概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

新谷 2 重ゼータ関数

都築正男（上智大学理工学部情報理工学科）

概 要

2 変数概均質ゼータ函数の一つの実例である「新谷 2 重ゼータ函数」を一般化し応用を与えた論文 [KTW] のうち, ゼータ函数の定義, 解析接続および函数等式に関わる基礎的な部分を中心に詳しい解説を行う.

1 導入

まず, 新谷 2 重ゼータ函数について紹介する. $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $A(m,n) = \{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid x^2 \equiv n \pmod{m}\}$ とおく. 新谷卓郎は論文 [新谷] において 2 重数列 $\#A(n,m)$ の母函数として, $(s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ に関する 4 つの 2 重 Dirichlet 級数

$$\xi_i(s_1,s_2) := \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\#A(4m,(-1)^{i-1}n)}{m^{s_1}n^{s_2}} \quad (i=1,2),$$

$$\xi_i^*(s_1,s_2) := \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\#A(m,(-1)^{i-1}n)}{m^{s_1}(4n)^{s_2}} \quad (i=1,2)$$

を導入し研究した. この論文では 2 次型式の空間から生じる様々なゼータ函数について, 応用を含めた多彩な側面が扱われているが, 上記の 2 重ゼータの研究はその一部ということになる. ゼータ函数の基本である「解析接続」と「函数等式」という点に限定すれば, 新谷の結果は以下のようになる:

(i) (解析接続と可能な極の位置)

$$\Gamma\left(\tfrac{s_1+1}{2}\right)^{-1} s_1(2s_1-1)\zeta(2s_1) \times (s_2-1)(s_1-1)^2(2s_1+2s_2-3) \times \xi_i(s_1,s_2),$$

$$\Gamma\left(\tfrac{s_1+1}{2}\right)^{-1} s_1(2s_1-1)\zeta(2s_1) \times (s_2-1)(s_1-1)^2(2s_1+2s_2-3) \times \xi_i^*(s_1,s_2)$$

が全空間 $\mathbb{C}^2$ に正則に解析接続される.

(ii) (f_γ-函数等式)[1]

$$\begin{pmatrix} \xi_1\left(s_1, \frac{3}{2} - s_1 - s_2\right) \\ \xi_2\left(s_1, \frac{3}{2} - s_1 - s_2\right) \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}(s_1, s_2) \begin{pmatrix} \xi_1^*\left(s_1, s_2\right) \\ \xi_2^*\left(s_1, s_2\right) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

ここで, $\mathbf{\Gamma}(s_1, s_2)$ は次ぎで定義される：

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s_1+2s_2}\Gamma(s_2)\Gamma\left(s_1+s_2-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} \sin\pi\left(\frac{s_1}{2}+s_2\right) & \sin\frac{\pi s_1}{2} \\ \cos\frac{\pi s_1}{2} & \cos\pi\left(\frac{s_1}{2}+s_2\right) \end{pmatrix}$$

(iii) ($f_\gamma \circ f_\alpha^3$-函数等式) 4 つの函数

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-s_1}\sin\left(\frac{\pi s_2}{2}\right)^{-1}\Gamma(s_1)\zeta(2s_1)\times\xi_1(s_1, s_2), \\
&(2\pi)^{-s_1}\sin\left(\frac{\pi s_2}{2}\right)^{-1}\Gamma(s_1)\zeta(2s_1)\times\xi_1^*(s_1, s_2), \\
&(2\pi)^{-s_1}\Gamma(s_1)\zeta(2s_1)\times\xi_2(s_1, s_2), \\
&(2\pi)^{-s_1}\Gamma(s_1)\zeta(2s_1)\times\xi_2^*(s_1, s_2),
\end{aligned}$$

の変換 $f_\gamma \circ f_\alpha^3 : (s_1, s_2) \to (1 - s_1, s_1 + s_2 - \frac{1}{2})$ による不変性.

1.1 新谷の２重ゼータ函数導入の背景

n 次対称行列全体のベクトル空間 $V^{(n)}$ は代数群 $\mathbf{GL}_n$ の有理的左作用 $\mathbf{GL}_n \times V^{(n)} \ni (g, T) \mapsto gT{}^tg \in V^{(n)}$ によって概均質ベクトル空間になる. $0 \leqslant i \leqslant n$ に対して, 符号 $(i, n-i)$ の正則実対称行列全体 $V_i^{(n)}$ は $V^{(n)}(\mathbb{R})$ における単位元連結成分 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})^0$ の軌道を与える. 有理点 $x \in V^{(n)}(\mathbb{Q}) \cap V_i^{(n)}$ の「軌道密度」$\mu(x) > 0$ は体積比

$$\mu(x) := \left(\int_{\tilde{T}_x/\Gamma(x)} \mathrm{d}g\right) \Big/ \left(\int_T |\det y|^{-n(n+1)/2}\,\mathrm{d}y\right)$$

で定義される, ただし $T \subset V_i^{(n)}$ は相対コンパクト可側集合, $\widetilde{T}_x := \{g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})^0 \mid gx{}^tg \in T\}$ はその x による群への持ち上げ, $\Gamma(x) := \mathbf{SO}_n(x) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ は x の単数群であり、$\mathrm{d}g$ は $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ のハール測度 $|\det g|^{-n}\prod_{ij}\mathrm{d}g_{ij}$ を表す. $n \geqslant 3$ ならば $\mu(x)$ は有限な量となって, $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ 不変な $V^{(n)}(\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Z}$ 格子 $L \subset V^{(n)}(\mathbb{Q})$ に対して, 各符号に応じてゼータ函数

$$\zeta_i^{(n)}(s, L) = \sum_{x \in (L \cap V_i^{(n)})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})} \frac{\mu(x)}{|\det x|^s} \tag{1.2}$$

[1] f_γ, f_α などは §6 で定義する affine 変換の名称

が定義される [2]．$n=2$ の場合でも，$i=0,2$ ならば $\mathbf{SO}_2(x)$ はコンパクトなので $\mu(x)$ は有限となりゼータ函数が同じように定義されるが，$i=1$ のとき $\mathbf{SO}_2(x)\cong\mathbf{SO}(1,1)\cong\mathbb{R}^\times$, $\mu(x)=\infty$ となりこの定義は破綻する．そこで困難を回避するために，新谷が取った方法の背後にあるアイディアは次のようなものであったと思われる：

問題となるゼータ函数に関連するゼータ積分 (*cf.* [杉山, §3])

$$\int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^0/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})}|\det g|^s\sum_{x\in L;\det(x)\neq 0}f(gx^tg)\,\mathrm{d}g \tag{1.3}$$

は $-\det x\in(\mathbb{Q}^\times)^2$ の寄与により発散してしまう．そこで $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^0$ の不分岐 Eisenstein 級数 $E(g,w)$ ($g\in\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^0$, $w\in\mathbb{C}$) で修正した

$$\int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^0/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})}|\det g|^sE(g,w)\sum_{x\in L:\det(x)\neq 0}f(gx^tg)\,\mathrm{d}g \tag{1.4}$$

を考えてみる． これもこのままでは同じ理由で発散するが，w によって (1.3) には無い新たな自由度が獲得された．よく知られているように，$E(g,w)$ は $w=1$ で 1 位の単純極を有し，$\mathrm{Res}_{w=1}E(g,w)$ は $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^0$ 上の定数函数になるから，2 変数 (s,w) の (1.4) を「然るべく正規化 (発散の繰り込み)」し $w=1$ で留数を取ると所望の (1.3) の「正しい代替物」が得られるだろう．

この発散積分 (1.4) の「正規化」のひとつ（Eisenstein 級数の「unfolding」＝ Frobenius 相互律の級数版）の結果が上で定義を振り返った「2 重ゼータ函数」あるいは，もっと正しくは，それをコントロールする「2 変数ゼータ積分」というものになる，という見方ができる．結論をいえば，$\xi_i^*(s_1,s_2)$ は (1.4) で $L=V^{(2)}(\mathbb{Z})$, $s=s_1+2s_2$, $w=2s_1-1$ としたものと密接に関連しており，$\mathrm{Res}_{s_1=1}\xi_2^*(s_1,s-\frac{s_1}{2})$(を微修正したもの) が $\zeta_1^{(2)}(s,V^2(\mathbb{Z}))$ の正規化ということになる．詳しくは，§8 を参照のこと．(§8 は本論とは独立.)

(1.4) には，多変数概均質ゼータ ([佐藤 82-2], *cf.* [佐藤]) や保型型式の周期積分付き概均質ゼータ ([佐藤 94], *cf.* [鈴木 (美)]) の原型を見ることが出来る．

1.2 [KTW] の結果の紹介 (有理数体の場合)

次に，このノートの結論部 (§6, §5.3) を，基礎体を $\mathbb{Q}$ の場合に限定したうえで，なるべく初等整数論的な用語で書き直して紹介する．$M\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

[2] 後に [伊吹山・齋藤 I] は，このゼータ函数が「簡単なゼータ函数」で明示的に表されることを証明した．この公式発見の経緯なども含めて [伊吹山, §4] 参照.

