C}$-ランクは等しい．）

このような例を見ると，概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数の関数等式の理論を展開するには，双対概均質ベクトル空間もよい性質を持つための条件が必要となることが容易に想像されるだろう．それが正則という条件である．

定義 1.2.2　概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) が**正則**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$　相対不変式 $P(v)$ で $\phi_P : V \to V^*$, $\phi_P(v) = \frac{1}{P(v)}\mathrm{grad}P(v)$ が双有理写像となるものが存在する．

ただし，$\mathrm{grad}P(v)$ は

$$\langle x, \mathrm{grad}P(v) \rangle = \left. \frac{d}{dt} P(v + tx) \right|_{t=0} \quad (v, x \in V)$$

で定義される V^* の元を表す．ϕ_P が双有理写像を与えるような相対不変式 P は**非退化**といわれる．

このとき，ϕ_P は G の作用について同変，すなわち，

$$\phi_P(\rho(g)v) = \rho^*(g)\left(\phi_P(v)\right) \quad (g \in G,\ v \in V)$$

が成立つ．実際，任意の $x \in V$ に対し，

$$\begin{aligned}\langle \rho(g)x, \phi_P(\rho(g)v)\rangle &= \frac{\frac{d}{dt}P(\rho(g)v + t\rho(g)x)|_{t=0}}{P(\rho(g)v)} \\ &= \frac{\chi(g)\frac{d}{dt}P(v+tx)|_{t=0}}{\chi(g)P(v)} \\ &= \frac{\frac{d}{dt}P(v+tx)|_{t=0}}{P(v)} = \langle x, \phi_P(v)\rangle\end{aligned}$$

が成立つから，$\phi_P(\rho(g)v) = \rho^*(g)\,(\phi_P(v))$ である．この ϕ の G-同変性に基づいて，正則概均質ベクトル空間とその双対とが次の諸性質を持つことが証明される．

命題 1.2.3　(G, ρ, V) が体 F 上定義された正則概均質ベクトル空間だとする．このとき，次が成り立つ．

(1)　双対 (G, ρ^*, V^*) も体 F 上定義された正則概均質ベクトル空間である，

(2)　$\det \rho(g)^2 \in X_\rho(G)_F$ で，$\det \rho(g)^2$ に対応する相対不変式 P_0 は非退化である．

(3)　$P(v)$ を (G, ρ, V) の非退化相対不変式だとすると，$\phi_P : \Omega \longrightarrow V^*$ の像 $\phi_P(\Omega)$ は (G, ρ^*, V^*) の開軌道 Ω^* であり，ϕ_P によって Ω と Ω^* とは双正則同型である, 特に, $P = P_0$ ととれば，ϕ_{P_0} は F 上定義された双有理写像で，Ω と Ω^* とは F 上で双正則同型である，

(4)　相対不変式に対応する G の指標の群も一致，すなわち，$X_\rho(G)_F = X_{\rho^*}(G)_F$．したがって，$F$ 上の基本相対不変式の個数である F-ランクは，(G, ρ, V) と (G, ρ^*, V^*) とで一致している．

(5)　とくに，$F = \mathbb{R}$ の場合，$\Omega(\mathbb{R})$ と $\Omega^*(\mathbb{R})$ の連結成分の個数は一致している．

（証明は，Sato-Kimura [47, §4], Sato [49], Kimura [15, §2.3] を見よ．P_0 が非退化であることは，これらには書かれていないが，[49, §4, Corollary to Theorem 1] から直ちに従う．また，これらの文献では，定義体はあまり考慮されていないが，相対不変式が F 係数有理関数の定数倍であることと対応する指標が F 上定義されていることが同値であることに注意すればよい．

命題 1.2.3 は，正則概均質ベクトル空間とその双対とが，多くの基本的性質を共有していることを示している．ただし，正則概均質ベクトル空間において (G, ρ, V) と (G, ρ^*, V^*) とは似てはいても，うり二つとまでは言えないことを注意しておく．例えば，

- 正則概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) とその双対 (G, ρ^*, V^*) に対し，基本相対不変式の次数は一致しているとは限らない．

例 1.2.4　次の群 G とベクトル空間 V を考えよう:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_5 \end{pmatrix} \,\middle|\, b_1, b_4, b_5 \in \mathbb{C}^\times,\ b_2, b_3 \in \mathbb{C} \right\}, V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_4 & 0 \\ v_3 & 0 & v_5 \end{pmatrix} \,\middle|\, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{C} \right\}.$$

G の V 上の有理表現を $\rho(g)v = gv\,{}^t g$ $(g \in G,\ v \in V)$ によって定めると，(G, ρ, V) は

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_4 & 0 \\ v_3 & 0 & v_5 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; v_4 \cdot v_5 \cdot \det v \neq 0 \right\}$$

を開軌道とする正則概均質ベクトル空間となる．これより，基本相対不変式は $P_1(v) = v_4, P_2(v) = v_5, P_3(v) = \det v$ で，その次数は $1, 1, 3$ である．

一方，3 次対称行列の空間 $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{C})$ の内積 $\langle v, v^* \rangle := \mathrm{tr}(vv^*)$ を V に制限することにより，V の双対空間 V^* を $\mathrm{Sym}_3(\mathbb{C})/Z$ と同一視することができる．ここで，$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \right\}$ である．このとき，G の V^* への作用は $\rho^*(g)(v^* + Z) = {}^t g^{-1} v^* g^{-1} + Z$ で与えられるから，基本相対不変式は

$$P_1(v^*) = v_1^*, \quad P_2(v^*) = \det \begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* \\ v_2^* & v_4^* \end{pmatrix}, \quad P_3(v^*) = \det \begin{pmatrix} v_1^* & v_3^* \\ v_3^* & v_5^* \end{pmatrix} \quad \left(v^* = \begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* & v_3^* \\ v_2^* & v_4^* & 0 \\ v_3^* & 0 & v_5^* \end{pmatrix} + Z \right)$$

であり，その次数は $1, 2, 2$ である．$\Omega^*(\mathbb{R})$ の連結成分の一つである

$$\Omega_+^* = \{ v^* \in V_{\mathbb{R}}^* \mid P_1(v^*), P_2(v^*), P_3(v^*) > 0 \}$$

は対称錐でない等質凸錐の最初の例であり “Vinberg cone” と呼ばれている ([62])．この空間に対する 3 変数ゼータ関数の関数等式については， Nakashima [30, §6] を見よ．一般に等質凸錐は $\mathbb{R}$ 上定義されたある正則概均質ベクトル空間の開軌道の $\mathbb{R}$-有理点集合の連結成分として表される（例えば、[30] を見よ)。このタイプの正則概均質ベクトル空間については、基本相対不変式の次数が、その双対の基本相対不変式の次数と異なることはよく見られる現象である。

注意 1.2.5 (G, ρ, V) とその双対 (G, ρ^*, V^*) がうり二つとなるための条件は，

$$G \text{ が簡約群 (reductive group)}$$

となることである．G が簡約群のとき，$\rho(G)$ も簡約群であるから，Mostow の定理 ([29]) により，V の基底をとって $\mathbb{C}^n$ と同一視したとき，$\rho(G)$ が $GL(n; \mathbb{C})$ の随伴写像 $g \mapsto {}^t\overline{g}^{-1}$ で stable な部分群となるように，基底を選ぶことができる．そのとき，$V = \mathbb{C}^n$ の標準的な内積 $\langle v, v' \rangle = \sum_{i=1}^n v_i v_i'$ によって，V^* を $\mathbb{C}^n$ と同一視すれば，反傾表現は $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$ で与えられる．したがって，$\rho^*(G) = \overline{\rho(G)}$ であるから，(G, ρ, V) が S $(\subset V = \mathbb{C}^n)$ を特異集合とする概均質ベクトル空間ならば，(G, ρ^*, V^*) は $\overline{S}$ $(\subset V^* = \mathbb{C}^n)$ を特異集合とする概均質ベクトル空間である．また，$P(v)$ が指標 χ に対応する (G, ρ, V) の相対不変式とすると，$\bar{P}(v^*)$ は指標 χ^{-1} に対応する (G, ρ^*, V^*) の相対不変式となる．(G, ρ, V) が体 F 上定義されているとき，上の自己随伴的な行列実現は F 上定義されているとは限らないが，以上を根拠として，(G, ρ, V) の F 上の基本相対不変式 $P_1, \ldots, P_n$ に対応する指標を $\chi_1, \ldots, \chi_n$ としたとき，$\chi_1^{-1}, \ldots, \chi_n^{-1}$ に対応する (G, ρ^*, V^*) の相対不変式 $P_1^*, \ldots, P_n^*$ が存在し，それらが F 上の基本相対不変式となることが分かる．とくに，$\deg P_i = \deg P_i^*$ $(1 \leq i \leq n)$ である．

このように, G が簡約群のときは, 正則性を仮定せずとも, (G,ρ,V) とその双対 (G,ρ^*,V^*) とは概均質ベクトル空間としてのすべての性質を共有する．そして, 局所関数等式の理論は, 行者 [11] によって正則性の仮定なしに展開されている．しかし，大域ゼータ関数（Dirichlet 級数としてのゼータ関数）の理論は，いまのところ，正則性なしには不十分な状態であるので，本稿では，常に正則性を仮定することになる．

1.3　ゼータ関数の関数等式の根拠 (1 変数の場合の復習)

ゼータ関数を一般化する前に，ゼータ関数の関数等式が成り立つ仕組みを整理しておこう．ここでは，杉山 [57] の設定と記号を踏襲する．そこで解説されているように，ゼータ関数の収束を前提にすると，関数等式の証明は

(α)　ゼータ積分（ゼータ関数の積分表示）

(β)　ゼータ積分の関数等式 （Poisson の和公式から導かれる）

(γ)　$\mathbb{R}$ 上の局所関数等式

(δ)　b-関数

という 4 つの構成要素を次の図 1.3.1 のように組み合わせることによってなされた．

$$
\begin{array}{ccc}
Z(f,L;s) & \overset{(\alpha)}{=\!=\!=\!=\!=} & \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu}\xi_j(L;s)\times\underbrace{\Phi_j(f;s)} \\
\| & & \\
\displaystyle\int_{G^+/\Gamma}|\chi(g)|^s\sum_{v\in L\cap\Omega}f(\rho(g)v)\,dg & & \\
(\beta)\ \Big\|\ \ (+\,(\delta)) & & (\gamma)\ \Big\| \\
v(L^*)\displaystyle\int_{G^+/\Gamma}|\chi^*(g)|^{s^*}\sum_{v^*\in L^*\cap\Omega^*}\widehat{f}(\rho^*(g)v^*)\,dg & & \displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}\gamma_{ij}(s) \\
\| & & \times \\
v(L^*)Z^*(\widehat{f},L^*;s^*) & \overset{(\alpha)}{=\!=\!=\!=\!=} & v(L^*)\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^*(L^*;s^*)\times\overbrace{\Phi_i^*(\widehat{f};s^*)}
\end{array}
$$

$s^*=\frac{\dim V}{\deg P}-s$: 1 変数の場合

— 図 1.3.1 —

ここで，水平の等号 (α) はゼータ積分を用いたゼータ関数の積分表示であり，上段は (G,ρ,V) に対するもの，下段は (G,ρ^*,V^*) に対するものである（杉山 [57, 命題 3.2]）．左側の垂直方向の等号は，ゼータ積分の定義，および，ゼータ積分の関数等式 (β) である（杉山 [57, 命題 4.1]）．以

上により，右列上段の式と右列下段の式とが等しくなるが，ここで f, $\widehat{f}$ を含む局所ゼータ関数 Φ_j, Φ_i^* を消去するために，四角で囲った等式 (γ)，すなわち，局所関数等式を利用することができ，ゼータ関数 ξ_j と ξ_i^* とを結ぶ関数等式

$$v(L^*)\xi_i^*(L^*;s^*) = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s)\xi_j(L;s)$$

が示されたのであった（[57, 定理 4.2] の証明 (3) を見よ．そこでは，$\gamma_{ij}(s)$ をガンマ因子 $\gamma(s)$ と指数関数因子 $c_{ij}(s)$ とに分解して記述している）．

ただし，[57, 命題 4.1] が適用できるためには，急減少関数 f とそのフーリエ変換 $\hat{f}$ に，それぞれ，(G,ρ,V) の特異集合 S と (G,ρ^*,V^*) の特異集合 S^* 上で消えるという条件が必要であった．そのようなよい関数として，$f(v) = P(D_v)f_0(v)$ $(f_0 \in C_0^\infty(V_i))$ を利用したが，この f に対して $\Phi_i(f;s) \not\equiv 0$ となることを見るために，b 関数が利用された（[57, 定理 4.2] の証明 (3)）．

また，b 関数は

- 関数等式のガンマ因子 $\gamma(s)$
- ゼータ関数の極（の候補）の位置

という 2 つの情報を担っていることを思い出しておこう．

2 多変数ゼータ関数とその関数等式

本節では，§1.3 で復習した概均質ベクトル空間に付随する 1 変数ゼータ関数の理論の多変数への一般化の要点を [35] に従って，解説する．

2.1 多変数ゼータ関数の定義

まずこの §2.1 では，

仮定 1. (G,ρ,V) は $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間，特異集合 S は超曲面，

仮定 2. 開軌道を Ω $(= V - S)$ とするとき，G_v° $(^\forall v \in \Omega \cap V(\mathbb{Q}))$ は非自明な $\mathbb{Q}$-有理指標を持たない．（ただし，G_v° は $G_v = \{g \in G \mid \rho(g)v = v\}$ の単位元連結成分である．）

という仮定の下で，多変数のゼータ関数を定義しよう（正則性は仮定しない）．$P_1, P_2, \ldots, P_n$ を (G,ρ,V) の $\mathbb{Q}$ 上の基本相対不変式とし，対応する指標を $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ とする．

ここで，記号の簡略化と 1 変数の場合と並行して議論が進むことをはっきりさせるという 2 つの目的のために，

$$|\chi(g)|^s := \prod_{i=1}^{n} |\chi_i(g)|^{s_i}, \quad |P(v)|^s := \prod_{i=1}^{n} |P_i(v)|^{s_i} \quad (s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n) \tag{2.1}$$

と置こう．G^+ で $G(\mathbb{R})$ の単位元連結成分を表す．L を $V(\mathbb{Q})$ の格子とし，$G(\mathbb{Q}) \cap G^+$ に含まれる数論的部分群 Γ で L を不変にするものを取っておく（このような Γ は存在する．適当な合同

部分群を取ればよい）．このとき，ゼータ積分を

$$Z(f,L;s)=\int_{G^+/\Gamma}|\chi(g)|^s\sum_{v\in L\cap\Omega}f(\rho(g)v)\,d_rg\quad(s\in\mathbb{C}^n,\ f\in\mathcal{S}(V(\mathbb{R}))) \tag{2.2}$$

と定義する．この定義は，(2.1) の記号の約束の下で，1 変数の場合とほとんど同じである．異なっている点は，G を簡約群と仮定していないため，リー群 G^+ は両側不変なハール測度を持つとは限らず，右不変測度 d_rg を考えていることである．ここで，右不変測度は正定数倍を除いて一意的に定まり，$h\in G^+$ を固定したとき，$d_r(hg)$ も右不変測度となるので，$d_r(hg)=\Delta(h)d_rg$ となる正定数 $\Delta(h)$ が存在する．$\Delta:G^+\to\mathbb{R}_{>0}$ は乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ への連続準同型を与え，**モジュラス指標**といわれる[*1]．さて，仮定 2 から従う重要な性質の一つは，G の任意の $\mathbb{Q}$ 上定義された有理指標は適当な冪を取れば，相対不変式に対応するということである．したがって，

$$|\det\rho(g)/\Delta(g)|=|\chi(g)|^\delta\quad(\exists\delta\in\mathbb{Q}^n) \tag{2.3}$$