$S(M)$ を M の素因数全体の集合とする. 自然数 q を与えたとき $M^{(q)}$ を q と互いに素であるような, M の最大の正の約数とする.

$$T_2 := \{1, 3, 5, 7\}, \quad T_p := \{+1, -1\} \quad (p \text{ は奇素数})$$

とおく [3]. N を平方因子をもたない正の整数として, $T_N := \prod_{p \in S(N)} T_p$ とおく. ($N = 1$ の場合, $T_N = \emptyset$ である). $N > 1$ の場合, $j = 1, 2$, N の正の約数 Q および $\mathbf{d} = (d_p)_{p \in S(N)} \in T_N := \prod_{p \in S(N)} T_p$ に対して, 次の 2 重級数を考える:

$$\xi_j^N(s_1, s_2, Q, \mathbf{d}) := \sum_{(m,n) \in X_N(j, \mathbf{d})} \frac{\#A(m, nQ)}{m^{s_1} |nQ^{-1}|^{s_2}}, \tag{1.5}$$

$$\widetilde{\xi_j^N}(s_1, s_2, Q, \mathbf{d}) := 2^{1 - \#S(N)} \sum_{(m,n) \in X_N} \sum_{0 < l | N} \omega_{j,Q,\mathbf{d}}(nl) \frac{\#A(m, nl)}{m^{s_1} |nl^{-1}|^{s_2}} \tag{1.6}$$

ここで, X_N は N と互いに素な整数の対 $(m, n) \in \mathbb{Z}_{>0} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ 全体の集合, $X_N(j, \mathbf{d})$ は $(m, n) \in X_N$ であって次の条件

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{p}\right) &= d_p \quad (p \in S(N)), \\ n &\equiv d_2 \pmod 8 \quad (\text{if } 2 \in S(N)), \\ (-1)^{j-1} n &> 0 \end{aligned}$$

を満たすもの全体の集合であり, $\omega_{j,Q,\mathbf{d}}(n)$ は次で定義される完全乗法的函数である：

$$D := \begin{cases} Q(-1)^{\frac{Q^{(2)}-1}{2}} (-1)^{\frac{d_2-1}{2}} & (2 \mid N), \\ Q(-1)^{\frac{Q-1}{2}} & (2 \nmid N) \end{cases}$$

とおく. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(n, 2N) = 1$ の場合

$$\omega_{j,Q,\mathbf{d}}(n) = \left(\frac{D}{|n|}\right) \operatorname{sgn}^{j-1}(n) \operatorname{sgn}(n)^{\frac{Q^{(2)}-1}{2}}.$$

素数 $q \in S(N) \cup \{2\}$ に対しては,

$$\omega_{j,Q,\mathbf{d}}(q) = \begin{cases} d_q \left(\frac{D^{(q)}}{q}\right), & (q \neq 2), \\ \left(\frac{2}{Q^{(2)} d_2}\right), & (q = 2,\ 2 \mid N), \\ \left(\frac{2}{Q}\right), & (q = 2,\ 2 \nmid N) \end{cases}$$

[3] T_2, T_p は然るべく $\mathbb{Z}_p^\times / (\mathbb{Z}_p^\times)^2$ の代表元と対応させられる

$N=Q=1$ の場合, $T_N=\emptyset$ なので $\mathbf{d}$ は無いが, 記法的に $\mathbf{d}$ を残し $\xi_j^1(s,Q,\delta)$, $\widetilde{\xi_j^1}(s,Q,\mathbf{d})$ を上と同様, $\mathbf{d}$ に関わる条件をすべて除いて定義する. すると,

$$\xi_j^1(s,Q,\mathbf{d})=2^{2s_2-1}\,\xi_j^*(s),\quad \widetilde{\xi_j^1}(s,D,\mathbf{d})=\xi_1^*(s)+(-1)^{j-1}\xi_2^*(s)$$

なので, $\xi_j^N(s,Q,\mathbf{d})$ は新谷の $\xi_j^*(s)$ の一般化であることに注意する. 一般に, $\widetilde{\xi_j^N}(s,Q,\mathbf{d})$ は $\xi_k^N(s,Q',\mathbf{d}')$ 達の交代和で表せることが容易に分かる.

$$P(s):=(s_1-1)^2(s_2-1)(s_1+s_2-\tfrac{3}{2})$$

とする. $\zeta^N(s)=\prod_{(p,N)=1}(1-p^{-s})^{-1}$ $(\mathrm{Re}(s)>1)$ とする.

定理 1.1 ([KTW]+α, [平本])

(1) 任意の平方因子をもたない整数 $N>0$, $0<Q|N$, $\mathbf{d}\in T_N$, $j=1,2$ に対して,

$$P(s)\,\xi_j^N(s,Q,\mathbf{d}),\quad P(s)\,\widetilde{\xi_j^N}(s,Q,\mathbf{d})$$

は $\mathbb{C}^2$ 全体に正則に解析接続される.

(2) $2\mid N$ の場合, ベクトル値函数

$$\boldsymbol{\Xi}^N(s)=\left(\frac{\zeta^N(2s_1)}{\zeta^N(s_1)}\,\widetilde{\xi_j^N}(s,Q,\mathbf{d})\right)_{(j,Q,\mathbf{d})}$$

に対して, 次の 2 つの函数等式が成り立つ:

$$\boldsymbol{\Xi}^N(f_\beta(s))=\mathsf{B}_N(s)\,\boldsymbol{\Xi}^N(s),, \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{\Xi}^N(f_\gamma(s))=\mathsf{C}_N(s)\,\boldsymbol{\Xi}^N(s),, \tag{1.8}$$

ただし, f_β, f_γ は

$$f_\beta:(s_1,s_2)\mapsto\left(s_1+s_2-\tfrac{1}{2},1-s_2\right), \tag{1.9}$$

$$f_\gamma:(s_1,s_2)\mapsto\left(s_1,\tfrac{3}{2}-s_1-s_2\right) \tag{1.10}$$

であり, $\mathsf{B}_N(s)=\bigotimes_{p\in S(N)\cup\{\infty\}}\mathsf{B}_p(s)$, $\mathsf{C}_N(s)=\bigotimes_{v\in S(N)\cup\{\infty\}}\mathsf{C}_v(s)$ と次の条件で決まる行列 $\mathsf{B}_v(s)$, $\mathsf{C}_v(s)$ 達のクロネッカー積で書ける行列である：

$$\mathsf{B}_\infty(s)\mathsf{C}_\infty(s)\mathsf{B}_\infty(s)=\tfrac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&-1\end{smallmatrix}\right],\ \mathsf{B}_\infty(s)\mathsf{C}_\infty(s)=\frac{\pi^{s_1-\frac{1}{2}}}{2}\begin{bmatrix}\frac{\Gamma(\frac{1-s_1}{2})}{\Gamma(\frac{s_1}{2})}&\frac{\Gamma(\frac{1-s_1}{2})}{\Gamma(\frac{s_1}{2})}\\\frac{\Gamma(\frac{2-s_1}{2})}{\Gamma(\frac{s_1}{2})}&\frac{\Gamma(\frac{2-s_1}{2})}{\Gamma(\frac{s_1}{2})}\end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{B}_p(s)\mathsf{C}_p(s)\mathsf{B}_p(s) &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \left(\frac{-1}{p}\right) & -\left(\frac{-1}{p}\right) \\ 1 & -1 & -\left(\frac{-1}{p}\right) & \left(\frac{-1}{p}\right) \end{bmatrix}, \\
\mathsf{B}_p(s)\mathsf{C}_p(s) &= \operatorname{diag}\left(\tfrac{1-p^{-s_2}}{1-p^{-1+s_2}}, \tfrac{1+p^{-s_2}}{1+p^{-1+s_2}}, p^{-s_1+\frac{1}{2}}, p^{-s_2+\frac{1}{2}}\right), \\
\mathsf{B}_2(s)\mathsf{C}_2(s)\mathsf{B}_2(s) &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \\
\mathsf{B}_2(s)\mathsf{C}_2(s) &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
B_{11} = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & -b_2 & b_2 & -b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 & b_3 \\ b_2 & -b_2 & b_2 & -b_2 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & b_1 \\ -b_2 & b_2 & -b_2 & b_2 \\ -b_3 & -b_3 & -b_3 & -b_3 \\ b_2 & -b_2 & b_2 & -b_2 \end{bmatrix},
$$

$$
B_{21} = 8^{\frac{1}{2}-s_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = 8^{\frac{1}{2}-s_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
b_1 = \frac{1-2^{-s_1}}{1-2^{-1+s_1}}, \quad b_2 = 4^{\frac{1}{2}-s_1}, \quad b_3 = \frac{1+2^{-s_1}}{1+2^{-1+s_1}}.
$$

$S(N)$ は N の素因子の集合で, Kronecker 積は添え字 $(j, Q, \mathbf{d})$ を直積集合

$$
\{+1, -1\} \times \prod_{p \in S(N)} (\{0,1\} \times T_p)
$$

の要素 $((-1)^{j-1}, ((\mathrm{ord}_p(Q), d_p))_{p \in S(N)})$ と同一視して定義される.

(3) $2 \mid N$ の場合, $f_\beta \mapsto \mathbf{B}_N(s)$, $f_\gamma \mapsto \mathbf{C}_N(s)$ は $D_{12} = \langle f_\beta, f_\gamma \rangle$ の 1-cocycle に延長される.

定理 1.2 $(j, Q, \mathbf{d})$ に対して, $\mathfrak{D}(j, Q, \mathbf{d})$ を基本判別式 D で次の条件を満たすもの全体の集合とする:

$$
\begin{aligned}
&D \equiv 0 \pmod{Q}, \\
&D \equiv 0 \pmod{4Q}, \quad D^{(2)} \equiv d_2 \pmod{8} \quad (\text{if } 2 \mid N), \\
&\left(\frac{D^{(p)}}{p}\right) = d_p, \quad (p \mid N, p > 2), \\
&(-1)^{j-1} D > 0,
\end{aligned}
$$

ただし, χ_D は D に対応する Kronecker 指標である. このとき, $\mathrm{Re}(s_1) > 1$, $\mathrm{Re}(s_2) > 1$ に対して, $\widetilde{\xi_j^N}(s_1, s_2, Q, \mathbf{d})$ は次ぎの表示に等しい：

$$\zeta^N(s_1)\zeta^N(2s_1+2s_2-1) \sum_{D\in\mathfrak{D}(j,Q,\mathbf{d})} \frac{L^N(s_2,\chi_D)}{L^N(2s_1+s_2,\chi_D)} \frac{1}{(D^{(N)})^{s_1}}. \qquad (1.11)$$

$N=1$ の場合, 新谷の $\xi_j^*(s)$ について次を得る：

系 1.3 (1) $P(s)\xi_j^*(s_1,s_2)$ $(j=1,2)$ は $\mathbb{C}^2$ 上の正則函数になる.

(2) $k=1,2$ に対して, 函数

$$\Xi_k(s_1,s_2) := \frac{\zeta(2s_1)}{\zeta(s_1)}\{\xi_1^*(s_1,s_2)+(-1)^{k-1}\xi_2^*(s_1,s_2)\}$$

は次の函数等式を満たす:

$$\Xi_k(s_1+s_2-\tfrac{1}{2}, 1-s_2) = \Xi_k(s_1,s_2)\, 2^{3s_2-1}\pi^{-s_2}\Gamma(s_2) \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi s_2}{2}\right), & (k=1), \\ \sin\left(\frac{\pi s_2}{2}\right), & (k=2). \end{cases}$$

(3) (右辺の収束域において)$j=1,2$ に対して次の表示が成立

$$\xi_j^*(s_1,s_2) = 2^{-2s_2}\zeta(s_1)\zeta(2s_1+2s_2-1) \sum_{D:\text{基本判別式}} \frac{\mathrm{sgn}(D)^{j-1}L(s_2,\chi_D)}{L(2s_1+s_2,\chi_D)\,|D|^{s_1}},$$

注意 1.4 概均質ゼータ函数の定義はベクトル空間の格子に依存する. よって, フーリエ変換由来の函数等式で「結ばれる相手」のゼータ函数は双対格子に依存した別ものになる. 新谷の $\xi_j(s)$ は半整数 2 次対称行列の格子 $V(\mathbb{Z})^*$, $\xi_j^*(s)$ は整数 2 次対称行列の格子 $V(\mathbb{Z})$ から作られていて, 函数等式 (1.1) は実際 ξ_j と ξ_j^* をつないでいる. [佐藤 82-1] では, 一般の格子 $M \subset V(\mathbb{Q})$ とその双対格子 $M^* \subset V(\mathbb{Q})$ の組に対して函数等式 (1.1) が拡張されて証明されている。それに際して, [新谷, §1] とは異なる概均質ベクトル空間が使われており, 極の位置に関して新谷の結果 (i) が定理 1.1(1) の形に改善された (系 1.3(1) は [佐藤 82-1] の結果). その後 [谷口 1] は 3 次環の分布の研究での必要性から, [新谷, §1] の 2 重ゼータに関わる内容を [佐藤 82-1] の枠組みをアデール化することで任意代数体へ拡張した. アデールを使った代数体への一般化は [雪江, Ch.7] にもある. 「除外素点」N を設定した (1.5) は格子 $V(\mathbb{Z})$ から作られているが, 実際には S-整数環上の格子 $V(\mathbb{Z}_S)$ のみに依存する, ここで S は N の素因子集合. よって, $2 \mid N$ のときには $V(\mathbb{Z}_S) = V(\mathbb{Z}_S)^*$ となり, 実際, 自己双対的函数等

式 (1.8) が成り立つ. $2 \nmid N$ の場合, (1.8) は [KTW] では考えていない. 函数等式 (1.7) は定理 1.2(3) の表示と Dirichlet の L 函数の関数等式由来なため, 実は $2 \nmid N$ でも成立する (系 1.3(2)). 新谷の $f_\gamma \circ f_\alpha^3$ 函数等式は Eisenstein 級数表示 (*cf.* (1.4)) に由来するものである (注意 6.3 参照. [KTW, pp.491–494] も参照.)

注意 1.5 定理 1.1(3) は $\mathbf{\Xi}^N(s)$ が位数 12 の 2 面体群で統制される函数等式系を有することを意味する. 「2 重 Dirichlet 級数」は概均質ゼータとは一見関係ない文脈でも扱われてきた. 例えば, [B] では本質的に $\widehat{\xi_j^2}(s, D, \mathbf{d})$ と同じものが (新谷の仕事に言及することなく) 導入/研究され, D_{12} 函数等式系が証明されていた. Blomer の函数等式系は定理 1.1 からも出る ([平本]).

注意 1.6 定理 (1.2) の表示式は [新谷] には無い. これは, [伊吹山・齋藤 I] によるゼータ函数 (1.2) の「明示公式」の証明手法を体系的に発展させた [齋藤] の枠組み (概均質ゼータ関数における局所と大域の関係) に見られるような, 比較的新しい視座から得られたものといえる. また, Arthur-Selberg 跡公式の冪単項の「安定化」とも関連する ([LL]). 函数等式 (1.7)(一般の設定では §6.2 参照) はこの表示式 (1.11)(一般設定では §4.6, §5.3) を通じて [KTW] で得られたものであるのに対して, 函数等式 (1.8)(一般設定では §6.3 参照) は概均質ゼータの理論の定型 (*cf.* [杉山, §4]) から得られるもので (1.1) と同じ由来である.

注意 1.7 [伊吹山・齋藤 II, §3.4] では, $\Gamma_0(4)$ 上の半整数重さ Eisenstein 級数の Mellin 変換を利用した, 新谷の函数等式 (1.1) の別証明が与えられている. また [DG, §6] では, 2 変数ゼータに対する逆定理の 1 つの応用として, 新谷ゼータが $\Gamma_0(4)$ 上の半整数重さアイゼンシュタイン級数の線型結合の Mellin 変換であることを示している [4]. また [GH] も参照のこと. 半整数重さアイゼンシュタイン級数との関連は [新谷, p.40 Remark] にも言及がある. (1.4) の Eisenstein 級数は半整数重さではないことに注意. まとめると, 標語的には次の関連が見られるようだ:

新谷 2 重ゼータ函数

$\updownarrow$ ((1.4) の unfolding)

整数重さ Eisenstein 級数のトーラス周期付きゼータ函数

$\updownarrow$ (θ-lifting)

半整数重さ Eisenstein 級数の Mellin 変換

[4] この仕事の存在は杉山和成さんから教えて頂きました.

注意 1.8 §1.1 で述べたように, 応用上は 2 重ゼータの極因子にそった留数や 1 変数への特殊化が重要で, その解析は 2 重ゼータのさらに一段階先にある ([新谷, Ch I 3°], [KTW, §4.6] を参照.) この記事では割愛する. (1.2) を含めた「新谷ゼータ函数」の大事な応用としては, Siegel 保型型式の数値的次元公式 ([新谷], [伊吹山・齋藤 II], [若槻]) や Siegel 保型型式の佐武パラメータの等分布性定理 ([Kim-若槻-山内])[5], 3 次環の密度定理への応用 ([谷口 1]) などがある.

$\boxed{\text{各章の内容}}$: §2 では 2 重ゼータに関連した概均質ベクトル空間の基礎事項を述べた. §3 では任意の標数 0 の局所体においてゼータ積分の性質をまとめた. §4 では一般の代数体のアデール化でゼータ積分を導入し基本性質を調べる. [KTW, §4.4] では簡潔に済ませた特異部分の解析について §4.5 で詳述した. §4.6 では定理 1.2 を特別な場合に含む公式を一般の代数体で説明した. ([KTW] の新規性はここにあるため §4.6 は詳しく書いた.) §5 では新谷 2 重ゼータ函数を一般の代数体の場合に導入する. [KTW] の定義をイデアルの言葉で書き直したのでより original との類似性がはっきりしたのではと思う. §6 ではそれまでの結果を使って 2 重ゼータの函数等式と解析接続を導く議論を詳述した. §5.4 の結果を使うことで [KTW] に比べて解析接続の議論は簡易化されている. §7 では, $\mathbb{Q}$ の場合に限定して, 2 重ゼータの D_{12} 函数等式系について説明し, 定義を初等的な言葉で翻訳し定理 1.1 に繋げた. §8 は付録で, §1.1 と注意 1.7 を補完する内容. 全体として [KTW] と相補的に成るように心掛けたので, 証明を省略して引用で済ませた部分もある一方で本筋で大事なことは証明を詳述した. アデールの必要事項も最低限は加えたが詳細は [W], [RV] などを参照ください.

2 基本事項

集合 X とその部分集合 Z について, X での Z の特性函数を $\mathbb{1}_Z$ と書く. 位相群 H に対して, H から $\mathbb{C}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ への連続準同型写像を指標といい, H の指標全体の集合を $\widehat{H}$ と書く. ガンマ函数 $\Gamma(s)$ に関連して, 次の記法はよく用いられる:

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \qquad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s).$$

「倍角公式」から $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)$ に注意する.

[5] [Kim-若槻-山内] で与えられた応用が [KTW] の直接の motivation でした.