と表せる．そこで，開軌道の $\mathbb{R}$-有理点の集合 $\Omega(\mathbb{R})$ 上の G^+-相対不変測度 $\omega(x)$ を

$$\omega(x):=\frac{dx}{|P(x)|^\delta}$$

と定義する．dx は実ベクトル空間 $V(\mathbb{R})$ 上の加法的ハール測度（ルベーグ測度）である．また，仮定 2 により，$G_v^+:=\{h\in G^+\mid\rho(h)v=v\}$ $(v\in\Omega(\mathbb{R}))$ はユニモジュラーであり両側不変測度 $d\mu_v(h)$ をもつ．$d\mu_v(h)$ には正定数倍の自由度があるが，$\Omega(\mathbb{R})$ を（ユークリッド位相での）連結成分に

$$\Omega(\mathbb{R})=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_\nu$$

と分解しておくと，$v\in\Omega_i$ のとき，積分公式

$$\int_{G^+}\varphi(g)\,d_rg=\int_{\Omega_i}\left(\int_{G_v^+}\varphi(g_xh)d\mu_v(h)\right)\omega(x)$$

が成り立つように正規化することができる．ここで，g_x は $x=\rho(g_x)v$ となる G^+ の元で，$\int_{G_v^+}\varphi(g_xh)d\mu_v(h)$ は $d\mu_v(h)$ の両側不変性により，g_x の取り方によらずに定まる．これが，[57] の (3.2) の一般化である．ここで，n 変数のゼータ関数と局所ゼータ関数を

$$\xi_i(L;s)=\sum_{v\in\Gamma\backslash(L\cap\Omega_i)}\frac{\mu(v)}{|P(v)|^s},\quad\mu(v)=\int_{G_v^+/\Gamma_v}d\mu_v(h), \tag{2.4}$$

$$\Phi_i(f;s)=\int_{\Omega_i}|P(x)|^s f(x)\,\omega(x) \tag{2.5}$$

と定義しよう．$\mu(v)$ は有限値をとり，ゼータ関数 $\xi_i(L;s)$ は $s_1,s_2,\ldots,s_n$ の実部がみな十分大きいとき絶対収束する．これは，仮定 1, 2 により Saito [34] から従う．また，$f\in\mathcal{S}(V(\mathbb{R}))$ に対し

*1 『岩波数学辞典』などでは Δ を「モジュラ—関数」と言っているが，保型関数論における「モジュラー関数」と区別するため，「モジュラス指標」ということにする．

て，局所ゼータ関数 $\Phi_i(f;s)$ は $\Re(s_j) > \delta_j$ $(1 \leq j \leq n)$ のとき絶対収束していることは f の急減少性より直ちに従う．さらに，多項式の複素幂の一般論により，$\Phi_i(f;s)$ は $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の有理型関数として，$\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続される（例えば，[2] を見よ）．

さて，このように準備しておけば，[57, §3] の議論はまったくそのまま一般化されて，次の命題が得られる．

命題 2.1.1 **（ゼータ関数の積分表示）** ゼータ積分 $Z(f, L; s)$ $(s \in \mathbb{C}^n,\ f \in \mathcal{S}(V(\mathbb{R})))$ は $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の実部がみな十分大きいとき絶対収束し，

$$Z(f, L; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(L; s)\Phi_i(f; s)$$

が成立つ．

2.2 多変数ゼータ関数の関数等式

§2.1 では，§1.3 で整理した関数等式の証明の 4 つの構成要素のうち，ゼータ積分の一般化を説明したが，この §2.2 では，§2.1 における仮定 1, 2 に加えて，

仮定 3. (G, ρ, V) は正則

を仮定した上で，残る 3 つの構成要素を一般化する．

まず，(G, ρ, V) が仮定 1,2,3 を満たすならば，双対 (G, ρ^*, V^*) も仮定 1,2,3 をすべて満たすことに注意しよう．以下，§2.1 で (G, ρ, V) に対して定義された諸概念の (G, ρ^*, V^*) に対する対応物は，同じ記号に上付きの $*$ を付けることによって表さすことにする．例えば，Ω^* は $\rho^*(G)$ による開軌道であり，その $\mathbb{R}$-有理点の集合 $\Omega^*(\mathbb{R})$ の連結成分への分解は $\Omega^*(\mathbb{R}) = \Omega_1^* \cup \cdots \cup \Omega_\nu^*$ と表される．ここで，連結成分の個数は $\Omega(\mathbb{R})$ のそれと一致するのであった（命題 1.2.3 (5)）．また，$P_1^*, \ldots, P_n^*$ と書けば，(G, ρ^*, V^*) の $\mathbb{Q}$ 上の基本相対不変式を表し，$\chi_1^*, \ldots, \chi_n^*$ は対応する G の指標である．

2.2.1 多変数 b 関数

b 関数の多変数化から始めよう．$\chi \in X_\rho(G)_\mathbb{Q} = X_{\rho^*}(G)_\mathbb{Q}$ に対して，$\delta : X_\rho(G)_\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^n$, $\delta^* : X_\rho(G)_\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^n$ を

$$\chi = \chi_1^{\delta(\chi)_1}\chi_2^{\delta(\chi)_2}\cdots\chi_n^{\delta(\chi)_n} = (\chi_1^*)^{\delta^*(\chi)_1}(\chi_2^*)^{\delta^*(\chi)_2}\cdots(\chi_n^*)^{\delta^*(\chi)_n}$$

によって定める．そして，

$$P_\chi(v) = P_1(v)^{\delta(\chi)_1}P_2(v)^{\delta(\chi)_2}\cdots P_n(v)^{\delta(\chi)_n}, \quad P_\chi^*(v^*) = P_1^*(v^*)^{\delta^*(\chi)_1}P_2^*(v^*)^{\delta^*(\chi)_2}\cdots P_n^*(v^*)^{\delta^*(\chi)_n}$$

と定義する．P_χ, P_χ^* は，それぞれ，χ に対応する (G, ρ, V), (G, ρ^*, V^*) の相対不変式である．$\delta^*(\chi)_i \geq 0$ $(\forall i)$ のとき，$\delta^*(\chi) \geq 0$ と書くことにする．これは P_χ^* が多項式であることを意味す

る．$\delta^*(\chi) \geq 0$ のとき，$P^*_\chi(\partial_v)$ を

$$P^*_\chi(\partial_v)\exp(\langle v, v^*\rangle) = P^*_\chi(v^*)\exp(\langle v, v^*\rangle)$$

を満たす V^* 上の定数係数偏微分作用素と定義する．

定理 2.2.1 (1) $\delta^*(\chi) \geq 0$ のとき，

$$P^*_\chi(\partial_v)P^s(v) = b_\chi(s)P^{s+\delta(\chi)}(v)$$

を満たす s の多項式 $b_\chi(s)$ が存在する．

(2) $\delta^*(\chi), \delta^*(\psi) \geq 0$ のとき，

$$b_{\chi\psi}(s) = b_\chi(s)b_\psi(s+\delta(\chi))$$

が成立し，この関係式を利用して，すべての $\chi \in X_\rho(G)_\mathbb{Q}$ に対し s の有理関数 $b_\chi(s)$ を定義することができる．

(3) 群準同型写像 $c : X_\rho(G)_\mathbb{Q} \to \mathbb{C}^\times$, $e^{(i)} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$，および，

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{d_i}\Gamma(e^{(i)}(s) - \alpha_{ij})^{m_{ij}} \quad (d_i > 0, m_{ij} \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \alpha_{ij} \in \mathbb{C})$$

の形のガンマ因子が存在し，

$$b_\chi(s) = c(\chi)\cdot\frac{\gamma(s)}{\gamma(s-\delta(\chi))}$$

と表される．ここで，$e^{(i)}(s)$ は $e^{(i)}$ を $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ と $\mathbb{C}$-線型に拡張した線型形式である．

注意 2.2.2 G が簡約代数群ならば，$\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$ であることが示せる．一般に成立つと思われるが，筆者は厳密な証明を知らない（いわゆる Bernstein 多項式とここでいう b 関数の間の関係が問題である）．

2.2.2 **関数等式**

(2.1) と同様に，

$$|\chi^*(g)|^s = \prod_{i=1}^{n}|\chi^*_i(g)|^{s_i}, \quad |P^*(v^*)|^s = \prod_{i=1}^{n}|P^*_i(v^*)|^{s_i}$$

と略記すると，双対のゼータ関数，局所ゼータ関数は

$$\xi^*_i(L^*; s) = \sum_{v^* \in \Gamma\backslash(L^*\cap\Omega^*_i)}\frac{\mu(v^*)}{|P^*(v^*)|^s}, \quad \Phi^*_i(f^*; s) = \int_{\Omega^*_i}|P^*(v^*)|^{s-\delta^*}f^*(v^*)\,dv^* \tag{2.6}$$

となる．ここで，δ^* は

$$|\det\rho^*(g)/\Delta(g)| = |\chi^*(g)|^{\delta^*}, \quad \delta^* \in \mathbb{Q}^n$$

で与えられる．ゼータ関数の積分表示も命題 2.1.1 を (G, ρ^*, V^*) に適用すれば,

$$Z^*(L^*, f^*; s) := \int_{G^*/\Gamma} |\chi^*(g)|^s \sum_{v^* \in L^* \cap \Omega^*} f^*(\rho^*(g)v^*)\, d_r g = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^*(L^*; s)\Phi_i^*(f^*; s) \tag{2.7}$$

と得られる．ここで，積分表示自体は L^* は任意の $V_{\mathbb{Q}}$ の格子，Γ は L^* を不変にし $G(\mathbb{Q}) \cap G^+$ に含まれる任意の数論的部分群でよいが，関数等式を成り立たせるため，L^* は L の双対格子，すなわち，

$$L^* = \{\, v^* \in V_{\mathbb{Q}} \mid \langle v, v^* \rangle \in \mathbb{Z}\ (\forall v \in L)\}$$

ととる．そして，Γ は $Z(f, L; s), Z^*(f^*, L^*; s)$ で共通にとることにする．

さて，命題 1.2.3 (2) より，$\det \rho(g)^2 \in X_\rho(G)_{\mathbb{Q}}$ であるから，

$$|\det \rho(g)| = |\chi(g)|^\lambda \quad (\lambda \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}^n) \tag{2.8}$$

を満たす λ が存在する．また，$X_\rho(G)_{\mathbb{Q}} = X_{\rho^*}(G)_{\mathbb{Q}}$ である（命題 1.2.3 (4)）から，この同じ自由アーベル群の 2 つの基底である $\chi_1, \ldots, \chi_n$ と $\chi_1^*, \ldots, \chi_n^*$ とは次のような関係で結ばれている：

$$\chi_i(g) = \chi_1^*(g)^{u_{i1}} \chi_2^*(g)^{u_{i2}} \cdots \chi_n^*(g)^{u_{in}}, \quad U = (u_{ij}) \in GL(n; \mathbb{Z}). \tag{2.9}$$

関数等式における変数変換は，1 変数の場合には，$s \mapsto \frac{\dim V}{\deg P} - s$ であったが，一般には，いま定義した λ, U を用いて，$s \mapsto (s - \lambda)U$ と記述される．すなわち，次の局所関数等式とゼータ積分の関数等式が成り立つ．

命題 2.2.3 **（局所関数等式）** $f \in \mathcal{S}(V(\mathbb{R}))$ のフーリエ変換を $\widehat{f}$ とすると，局所ゼータ関数は次の関数等式を満たす：

$$\Phi_j(f; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s)\Phi_i^*(\widehat{f}; (s - \lambda)U).$$

ここで，$\gamma_{ij}(s)$ はガンマ関数と指数関数を用いて表される f と無関係な $s \in \mathbb{C}^n$ の有理型関数である．

定理 2.2.4 C, C^* を，それぞれ，ゼータ積分 $Z(f, L; s)$, $Z^*(f^*, L^*; s)$ の絶対収束域とする．また，$f \in \mathcal{S}(V(\mathbb{R}))$ が特異集合 $S_{\mathbb{R}}$ 上 0 となり，また，そのフーリエ変換 $\widehat{f}$ が特異集合 $S_{\mathbb{R}}^*$ 上 0 となるような，f をとる．このとき，ゼータ積分 $Z(f, L; s)$, $Z^*(f^*, L^*; s)$ は，それぞれ，$C \cup (C^* U^{-1} + \lambda)$, $C^* \cup (C - \lambda)U$ の凸包上の正則関数として解析接続され，次の関数等式を満たす：

$$Z(f.L; s) = v(L^*) Z(\widehat{f}; L^*; (s - \lambda)U).$$

以上を用いるならば，§1.3 で復習した 1 変数ゼータ関数の関数等式の証明をほぼ逐語的に多変数ゼータ関数の場合に移植でき，次の定理 2.2.5 が得られる．

定理 2.2.5 ([35])

$$v(L^*)\xi_i^*(L^*; (s - \lambda)U) = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s)\xi_j(L; s).$$

$\xi_j(L;s)$ の絶対収束域 D，$\xi_i^*(L^*;s)$ の絶対収束域 D^* に対し，両辺は $D\cup(D^*U^{-1}+\lambda)$ の凸包上の有理型関数として解析接続される．

この証明で b 関数を用いる部分について注意しておこう．双対概均質ベクトル空間の基本相対不変式に対応する指標の積を考え，

$$\chi_0^* = \chi_1^*\chi_2^*\cdots\chi_n^*$$

とおく．このとき，$P_{\chi_0^*}^*(v^*) = P_1^*(v^*)P_2^*(v^*)\cdots P_n^*(v^*)$ である．$f_0 \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega_i)$ をとって，$f(v) = P_{\chi_0^*}^*(\partial_v)f_0(v)$ とおく．この f に対して，ゼータ積分の関数等式（定理 2.2.4）が適用でき，[57, 定理 4.2] の証明と全く同様に証明が進行するのである．また，この証明から，

$$b_{\chi_0^*}(s-\delta)\xi_i(L;s) \text{ が } D\cup(D^*U^{-1}+\lambda) \text{ の凸包上で正則である}$$

ことも示される．

2.3 関数等式の例：$(SO_Y\times B_2,\rho,M_{3,2})$ = 例 1.1.3 で $m=3$ の場合

例 1.1.3 の空間のゼータ関数に対し，定理 2.2.5 の関数等式を書いてみよう．簡単のため，$m=3$ とし，さらに，Y は正定値と仮定する．Y は正定値であることから，$\Omega(\mathbb{R}) = \{v\in M_{3,2}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rank}(v)=2\}$ は連結となる．

$$L = L^* = M_{3,2}(\mathbb{Z}),\quad \Gamma = \{I_3\}\times(B_2\cap GL_2(\mathbb{Z}))$$

とすると，$(SO_Y\times B_2,\rho,M_{3,2})$ とその双対の基本相対不変式，および，対応する有理指標は

$$\begin{aligned}
&P_1(v) = ({}^t vYv)_{11}, && P_2(v) = \det({}^t vYv), && \chi_1(g,b) = b_1^{-2}, && \chi_2(g,b) = (b_1b_2)^{-2}\\
&P_1^*(v) = ({}^t vY^{-1}v)_{22}, && P_2^*(v) = \det({}^t vY^{-1}v), && \chi_1^*(g,b) = b_2^2, && \chi_2^*(g,b) = \chi_2(g,b)^{-1}
\end{aligned}$$