2.1 概均質ベクトル空間

代数群 G を

$$G := \mathbf{GL}_1 \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \in \mathbf{GL}_2 \right\}$$

で定義する．明らかに G は $\mathbb{Q}$ 上定義される．G の一般の元を

$$g = (a, h), \quad h = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right] \tag{2.1}$$

と表す．2次対称行列全体のなす線型空間は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群 V を定める：

$$V = \left\{ X \in \mathbf{Mat}_2 \mid X = {}^tX \right\}.$$

V の一般の元を

$$X = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right] \tag{2.2}$$

と表す．しばしば, G および V は $\mathbb{Z}$ 上のスキームとして扱う．G の V への有理表現 $\rho : G \times V \longrightarrow V$ を

$$\rho(a, h)X := a\, hX^th, \qquad (a, h) \in G,\, X \in V$$

で定義する．

$$\begin{aligned} P_1(X) &= x_1, & P(X) &= -\det X = x_{12}^2 - x_1x_2, \quad X = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right] \in V, \\ \tau_1(g) &= a, & \tau(g) &= (ac)^2, \quad g = \left(a, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right]\right) \in G \end{aligned}$$

とおくと, $P_1(X)$ および $P(X)$ は V の正則関数, τ_1 および τ は G の有理指標であって

$$P_1(\rho(g)X) = \tau_1(g)\, P_1(X), \quad P(\rho(g)X) = \tau(g)\, P(X), \quad , g \in G\, X \in V \tag{2.3}$$

が容易に確かめられる．つまり, $P_1(X)$, $P(X)$ はそれぞれ指標 τ_1, τ に対応する V の相対不変式である．V の Zariski 開集合 V^0 を

$$V^0 := \{X \in V \mid P_1(X) \neq 0,\, P(X) \neq 0\}$$

で定義する．(2.3) から，V は G 作用で安定な集合である．任意の体 K と $\delta \in K^\times$ に対して，

$$V^0(K,\delta) := \{X \in V^0(K) \mid P(X) \in \delta(K^\times)^2\} \tag{2.4}$$

$$X_\delta := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta \end{smallmatrix}\right] \in V(K), \tag{2.5}$$

$$G(K)^{X_\delta} := \{g \in G(K) \mid \rho(g)X_\delta = X_\delta\} \tag{2.6}$$

とおく．乗法群 $K^\times$ の部分群 $(K^\times)^2$ による商群を $[K^\times]_2$ と定義する：

$$[K^\times]_2 := K^\times/(K^\times)^2. \tag{2.7}$$

$G(K)$-空間 $V^0(K)$ の軌道分解は次のようになる．

補題 2.1 (1) 対角行列 $X_\delta\,(\delta \in [K^\times])$ 全体の集合は $V^0(K)$ の $G(K)$ 軌道の代表系をなす．K が代数的閉体ならば $V^0(K)$ は単一 $G(K)$-軌道である．特に，(V,G,ρ) は $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間になる．

(2) X_δ の $G(K)$-軌道は $V^0(K,\delta)$ と一致する．

(3) $G(K)^{X_\delta} = \{(1,1_2),(1,\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right])\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

証明 (1), (2) を示すため，$X = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right] \in V(K)$ を K 係数 2 次型式

$$(u,v)X\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = x_1u^2 + 2x_{12}uv + x_2v^2$$

と同一視する．$X \in V^0(K)$ とすると $x_1 \neq 0$, $P(X) = x_{12}^2 - x_1x_2 \neq 0$ であるから次のように平方完成される：

$$x_1 \times \left\{\left(u + \frac{x_{12}}{x_1}v\right)^2 - \frac{P(X)}{x_1^2}v^2\right\}$$

ここで $P(X) = \delta c^2$ $(\delta \in K^\times/(K^\times)^2, c \in K^\times)$ と分解して，

$$g = \left(x_1, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x_{12}}{x_1} & \frac{c}{x_1} \end{smallmatrix}\right]\right) \in G(K)$$

とおくと，$\rho(g)X_\delta = X$ が分かる．よって $V^0(K)$ は $\rho(G(K))X_\delta\,(\delta \in [K^\times]_2))$ の合併集合である．これらが互いに素であることは，(2.3) と $P(X_\delta) = \delta$ より「$X \in \rho(G(K))X_\delta$ ならば $P(X)(K^\times)^2 = \delta(K^\times)^2$ である」ことから従う．$V^0(K)$ は明らかに $V^0(K,\delta)\,(\delta \in [K^\times]_2)$ の互いに素な合併となるから，包含 $\rho(G(K))X_\delta \subset V^0(K,\delta)$ は等号となる．K が代数閉体ならば $[K^\times]_2 = \{1\}$ だから (1) の最後の主張が従う．

(3) 直接計算によって $\rho(g)X_\delta = X_\delta$ は $a = 1, b = 0, c = \pm 1$ と同値なことが分かる． □

注意 2.2 $P_1(X)$, $P(X)$ は (V, G, ρ) の基本相対不変式である．

実際, 特異集合 $S = V - V^0$ は 2 つの超曲面 $S_1 = \{P_1(X) = 0\}$ 及び $S_2 = \{P(X) = 0\}$ の合併である．$P_1(X) = x_1$, $P(X) = x_{12}^2 - x_1 x_2$ は $\mathbb{C}[x_{12}, x_1, x_2]$ の既約元なので, S_1, S_2 は S の余次元 1 の既約成分全体となる。一般論 ([木村, 補題 2.12]) から, 結論が出る．

2.1.1 反傾表現

行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ の余因子行列を, $A^\dagger = \left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$ で表す．$V \times V$ 上の双線型型式を

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(XY^\dagger) = x_1 y_2 - 2x_{12} y_{12} + x_2 y_1, \quad X = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_2 & d \end{smallmatrix}\right], Y = \left[\begin{smallmatrix} y_1 & y_{12} \\ y_{12} & y_2 \end{smallmatrix}\right] \in V \tag{2.8}$$

で定義する．これは, 非退化なので $X \in V$ に線型型式 $X \mapsto \langle X, Y \rangle$ を対応させることで V から双対空間 V^* の上への線型同型写像が得られる．これにより V と V^* を同一視する．そこで, (ρ, V) の反傾表現の V での実現を $(\widehat{\rho}, V)$ とする：つまり,

$$\langle \rho(g)X, \widehat{\rho}(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad g = (a, h) \in G,\ X, Y \in V. \tag{2.9}$$

計算によって

$$\widehat{\rho}(a, h) = a^{-2}(\det h)^{-2}\, \rho(a, h), \quad (a, h) \in G \tag{2.10}$$

が確かめられる．$(G, V, \widehat{\rho})$ は $S = V - V^0$ を特異集合とする概均質ベクトル空間で, 基本相対不変式は $P_1(X)$, $P(X)$ である．実際, $P_1(X)$, $P(X)$ はそれぞれ有理指標 $\widehat{\tau}_1 : (a, h) \mapsto a^{-1} c^{-2}$, $\widehat{\tau} : (a, h) \mapsto a^{-2} c^{-2}$ に対応する相対不変式になる：

$$P_1(\widehat{\rho}(g)X) = \widehat{\tau}_1(g)\, P_1(X), \quad P(\widehat{\rho}(g)X) = \widehat{\ }(g)\, P(X).$$

3 局所ゼータ積分

F を標数 0 の局所体とする．F の乗法的正規付置を $|\cdot|_F$ と書く．F が非アルキメデス的の場合, $\mathfrak{O}$ を F の極大整環, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{O}$ の極大イデアルとし, 剰余体 $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ の位数を q とする．非零分数イデアル $\mathfrak{a} \subset F$ の位数 $\mathrm{ord}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}$ を $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}(\mathfrak{a})}$ で定義すると, $|a|_F = q^{-\mathrm{ord}(a\mathfrak{O})}$ が成立する．F のハール測度を $\mathfrak{O}$ の測度が 1

になるように正規化する．F がアルキメデス的の場合, F は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に同型である．$F \cong \mathbb{R}$ (resp. $F \cong \mathbb{C}$) なら, F のハール測度を $\mathbb{R}$ のルベーグ測度 (resp. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ のルベーグ測度の 2 倍) を移送することで定義する．乗法群 $F^\times$ のハール測度 $\mathrm{d}^\times x$ を, 加法群 F のハール測度 $\mathrm{d}x$ に依存して

$$\mathrm{d}^\times x := |x|_F^{-1}\,\mathrm{d}x \times \begin{cases} (1-q^{-1})^{-1} & (F \text{ が非アルキメデス的}), \\ 1 & (F \text{ がアルキメデス的}) \end{cases}$$

で定義する．F が非アルキメデス的のとき, $\mathrm{vol}(\mathfrak{O}^\times) = 1$ に注意する．

補題 3.1 $(F^\times)^2$ は $F^\times$ の指数有限の閉部分群であり

$$\#[F^\times]_2 = 4|2|_F^{-1}$$

証明 $F \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$ なら容易, それ以外は [W, ChII §3 Corollary(p.34)] の特別な場合. □

有限次 F-線型空間 U に対して, $\mathscr{S}(U)$ を Schwartz-Bruhat 関数全体のなす $\mathbb{C}$-線型空間とする．即ち, $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ならば $\mathscr{S}(U)$ は $U \cong \mathbb{R}^n$ あるいは $U \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ の Schwartz 空間であり, F が非アルキメデス的ならば $\mathscr{S}(U)$ は U 上のコンパクト台を持つ複素数値局所定数関数全体の空間を表す [6].

補題 3.2 $U = F^n$ とする．F が非アルキメデス的ならば, $\mathscr{S}(V(F))$ は

$$U(F) \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \prod_{j=1}^{n} \phi_j(x_j)$$

ただし, $\phi_j \in \mathscr{S}(F)\,(1 \leqslant j \leqslant n)$, の形の函数全体によって生成される．$F \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ならば, 任意の $\Phi \in \mathscr{S}(U(F))$ に対して, 非負函数系 $\phi_j \in \mathscr{S}(F)\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ があって

$$|\Phi(x)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \phi_j(x_j), \quad x \in U(F).$$

証明 F が非アルキメデス的のとき, $\mathscr{S}(U(F))$ は $\mathfrak{p}^m U(\mathfrak{O}) + a\,(m \in \mathbb{Z}_{>0}, a \in U(F))$ の形の集合の特性函数で生成される．$a = (a_j)_j$ とすれば, $\mathbb{1}_{\mathfrak{p}^m U(\mathfrak{O})+a}(x) = \prod_j \mathbb{1}_{\mathfrak{p}^m + a_j}(x_j)$ なので最初の主張が従う．$F \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に対する主張は, [雪江, Lemma(1.2.5)] に証明がある. □

[6] F が非アルキメデス的のとき $\mathscr{S}(U)$ には位相は考えない．$F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のとき $\mathscr{S}(U)$ には半ノルム系を付与してフレッシェ空間にするのが通例 ([木村, §3.2])

3.1 2 次 Hilbert 記号と実指標

$a, b \in F^\times$ に対して $(a,b)_F \in \mu_2 := \{1, -1\}$ を 2 次 Hilbert 記号とする (*cf.* [志村, §26]). これは, 有限アーベル群 $[F^\times]_2$ に対する非退化 pairing $[F^\times]_2 \times [F^\times]_2 \longrightarrow \mu_2$ を導く. 即ち, $\delta \in [F^\times]_2$ に指標 $\omega_\delta : \xi \mapsto (\xi, \delta)_F$ を対応させることにより群同型写像 $[F^\times]_2 \cong \widehat{[F^\times]_2}$ が得られる. 指標 $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ は $F^\times$ の実数値指標と同一視される.

$F \cong \mathbb{C}$ の場合, $[F^\times]_2 = \{1\}$ で χ_1 は自明指標となる. $F \cong \mathbb{R}$ の場合, $[F^\times]_2 = \{+1, -1\}$ で ω_1 は自明指標, ω_{-1} は符号函数 $\mathrm{sgn}(x) := x/|x|$ になる: $\delta_\omega \in \{0,1\}$ を $\omega(x) = (x/|x|)^{\delta_\omega}$ として定義する. F が非アルキメデス的かつ $(q,2) = 1$ な場合, $u \in \mathfrak{O}^\times - (\mathfrak{O}^\times)^2$ を一つ選択し, ϖ を F の素元とすると $[F^\times]_2 = \{1, \varpi, u, u\varpi\}$ である. よって, $\widehat{[F^\times]_2} = \{\omega_1, \omega_\varpi, \omega_u, \omega_u\chi_\varpi\}$.

F が非アルキメデス的の場合, 指標 $\chi : F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^1$ の導手 $\mathfrak{f}_\chi$ を, $\chi|\mathfrak{O}^\times = 1$ ならば $\mathfrak{f}_\chi = \mathfrak{O}$, $\chi|\mathfrak{O}^\times \neq 1$ ならば $\chi|(1+\mathfrak{a}) = 1$ となる最大のイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{O}$ として定義する. F のゼータ関数を $\zeta_F(s) := L(s, \mathbf{1}) = (1 - q^{-s})^{-1}$ と定義する. 非零イデアル $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{O}$ のノルム $\mathrm{N}(\mathfrak{a})$ を $\#(\mathfrak{O}/\mathfrak{a})$ で定義する.

3.2 局所 Iwasawa-Tate 理論の復習

この記事では $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ の場合のみが必要なので, 以下このケースに限定して必要事項を復習する. (詳細は原論文 [T] あるいは [RV, §7] を参照.)

3.2.1 指標型

指標 $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ と複素数 $\mathrm{Re}(s) > 0$ に依存して, $\mathscr{S}(F)$ 上の (連続) 線型汎関数 $\widetilde{\zeta_F}(s, \chi)$ を

$$\widetilde{\zeta_F}(s,\chi) : \phi \longmapsto \widetilde{\zeta}(s,\chi,\phi) := \int_{F^\times} \phi(x)\chi(x)|x|_F^s \, \mathrm{d}^\times x, \quad \phi \in \mathscr{S}(F)$$

で定義する. 積分は s に関して広義一様絶対収束して, $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に解析接続される ([RV, 7-2 Theorem]). 局所 L-函数 $L(s,\chi)$ は, F が非アルキメデス的な場合

$$L(s,\chi) = \begin{cases} 1 & (\chi|\mathfrak{O}^\times \neq 1), \\ (1 - \chi(\varpi)q^{-s})^{-1} & (\chi|\mathfrak{O}^\times = 1) \end{cases} \tag{3.1}$$

となり, F がアルキメデス的な場合

$$L(s,\chi) := \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\delta_\chi), & (F \cong \mathbb{R}), \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s), & (F \cong \mathbb{C}) \end{cases}$$

となる. L 因子の定義から, $s \mapsto L(s,\chi)^{-1}\,\widetilde{\zeta}(s,\chi,\phi)$ は $\mathbb{C}$ 上正則になる.

ψ_F を加法群 F の非自明連続指標とする.

- $F \cong \mathbb{R}$ の場合, $\psi_F(x) := \exp(2\pi i x)\,(x \in \mathbb{R})$,
- $F \cong \mathbb{C}$ の場合, $\psi_F(z) := \exp(4\pi i \mathrm{Re}(z))\,(z \in \mathbb{C})$

と選ぶ. F が非アルキメデス的な場合, 連続性から ψ_F は F のある可逆分数イデアル上で自明になる: そこで, $d = d(\psi_F) \in \mathbb{Z}$ を $\psi_F|\mathfrak{p}^{-d} = 1$ となる最大の整数とする.

$\phi \in \mathscr{S}(F)$ のフーリエ変換を, (§3 の最初で決めた)F のハール測度によって

$$\widehat{\phi}(y) := \int_F \phi(x)\,\psi_F(xy)\,\mathrm{d}x, \quad y \in F \tag{3.2}$$

で定義すると,

$$\widehat{\widehat{\phi}}(x) = C_{\psi_F}\,\phi(-x), \qquad C_{\psi_F} := \begin{cases} q^d & (F \text{ が非アルキメデス的}), \\ 1 & (F \text{ がアルキメデス的}) \end{cases} \tag{3.3}$$

であること [7] と, 更に $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ より $\chi^{-1} = \chi$ に注意すると, 局所函数等式は

$$C_{\psi_F}^{1/2} \times \frac{\widetilde{\zeta_F}(1-s,\chi,\phi)}{L(1-s,\chi)} = \varepsilon(s,\chi,\psi_F)\,\frac{\widetilde{\zeta_F}(s,\chi,\widehat{\phi})}{L(s,\chi)} \tag{3.4}$$

となる. ここで, $\varepsilon(s,\chi,\psi_F) \in \mathbb{C}^\times$ は局所 epsilon 因子である.

$$\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s,\chi) := \frac{L(s,\chi)}{L(1-s,\chi)}\varepsilon(s,\chi,\psi_F)^{-1}\,C_{\psi_F}^{1/2} \tag{3.5}$$

と定義すると, この函数の明示公式は次のようになる.

- $F = \mathbb{R}$ のとき,

$$i^{\delta_\chi}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\delta_\chi)\Gamma_{\mathbb{R}}(1-s+\delta_\chi)^{-1}$$

[7] ψ_F に関して自己双対的な F のハール測度 $C_{\psi_F}^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ によってフーリエ変換を定義し理論を展開するのが普通.

- $F=\mathbb{C}$ のとき,

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(1-s)^{-1}$$

- F が非アルキメデス的なとき,

$$q^{ds}\times\begin{cases}(1-\chi(\varpi)q^{-1+s})/(1-\chi(\varpi)q^{-s}) & (\mathfrak{f}_\chi=\mathfrak{O}),\\ \varrho_\chi\,\mathrm{N}(\mathfrak{f}_\chi)^{s-1/2} & (\mathfrak{f}_\chi\subset\mathfrak{p})\end{cases}$$

ここで

$$\varrho_\chi:=\mathrm{N}(\mathfrak{f}_\chi)^{-1/2}\sum_{u\in\mathfrak{O}^\times/(1+\mathfrak{f}_\chi)}\chi(u)\psi_F(u\varpi^{-d-\mathrm{ord}(\mathfrak{f}_\chi)}).$$

3.2.2 軌道型

$\delta\in[F^\times]_2$, $\mathrm{Re}(s)>0$ について

$$\zeta_F(s,\delta,\phi):=\int_{\delta(F^\times)^2}\phi(x)\,|x|_F^s\,\mathrm{d}x,\quad \phi\in\mathscr{S}(F)$$

と定義する. 明らかに,

$$\sum_{\delta\in[F^\times]_2}\chi(\delta)\,\zeta_F(s,\delta,\phi)=\widetilde{\zeta_F}(s,\chi,\phi),\quad \mathrm{Re}(s)>0 \tag{3.6}$$

である. 有限群 $[F^\times]_2$ のフーリエ反転公式 (指標の直交関係式) から

$$\zeta_F(s,\delta,\phi)=\frac{1}{\#([F^\times]_2)}\sum_{\chi\in\widehat{[F^\times]_2}}\chi(\delta)\,\widetilde{\zeta_F}(s,\chi,\phi),\qquad \mathrm{Re}(s)>0 \tag{3.7}$$

となる. これにより, $\zeta_F(s,\delta,\phi)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続されることが分かる. また (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) を組み合わせることで, 次の函数等式が得られる：

$$\zeta_F(s,\delta,\widehat{\phi})=\frac{1}{\#([F^\times]_2)}\sum_{\epsilon\in[F^\times]_2}\gamma_{\psi_F}(s,\epsilon\delta)\,\zeta_F(1-s,\epsilon,\phi)$$

ただし,

$$\gamma_{\psi_F}(s,\delta):=\sum_{\chi\in\widehat{[F^\times]_2}}\chi(\delta)\,\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s,\chi),\quad \delta\in F^\times.$$

3.3 局所ゼータ積分の定義 (収束性)

$X \in V(F)$ の成分 (2.2) により, $V(F)$ の加法的ハール測度を

$$\mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_{12}\,\mathrm{d}x_2 \tag{3.8}$$

で定義する. $g \in G(F)$ の成分 (2.1) により, $G(F)$ の測度を

$$\mathrm{d}g = \mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}^\times c \tag{3.9}$$

で定義すると, これは $G(F)$ の右不変ハール測度であることが確かめられる [8]. 補題 2.1 から, $V(F)$ は $G(F)$-軌道 $F^0(F,\delta)$ ($\delta \in [F^\times]_2$) に分割される. ここで, 補題 3.1 から, $G(F)$ 軌道の個数は有限であり, $V^0(F,\delta)$ は $V(F)$ の開かつ閉なる集合となる.