となる．よって，ゼータ関数は

$$\xi_1(Y;s_1,s_2) = \sum_{\substack{v\in M_{3,2}(\mathbb{Z})/\Gamma\\ \mathrm{rank}(v)=2}} \left(({}^t vYv)_{11}\right)^{-s_1}\det({}^t vYv)^{-s_2},$$

$$\xi_1^*(Y;s_1,s_2) = \sum_{\substack{v\in M_{3,2}(\mathbb{Z})/{}^t\Gamma\\ \mathrm{rank}(v)=2}} \left(({}^t vY^{-1}v)_{22}\right)^{-s_1}\det({}^t vY^{-1}v)^{-s_2}$$

と与えられる．関数等式を記述するデータ λ, U は

$$\det\rho(g,b) = \chi_2(g,b)^{3/2},\quad \therefore\ \lambda = (0,\tfrac{3}{2}),$$

$$\chi_1^* = \chi_1\chi_2^{-1},\ \chi_2^* = \chi_2^{-1},\quad \therefore\ U = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

であるから，関数等式の変数変換は

$$s = (s_1,s_2) \longmapsto (s-\lambda)U = (s_1, \tfrac{3}{2}-s_1-s_2)$$

となる．関数等式は具体的には，

$$\xi_1^*(Y; s_1, \tfrac{3}{2} - s_1 - s_2) = (\det Y)^{-1/2}\phi(s_1 + s_2 - \tfrac{1}{2})\phi(s_2)\xi_1(Y; s_1, s_2),$$
$$\phi(x) = \pi^{-2s}\Gamma(s)^2 \sin \pi x.$$

と計算される．

ここで，ゼータ関数の絶対収束域は

$$D = D^* = \left\{ (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \Re(s_1) > 1,\ \Re(s_2) > 1 \right\}$$

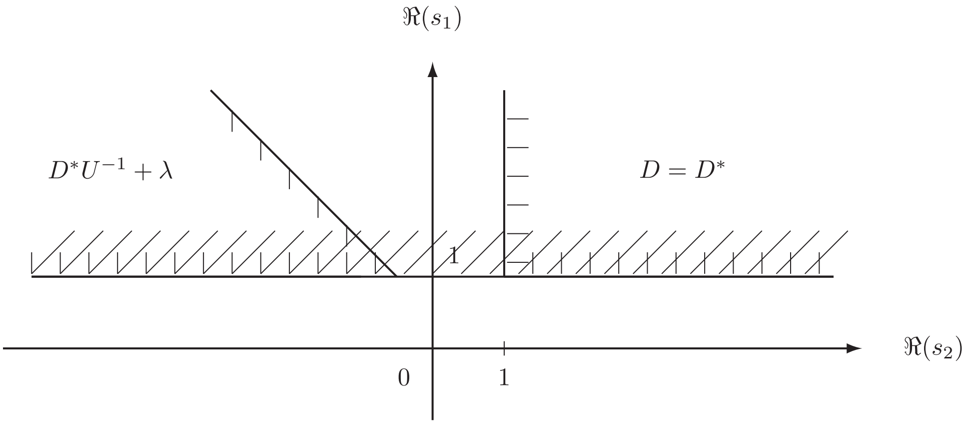
であり，したがって，定理 2.2.5 によって，これらのゼータ関数が解析接続される領域は D と

$$D^* U^{-1} + \lambda = \left\{ (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \Re(s_1) > 1,\ \tfrac{3}{2} - \Re(s_1) - \Re(s_2) > 1 \right\}$$

の合併の凸包で，それは

$$\left\{ (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \Re(s_1) > 1 \right\}.$$

となる（図 2.2.2 を見よ）．



— 図 2.2.2 —

ここで注意すべきは，1 変数ゼータ関数の場合とは異なり，

定理 2.2.5 が与える関数等式だけでは，$\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続できない！

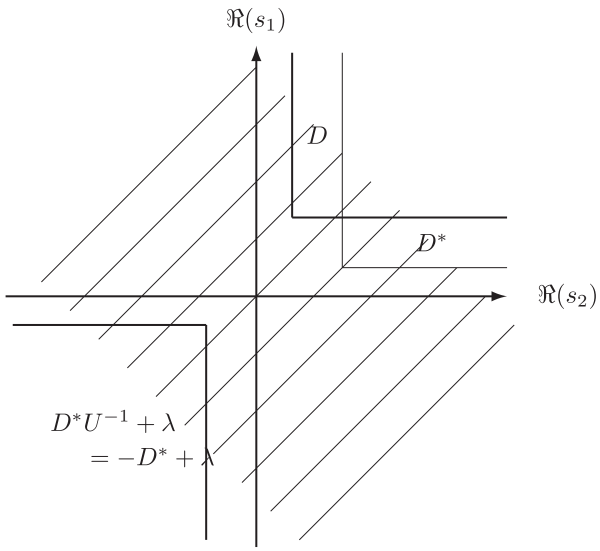
ということである．$\mathbb{C}^2$ 全体への解析接続を行うためには，$s_1 \mapsto c - s_1$ のような関数等式が求められる．より一般に，n 変数ゼータ関数は（それが $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続されるようなよいものであるならば）変数の個数分くらいは関数等式を持つのではないかと期待される．

2.4 $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続できる場合

定理 2.2.5 によって，$\mathbb{C}^n$ 全体への解析接続が証明できる場合として，次がある．

定理 2.4.1 (G, ρ, V) は $\mathbb{Q}$ 上定義され，仮定 1, 仮定 2, 仮定 3 を満たす概均質ベクトル空間だとする．このとき，G が簡約代数群ならば，ゼータ関数 $\xi_i(L; s)$，$\xi_j^*(L^*; s)$ は $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続される．

実際，注意 1.2.5 で述べたように，G が簡約代数群ならば，$U = -I_n$ と取れる．したがって，定理 2,2,5 によりゼータ関数は $D \cap (-D^* + \lambda)$ の凸包まで解析接続されるが，ゼータ関数の絶対収束域 D, D^* は十分大きい $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対し $\{s \in \mathbb{C}^n \mid \Re(s_i) \geq c_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$ の形の領域を含むから，$D \cap (-D^* + \lambda)$ の凸包が $\mathbb{C}^n$ に一致することは明らかである．



例えば，例 1.1.4 の空間（で $n = 3$, Y が正定値の場合）に対して書くと

$$(SO_Y \times GL_2 \times GL_1, \rho, M_{3,2} \oplus M_{2,1})$$

のゼータ関数

$$\xi_2(Y, V_{\mathbb{Z}}; s_1, s_2) = \sum_v \left| {}^t v_1 \, {}^t v_2 Y v_2 v_1 \right|^{-s_1} \left| \det({}^t v_2 Y v_2) \right|^{-s_2}$$

は $\mathbb{C}^2$ の全体に解析接続される．ただし，v に関する和は，

$$v \in \rho(\{I_3\} \times GL_2(\mathbb{Z}) \times GL_1(\mathbb{Z})) \backslash M_{3,2}(\mathbb{Z}) \oplus M_{2,1}(\mathbb{Z}), \quad \mathrm{rank}(v_1) = 1, \ \mathrm{rank}(v_2) = 2$$

を渡る．

注意 2.4.2　G が簡約代数群でないときには，そのゼータ関数は $\mathbb{C}^n$ 全体に解析接続されない可能性がある．$\mathbb{C}^n$ に解析接続できるかどうかを判定するようなできるような理論はいまのところ存在しない．その意味で，非簡約概均質ベクトル空間のゼータ関数の一般論は完全ではない．

2.5　複数の関数等式を満たす例

前節の注意を踏まえると，

> 非簡約代数群が作用している例 1.1.3 $(SO_Y \times B_2, \rho, M_{3,2})$ のゼータ関数 $\xi_1(Y; s_1, s_2)$ は $\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続できないのか？

ということが気になるだろう．だが，

$$\xi_1(Y; s_1, s_2) \text{ も } \mathbb{C}^2 \text{ 全体に解析接続できる！}$$

のである．それは，$\xi_1(Y; s_1, s_2)$ は $\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続できる $\xi_2(Y; s_1, s_2)$ と次のような関係にあるからである．

$$\xi_2(Y; s_1, s_2) = \zeta(2s_1)\xi_1(Y; s_1, s_2).$$

実際，

$$\begin{aligned}
\xi_2(Y; s_1, s_2) &= \sum_{v_1 \bmod GL_2(\mathbb{Z})} \sum_{v_2 \bmod {}^tGL_2(\mathbb{Z})_{v_1}} \left| {}^tv_1 \, {}^tv_2 Y v_2 v_1 \right|^{-s_1} \left| \det({}^tv_2 Y v_2) \right|^{-s_2} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{v_2 \in M_{3,2}(\mathbb{Z})/{}^tB_2(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{rank}(v_2)=2}} \left| (m, 0) \, {}^tv_2 Y v_2 \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \right|^{-s_1} \left| \det({}^tv_2 Y v_2) \right|^{-s_2} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s_1}} \right) \left(\sum_{\substack{v_2 \in M_{3,2}(\mathbb{Z})/{}^tB_2(\mathbb{Z}) \\ \mathrm{rank}(v_2)=2}} |d_1(v_2 Y v_2)|^{-s_1} \left| \det({}^tv_2 Y v_2) \right|^{-s_2} \right) \\
&= \zeta(2s_1)\xi_1(Y; s_1, s_2)
\end{aligned}$$

となっている．

この関係式を見ると，$\xi_2(Y; s_1, s_2)$ には例 1.1.4 の概均質ベクトル空間に定理 2.2.5 を適用して得られる関数等式に加えて，$\xi_1(Y; s_1, s_2)$ の関数等式が組み込まれていることが分かる．変数の変換のされ方だけを書くと次の図のようになっている．

$$
\begin{tikzcd}
(s_1, s_2) \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{例 1.1.3 の関数等式}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{例 1,1,4 の関数等式}"] & & (s_1, \frac{3}{2} - s_1 - s_2) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{例 1,1,4 の関数等式}"] \\
(1 - s_1, 1 - s_2) \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{例 1,1,3 の関数等式}"] & & (1 - s_1, s_1 + s_2 - \frac{1}{2})
\end{tikzcd}
$$

2.6　複数の関数等式を満たす仕組み

では，上の例のように複数の関数等式が得られる仕組みはどのようなものか，考察してみよう．一般に，n 変数ディリクレ級数を

$$
\begin{aligned}
\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) &= \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n = 1}^{\infty} \frac{a(m_1, m_2, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_n^{s_n}} \\
&= \sum_{m_{i+1}, \ldots, m_n = 1}^{\infty} \frac{1}{m_{i+1}^{s_{i+1}} \cdots m_n^{s_n}} \sum_{m_1, \ldots, m_i = 1}^{\infty} \frac{a(m_1, m_2, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_i^{s_i}}
\end{aligned}
$$

と，二重和にまとめ直したとき，内側の和が

$$
\sum_{m_1, \ldots, m_i = 1}^{\infty} \frac{a(m_1, m_2, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_i^{s_i}} = \gamma_1(s)\, m_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots m_n^{\alpha_n} \sum_{m_1, \ldots, m_i = 1}^{\infty} \frac{a^*(m_1, m_2, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1^*} \cdots m_i^{s_i^*}},
$$
$$
(s_1^*, \ldots, s_i^*) = ((s_1, \ldots, s_i) - (\lambda_1, \ldots, \lambda_i))U_1
$$

のような形の関数等式を満たしたとしよう．このとき，

$$
\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \gamma_1(s)\, \xi^*(s_1^*, \ldots, s_i^*, s_{i+1} - \alpha_{i+1}, \ldots, s_n - \alpha_n),
$$
$$
\xi^*(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n = 1}^{\infty} \frac{a^*(m_1, m_2, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_n^{s_n}}
$$

のような関数等式を満たすだろう．このような都合のよい二重和表示がいくつもあれば，複数の関数等式が成立つだろう．概均質ベクトル空間のゼータ関数という設定では，

このような都合のよい二重和表示は，可約な概均質ベクトル空間の**正則な直和因子**から得られる

というのが，概均質ベクトル空間の多変数ゼータ関数の理論である．

2.7　正則直和因子に関する部分的双対と関数等式の証明

線型代数群 G の表現 ρ_1, ρ_2 の直和 ρ を考える：

$$
(G, \rho, V) = (G, \rho_1, V_1) \oplus (G, \rho_2, V_2), \quad \rho(g)(v_1, v_2) = (\rho(g)_1 v_1, \rho_2(g) v_2).
$$

(G, ρ, V) が概均質ベクトル空間 $\Longleftrightarrow$ (1) (G, ρ_1, V_1) が概均質ベクトル空間，かつ，

(2) (G_{v_1}, ρ_2, V_2) $(v_1 \in \Omega_1)$ が概均質ベクトル空間

ここで，$\Omega_1 = (G, \rho_1, V_1)$ の開軌道，$G_{v_1} = \{g \in G \mid \rho_1(g)v_1 = v_1\}$ である．このとき，

(G, ρ, V)のゼータ関数

$$= \sum_{v_1 \bmod \Gamma} \frac{1}{|P_1(v_1)|^{s_1} \cdots |P_i(v_1)|^{s_i}} \underbrace{\sum_{v_2 \bmod \Gamma \cap G_{v_1}} \frac{\mu(v_1, v_2)}{|P_{i+1}(v_1, v_2)|^{s_{i+1}} \cdots |P_n(v_1, v_2)|^{s_n}}}_{(G_{v_1}, \rho_2, V_2)\text{ のゼータ関数}}$$

と二重和にまとめなおせる．

定義 2.7.1 (G_{v_1}, ρ_2, V_2) $(\exists v_1 \in \Omega_1)$ が正則概均質ベクトル空間のとき，(ρ_2, V_2) を $(G, \rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ の**正則直和因子**という．（このとき，$\forall v_1 \in \Omega_1$ に対し，(G_{v_1}, ρ_2, V_2) は正則である．）

(ρ_2, V_2) が $(G, \rho, V) = (G, \rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ の正則直和因子で，(G, ρ, V) に対して仮定 1,2 が満たされていれば，(G_{v_1}, ρ_2, V_2) $(\forall v_1 \in \Omega_1 \cap V_1(\mathbb{Q}))$ のゼータ関数が関数等式を満たし，それは (G, ρ, V) のゼータ関数の関数等式に組み込まれることになろう．これを理論化するには，§1.2 で述べた正則概均質ベクトル空間の性質，§2.2 の関数等式の理論を正則直和因子に一般化すればよい．

実際，$(G, \rho, V) = (G, \rho_1, V_1) \oplus (G, \rho_2, V_2)$ が概均質ベクトル空間で，(ρ_2, V_2) がその正則直和因子であるとする．このとき，部分空間 (ρ_2, V_2) だけを双対に取り換えた**部分的双対** $(G, \rho^*, V^*) = (G, \rho_1, V_1) \oplus (G, \rho_2^*, V_2^*)$ も概均質ベクトル空間となり，命題 1.2.3 はほとんどそのまま部分的双対に拡張される．また，ゼータ関数の関数等式の理論は，フーリエ変換の代わりに，V_2 に関する**部分フーリエ変換**

$$\widehat{f}(v_1, v_2^*) := \int_{V_{2\mathbb{R}}} f(v_1, v_2) \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle v_2, v_2^* \rangle)\, dv_2$$

を用いるならば，§2.2 の諸結果がそのまま成立するのである．したがって，ここでその結果を改めて述べることは控え，詳細は [35] に譲ることにしよう．

2.8 例 1.1.4（一般の $(n \geq 2)$）の正則直和因子とゼータ関数の関数等式

では，典型的な例として，例 1.1.4 の空間から得られるゼータ関数と関数等式を一般の $n \geq 2$ に対して（Y は正定値の仮定の下で）書いてみよう．考えている空間は

$$G = SO_Y \times GL_{n-1} \times GL_{n-2} \times \cdots \times GL_1,$$

$$V = M_{n,n-1} \oplus M_{n-1,n-2} \oplus \cdots \oplus M_{2,1},$$

$$\rho(g_n, g_{n-1}, g_{n-2}, \ldots, g_1)(v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_1) = (g_n v_{n-1} g_{n-1}^{-1}, g_{n-1} v_{n-2} g_{n-2}^{-1}, \ldots, g_2 v_1 g_1^{-1})$$

であった．この表現空間を

$$V = V_I \oplus V_J, \quad V_I = \bigoplus_{i \in I} M_{i+1,i}, \quad V_J = \bigoplus_{j \in J} M_{j+1,j}, \quad \{1, 2, \ldots, n-1\} = I \sqcup J,$$

$$\rho_I(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1)(v_i)_{i \in I} = (g_{i+1} v_i g_i^{-1})_{i \in I}, \quad \rho_J(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1)(v_j)_{j \in J} = (g_{j+1} v_j g_j^{-1})_{j \in J}$$

と直和分解する．このとき，

すべての $J \neq \emptyset$ に対し，(ρ_J, V_j) は正則直和因子

である．そして，V_J に関する部分的双対は

$$(G, \rho^{(J)}, V) = (G, \rho_I, V_I) \oplus (G, \rho_J^*, V_J),$$

$$\rho^{(J)}(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1)(v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_1) \text{ の第 } k \text{ 成分} = \begin{cases} g_{k+1} v_k g_k^{-1} & (k \in I), \\ {}^t g_{k+1}^{-1} v_k \, {}^t g_k & (k \in J). \end{cases}$$

となる．空集合 $\emptyset$ に対しては，$(G, \rho^{(\emptyset)}, V) = (G, \rho, V)$ である．したがって，2^{n-1} 個のゼータ関数

$$\xi^{(J)}(Y, V_{\mathbb{Z}}; s_1, s_2, \ldots, s_n) = (G, \rho^{(J)}, V) \text{ のゼータ関数} \quad (J \subset \{1, 2, \ldots, n-1\})$$

を互いに結び付ける関数等式が存在する．(それらを明示的に書き上げることはできるが，面倒なので省略．)

実は，次の等式からわかるように $\xi^{(J)}$ たちは本質的に同じゼータ関数である．

$$\xi^{(J)}(Y, V_{\mathbb{Z}}; s_1, s_2, \ldots, s_n) = \prod_{1 \le i \le j \le n-1} \zeta(2(s_i + \cdots + s_j - j + i)$$

$$\times \begin{cases} (\det Y)^{(n-1)/2} E(Y; s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) & (n-1 \notin J) \\ (\det Y)^{s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} - (n-1)/2} E(Y; s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, s_1) & (n-1 \in J) \end{cases}$$

$$E(Y; s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) = \sum_{U \in SL_n(\mathbb{Z})/B_n(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{n-1} \Delta_i({}^t UYU)^{-s_i}.$$

したがって，2^{n-1} 個のゼータ関数の間の関数等式は，単独の関数 $E(Y; s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ (同じことだが，$\xi^{(\emptyset)}(Y; s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$) が満たす複数の関数等式にまとめ上げられる．

定理 2.8.1 $\widehat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ として，

$$\widehat{E}(Y; z_1, z_2, \ldots, z_n) := (\det Y)^{z_n} \prod_{1 \le i \le j \le n-1} \widehat{\zeta}(2(z_j - z_i - \tfrac{j-i-1}{2})$$

$$\times E(Y; z_2 - z_1 + \tfrac{1}{2}, z_3 - z_2 + \tfrac{1}{2}, \ldots, z_n - z_{n-1} + \tfrac{1}{2})$$

とおくと，任意の $\sigma \in S_n$ に対して，

$$\widehat{E}(Y; z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(n)}) = \widehat{E}(Y; z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

が成り立つ．

一元集合 $J = \{k\}$ の場合，$\xi^{(\emptyset)}$ と $\xi^{(\{k\})}$ の間の関数等式は，定理 2.8.1 で $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k+1 \\ k+1 & 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$ という巡回置換に対する関数等式を与えている．

注意 2.8.2 $E(Y; s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ は $SL_n(\mathbb{Z})$ の Eisenstein 級数に他ならない．Langlands による Eisenstein 級数の大理論が現れる以前に，定理 2.8.1 は部分級数に対して Poisson の和公式（テータ級数の変換公式）を用いる方法で得られていたが ([50], Godement の unpublished notes, [22], 出版年は少し後だが [28, §17])，概均質ベクトル空間の多変数ゼータ関数の理論は，その一般化と見ることもできる．

ここでは，Y が正定値という仮定の下で関数等式を記述したが，Y が $\mathbb{Q}$-係数不定値対称行列の場合にも，同様の結果を得ることができる．これは，Selberg によって証明抜きで主張されていた ([50], [51]) のだが，きちんとした証明は [36] で与えられた．なお，Y が正定値のときには，定理 2.8.1 は Langlands の Eisenstein 級数の一般論の一例に過ぎないが，不定値の場合はその一般論に含まれるわけではない．

注意 2.8.3 可約な簡約概均質ベクトル空間の分類は木村達雄氏を中心として精力的に研究されているが，未だ未完成である．しかし，ここまで述べてきた多変数ゼータ関数の理論を適用できる大量の例が与えられている．これについては，[16], [17], [21], および，これらに引用されている文献を見よ．

注意 2.8.4 概均質ベクトル空間に付随する多変数ゼータ関数は，上で説明した一般論から得られる関数等式以外に何らかの関係式が存在し，組み合わせることで，より多くの関数等式を得られることがある．都築氏による報告 [61] で $(B(2), \rho, Sym(2))$ に対する Shintani の 2 変数ゼータ関数（[53], [37] を見よ）に対してそのような現象が解説されている．

3 ゼータ関数の様々な一般化（古典的な例）

ゼータ関数には，以下に例示するように，Dirichlet の L 関数，Epstein の正定値二次形式の球関数付きゼータ関数，Hecke, Maass による量指標（保型形式）付き L 関数などの様々な一般化が存在する．次節以降でそのような一般化が概均質ベクトル空間の理論の立場からどう理解されるか説明するが，それに先立って，一般論のモデルとなったそれらの古典的な例について概観しておこう．

3.1 Dirichlet, および Stark の L 関数

Dirichlet の L 関数が，a, N $(N \geq 2)$ を互いに素な正整数とするとき，$p \equiv a \pmod{N}$ を満たす素数 p が無限に存在するという，いわゆる Dirichlet の算術級数定理の証明のために導入されたことはよく知られている．法 N の Dirichlet 指標 χ に対し，Dirichlet L 関数 $L(s, \chi)$ は

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad (\Re(s) > 1 \text{ で絶対収束})$$

と定義された．χ が原始的だとすると，$L(s,\chi)$ は s の正則関数として全複素平面 $\mathbb{C}$ に解析接続され，

$$\left(\frac{N}{\pi}\right)^{\frac{s+r}{2}}\Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)L(s,\chi)=\frac{G_\chi}{\sqrt{N}i^r}\left(\frac{N}{\pi}\right)^{\frac{(1-s)+r}{2}}\Gamma\left(\frac{(1-s)+r}{2}\right)L(1-s,\overline{\chi})$$

という関数等式を満たす．ここで，$r=0,1$ は $\chi(-1)=(-1)^r$ によって定まり，

$$G_\chi := \sum_{\substack{1\le a\le N-1\\(a,N)=1}}\chi(a)e^{2\pi ia/N}\ \text{(Gauss 和)}$$

である．

正定値二次形式の Epstein ゼータ関数に対する Dirichlet L 関数の類似は，類数 1 の虚二次体の決定の研究に示唆されて，H. M. Stark ([56]) によって導入された．$P(x)$ を n 変数整数係数正定値二次形式とし，Y をその行列とする．Y は $P(x)={}^t xYx$ を満たす対称行列で，$P(x)$ が整数係数であるから，Y は半整数（すなわち，非対角成分が $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に属し，対角成分が $\mathbb{Z}$ に属す）である．さて，法 N の Dirichlet 指標 χ に対し，Stark の L 関数は

$$L(s,\chi,P)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{\chi(P(x))}{P(x)^s}$$

と定義される．$L(s,\chi,P)$ は $\Re(s)>\frac{n}{2}$ で絶対収束し，s の有理型関数として $\mathbb{C}$ 全体に解析接続される．

$D=\det(2Y)$ とし，$\overline{P}(y)=\frac{D}{4}\,{}^t yY^{-1}y$ とおく．また，

$$\chi_1(j)=\left(\frac{N'}{j}\right),\quad N'=\begin{cases}(-1)^{(N-1)/2}N & (N\equiv 1 \pmod 2),\\ -N & (N\equiv 0 \pmod 4),\\ 4N & (N\equiv 2 \pmod 4)\end{cases}$$

とし[*2]，

$$\chi'(j)=\begin{cases}\chi(j) & (n\text{ は偶数}),\\ \chi(j)\chi_1(j) & (n\text{ は奇数}).\end{cases}$$

とおく．Stark は

- $(D,N)=1$ であり，n が奇数のときは N も奇数，
- χ,χ' はともに原始的，

という仮定の下で，Stark は，次の関数等式が成立することを示した：

$$\left(\frac{ND^{1/n}}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)L(s,\chi,P)=a\left(\frac{ND^{(n-1)/n}}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}-s}\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)L\left(\frac{n}{2}-s,\overline{\chi}',\overline{P}\right).$$

ここで，a は Gauss 和等を用いて明示的に書ける絶対値 1 の量である．

[*2] χ_1 の定義式の右辺では Kronecker の記号用いている．

Stark による証明のポイントは，上の仮定の下で，

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^n/NZ^n}\chi(Q(x))\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle}{k}\right)=ak^{n/2}\overline{\chi'}(\overline{Q}(y))$$

が成立つことである．左辺は二次形式 $Q(x)$ の Gauss 和とでもいうべきものである．§4 では，この種の等式を概均質ベクトル空間に一般化する (Denef-Gyoja [6], Cluckers-Herremans [5] の仕事) ことにより，概均質ベクトル空間に対して Dirichlet 型の L 関数の関数等式を示せることを紹介する．

3.2 調和多項式係数 Epstein ゼータ関数

$P(x)={}^t xYx$ を n 変数正定値二次形式とする．Y は $P(x)$ の行列で，n 次正定値対称行列である．また，$P^*(y)={}^t yY^{-1}y$ として，多項式 $Q(x)$ は微分方程式

$$P^*\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)Q(x)=0,$$

を満たすとき P-**調和多項式**といわれる．$Q(x)$ を d 次斉次 P-調和多項式とし，$Q^*(y)=Q(Y^{-1}y)$ とおく．このとき，$P(x)$, $P^*(y)$ に付随する Epstein のゼータ関数を調和多項式係数に一般化したゼータ関数を

$$\zeta_n(Q;s)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{Q(x)}{P(x)^{s+d/2}},\quad \zeta_n^*(Q^*;s)=\sum_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{Q^*(y)}{P^*(y)^{s+d/2}}$$

と定義することができる．これらのゼータ関数は $\Re(s)>\frac{n}{2}$ で絶対収束し，$\mathbb{C}$ 全体に解析接続されて，関数等式

$$\pi^{-s}\Gamma\left(s+\tfrac{d}{2}\right)\zeta_n(Q;s)=i^{-d}(\det Y)^{-1/2}\pi^{-(\frac{n}{2}-s)}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}-s+\tfrac{d}{2}\right)\zeta_n\left(Q^*;\tfrac{n}{2}-s\right)$$

を満たす．$d=0$ で $Q(x)\equiv 1$ のときが，もともとの Epstein のゼータ関数である．$d>0$ ならば，$\zeta_n(Q;s)$, $\zeta_n^*(Q^*;s)$ は整関数である．この事実の詳しい解説は，Siegel の講義録 [55, §1.5] を見よ．なお，その原型はすでに Epstein [7] にある．これらの文献では，Hurwitz-Lerch タイプに一般化されて論じられている．

このような一般化をするとどのようなご利益があるのかを，付言しておこう．例えば，$Q(x)\equiv 1$ という通常の Epstein ゼータ関数を考えると，

$$\zeta_n(1;s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s},\quad a_m:=\sharp\{x\in\mathbb{Z}^n\mid P(x)=m\}$$

となり，$\zeta_n(1;s)$ は不定方程式 $P(x)=m$ の解の個数という情報を担っていた．ここで，より詳しく，$C:=\{x\in\mathbb{R}^n\mid P(x)=1\}$ という楕円面内に可測集合 $F\subset C$ をとり，錐 $\widehat{F}:=\{rx\mid r>0,\ x\in F\}$ に属す格子点のみに制限した

$$a_m(F):=\sharp\left\{x\in\mathbb{Z}^n\cap\widehat{F}\;\middle|\;P(x)=m\right\}$$

の挙動を調べたいとすると，$\zeta_n(1;s)$ ではそこまで細かい情報を得ることはできない．このようなとき，F の特性関数を球面調和関数（P-調和多項式を C に制限して得られる関数）の一次結合で近似することによって，

$$\zeta_n(F;s) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m(F)}{m^s}$$

の考察が，$\zeta_n(Q;s)$ の考察に帰着させられるのである．

別の例を与える．$a : \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $a^* : \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ に対して，

$$\zeta_n(a,Q;s) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \frac{a(x)Q(x)}{P(x)^{s+d/2}}, \quad \zeta_n^*(a^*,Q^*;s) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \frac{a^*(y)Q^*(y)}{P^*(y)^{s+d/2}}$$

という係数を一般にしたゼータ関数を考える．収束を保証するため，ある $k>0$ に対して $a(x) = O(P(x)^k)$, $a^*(y) = O(P^*(y)^k)$ という増大度を持っているとする．このとき，これらのゼータ関数の関数等式から a, a^* が決定されるか，という問題を考えてみよう．すべての Q に対して，$\zeta_n(a,Q;s)$, $\zeta_n^*(a^*,Q^*;s)$ が上の関数等式を満たすならば，$a(x)$, $a^*(y)$ は定数関数でその定数は等しくなければならないことが示せる（[39]）．この結果は，Epstein ゼータ関数に対する Hamburger の定理 とでもいうべきものである．実際，$n=1$ ならば，Riemann ゼータ関数を関数等式で特徴づける Hamburger の定理に他ならない．このようなことは，$\sqrt{m}C$ 上での情報を平均してしまう $\zeta_n(a,1;s)$ だけを考えていては決して得られないことは明らかであろう．

3.3 Hecke, Maass による量指標（保型形式）付きゼータ関数

Hecke による代数的数体の量指標付き L 関数の導入にあたっても §3.2 で述べたような問題意識がその動機の一つとなっていた（量指標付き L 関数についての説明は省略する）．実際，Hecke は論文 [14] の序文で，これまでに導入されたゼータ，L 関数では不十分であるような問題がいろいろあると指摘し，この新しいタイプの L 関数を導入することによって得られる結果のサンプルとして，

> $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ を判別式が平方数ではない整数係数不定値原始的二次形式，$\widehat{C}$ を xy-平面の任意の角領域（原点を始点とする 2 つの半直線に囲まれた領域）とする．(x,y) が動く範囲を $\mathbb{Z}^2$ から $\widehat{C} \cap \mathbb{Z}^2$ に制限しても，$f(x,y)$ は無限に多くの素数を表す

という実 2 次体の量指標付き L 関数の応用を掲げている．

代数的数体の量指標は，現在では，イデール類群の指標，ないしは，代数群 GL_1 の保型形式として理解される．上の Hecke のアイディアを，より大きな代数群に対して，そのまま一般化したのが（Hecke の弟子の）H. Maass である．Maass の考えを説明するために，$m > n \geq 1$ として，m 次の正定値実対称行列 Y に対し，Epstein のゼータ関数を一般化した

$$\zeta_{m,n}(Y;s) = \sum_{v\in M'_{m,n}(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z})} \frac{1}{\det({}^t vYv)^s}$$