定義 3.3 $\delta \in [F^\times]_2$, $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ とする. $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$, $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して,

$$Z_F(\Phi, s, \delta) = \int_{V^0(F,\delta)} \Phi(X)\,|P_1(X)|_F^{s_1-1}|P(X)|_F^{s_2-1}\,\mathrm{d}X \text{ (軌道型)},$$

$$\widetilde{Z}_F(\Phi, s, \chi) = \int_{V(F)} \Phi(X)\,|P_1(X)|_F^{s_1-1}\chi(P(X))|P(X)|_F^{s_2-1}\,\mathrm{d}X \text{ (指標型)}.$$

$\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ に対して, (2.2) で成分が与えられる $X \in V(F))$ での函数の値を $\Phi(x_1, x_{12}, x_2)$ のようにも書く.

補題 3.4 積分 $Z_F(\Phi, s, \delta)$, $\widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi)$ は領域

$$\mathrm{Re}(s_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(s_2) > 0, \quad \mathrm{Re}(s_1 + s_2) > \tfrac{1}{2} \tag{3.10}$$

において広義一様に絶対収束する.

証明 *cf.* [KTW, Lemma3.1]. □

補題 2.1(1),(2) および $[F^\times]_2$ での指標の直交関係式から, 領域 (3.10) において次の等式が成り立つ：

$$\widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi) = \sum_{\delta \in [F^\times]_2} Z_F(\Phi, s, \delta)\,\chi(\delta), \tag{3.11}$$

$$Z_F(\Phi, s, \delta) = \frac{1}{\#([F^\times]_2)} \sum_{\chi \in \widehat{[F^\times]_2}} \widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi)\,\chi(\delta). \tag{3.12}$$

---

[8] G はユニモジュラーではないことに注意. $|\tau_1(g)^{-2}\tau(g)|^{-1/2}\,\mathrm{d}g$ は左不変ハール測度になる.

補題 3.5 絶対収束域 (3.10) において, 次の等式が成立する:

$$
\begin{aligned}
&Z_F(\Phi, s, \delta) \\
&= (1-q^{-1})^2 2^{-1} |2|_F |\delta|_F^{s_2} \iiint_{F^\times \times F \times F^\times} |a|_F^{s_1} |a^2c^2|_F^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2-\delta c^2))\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c \qquad (3.13)\\
&= (1-q^{-1})^2 2^{-1} |2|_F \int_{G(F)} \Phi(gX_\delta) |P_1(gX_\delta)|_F^{s_1} |P(gX_\delta)|_F^{s_2}\, \mathrm{d}g, \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

ここで, $\mathrm{d}g$ は (3.9) で定義した $G(F)$ の右不変ハール測度である.

$$
\widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi) = (1-q^{-1})^2 \int_{F^\times} \int_F \int_{F^\times} |a|_F^{s_1} |a^2c|_F^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2-c)) \chi(c)\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c \qquad (3.15)
$$

証明 補題 2.1(2),(3) から, 写像 $j : G(F) \ni g \longmapsto gX_\delta \in V^0(F, \delta)$ は $2:1$ の全射となる. (2.1), (2.2) のように $g \in G(F)$, $X \in V^0(F, \delta)$ を成分で表すと, $X = j(g)$ は

$$
x_1 = a, \quad x_{12} = ab, \quad x_2 = a(b^2 - \delta c^2)
$$

と書きなおせる. これより,

$$
j^*(dx_1 \wedge dx_{12} \wedge dx_2) = -2\delta\, a^3 c^2 \frac{da}{a} \wedge db \wedge \frac{dc}{c}
$$

となるので, $j : G(F) \to V^0(F, \delta)$ は F-解析多様体の submersive な射になる. F および $F^\times$ のハール測度の決め方と, 積分の変数変換公式から $V^0(F, \delta)$ 上の可積分関数 $f(X) = f(x_1, x_{12}, x_2)$ に対して,

$$
\tfrac{(1-q^{-1})^2}{2} |2\delta|_F \iiint_{F^\times \times F \times F^\times} f(a, ab, a(b^2-\delta c^2))\, |a^3c^2|_F\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c = \int_{V^0(F,\delta)} f(X)\, \mathrm{d}X
$$

であり, $G(F)$ のハール測度の定義 (3.9) から

$$
\int_{G(F)} f(gX_\delta) \mathrm{d}g = \int_{F^\times} \int_F \int_{F^\times} f(a, ab, a(b^2-\delta c^2))\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c
$$

である. $P_1(gX_\delta)P(gX_\delta) = a^3c^2\delta$ に注意して, $f(X) = \Phi(X)|P_1(X)|_F^{s_1-1}|P(X)|_F^{s_2-1}$ に対してこれらの公式を使えば等号 (3.13), (3.14) が従う.

式 (3.11) の右辺に (3.13) を代入し, c に関する積分に対して $c' = \delta c^2$ と変数

変換を行う：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\delta \in [F^\times]_2} \chi(\delta)(1-q^{-1})^2 2^{-1} |2|_F \\
&\qquad \times \int_{F^\times} \int_F \left\{ \int_{\delta(F^\times)^2} |a|_F^{s_1} |a^2 c'|_F^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2 - c'))\, 2|2|_F^{-1} \mathrm{d}^\times c' \right\} \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b \\
&= (1-q^{-1})^2 \int_{F^\times} \int_F \left\{ \sum_{\delta \in [F^\times]_2} \chi(\delta) \int_{\delta(F^\times)^2} |a|_F^{s_1} |a^2 c'|_F^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2 - c'))\, \mathrm{d}^\times c' \right\} \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b \\
&= (1-q^{-1})^2 \int_{F^\times} \int_F \int_{F^\times} \chi(c')\, |a|_F^{s_1} |a^2 c'|_F^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2 - c'))\, \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}^\times c'
\end{aligned}
$$

となり, (3.15) が示された. □

3.4 不分岐局所ゼータ積分の明示公式

この節では F は非アルキメデス的とする.

命題 3.6 (1) 任意の指標 $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ に対して,

$$
\widetilde{Z_F}(\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O})}, s, \chi) = (1-q^{-1})^2 \times \frac{\zeta_F(s_1)\, \zeta_F(2s_1 + 2s_2 - 1)\, L(s_2, \chi)}{L(2s_1 + s_2, \chi)\, \mathrm{N}(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}}
$$

(2) $2 \in \mathfrak{O}^\times$ とする. 任意の $\delta \in [F^\times]_2$ に対して,

$$
Z_F(\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O})}, s, \delta) = \frac{(1-q^{-1})^2}{2} \times \frac{\zeta_F(s_1)\, \zeta_F(2s_2)\, \zeta_F(2s_1 + 2s_2 - 1)\, L(s_1, \chi_\delta)}{\zeta_F(2s_1)\, L(s_1 + 2s_2, \chi_\delta)\, \mathrm{N}(\mathfrak{f}_{\chi_\delta})^{s_2}}
$$

ただし, χ_δ は $F^\times$ の指標 $x \mapsto (x, \delta)_F$ を表す.

証明 [KTW, Theorem 3.11, Corollary 3.12]. □

3.5 局所ゼータ積分の線型独立性

$V^0(F, \delta')$ ($\delta' \in [F^\times]_2$) は $V^0(F)$ の互いに素な開集合からなる被覆である. 定義 3.3 から $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ の台が $V^0(F)$ に含まれるならば $Z_F(\Phi, s)$ は任意の $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ で絶対収束する. これらから次の補題は容易に従う.

補題 3.7 $\delta \in [F^\times]_2$, $s \in \mathbb{C}^2$ に対して, $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ で次の 2 条件を満たすものが存在する：

- $\mathrm{Supp}(\Phi) \subset V^0(F, \delta)$,

- $Z_F(\Phi, s, \delta) \neq 0$ であり, しかも, $\delta' \neq \delta$ ならば $Z_F(\Phi, s, \delta') = 0$.

系 3.8 $\chi \in \widehat{[F^\times]_2}$, $s \in \mathbb{C}$ に対して, $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ で 2 つの条件

$$\text{(i) } \widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi) \neq 0, \text{ (ii) } \omega \neq \chi \text{ ならば } \widetilde{Z_F}(\Phi, s, \omega) = 0$$

を満たすものが存在する.

証明 補題 3.7 より各 $\delta \in [F^\times]_2$ について $\Phi_\delta \in \mathscr{S}(V(F))$ を $Z_F(\Phi_\delta, s, \delta) = 1$, $Z_F(\Phi_\delta, s, \delta') = 0\,(\delta' \neq \delta)$ となるようにとり,

$$\Psi_\chi(X) := \sum_{\delta \in [F^\times]_2} \Phi_\delta(X)\,\chi(\delta), \quad X \in V(F)$$

と定義すると, (3.11) と指標の直交性より $\widetilde{Z_F}(\Psi_\chi, s, \omega) = \#([F^\times])\,\delta_{\chi,\omega}$. □

3.6 解析接続と局所函数等式

3.6.1 フーリエ変換

(2.8) で定義した pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle : V(F) \times V(F) \to F$ を想起する. $Y \in V(F)$ に対して, $V(F)$ の指標 $X \mapsto \psi_F(\langle X, Y \rangle)$ を対応させることで, $V(F) \cong \widehat{V(F)}$.