というゼータ関数から出発しよう．ただし，階数 n のすべての 実 $m\times n$ 行列の集合を $M'_{m,n}(\mathbb{R})$ とおいた．Y が整数係数ならば，

$$\zeta_{m,n}(Y;s)=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a(Y;t)}{t^s},\quad a(Y;t)=\sharp\left\{v\in M'_{m,n}(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z})\;\middle|\;\det({}^t vYv)=t\right\}$$

となる．このような Epstein ゼータ関数の拡張の可能性は Siegel [54] で指摘され，Koecher [18] によって最初に調べられたので，Koecher のゼータ関数と言われることもある[*3]．概均質ベクトル空間の立場からは $(SO_Y\times GL_n,\rho,M_{m,n})$, $\rho(k,g)v=kv\,{}^t g$ という概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数を扱っていることになる．さて，Maass は 1950 年代の一連の研究（[25], [26] など）において，$M'_{m,n}(\mathbb{R})$ の部分集合 A で $GL_n(\mathbb{R})$ の右作用で閉じたものと n 次の正定値実対称行列の空間に含まれる $SL_n(\mathbb{Z})$-不変な錐 B を固定して，

$$\zeta_{m,n}(Y,A,B;s)=\sum_{\substack{v\in(A\cap M_{m,n}(\mathbb{Z}))/SL_n(\mathbb{Z})\\ {}^t vYv\in B}}\frac{1}{\det({}^t vYv)^s}=\sum_{\substack{v\in M_{m,n}(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z})\\ \mathrm{rank}(v)=n}}\frac{\phi_A(v)\phi_B({}^t vYv)}{\det({}^t vYv)^s}$$

という Koecher のゼータ関数のさらなる一般化を考察した．ここで，ϕ_A,ϕ_B は，それぞれ，A, B の特性関数である．また，Y が整数係数ならば，

$$\zeta_{m,n}(Y,A,B;s)=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{a(Y,A,B;t)}{t^s}$$
$$a(Y,A,B;t)=\sharp\left\{v\in(M_{m,n}(\mathbb{Z})\cap A)/SL_n(\mathbb{Z})\;\middle|\;{}^t vYv\in B,\ \det({}^t vYv)=t\right\}$$

とも書ける．このようなゼータ関数の解析がきちんとできるならば，$a(Y,A,B;t)$ の漸近評価などの数論的情報が得られるということが，導入の動機である．

$\zeta_{m,n}(Y,A,B;s)$ を調べるための Maass の方法は，ϕ_A,ϕ_B を Hecke の量指標に類似したよい関数の一次結合で近似することである．まず，ϕ_A については，A は右 $GL_n(\mathbb{R})$-不変で $A/GL_n(\mathbb{R})\subset M'_{m,n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R})\cong SO_m/(SO_n\times SO_{m-n})$ であるから，調和多項式の理論 ($n=1$ の場合）を一般化した球関数論を $n>1$ の場合にも展開して利用した ([25])．ϕ_B については，実質的に $SO_n\backslash SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ の保型形式にあたるものを Hecke に倣って量指標 (Größenchrakter) と呼んで導入した．この場合には，$SO_n\backslash SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ 上の関数のスペクトル分解が必要なのだが，それは $n=2$ の場合には Maass の学生であった Roelke が実行した ([33])．これらに基づいて，$n=2$ の場合には，[26] で上のプログラムが実行されている． $n>2$ の場合にこのプログラムを完遂することは，当時には無理だったと言えよう．かくして，Maass が調べたゼータ関数は

$$\sum_{\substack{v\in M_{m,n}(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z})\\ \mathrm{rank}(v)=n}}\frac{Q(v)\eta\left(\frac{{}^t vYv}{\det({}^t vYv)^{n/2}}\right)}{\det({}^t vYv)^s}\tag{3.1}$$

[*3] Koecher はこのゼータ関数の極における留数の公式も与えているが，その証明は不完全であり，正しく証明したのは荒川恒男氏である．

である．ここで, Q は不変式環 $\mathbb{C}[M_{m,n}]^{SL_n}$ を SO_Y の既約表現に分解した既約因子 ($GL_1 \times SO_Y$ の表現としての重複度は 1 である）に属す多項式，η は $SO_n \backslash SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ の保型形式である．一般の n に対するこのゼータ関数についての Maass の研究の到達点は [28] にまとめられている．

Maass は [27] で不定値二次形式 $P(v) = {}^t vYv$ に対する Siegel のゼータ関数

$$\sum_{\substack{v \in SO_Y(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z}^m \\ \mathrm{sgn}(P(v)) = \pm 1}} \frac{\mu(v)}{|P(v)|^s}$$

を $K_Y \backslash SO_Y(\mathbb{R})/SO_Y(\mathbb{Z})$ 上の保型形式 η を付けた形に拡張している．ここで K_Y は $SO_Y(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群である．この場合，得られるゼータ関数

$$\sum_{\substack{v \in SO_Y(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z}^m \\ \mathrm{sgn}(P(v)) = \pm 1}} \frac{c(\eta; v)}{|P(v)|^s}$$

の係数 $c(\eta; v)$ は η を（ちょっとだけひねってから） $SO_Y(\mathbb{R})_v/SO_Y(\mathbb{Z})_v$ 上で平均した，いわゆる，周期積分で与えられる．

3.4　概均質ベクトル空間への一般化に向けて

§1.3 で復習したように，ゼータ関数の収束を前提にすると，関数等式の証明は

(α)　ゼータ積分（ゼータ関数の積分表示）

(β)　ゼータ積分の関数等式 （Poisson の和公式から導かれる）

(γ)　$\mathbb{R}$ 上の局所関数等式

(δ)　b-関数

という 4 つの構成要素を前掲の図 1.3.1 のように組み合わせることによってなされた．したがって，§3.1, 3.2, 3.3 で見たようなゼータ関数を含むような概均質ベクトル空間の理論を作るには，まず，問題となるゼータ関数の積分表示を与えるようなゼータ積分を発見しなければならない．このとき，局所ゼータ関数の部分も一般化されている可能性がある．そして，局所関数等式や b-関数も適切に一般化されねばならない．以下の節で，このことを実行していく．

4　概均質ベクトル空間に付随するディリクレ型の L 関数

この節および次の節では，簡単のため，G は簡約で (G, ρ, V) は §2.1 の仮定 1, 仮定 2 を満たし，さらに,

仮定 4　$\mathbb{Q}$-ランクが 1，すなわち，$\mathbb{Q}$ 上の基本相対不変式が 1 つだけ

という条件を満たしているとする．G が簡約のとき，仮定 1 から §2.2 の仮定 3（正則性）が従うことに注意しておく（[15, Proposition 2.24]）．

さて，Dirichlet の L 関数は，Hurwitz のゼータ関数の一次結合で表され，関数等式も Hurwitz のゼータ関数のそれに帰着して証明されることはよく知られている．そこで，まず，概均質ベクトル空間に対して Hurwitz のゼータ関数の一次結合にあたるものを導入しよう．そのために，次のような $V(\mathbb{Q})$ 上の関数 $\phi\colon V(\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ を考える：

> $V(\mathbb{Q})$ 内の格子 L_1, L_2 $(L_1 \supset L_2)$ が存在し，
>
> $$\phi(v) = 0 \quad (v \notin L_1), \quad \phi(a+v) = \phi(a) \quad (a \in V(\mathbb{Q}),\ v \in L_2)$$
>
> が成立つ．

このような関数 ϕ を $V(\mathbb{Q})$ 上の **Schwartz-Bruhat 関数**と呼び，その全体を $\mathcal{S}(V(\mathbb{Q}))$ と書くことにする．$\phi \in \mathcal{S}(V(\mathbb{Q})$ に対し，上の条件を満たす L_1, L_2 をとり，

$$L_1 = \bigsqcup_i (a_i + L_2)$$

と剰余類分解すると，

$$\phi(v) = \begin{cases} \phi(a_i) & (v \in a_i + L_2) \\ 0 & (v \notin L_1) \end{cases}$$

である．$\phi \in \mathcal{S}(V(\mathbb{Q}))$ に対し，剰余類 $a_i + L_2$ $(1 \leq i \leq [L_1 : L_2])$ をすべて stabilize するような数論的部分群 Γ をとって，

$$\xi_i(\phi; s) = \sum_{v \in \Gamma\backslash(V(\mathbb{Q})\cap\Omega_i)} \frac{\mu(v)\phi(v)}{|P(v)|^s} = \sum_i \phi(a_i) \sum_{a_i+v \in \Gamma\backslash((a_i+L_2)\cap\Omega_i)} \frac{\mu(a_i+v)}{|P(a_i+v)|^s} \tag{4.1}$$

と定義する．この最右辺の表示から分かるように，$\xi_i(\phi; s)$ は Hurwitz 型のゼータ関数の線型結合である．

ゼータ関数の積分表示も

$$Z\,(f, \phi; s) := \int_{G/\Gamma} |\chi(g)|^s \sum_{v \in V(\mathbb{Q})\cap\Omega} \phi(v) f(\rho(g)v)\, dg = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(\phi; s)\Phi_i(f; s) \tag{4.2}$$

という形で成り立つ．また，$\phi^* \in \mathcal{S}(V^*(\mathbb{Q}))$ に対して，双対概均質ベクトル空間 (G, ρ^*, V^*) のゼータ関数 $\xi_i^*(\phi^*; s)$ も同様に定義され，積分表示

$$Z^*(f^*, \phi^*; s) := \int_{G/\Gamma} |\chi^*(g)|^s \sum_{v^* \in V^*(\mathbb{Q})\cap\Omega^*} \phi^*(v^*) f^*(\rho^*(g)v^*)\, dg = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^*(\phi; s)\Phi_i^*(f^*; s)$$

が成立つ．ここで，局所ゼータ関数 $\Phi_i(f; s)$, $\Phi_i^*(f^*; s)$ は通常のゼータ関数の場合とまったく同じものである．

さて，ゼータ積分の関数等式は，Poisson の和公式から導かれたが，$Z(f,\phi;s)$ の場合は，$\phi(v)$ 付きの Poisson 和公式

$$\sum_{v\in V(\mathbb{Q})}\phi(v)f(v)=\sum_{v^*\in V^*(\mathbb{Q})}\widehat{\phi}(v^*)\widehat{f}(v^*),\quad \widehat{\phi}(v^*):=v(L_2^*)\begin{cases}\sum_i \phi(a_i)e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle a_i,v^*\rangle} & (v^*\in L_2^*)\\ 0 & (v^*\notin L_2^*)\end{cases}$$

を用いればよい．これは，通常の Poisson の和公式から容易に導かれる．また，$V(\mathbb{Q})$ 上の Schwartz-Bruhat 関数と呼んだものは $V(\mathbb{A}_f)$（$\mathbb{A}_f$ はアデール環の有限部分）上の Schwartz-Bruhat 関数を $V(\mathbb{Q})$ に制限したものに他ならず，これは，アデール環上の Poisson 和公式の特殊な場合でもある．そして，

> $f\in\mathcal{S}(V^*(\mathbb{R}))$ に対する杉山 [57, 命題 4.1] と同じ仮定の下で，ゼータ積分の関数等式
>
> $$Z(f,\phi;s)=Z^*(\widehat{f},\widehat{\phi};\delta-s),\quad \delta=\frac{\dim V}{\deg P}$$
>
> が成り立つ．（[57, 命題 4.1] の関数等式の右辺の因子 $v(L^*)$ は $\widehat{\phi}$ の中に吸収されていることに注意しておく．）

以上から，ϕ 付きのゼータ関数の解析接続や関数等式

$$\xi_j^*(\widehat{\phi};\delta-s)=\sum_{i=1}^{\nu}\gamma_{ij}(s)\xi_i(\phi;s)$$

が，図 1.3.1 のレシピに従って（[57, 定理 4.2] の関数等式の証明と全く同じに），証明される．この証明の中で，b-関数が用いられるが，それは，局所ゼータ関数を部分積分によって変形する際に登場するので，局所ゼータ関数が通常の場合と同じであるから，b-関数も同じものである．

さて，明らかなことだが，ϕ が格子 L の特性関数のときの $\xi_i(\phi;s)$, $Z(f,\phi;s)$ が，以前に考察された $\xi_i(L;s)$, $Z(f,L;s)$ である．法 N の Dirichlet 指標 χ に対する Dirichlet 型の L 関数を得るには，$P(v)$ を格子 L 上で（必要ならば適当に定数倍し）整数値を取るようにし，

$$\phi_\chi(v)=\begin{cases}\chi(P(v)) & (v\in L)\\ 0 & (v\notin L)\end{cases}$$

ととればよい．このとき，

$$\widehat{\phi_\chi}(v^*)=\frac{v(L^*)}{N^{\dim V}}\sum_{v\in L/NL}\chi(P(v))\exp\left(\tfrac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\langle v,v^*\rangle\right)\quad (P(v)\ \text{の Gauss 和})$$

となる．よって，この右辺を $\mathcal{G}_L(P,\chi;v^*)$ と書くならば，

$$\xi_i(\phi_\chi;s)=\sum_{v\in\Gamma\backslash(L\cap\Omega_i)}\frac{\chi(P(v))\mu(v)}{|P(v)|^s},$$

$$\xi_j^*(\widehat{\phi_\chi};s)=\sum_{v^*\in\Gamma\backslash(L^*\cap\Omega_j^*)}\frac{\mathcal{G}_L(P,\chi;v^*)\mu(v^*)}{|P^*(v^*)|^s}$$

となる．

§3.1 の Dirichlet, Stark の L 関数の場合には，関数等式の相棒となる ξ_j^* は $\overline{\chi}(P^*(v^*))$ の形の係数を持つ L 関数として表されていた．これは，$P(v)$ の Gauss 和 $\mathcal{G}_L(P,\chi;v^*)$ が，定数倍を除いて Dirichlet 指標と $P^*(v^*)$ の合成として書かれるということである．$P(v)$ が二次形式の場合，それが，§3.1 の末尾に記した Stark による関係式である．一般の簡約概均質ベクトル空間の場合には，[6], [5] による次の概均質ベクトル空間のガウス和についての結果から従う．

定理 4.1　χ は原始的で，その導手 N の素因数は十分大きいとする．このとき，

$$\mathcal{G}_L(P,\chi;v^*) = c\cdot a(\chi)\chi(b)\kappa(v^*)\chi^{-1}(P^*(v^*))$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned} b,c &= \text{明示的に書ける定数}, \\ a(\chi) &= \chi \text{ の Gauss 和の適当な冪積}, \\ \kappa(v^*) &= \pm 1 : \chi \text{ によらない} \end{aligned}$$

となっている．

この定理は，N が素数の場合は [6]，N が素数冪の場合には [5] で示された．上の定理は，両者を組み合わせた形で書いている．定理で N の素因数がどの程度大きければよいのかということは，扱っている概均質ベクトル空間によりけりである．a,b,c,κ の値は詳しくわかっているが，紙幅の関係で原論文を参照していただきたい．例えば，$\kappa(v^*)$ の本質的な部分は， Legendre 記号を用いて

$$\prod_{\substack{p:\text{素数}\\ p|N}} \left(\frac{P^*(v^*)^{2\dim V/\deg P^*}}{p}\right)$$