定義 3.9 $\Phi \in \mathscr{S}(V(F)))$ のフーリエ変換 $\widehat{\Phi} \in \mathscr{S}(V(F))$ を次で定義する:

$$\widehat{\Phi}(Y) := \int_{V(F)} \Phi(X)\,\psi_F(\langle Y, X \rangle)\,\mathrm{d}X, \quad Y \in V(F).$$

この節の残りの部分では F は非アルキメデス的と仮定する. $V(F)$ の閉部分群 L に対して, 位相的直交

$$L^\vee := \{Y \in V(F) \mid \psi_F(\langle X, Y \rangle) = 1\,(\forall X \in L)\}$$

は $V(F)$ の閉部分群になり, $(L^\vee)^\vee = L$ が成り立つ. $V(F)$ の部分 $\mathfrak{O}$-加群 L が $V(F)$ の F-基底で生成されるとき $\mathfrak{O}$-格子と呼ぶ. $\mathfrak{O}$-格子は $V(F)$ のコンパクト部分群, 特に閉部分群である. $\mathfrak{O}$-公式 L の代数的な双対 $\mathfrak{O}$-格子は

$$L^* := \{X \in V(F) \mid \langle X, L \rangle \subset \mathfrak{O}\}$$

で定義される. 整数 $d = d(\psi_F)$ を想起する (§3.2.1).

補題 3.10 (1) 任意の $\mathfrak{O}$-格子 $L \subset V(F)$ について,

$$\widehat{\mathbb{1}_L} = \mathrm{vol}(L)\ \mathbb{1}_{L^\vee},$$
$$L^\vee = \varpi^{-d}L^*, \qquad \mathrm{vol}(L)\,\mathrm{vol}(L^\vee) = q^{3d}|2|_F^{-1}$$

(2) 任意の $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ に対して, $\widehat{\widehat{\Phi}}(X) = |2|_F^{-1}q^{3d} \times \Phi(-X)$ が成り立つ.

証明 コンパクト群 L の指標の直交関係式から

$$\widehat{\mathbb{1}_L}(Y) = \int_L \psi_F(\langle X, Y\rangle)\,\mathrm{d}Y = \mathrm{vol}(L)\,\mathbb{1}_{L^\vee}(Y)$$

となり最初の等式が従う. $\mathfrak{d}^{-1} := \{x \in F \mid \psi_F(x\mathfrak{O}) = \{1\}\}$ と定義すると, d の定義から $\mathfrak{d} = \varpi^d\mathfrak{O}$ である. よって

$$\begin{aligned} X \in L^\vee \quad &\Longleftrightarrow \quad \psi_F(\langle X, Y\rangle) = 1\,(\forall Y \in L) \\ &\Longleftrightarrow \quad \langle X, L\rangle \subset \mathfrak{d}^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \quad \langle \varpi^d X, L\rangle \subset \mathfrak{O} \quad \Longleftrightarrow \quad \varpi^d X \in L^* \end{aligned}$$

となるから, $L^\vee = \varpi^{-d}L^*$ である. $\widehat{\mathbb{1}_L} = \mathrm{vol}(L)\,\mathbb{1}_{L^\vee}$ は任意の $\mathfrak{O}$-格子で成立し, $(L^\vee)^\vee = L$ だから,

$$\widehat{\widehat{\mathbb{1}_L}} = \mathrm{vol}(L)\,\widehat{\mathbb{1}_{L^\vee}} = \mathrm{vol}(L)\,\mathrm{vol}(L^\vee)\ \mathbb{1}_L$$

フーリエ反転公式からある正の定数 C が存在して, 任意の $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ について $\widehat{\widehat{\Phi}}(X) = C\Phi(-X)$ となる. よって, $C = \mathrm{vol}(L)\,\mathrm{vol}(L^\vee)$ となる. $L = V(\mathfrak{O})$ とすると,

$$V(\mathfrak{O})^* = \{X \in V(F) \mid x_1, x_2 \in \mathfrak{O},\, x_{12} \in 2^{-1}\mathfrak{O}\}$$

より, (測度の決め方 (3.8) から)$\mathrm{vol}(V(\mathfrak{O})) = 1$, $\mathrm{vol}(V(\mathfrak{O})^*) = |2|_F^{-1}$. よって,

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(L)\mathrm{vol}(L^\vee) = C &= \mathrm{vol}(V(\mathfrak{O}))\mathrm{vol}(V(\mathfrak{O})^\vee) \\ &= \mathrm{vol}(V(\mathfrak{O}))\mathrm{vol}(\varpi^{-d}V(\mathfrak{O})^*) = |\varpi^{-d}|_F^3|2^{-1}|_F \end{aligned}$$

□

系 3.11 $V(\mathfrak{O}) = V(\mathfrak{O})^\vee$ は $d = 0$ かつ $2 \in \mathfrak{O}^\times$ と同値である.

証明 $V(\mathfrak{O}) \subset V(\mathfrak{O})^\vee$ だから, $\mathrm{vol}(V(\mathfrak{O})) = \mathrm{vol}(V(\mathfrak{O})^\vee)$ と $V(\mathfrak{O}) = V(\mathfrak{O})^\vee$ は同値. □

3.6.2 Weil 定数

$a \in F^\times$ に対して, 定数 $\alpha_{\psi_F}(a) \in \mathbb{C}^\times$(Weil 定数という) が存在して, 任意の $\phi \in \mathscr{S}(F)$ に対して等式

$$\int_F \phi(x)\,\psi_F(ax^2)\,\mathrm{d}x = \alpha_{\psi_F}(a)|2a|_F^{-1/2}\int_F \widehat{\phi}(x)\,\psi_F\left(-\tfrac{x^2}{4a}\right)\,\mathrm{d}x$$

が成立することが知られている (*cf.* [池田]). この定義から, $\alpha_{\psi_F}(a)$ は平方類 $a(F^\times)^2$ のみに依存することが分かる. また

$$\frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(ab)} = \frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(a)}\frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(b)}(a,b)_F, \quad a,b \in F^\times, \tag{3.16}$$

$$\alpha_{\psi_F}(a)^4 = (-1,-1)_F, \quad a \in F^\times, \tag{3.17}$$

$$\overline{\alpha_{\psi_F}(a)} = \alpha_{\psi_F}(-a), \quad a \in F^\times$$

などが成り立つ. とくに, (3.17) から $\alpha_F(a)$ は 1 の 8 乗根である.

3.6.3 定理

$\gamma_{\psi_F}(s,\delta)$ (§3.2.2), $\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s,\chi)$ (§3.2.1) を思い出そう.

定義 3.12 (1) $\delta, \varepsilon \in [F^\times]_2$ に対して, $G_{\psi_F}(s,\delta,\varepsilon) :=$

$$\frac{1}{|2|_F^{1/2}\#([F^\times]_2)}\sum_{\eta\in[F^\times]_2}\alpha_{\psi_F}(-\eta)\,\gamma_{\psi_F}(s_2\delta\eta)\,\gamma_{\psi_F}(s_1+s_2-\tfrac{1}{2},\varepsilon\eta)$$

とおく.

(2) $\chi,\omega \in \widehat{[F^\times]_2}$ に対して, $\widetilde{G_{\psi_F}}(s,\chi,\omega) :=$

$$\frac{1}{|2|_F^{1/2}\#([F^\times]_2)}\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s_2,\chi)\,\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s_1+s_2+\tfrac{1}{2},\omega)\sum_{\eta\in[F^\times]_2}\alpha_{\psi_F}(-\eta)\,(\chi\omega)(\eta)$$

とおく.

§3.1 から, $\widehat{\{F^\times]_2} = \{\omega_a \mid a \in [F^\times]_2\}$ を思い出す. $\widetilde{G_{\psi_F}}(s,\chi,\omega)$ については, 次の簡明な表示ができる:

補題 3.13 $a,b \in [F^\times]_2$ とすると,

$$\widetilde{G_{\psi_F}}(s,\omega_a,\omega_b) = \frac{\alpha_{\psi_F}(-1)\alpha_{\psi_F}(-ab)^{-1}}{\sqrt{|2|_F\,\#([F^\times]_2)}}\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s_2,\chi_a)\,\widetilde{\gamma_{\psi_F}}(s_1+s_2+\tfrac{1}{2},\chi_b)$$

証明 $c_F := \#([F^\times]_2)$ とおく. 次の等式を示せばよい：

$$\sum_{\eta\in[F^\times]_2} \alpha_{\psi_F}(-\eta)\,\omega_a\omega_b(\eta) = c_F^{1/2}\,\frac{\alpha_{\psi_F}(-1)}{\alpha_{\psi_F}(-ab)} \tag{3.18}$$

[池田, 命題 1.9](を関係 $\gamma(2a) = \alpha_{\psi_F}(a)$ で補正した) より

$$\sum_{\eta\in[F^\times]_2} \alpha_{\psi_F}(\eta)(\eta, a)_F = c_F^{1/2}\frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(a)}, \quad a \in F^\times$$

である. これを使うと, (3.18) の右辺は次のように計算される:

$$\begin{aligned}\sum_{\eta\in[F^\times]_2} \alpha_{\psi_F}(\eta)\,(ab, -\eta)_F &= (ab, -1)_F \sum_{\eta\in[F^\times]_2} \alpha_{\psi_F}(\eta)\,(ab, \eta)_F \\ &= (ab, -1)_F \times c_F^{1/2}\frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(ab)}.\end{aligned}$$

さらに, (3.16) を使うと, $\frac{\alpha_F(-1)}{\alpha_{\psi_F}(-ab)} = (ab, -1)_F\frac{\alpha_{\psi_F}(1)}{\alpha_{\psi_F}(ab)}$ なので, 等号 (3.18) が分かる. □

(6.3) で定義されるアフィン変換 $f_\gamma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を考える.