と表せる．この結果の L 関数への応用は，筆者による [5] への appendix にある程度詳しく書いてある．

5　概均質ベクトル空間に付随する表現付きゼータ関数

5.1　表現付きゼータ関数への拡張の一般的枠組み

まず，§3.2. §3.3 で例示したようなゼータ関数を合わせて，表現付きということにしよう．そのようなゼータ関数の積分表示は，通常のゼータ積分に対し，

$$Z(\eta,L,f;s) = \int_{G^+/\Gamma} |\chi(g)|^s\,\eta(g) \sum_{v\in L\cap\Omega} f(\rho(g)v)\,dg, \quad \eta : G^+/\Gamma \to \mathbb{C}$$

と，Γ-右不変な付加的な関数 $\eta(g)$ を挿入して得られる．ここで，$\eta(g)$ は G^+ の表現の行列成分のようなものであるが，とりあえず，このような積分が，Dirichlet 級数と局所ゼータ関数の積の一次結合として表せ，適当なゼータ関数の積分表示として機能する条件を見出すために，η に特別な条件を課さず，通常の unfolding の変形を形式的に施してみよう．

$x, v \in \Omega_i$ に対し， $\rho(g_{x,v})v = x$ となる $g_{x,v} \in G^+$ をとる．積分が絶対収束することを仮定する．例えば，$\Re(s)$ は十分に大きく，$\eta(g)$ は G^+ 上有界ならば十分である．このとき，

$$
\begin{aligned}
Z(\eta, L, f; s) &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{v \in \Gamma \backslash (L \cap \Omega_i)} \int_{G^+/\Gamma_v} |\chi(g)|^s \eta(g) f(\rho(g)v)\, dg \\
&= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{v \in \Gamma \backslash (L \cap \Omega_i)} \frac{1}{|P(x)|^s} \int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta} f(x)\, dx \int_{G_v^+/\Gamma_v} \eta(g_{x,v} h)\, d_v h
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

と変形できる．

$$
\mathcal{P}_{\eta,v}(g) := \int_{G_v^+/\Gamma_v} \eta(gh)\, d_v h, \quad \mathcal{P}_{\eta,v}(x) := \int_{G_v^+/\Gamma_v} \eta(g_{x,v} h)\, d_v h
$$

とおく．ここで，v, x を固定したとき，$\mathcal{P}_{\eta,v}(g_{x,v})$ は $g_{x,v}$ の取り方によらず定まるから， $\mathcal{P}_{\eta,v}(x)$ と書け，$\Omega_i \cong G^+/G_v^+$ 上の関数を定める．

積分の収束がよいならば，次のような η の性質は $\mathcal{P}_{\eta,v}(x)$ に遺伝するであろう：

($\sharp$1) η が従う G^+ の極大コンパクト群の表現,

($\sharp$2) η が満たす G^+-不変微分方程式系.

そこで，$Z(\eta, L, f; s)$ が大域ゼータと局所ゼータの積の<u>有限</u>和を与えるためには，次が成り立っていればよい．

仮定 5 ($\sharp$1), ($\sharp$2) を満たす $\Omega_i \cong G^+/G_v^+$ 上の関数（広義の**球関数**）の空間は有限次元.

このとき，この関数空間の基底を $\Psi_1^{(i)}(x), \Psi_2^{(i)}(x), \ldots, \Psi_{d_i}^{(i)}(x)$ とすると，

$$
\mathcal{P}_{\eta,v}(x) = \sum_{j=1}^{d_i} c_j^{(i)}(\eta; v) \Psi_j^{(i)}(x) \quad (c_j^{(i)}(\eta, v) \in \mathbb{C},\ v \ \text{について}\ \Gamma\text{- 不変}).
$$

と表せ，

$$
Z(\eta, L, f; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{d_i} \xi_j^{(i)}(\eta, L; s) \Phi_j^{(i)}(\eta, f; s),
$$

$$
\xi_j^{(i)}(\eta, L; s) = \sum_{v \in \Gamma \backslash (L \cap \Omega_i)} \frac{c_j^{(i)}(\eta, v)}{|P(v)|^s},
$$

$$
\Phi_j^{(i)}(\eta, f; s) = \int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta} \Psi_j^{(i)}(x) f(x)\, dx
$$

となる．ゼータ積分 $Z(\eta, L, f; s)$ の関数等式は，Poisson の和公式を用いて，通常の場合と全く同じに（[57, 命題 4.1] の証明とまったく同じに）示すことができる．したがって，課題となるのは，

課題 5.1 球関数付き局所ゼータ関数 $\displaystyle\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta} \Psi_j^{(i)}(x) f(x)\, dx$ の局所関数等式を示すこと，および，この場合に [57, 定理 4.2] の証明と並行に進んだときに現れる b-関数の類似物を見出しておくこと

である．

仮定 5（球関数空間の有限次元性），課題 5.1(球関数付き局所関数等式の成立) という 2 つの要件をクリアできる典型的な設定として，次の 2 つがある．

(1) Compact Case: $G = GL_1 \times K \times H$,

$K(\mathbb{R}) =$ コンパクト群， $K \times H$ は相対不変式を不変にする，

$\eta(k,h) = \langle \alpha(k)u_1, u_2 \rangle$ $(u_1, u_2 \in \mathcal{H}_\alpha)$: α の行列要素

ここで，α は $K(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現， $\mathcal{H}_\alpha$ は α の表現空間.

例 $(GL_1 \times SO_m \times SL_n, \rho, M_{m,n})$, $\rho(t,k,h)x = tkx\,{}^t h$.

(2) Symmetric Case: $\Omega_i \cong G^+/G^+_{v_i} =$ (必ずしも Riemannian とは限らない）対称空間,

すなわち，G の位数 2 の自己同型 σ があって，

G_v と $G^\sigma := \{g \in G \mid \sigma(g) = G\}$ の単位元連結成分が一致,

$\eta =$ 保型形式 (本稿ではアデール的扱いをしていないので，例えば，[13] の意味の).

例 $(GL(m), \rho, Sym(m))$, $(GL(2m), \rho, Alt(2m))$, $\rho(g)x = gx\,{}^t g$.

以下，それぞれのケースについて，概略を説明する．詳細は，Compact Case については [42] を，Symmetric Case については [41] を見てほしい.

5.2 多項式係数ゼータ関数への拡張： Compact Case

上で Compact Case と呼んだのは，$G = GL_1 \times K \times H$ で $K(\mathbb{R})$ がコンパクト群, $K \times H$ は相対不変式を不変にするという条件を満たす場合であった．そして，ゼータ積分に挿入される関数 η としては，$K(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現 α の行列成分，すなわち，

$$\eta(t,k,h) = \langle \pi(k)u_1, u_2 \rangle, \quad (u_1, u_2 \in \mathcal{H}_\alpha := \alpha \text{ の表現空間})$$

をとったのであった．以下では，さらに，

$$\underline{v \in \Omega \text{ に対し } (K \times H)_v \text{ は連結}}$$

を仮定する．また，$K(\mathbb{R})$ がコンパクトとなるとき，K は簡約代数群であり，$K(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現と K の既約有理表現とは 1 対 1 に対応していることに注意しよう．

記号

- 以下，以下，$GL_1 = T$ とし，$T^* = \mathbb{R}_+^\times$, $K^+ = K(\mathbb{R})$, $H^+ = H(\mathbb{R})$ の単位元連結成分とおく．
- $x_i \in \Omega_i$ を $|P(x_i)| = 1$ ととり，
$$K_i := \left\{ k \in K^+ \;\middle|\; \exists h \in H^+ \;\; \text{s.t.}\; \rho(k,h)x_i = x_i \right\}$$
とおく．x_i は $K_1 = \cdots = K_\nu$ $(=: K_0)$ となるように選べる．
- $x \in \Omega_i$ に対し，$\rho(t_x, k_x, h_x)x_i = x$ となる $(t_x, k_x, h_x) \in T^+ \times K^+ \times H^+$ が存在する．
- $\widehat{K}$ で K の既約有理表現の同値類を表す．これは，K^+ の既約ユニタリ表現の同値類とみなすこともできる．
- 相対不変式に対応する $G = T \times K \times H$ の $\mathbb{Q}$ 上定義された指標は，仮定より，$K \times H$ 上で自明となるから，(仮定 2 を考慮すると) $X(G)_\mathbb{Q} = X(T)$ であり，$X_\rho(G)_\mathbb{Q}$ に対応する $X(T)$ の部分群を $X_\rho(T)$ と（簡単のため $\mathbb{Q}$ を略して）書く．

H-不変式環 $\mathbb{C}[\Omega]^H = (\mathbb{C}[V][1/P])^H$ を $T \times K$-加群として分解する：

$$\mathbb{C}[\Omega]^H = \bigoplus_{\pi:\text{既約}} \mathbb{C}[\Omega]^H_\pi = \bigoplus_{\chi \in X(T)} \bigoplus_{\alpha \in \widehat{K}} \mathbb{C}[\Omega]^H_{\chi\otimes\alpha} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} P(x)^m \left(\bigoplus_{\alpha \in \widehat{K}} \bigoplus_{\psi \in X(T)/X_\rho(T)} \mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha} \right).$$

この最右辺で， $X(T)/X_\rho(T)$ の代表元 ψ は $\mathbb{C}[\Omega]^H_{\psi\otimes\alpha}$ が $\mathbb{C}[V]$ に含まれ，その元が P を共通因数に持たないようにとることにする．その意味で，$\mathbb{C}[\Omega]^H_{\psi\otimes\alpha}$ でなく $\mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha}$ と書いている．このとき，$R(K^+/K_0)_\alpha$ で K^+ の既約ユニタリ表現 α の行列成分で K_0-不変なものが張る空間を表し，$R(K^+/K_0) = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{K}} R(K^+/K_0)_\alpha$ とすると，$Q(x) \mapsto Q(kx_i)$ で与えられる写像

(5.2)
$$\bigoplus_{\alpha \in \widehat{K}} \bigoplus_{\psi \in X(T)/X_\rho(T)} \mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha} \xrightarrow{\cong} R(K^+/K_0) = \bigoplus_{\alpha} \underbrace{\bigoplus_{\psi} R(K^+/K_0)^{(\psi)}_\alpha}_{\substack{\shortparallel \\ R(K^+/K_0)_\alpha}}$$

は，K^+ の作用と整合的な同型写像である。ここで、$R(K^+/K_0)^{(\psi)}_\alpha$ は、この写像で $\mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha}$ に対応する $R(K^+/K_0)$ の部分空間である。このとき、逆写像は

$$\varphi(kK_0) \longmapsto \varphi(k_xK_0)\, |P|^\psi\,(x) \quad (x \in \Omega_i, Q \in \mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha}, \varphi \in R(K^+/K_0)^{(\psi)}_\alpha)$$

で与えられる．また，関数空間 $R(K^+/K_0)_\alpha$ は，K^+ の既約ユニタリ表現としての α の表現空間 $\mathcal{H}_\alpha$ から

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\alpha^{K_0} = \mathcal{H}_\alpha \otimes \left(\bigoplus_{\psi} \mathcal{H}_\alpha^{(\psi)} \right) & \cong \bigoplus_{\psi} R(K^+/K_0)^{(\psi)}_\alpha = & R(K^+/K_0)_\alpha \\ u \otimes w & \longmapsto & \langle \alpha(k)^{-1}u, w \rangle \end{array}$$

と構成することができる．

以上を準備として，挿入する $\eta(t,k,h)$ として K^+ の既約ユニタリ表現 α の行列成分をとったゼータ積分を計算してみよう．このとき，§5.1 の (5.1) は，

$$\begin{aligned}
&\int_{T^+\times K^+\times H/\Gamma_H} |\chi(t)|^s \overbrace{\langle \alpha(k)u_1, u_2\rangle}^{\substack{\eta(t,k,h)\\ \shortparallel}} \sum_{v\in L\cap\Omega} f(\rho(tkh)v)\, d^\times t\, dk\, dh \\
&\quad = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{v\in\Gamma_H\backslash L\cap\Omega_i} \frac{1}{|P(v)|^s} \int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta} f(x)\, dx \underbrace{\int_{(K^+\times H)_v/\Gamma_{H,v}} \langle \alpha(k_x k_v^{-1} k)u_1, u_2\rangle d_v(k,h)}_{\substack{\shortparallel \\ \mathcal{P}_{\eta,v}(x)}}
\end{aligned}$$

となる．$\mathcal{P}_{\eta,v}(x)$ を与える積分の被積分関数は h と無関係であるから，$\mu_H(v) = \int_{H_v/\Gamma_{H,v}} d\mu_{H,v}(h)$ として，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{P}_{\eta,v}(x)}{\mu_H(v)} &= \int_{K_0} \langle \alpha(k_x k k_v^{-1})u_1, u_2\rangle dk = \left\langle \int_{K_0} \alpha(kk_v^{-1})u_1\, dk, \int_{K_0} \alpha(kk_x^{-1})u_2\, dk \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m(\alpha)} \frac{Q_{\alpha,j}(u_1;v)}{|P|^{\psi_j}(v)} \cdot \frac{Q_{\alpha,j}(u_2;x)}{|P|^{\psi_j}(x)} \qquad \left(m(\alpha) = \dim \mathcal{H}_\alpha^{K_0}\right).
\end{aligned}$$

を得る．ここで，分解 $\mathcal{H}_\alpha^{K_0} = \bigoplus_\psi \mathcal{H}_\alpha^{(\psi)}$ と整合的な $\mathcal{H}_\alpha^{K_0}$ の正規直交基底 $w_{\alpha,1},\dots,w_{\alpha,m(\alpha)}$ をとり，$w_{\alpha,j}\in\mathcal{H}_\alpha^{(\psi)}$ となる ψ を ψ_j と書いた．また，$|P|^\psi(x)$ は $|P|^\psi(tx) = \psi(t)\,|P|^\psi(x)$ $(t\in T^+)$ となる $|P(x)|$ の有理数冪である．そして，$Q_{\alpha,j}(u;x)$ は $u\otimes w_{\alpha,j}$ に対応する $\mathbb{C}[\Omega]^H_{\psi_j\otimes\alpha}$ の元を表している．これを，上のゼータ積分の計算の右辺に代入すれば，

$$\text{ゼータ積分} = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{m(\alpha)} \left(\sum_{v\in\Gamma_H\backslash L\cap\Omega_i} \frac{\mu_H(v) Q_{\alpha,j}(u_1;v)}{|P(v)|^{s+\psi_j}} \right) \left(\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\psi_j-\delta} Q_{\alpha,j}(u_2;x) f(x)\, dx \right)$$

となる．この右辺の第 1 因子が多項式係数ゼータ関数で，第 2 因子が局所ゼータ関数である．

したがって，問題は，局所ゼータ関数 $\displaystyle\int_{\Omega_j} |P(x)|^{s-\psi-\delta} Q(x) f(x)\, dx$ $(Q\in\mathbb{C}[V]^H_{\psi\otimes\alpha})$ に対して，課題 5.1 を解く，すなわち，その関数等式を示し，適切な b-関数の拡張を見出すこととなる．Q に対し，$Q(\partial_y)$ を V^* 上の定数係数線型偏微分作用素で $Q(\partial_y)e^{\langle x,y\rangle} = Q(x)e^{\langle x,y\rangle}$ となるものを取る．このとき，もともとの局所関数等式を用いることで，

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_j} |P(x)|^{s-\psi-\delta} Q(x) f(x)\, dx &= (2\pi i)^{-d} \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s-\psi) \int_{\Omega_i^*} |P^*(y)|^{(\delta+\psi-s)-\delta^*} Q(\partial_y) \widehat{f}(y)\, dy \\
&= (-2\pi i)^{-d} \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s-\psi) \int_{\Omega_i^*} Q(\partial_y) \left(|P^*(y)|^{(\delta+\psi-s)-\delta^*} \right) \widehat{f}(y)\, dy
\end{aligned}$$

とい等式が得られる．ここで，

$$b^*_{\psi\otimes\alpha}(s^*) : \mathbb{C}[\Omega]_{\psi\otimes\alpha} \longrightarrow \mathbb{C}[\Omega^*]_{\psi\otimes\alpha}, \quad Q \longmapsto \frac{Q(\partial_y) P^*(y)^{s^*-\delta^*}}{P^*(y)^{s^*-\delta^*}}$$

という写像を考えよう．これは，$T \times K$ の作用と整合的な線形写像（絡作用素）であるから，正規直交基底 $w_{\alpha,i}$ を取ったときには，$b^*_{\psi\otimes\alpha}(s^*)$ は，$\dim \mathcal{H}^{(\psi)}_\alpha$ $(= \mathbb{C}[\Omega]_{\psi\otimes\alpha}, \mathbb{C}[\Omega^*]_{\psi\otimes\alpha}$ における $\psi\otimes\alpha$ の重複度）をサイズとする $\mathbb{C}[s^*]$-係数行列とみなすことができる．α が自明な表現 $\mathbf{1}$ のときには，$\mathbb{C}[\Omega]_{\psi\otimes 1}$ はある相対不変式 P^k で張られるから，$\dim \mathcal{H}^{(\psi)}_{\mathbf{1}} = 1$ であり，この場合が通常の b-関数である．重複度が > 1 のときには，b-行列とでも呼ぶべきものになる．この b-行列を用いると，局所関数等式が

$$\int_{\Omega_j} |P(x)|^{s-\psi-\delta}\, Q(x) f(x)\, dx$$
$$= (-2\pi i)^{-d} \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s-\psi) \int_{\Omega_i^*} |P^*(y)|^{(\delta+\psi-s)-\delta^*} \left(b^*_{\psi\otimes\alpha}(\delta+\psi-s)Q\right)(y)\widehat{f}(y)\, dy$$

のように得られる．$b^*_{\psi\otimes\alpha}(\delta+\psi-s)$ の成分は s の多項式であり，しばしば，ガンマ因子 $\gamma_{ij}(s-\psi)$ の変数をシフトすることで取り込まれる．§3.2 で見た調和多項式付き Epstein ゼータ関数の関数等式のガンマ因子における $\frac{d}{2}$ のずれは，このようにして生じている．$b^*_{\psi\otimes\alpha}(s^*)$ の明示的計算は，重複度が 1 より大きいときには，なかなか困難である．

§5.1 で例として掲げた

$$G = GL_1 \times SO_m \times SL_n, \quad V = M_{m,n}, \rho(t,k,h)v = tkv\,{}^t h, \quad K = SO_m, \quad H = SL_n$$

が重複度 1 となる典型的な例であり，[40] で詳しく調べてある．この場合のゼータ関数は，§3.3 で紹介した正定値実対称行列に付随する Maass のゼータ関数で，SL_n の保型形式を定数関数にとって得られるものである．

5.3 保型形式付きゼータ関数への拡張： Symmetric Case

今度は，

Symmetric Case:　$\Omega_i \cong G^+/G^+_{v_i} =$ (必ずしも Riemannian とは限らない）対称空間,

すなわち，G は reductive, かつ,

すなわち，G の位数 2 の自己同型 σ があって，

G_v の連結成分と $G^\sigma := \{g \in G \mid \sigma(g) = G\}$ が一致

を考えよう．そして，$\eta : G^+/\Gamma \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ を タイプ (ω,π) の保型形式，すなわち，次の条件を満たしているとする：

- π は G^+ の極大コンパクト部分群 K^+ の既約ユニタリ表現，$\mathcal{H}_\pi$ はその表現空間で

$$\eta(kg) = \pi(k)\eta(g) \quad (k \in K^+)$$

を満たす.

- η は G^+ 上の両側不変微分作用素の環 $\mathcal{Z}(G^+)$ の緩増加な同時固有関数で，ω はその固有値で定まる環準同型

$$\omega : \mathcal{Z}(G^+) \to \mathbb{C}, \quad D\eta = \omega(D)\eta \quad (D \in \mathcal{Z}(G^+))$$

 である．

このとき，Oshima 等による Poisson 変換の理論 ([31], [32]) によって，広義の球関数の空間

$$\left\{ \Psi : \Omega_i \longrightarrow \mathcal{H}_\pi \;\middle|\; \overline{D}(\Psi) = \omega(D)\Psi \ (D \in \mathcal{Z}(G^+)),\ \Psi(kx) = \pi(k)\Psi(x) \right\},$$

（$\overline{D}$ は D が引き起こす Ω_i 上の G^+-不変微分作用素）

の基底 $\Psi_1^{(i)}(x), \ldots, \Psi_{d_i}^{(i)}(x)$ が構成でき，先に述べたゼータ関数の積分表示が得られる．この基底に関して $\mathcal{P}_{\eta,v}(x)$ を

$$\mathcal{P}_{\eta,v}(x) := \int_{G_v^+/\Gamma_v} \eta(g_{x,v}h)\, d_v h. = \sum_{j=1}^{d_i} c_j^{(i)}(\eta; v)\Psi_j^{(i)}(x).$$

と展開するならば，§5.1 のレシピに従って，

$$Z(\eta, L, f; s) = \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{d_i}\left(\sum_{v\in\Gamma\backslash(L\cap\Omega_i)} \frac{c_j^{(i)}(\eta, v)}{|P(v)|^s}\right)\cdot\left(\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta}\, \Psi_j^{(i)}(x) f(x)\, dx\right)$$

の形のゼータ関数, 局所ゼータ関数が得られる．この場合も, 局所ゼータ関数 $\displaystyle\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta}\, \Psi_j^{(i)}(x) f(x)\, dx$ に対して，課題 5.1 を解かねばならない．そのポイントは,

> B を G の Borel 部分群としたとき，G の表現 ρ を B に制限して得られる $(B, \rho|_B, V)$ も，概均質ベクトル空間となる

ということである．

一般的な設定での解説は準備が大変すぎるので，例で説明しよう．

● **Symmetric Case の例** (GL_n, ρ, Sym_n)

$$G = GL_n, \quad V = Sym_n, \quad \rho(g)x = gx\,{}^t g$$

で与えられる概均質ベクトル空間を考える．基本相対不変式は $P(v) = \det v$ で与えられ，$\Omega = \{v \in V \mid P(v) \notin 0\}$ である．この空間は，仮定 1, 3, 4 を満足する．$n \geq 3$ としよう．このとき，仮定 2 も満たされる．($n = 2$ のときは，仮定 2 が成立しない点 $v \in \Omega \cap V(\mathbb{Q})$ が存在し，事情が複雑になる．) $v \in \Omega$ に対し,

$$G_v = O(v) := \left\{ g \in G \;\middle|\; {}^t g v g = v \right\} \ : \ (\text{対称行列 } v \text{ の直交群})$$

であり，

$$\sigma_v : G \longrightarrow G, \quad \sigma_v(g) = v^{-1}\,{}^t g^{-1} v$$

とおくと，σ_v は G の位数 2 の自己同型で

$$G_v = O(v) = \{g \in G \mid \sigma_v(g) = g\}$$

となるから，Symmetric Case の一例である．

$$\Omega_i = \{v \in V(\mathbb{R}) \mid v \text{ の正固有値は } i \text{ 個，負固有値は } n-i \text{ 個 }\}$$

とおくと，

$$\Omega(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^{n} \Omega_i$$

が連結成分への分解である．

保型形式 η は $K^+ = SO_n(\mathbb{R})$ の自明な 1 次元表現に従い，$\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$-不変だとしよう．したがって，$\eta$ は $SO_n(\mathbb{R})\backslash GL_n(\mathbb{R})^+/SL_n(\mathbb{Z})$ 上の $\mathbb{C}$-値関数である．

B を GL_n に含まれるすべての下三角行列のなす群とする．B は GL_n の Berel 部分群である．このとき，ρ の B への制限は概均質ベクトル空間を与え，基本相対不変式と開軌道は

$$\text{基本相対不変式} = \Delta_1(x), \Delta_2(x), \dots, \Delta_n(x), \quad \Delta_i(x) = i \text{ 次首座小行列式},$$

$$\Omega_B = \rho(B)\text{-開軌道} = \{x \in V \mid \Delta_1(x) \cdots \Delta_n(x) \neq 0\},$$

で与えられる．$\Omega_B(\mathbb{R})$ の連結成分への分解は

$$\Omega_B(\mathbb{R}) = \bigcup_{\epsilon \in \{\pm 1\}^n} \Omega_{B,\epsilon}, \quad \Omega_{B,\epsilon} := \{x \in V(\mathbb{R}) \mid \operatorname{sgn}(\Delta_i(x)) = \epsilon_i \ (1 \leq i \leq n)\}$$

となる．ここで，

$$\mathcal{E}_i := \{\epsilon \in \{\pm\}^n \mid \sharp\{j \mid \epsilon_j = +1\} = i\}$$

とおくと，

$$\bigcup_{\epsilon \in \mathcal{E}_i} \Omega_{B,\epsilon} \overset{\text{open dense}}{\subset} \Omega_i$$

となっている．

さて，このとき，Poisson 変換の理論によって，広義の球関数の空間の基底 $\Psi_1^{(i)}(x), \dots, \Psi_{d_i}^{(i)}(x)$ が $\Delta_1(x), \Delta_2(x), \dots, \Delta_n(x)$ から構成できるのである．実際，$\epsilon \in \mathcal{E}_i$ に対し，

$$\Psi_\epsilon(x) = \int_{SO_n(\mathbb{R})} \left|\Delta(kx\,{}^t k)\right|_\epsilon^\lambda dk, \quad |\Delta(x)|_\epsilon^\lambda := \begin{cases} \prod_{j=1}^n |\Delta_j(x)|^{\lambda_j} & (x \in \Omega_{B,\epsilon}) \\ 0 & (x \notin \Omega_{B,\epsilon}) \end{cases}$$

とおくならば，generic な $\lambda \in \mathbb{C}^n$ に対しては，これらが Ω_i 上の広義の球関数空間の基底を与える ($\Psi_j^{(i)}$ の上付きの (i) は ϵ で定まるから，略す)．ここで，パラメータ λ は η の固有値を与える $\omega : \mathcal{Z}(G^+) \longrightarrow \mathbb{C}$ で定まっている．以下，これが成り立つ generic な λ を考えることとする．

ゼータ積分を考えるために，η は G^+ 上で有界だとしよう．（例えば，η が Eisenstein 級数だとすると，非有界であり，ゼータ積分は一般には収束しない．）このとき，

$$Z(\eta, L, f; s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}_i} \left(\sum_{v \in \Gamma \backslash (L \cap \Omega_i)} \frac{c_\epsilon(\eta, v)}{|P(v)|^s} \right) \cdot \left(\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta}\, \Psi_\epsilon(x) f(x)\, dx \right)$$

の形の積分表示が得られる．この場合，課題 5.1 は $\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\delta}\, \Psi_\epsilon(x) f(x)\, dx$ の満たす球関数付き局所関数等式の証明と適切な b-関数の一般化を考えることである．

球関数付き局所ゼータ関数は

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} |P(x)|^{s-\frac{n+1}{2}}\, \Psi_\epsilon^{(i)}(x) f(x)\, dx &= \int_{\Omega_i} |\det(x)|^{s-\frac{n+1}{2}} \left(\int_{SO_n(\mathbb{R})} \left|\Delta(kx\,{}^tk)\right|_\epsilon^\lambda dk \right) f(x)\, dx \\
&= \int_{\Omega_i} |\det(x)|^{s-\frac{n+1}{2}}\, |\Delta(x)|_\epsilon^\lambda \left(\int_{SO_n(\mathbb{R})} f({}^tkxk) dk \right) dx \\
&= \underbrace{\int_{\Omega_{B,\epsilon}} |\det(x)|^{s+\lambda_n-\frac{n+1}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} |\Delta_j(x)|^{\lambda_j} \left(\int_{SO_n(\mathbb{R})} f({}^tkxk) dk \right) dx}_{(B,\,\rho|_B,\,V)\ \text{の局所ゼータ関数}}
\end{aligned}$$

と変形することができる．ここで，最右辺は $(B, \rho|_B, V)$ に対する §2.2.2 の意味での局所ゼータ関数に他ならないから，その関数等式は定理 2.2.3 に帰着する．b-関数も同じく，$(B, \rho|_B, V)$ に対するそれに一致する．この関数等式の明示形は [38, Theorem 3.2] にある．

注意 (1) 対称空間に付随する概均質ベクトル空間に対する $\mathbb{R}$ 上の局所関数等式は，Bopp-Rubenthaler [3] でより一般に主系列表現の行列成分に対し扱われている．

(2) 議論のカギとなった球関数空間の有限次元性は，対称空間より一般に球等質空間に対して成立する．この場合の局所関数等式の理論（$\mathbb{Q}_p$ 上も含み，表現も一般化されている）は W.-W. Li ([23], [24]) によって展開されている．

(3) 球等質空間に対する大域ゼータの理論はできていないようだが，可能に思われる．

(4) §3.3 で紹介した Maass の保型形式付きゼータ関数 (3.1) は，上で述べた設定そのままではカバーされないが，少し一般化することで，取り扱える．$Q \equiv 1$ のケースは [41] で，$\eta \equiv 1$ のケースは [40] で調べられている．一方，不定値二次形式に対する [27] で扱われた Maass のゼータ関数は，上の Symmetric Case の設定に含まれている．

(5) 鈴木美裕氏の報告 [58] では，2 元 3 次形式の空間への GL_2 の作用で得られる概均質ベクトル空間に Maass 形式を付けた場合に関する Hough の研究，$GL_2 \times GL_2 \times GL_2$ が $M_2 \oplus M_2 \oplus M_2$ に作用して得られる概均質ベクトル空間に保型形式を付けた場合に関する鈴木、若槻両氏の研究が解説され，その数論的応用が与えられている．これらの例では，ゼータ積分そのものを考察の対象としており，関数等式を満たす Dirichlet 級数を取り出すという本節のテーマとはいささか方向性が異なっている．とくに，前者の Hough の研究は，この節で扱った Symmetric Case の枠にははまらず，2 元 3 次形式

の空間の場合に，関数等式を満たす保型形式付きゼータ関数を Dirichlet 級数としてうまく取り出せるかについては，疑問がある．後者の空間を本節の立場で議論したものには，[43] がある．

6 非概均質的関数等式

以上のような局所，大域ゼータ関数の関数等式の理論で，概均質性がうまく効いている（言い換えると，等質空間上の相対不変超関数は対応する指標を定めれば定数倍を除いて一意的だという事実をうまく利用できるような設定である）ことは杉山 [57] でも指摘されているところである．では,

> 多項式 $P(x)$ で関数等式を満たすような（局所）ゼータ関数を与えるものは，概均質ベクトル空間の相対不変式に限るのだろうか？

という問いを立ててみよう．すると，その答えは,

> NO!

である．実際，非概均質的な多項式系 $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ で関数等式を満たす局所ゼータ関数を与えるものが，次のように少なからず存在する．

- ホマロイダル多項式 $P_1(x)$ とその極化 $P_2(x, y)$ ([20])
- 既に存在する局所関数等式から新しい（一般には非概均質的な）局所関数等式を作り出す構成法がある
  (a) 二次写像による関数等式の引き戻し ([44], [19]),
  (b) 2 つの関数等式の貼り合わせ ([46])

だが，これらの結果は，このような例では局所関数等式を証明できると言っているだけで，まだ非概均質的な場合に，関数等式が成立する理由を説明するような理論は今のところ持ち合わせていない．だが，概均質ベクトル空間の枠組みを超えても，よい理論がありそうだという期待もあるので，小木曽岳義氏との共同研究 ([19], [20]) の結果から、2 つの例を紹介しておく．

6.1 ホマロイダル多項式とその極化

定義 6.1 1. n 変数の斉次有理関数 $P(x) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が**ホマロイダル**であるとは,

$$\phi_P : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \phi_P(x) := \frac{1}{P(x)} \mathrm{grad} P(x)$$

が $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への双有理写像を与えるということである．

2. ホマロイダル有理関数 $P(x)$ に対して,

$$P^*(\phi_P(x)) = 1/P(x)$$

を満たす有理関数 $P^*(x^*)$ を P の**乗法的ルジャンドル変換** という．このとき，$P^*(x^*)$ もホマロイダルで，その乗法的ルジャンドル変換はもとの $P(x)$ に一致する．

ホマロイダルとは聞きなれない用語だが，Oxford English Dictionary には，

homaloidal, adj.　Of or relating to straight lines and planes; satisfying the axioms of Euclidean geometry, flat.

とある．有理写像 ϕ_P の像が $\mathbb{C}^n$ の開集合で flat だという感じなのであろうか．

注意 6.2　概均質ベクトル空間が正則であるとは，ホマロイダルな相対不変式を持つことであった（定義 1.2.1）．

さて，概均質ベクトル空間の相対不変式でないホマロイダルな多項式を探すのは意外と難しい．（だが，小木曽岳義，中島秀斗両氏によって，色々見つかっている．）

とくに，ホマロイダル多項式であって，その乗法的ルジャンドル変換もまた多項式となるものはきわめて珍しく，Etingof-Kazhdan-Polishchuk [8] は，そのようなものは正則概均質ベクトル空間から得られるものに限るか？と問題を立て，多項式の次数が 3 以下ならば，正しいことを示している．しかし，次数 4 では反例があることが明らかになっている ([19], §6.2 を見よ．現時点では，これが唯一の反例である).

定義 6.3　有理関数 $P(x) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の**極化**とは

$$\tilde{P}(x,y) = y_1 \tfrac{\partial P(x)}{\partial x_1} + \cdots + y_n \tfrac{\partial P(x)}{\partial x_n}$$

のことである．$P(x)$ がホマロイダルならば，$\tilde{P}(x,y)$ もホマロイダルである．

さて，$i, j = 0, 1$ に対し，

$$\begin{aligned}\Omega_{ij} &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; (-1)^i P(x) > 0, (-1)^j \tilde{P}(x,y) > 0 \right\},\\ \Omega_{ij}^* &= \left\{ (x^*,y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; (-1)^i P^*(x^*) > 0, (-1)^j \tilde{P}^*(x^*,y^*) > 0 \right\}\end{aligned}$$

とおくと，

$P(x) = n$ 変数 d 次斉次ホマロイダル多項式，　$\tilde{P}(x,y) = P(x)$ の極化，
$P^*(x^*) = P(x)$ の乗法的ルジャンドル変換，　$\tilde{P}^*(x^*,y^*) = P^*(x^*)$ の極化

とする．このとき，

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{ij}} &|P(x)|^s \left|\tilde{P}(x,y)\right|^t \overbrace{|H_P(x)|}^{P \text{ の Hessian}} \widehat{f}(x,y)dx\,dy\\ &= \sum_{k,\ell=0,1} \gamma_{ij}^{k\ell}(s,t) \int_{\Omega_{k\ell}^*} |P^*(y^*)|^{s^*} \left|\tilde{P}^*(y^*,x^*)\right|^{t^*} f(x,y)dx^*\,dy^*,\end{aligned}$$

$$s^* = (d-1)s + (d-2)(t+n), \quad t^* = -ds - (d-1)(t+n).$$

という形の局所関数等式が成立する．ここで，$\gamma_{ij}^{k\ell}(s,t)$ は d,n によって明示的に表せる．

6.2 Clifford 4 次形式

[19] では，m 次実対称行列 $S_1,\dots,S_n$ で

$$\begin{aligned} S_i^2 &= I_m \qquad (1\le i\le n),\\ S_iS_j &= \begin{cases} -S_jS_i & (1\le i,j\le p \ \text{または}\ p+1\le i,j\le n)\\ S_jS_i & (\text{その他のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

を満たすものに対し，

$$P(x)=P(x_1,\dots,x_m):=\sum_{i=1}^{p}(xS_i\,{}^tx)^2-\sum_{j=p+1}^{n}(xS_j\,{}^tx)^2$$

という 4 次形式を考え，**Clifford 4 次形式**と呼んだ．それは，上の S_i たちの関係式が，二次形式 $x_1^2+\cdots+x_p^2$ の Clliford 代数と $x_{p+1}^2-\cdots-x_n^2$ の Clifford 代数のテンソル積の m 次元表現を与えており，逆にそのような Clifford 代数 2 つのテンソル積の m 次元表現からこの種の 4 次形式が無限系列として得られるからである．

> $P(x)$ はホマロイダルで，その乗法的ルジャンドル変換は $2^{-8}P(x^*)$．　そして，$P(x)$ は少数の低次元の例外を除いて（とくに $n\ge 12$ ならば常に），既約な非概均質的多項式である．

これより，Clifford 4 次形式 $P(x)$ は，§6.1 で触れた Etingof-Kazhdan-Polishchuk の問いに対する否定的な例となっていることが分かる．

$P(x)$ に対して，局所ゼータ関数を

$$\Phi_i(f;s):=\int_{(-1)^iP(x)>0}|P(x)|^s f(x)\,dx \quad (i=0,1,\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$$

と定義すると，$p,n-p>0$ のとき，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\Phi_0(\widehat{f};s)\\ \Phi_1(\widehat{f};s)\end{pmatrix} =&2^{4s+m/2}\pi^{-4s-2-m/2}\Gamma(s+1)\,\Gamma\left(s+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(s+1+\frac{m-2n}{4}\right)\Gamma\left(s+\frac{m}{4}\right)\\ &\times\sin\pi s\begin{pmatrix}\sin\pi\left(s+\frac{n-2p}{2}\right) & -2\sin\frac{\pi p}{2}\cos\frac{\pi(n-p)}{2}\\ -2\sin\frac{\pi(n-p)}{2}\cos\frac{\pi p}{2} & \sin\pi\left(s-\frac{n-2p}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_0\left(f;-\frac{m}{4}-s\right)\\ \Phi_1\left(f;-\frac{m}{4}-s\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

という局所関数等式が成立つ（[19, Theorem 2.13]）．$p=n$ の場合には，$\Phi_1=0$ であり，関数等式は，

$$\begin{aligned}\Phi_0(\widehat{f};s) =&2^{4s+m/2}\pi^{-4s-2-m/2}\Gamma(s+1)\,\Gamma\left(s+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(s+1+\frac{m-2n}{4}\right)\Gamma\left(s+\frac{m}{4}\right)\\ &\times\sin\pi s\sin\pi\left(s-\frac{n}{2}\right)\Phi_0\left(f;-\frac{m}{4}-s\right)\end{aligned}$$

となる．

Clifford 4 次形式に対しては，2 次形式の Epstein, Siegel の 2 次形式のゼータ関数の種に関する平均に相当する大域ゼータ関数が定義され，関数等式を証明することができる．これは，直交群の保型形式と関連があると予想されるが，その兆候を論じたノートとして [45] をあげておく．

注意 6.4 $p = n$ の場合，上の局所関数等式は，[9, Theorem XVI.4.3] で示された（[4] も見よ）．これが，非概均質的局所関数等式の最初の例である．この場合には，大域ゼータ関数の取り扱いは難しくなく，[1] で論じられている．

参考文献

[1] D.Achab, Zeta functions of Jordan algebras representations *Ann. Inst. Fourier*, **45**(1995), 1283–1303.

[2] I. N. Bernstein and S. I. Gelfand, Meromorphic property of the function P^λ, *Funct. Anal. Appl.* **3**(1969),68–69.

[3] N. Bopp and H. Rubenthaler, *Local zeta functions attached to the minimal spherical series for a class of symmetric spaces*, Memoirs of AMS, vol. 174, N° 821, 2005.

[4] J.-L. Clerc, Zeta distributions associated to a representation of a Jordan algebra, *Math. Z.* **239**(2002), 263-–276.

[5] R. Cluckers and A. Herremans, The fundamental theorem of prehomogeneous vector spaces modulo pm (with an appendix by F. Sato), *Bull. Soc. math. France* **135**(2007), 475=–494.

[6] J. Denef and A. Gyoja, Character sums associated to prehomogeneous vector spaces, *Compositio Math.* **113**(1998), 273—346.

[7] P. Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. II, *Math. Ann.* **63**(1906), 205-–216.

[8] P. Etingof, D. Kazhdan and A. Polishchuk. When is the Fourier transform of an elementary function elementary? *Selecta Math.* **8**(2002), 27—66.

[9] J. Faraut and A. Koranyi, *Analysis of symmetric cones*, Oxford University Press, 1994.

[10] I. M. Gelfand and G. E. Shilov, *Generalized functions* Vol.**1**, Academic Press, New York, 1964.

[11] A. Gyoja, Theory of prehomogeneous vector spaces without regularity condition, *Publ. RIMS.* **27**(1991), 861–922.

[12] A. Gyoja, Bernstein-Sato's polynomial for several analytic functions, *J. Math. Kyoto Univ.* **33**(1993) 399–411

[13] Harich-Chandra, *Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups*, Lect. Notes in Math. No. **62**, Springer, 1968.

[14] E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der

Primzahlen (Erst Mitteilung), *Math. Z.* **1**(1918), 357—376.

[15] T. Kimura, *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 215, 2003, Amer. Math. Soc.

[16] T. Kimura, A classification theory of prehomogeneous vector spaces, *Adv. Stud. Pure Math.* **14**(1988), 223—256.

[17] T. Kimura, K. Ueda and T. Yoshigaki, A classification of 3-simple prehomogeneous vector spaces of nontrivial type, *Japan. J. Math.* **22**(1996), 159–198.

[18] M. Koecher, Über die Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, *J. reine angew. Math.* **192**(1953), 1–23.

[19] T. Kogiso and F. Sato, Clifford quartic forms and local functional equations of non-prehomogeneous type, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **23**(2016), 791–866.

[20] T. Kogiso and F. Sato, Local Functional Equations attached to the polarizations of homaloidal polynomials, *Kyushu J. Math.*, **72**(2018), 307–331.

[21] Y. Kurosawa, A classification of 3-simple prehomogeneous vector spaces with two irreducible components, *Tsukuba J. Math.* **36**(2012), 135—172.

[22] R. P. Langlands, Dirichlet series associated with quadratic forms, *Lect. Note Series of Math.* No. **544**, 236–268, Springer, 1976.

[23] W. -W. Li, *Zeta Integrals, Schwartz Spaces and Local Functional Equations*, Lecture Notes in Math. **2228**, Springer, 2018.

[24] W. -W. Li, Generalized zeta integrals on a certain prehomogeneous vector spaes, *Nagoya Math. J.* **249**(2013), 50–87.

[25] H. Maass, Spherical Functions and Quadratic Forms, *J. Indian Math. Soc.* **20**(1956), 117-–162

[26] H. Maass, Zetafunktionen mit Größencharakteren und Kugelfunktionen, in: *Math. Ann.* **134**(1957), 1—32

[27] H. Maass, Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik, *Math. Ann.* **138**(1959), 287—315

[28] H. Maass, Siegel's modular forms and Dirichlet series, *Lect. Note Series of Math.* No. **216**, Springer, 1971.

[29] G. D. Mostow, Self-adjoint groups, *Ann. of Math.* **62**(1955), 44–55.

[30] H. Nakashima, Functional equations of zeta functions associated with homogeneous cones, *Tôhoku Math. J.* **72**(2020), 349-–378.

[31] T. Oshima, Poisson transformations on affine symmetric spaces, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55**(1979), 323–327.

[32] T. Oshima and J. Sekiguchi, Eigenspaces of Invariant Differential Operators on an Affine Symmetric Space. *Invent. Math.* **57**(1980), 1–82.

[33] W. Roelcke, Über dir Wellengleichung bei Grenzkreisgruppenn eerster Art, *Sitzungsber.*

Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl.. 1953/55, 4, 161–267.

[34] H. Saito, Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces, *Nagoya Math. J.* **170**(2003), 1–31.

[35] F. Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations, *Tôhoku Math. J.* **34**(1982), 437–483.

[36] F. Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneos vector spaces III, *Ann. of Math.* **116**(1982), 177–212.

[37] F. Sato, On zeta functions of ternary zero forms. *J. Fac. SciU̇niv. Tokyo* **28**(1982), 585-–604.

[38] F.Sato: On functional equations of zeta distributions. *Adv. Studies in pure Math.* **15**(1989), 465–508.

[39] F. Sato, The Hamburger theorem for the Epstein zeta functions. *Algebraic Analysis* Vol.II, Academic Press, 1989, 789—807.

[40] F. Sato: The Maass zeta functions attached to positive definite quadratic forms, *Adv. Studies in pure Math.* **21**(1992), 409–443.

[41] F. Sato: Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms, *Proc. Ind. Acad. (K.G.Ramanathan memorial issue)* **104**(1994), 99–135.

[42] F. Sato: Zeta functions with polynomial coefficients associated with prehomogeneous vector spaces, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **45**(1996), 177–211.

[43] F.Sato: Zeta functions of $(\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{GL}_2, \mathbf{M}_2 \oplus \mathbf{M}_2)$ associated with a pair of Maass cusp forms, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **55**(2006), 77-–95.

[44] F. Sato, Quadratic maps and non-prehomogeneous local functional equations, *Comment. Math. Univ. Sact. Pauli* **56**(2007), 163–184.

[45] F. Sato, Hopf mappings and automorphic forms on orthogonal groups, 数理解析研究所講究録 No. 2055(2017), 45-64.

[46] F. Sato, Gluing local functional equations, Preprint, 2023.

[47] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* **65**(1977), 1–155

[48] M. Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, *Ann. of Math.* **100**(1974), 131–170.

[49] M. Sato, note by T. Shintani, translated by M. Muro, Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part) — The English translation of Sato's lecture from Shintani's note, *Nagoya Math. J.* **65**(1990), 1–34.

[50] A. Selberg, A new type of zeta functions connected with quadratic forms, Report of the Institute in the Theory of Numbers, Colorado, 1959, 207-210. (*Collected Paoers*, Vol, 1, Springer, 1989, pp. 473–474.)

[51] A. Selberg, Discontinuous groups and harmonic analysis, *Proc. Int. Congr. Math.*, Stockholm, 1962. (*Collected Paoers*, Vol, 1, Springer, 1989, pp. 493–505.)

[52] T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, *J. Math. Soc. Japan* **24**(1972), 132–188.

[53] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **22**(1976), 25–65.

[54] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen II, *Math. Z.* **44**(1939), 398–426.

[55] C. L. Siegel, *Advanced analytic number theory*, Lecture Notes, Tata Institute of Fundamental Research, 1961 （available online）.

[56] H. M. Stark, L-functions and character sums for quadratic forms (I), *Acta Arith.* **XIV**(1968), 35-–50.

[57] 杉山和成, 概均質ゼータ関数の定義と基本的性質（1 変数の場合），本報告集，2023.

[58] 鈴木美裕，保型形式付き概均質ゼータ関数，本報告集，2023.

[59] 谷口隆, 例で学ぶ概均質ベクトル空間，本報告集，2023.

[60] 谷口隆, 本論のための準備，本報告集，2023.

[61] 都築正男, 新谷 2 重ゼータ関数，本報告集，2023.

[62] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, *Trans. Moscow Math. Soc.* **12**(1963), 340–403.