命題 3.14 任意の $\Phi \in \mathscr{S}(V(F))$ に対して, (3.10) 上で定義された正則函数 $s \mapsto Z_F(\Phi, s, \delta)$ および $s \mapsto \widetilde{Z_F}(\Phi, s, \chi)$ は $\mathbb{C}^2$ 上の有理型函数に解析接続されて次の函数等式を満たす：

$$Z_F(\widehat{\Phi}, s, \delta) = \sum_{\varepsilon\in[F^\times]_2} G_{\psi_F}(s, \delta, \varepsilon)\, Z_F(\Phi, f_\gamma(s), \varepsilon), \tag{3.19}$$

$$\widetilde{Z_F}(\widehat{\Phi}, s, \chi) = \sum_{\omega\in\widehat{[F^\times]_2}} \widetilde{G_{\psi_F}}(s, \chi, \omega)\, \widetilde{Z_F}(\Phi, f_\gamma(s), \omega). \tag{3.20}$$

証明 最初の等式 (3.19) は [佐藤 89] の特別な場合. ($F \cong \mathbb{R}$ の場合は [新谷, Lemma 1(i)] で得られている.) 2 番目の等式 (3.20) は最初の等式と (3.11) および (3.12) から従う. □

系 3.15 (1) 任意の類 $\delta, \eta \in [F^\times]_2$ に対して,

$$\sum_{\varepsilon\in[F^\times]_2} G_{\psi_F}(s, \delta, \varepsilon)\, G_{\psi_F}(f_\gamma(s), \varepsilon, \eta) = \begin{cases} 1 & (\delta = \eta) \\ 0 & (\delta \neq \eta) \end{cases}$$

(2) 任意の指標 $\xi, \chi \in \widehat{[F^\times]_2}$ に対して,

$$\sum_{\omega \in [F^\times]_2} \widetilde{G_{\psi_F}}(s, \xi, \omega)\, \widetilde{G_{\psi_F}}(f_\gamma(s), \omega, \chi) = \begin{cases} 1 & (\xi = \chi) \\ 0 & (\xi \neq \chi) \end{cases}$$

証明 函数等式 (3.19) を 2 回連続して適用し, 補題 3.7 を使えば (1) 従う. 同様の議論で, (2) は函数等式 (3.20) と系 3.8 から従う. □

4 大域ゼータ積分

4.1 代数体とアデール

F を代数体, その整数環を $\mathfrak{O}_F$ とする. F の有限素点全体の集合を Σ_{fin}, 無限素点全体の集合を Σ_∞ として $\Sigma := \Sigma_\infty \cup \Sigma_{\mathrm{fin}}$ とおく. $\Sigma_{\mathbb{R}}$ を F の実素点全体の集合とし $r_1 := \#\Sigma_{\mathbb{R}}$ をその要素数, F の複素素点全体の集合を $\Sigma_{\mathbb{C}}$ とし $r_2 = \#\Sigma_{\mathbb{C}}$ をその要素数とすれば,

$$\Sigma_\infty = \Sigma_{\mathbb{R}} \cup \Sigma_{\mathbb{C}}, \quad [F : \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$$

となる. 有理数体 $\mathbb{Q}$ の素点 2 の上にある $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ 全体の集合を Σ_2 とおく. 任意の $v \in \Sigma$ に対して, v での F の完備化を F_v とする. F_v は標数 0 の局所体だから §3 で導入した記号や定義が適用される. F_v の乗法的正規付置 $|\cdot|_{F_v}$ を $|\cdot|_v$ と略記する. v が有限素点の場合には, $\mathfrak{O}_v$ を F_v の整数環, $\mathfrak{O}_v$ の極大イデアルを $\mathfrak{p}_v$ とおき, 剰余体 $\mathfrak{O}_v/\mathfrak{p}_v$ の位数を q_v とする.

$\mathbb{A}$ を F のアデール環, F の有限アデール全体を $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ とおく. 従って $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \times F_\infty$ と直積に分解される. $\mathbb{A}$ のハール測度を基本領域 $\mathbb{A}/F$ の測度が 1 となるようにとる.

$U \cong F^n$ を有限次元 F-線型空間とする. F-代数 R に対して, $U(R) := U \otimes_F R$ とおく. $\mathfrak{O}_F$-格子 $L \subset U$ に対して, $\mathfrak{O}_v$-格子 $U(\mathfrak{O}_v) = L \otimes_{\mathfrak{O}_F} \mathfrak{O}_v$ は有限個の例外を除いて L に依存しない. 有限個の v を除いて $\phi_v = \mathbb{1}_{U(\mathfrak{O}_v)}$ であるような $\mathscr{S}(U(F_v))$ の関数 ϕ_v に対して

$$\phi(x) = \prod_{v \in \Sigma} \phi_v(x_v), \quad x = (x_v)_v \in U(\mathbb{A}) \tag{4.1}$$

で定義される関数を $\otimes_v \phi_v$ と書く. このような函数の有限線型結合で表せる $U(\mathbb{A})$ 上の関数を $U(\mathbb{A})$ の Schwarts-Bruhat 関数といい, その全体の集合を $\mathscr{S}(U(\mathbb{A}))$ で表す. 次の補題は積分や級数の収束の議論でしばしば有用である.

補題 4.1 $U = F^n$ とする．任意のコンパクト集合 $\mathcal{N} \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ に対して，$\Phi_1 \in \mathscr{S}(U(\mathbb{A}))$, $\Phi_1 \geqslant 0$ なる函数 Φ_1 が存在して，$|\Phi(xu)| \leqslant \Phi_1(x)$ $(x \in U(\mathbb{A}),\, u \in \mathcal{N})$ が成り立つ．

証明 [雪江, Proposition (1.2.3)] に証明がある． □

$\mathbb{Q}$ のアデール環 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ の基本指標 (basic character) を ψ とする．この指標は $\psi(a) = 1\,(a \in \mathbb{Q})$, $\psi(x_\infty) = e^{2\pi i x_\infty}$ $(x_\infty \in \mathbb{R})$ で特徴付けられる．$\mathbb{A}$ の加法指標を $\psi_F = \psi_{\mathbb{Q}} \circ \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}$ で定義する．$\psi_{F_v} := \phi_F|F_v$ とおくと，

$$\psi_F(x) = \prod_{v \in \Sigma} \psi_{F_v}(x_v), \quad x = (x_v)_v \in \mathbb{A}$$

となる．$v \in \Sigma_\infty$ に対して，ψ_{F_v} は §3.2.1 で考えた標準的なものに一致する．F の可逆分数イデアル $\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}}$ を $\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}}^{-1} := \{a \in F \mid \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}(a\mathfrak{O}_F) \subset \mathbb{Z}\}$ で定義すると，$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ について，$d(\psi_{F_v}) = \mathrm{ord}_v(\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}})$ となる．$F/\mathbb{Q}$ の判別式 Δ_F は $\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}}$ のノルムで定義される[9]: $\Delta_F = \mathbf{N}(\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}})$. 上で固定した $\mathbb{A}$ のハール測度は ψ_F に関して自己双対的である．つまり, Schwartz-Bruhat 関数 $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{A})$ のフーリエ変換を

$$\widehat{\phi}(y) := \int_{\mathbb{A}} \phi(x)\, \psi_F(xy)\, \mathrm{d}y$$

で定義すると，$\widehat{\widehat{\phi}}(x) = \phi(-x)$ が成立する．同様に $\phi_v \in \mathscr{S}(F_v)$ のフーリエ変換は §3 で固定した F_v のハール測度と指標 ψ_{F_v} によって (3.2) で定義される．(3.3) によれば, $\mathbb{A}$ のハール測度 $\mathrm{d}x$, 局所化 F_v のハール測度 $\mathrm{d}x_v$ の制限直積測度の間には

$$\mathrm{d}x = \Delta_F^{-1/2} \prod_{v \in \Sigma} \mathrm{d}x_v \tag{4.2}$$

という関係があることが分かる ([W,]).

$\mathbb{A}^\times$ をイデール群とする．$t = (t_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ のイデールノルム $|t|_{\mathbb{A}}$ は, 任意のボレル集合 $B \subset \mathbb{A}$ に対して $\mathrm{vol}(tB) = |t|_{\mathbb{A}}\,\mathrm{vol}(B)$ なる関係で定義され, $|t|_{\mathbb{A}} = \prod_{v \in \Sigma} |t_v|_v$ で与えられる．イデール群 $\mathbb{A}^\times$ のハール測度 $\mathrm{d}^\times t$ を, §3 で決めた $F_v^\times$ のハール測度 $\mathrm{d}^\times t_v$ の制限直積の $\Delta_F^{-1/2}$ 倍で定義する:

$$\mathrm{d}^\times t = \Delta_F^{-1/2} \prod_{v \in \Sigma} \mathrm{d}^\times t_v \tag{4.3}$$

[9] Δ_F の代わりに, $\mathrm{D}(F)$ や $\mathrm{Disc}(F)$ も良く使われる．

$\mathbb{A}^1 := \{t \in \mathbb{A}^\times \mid |t|_\mathbb{A} = 1\}$ は $\mathbb{A}^\times$ の $F^\times$ を含む閉部分群で $\mathbb{A}^1/F^\times$ はコンパクトである. $t \mapsto |t|_\mathbb{A}$ は $\mathbb{A}^\times/\mathbb{A}^1$ から $\mathbb{R}_{>0}$ の上への位相群同型を引き起こす. これにより, $\mathbb{A}^\times$ のハール測度を $\mathbb{A}^\times/\mathbb{A}^1$ の商測度が $\mathbb{R}_{>0}$ のハール測度 $\mathrm{d}t/t$ に対応するように定義する. $\mathbb{A}^\times/\mathbb{A}^1 \to \mathbb{R}_{>0}$ の section が次ぎのように構成できる. $t \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して, $\underline{t} = (t_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ を $t_v = t^{1/[F:\mathbb{Q}]}$ $(v \in \Sigma_\mathbb{R})$, $t_v = t^{1/2[F:\mathbb{Q}]}$ $(v \in \Sigma_\mathbb{C})$, $t_v = 1\,(v \in \Sigma_{\mathrm{fin}})$ で定義し, $\underline{\mathbb{R}_{>0}} = \{\underline{t} \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$ とおく. $|\underline{t}|_\mathbb{A} = t$ となる. これにより, $\mathbb{A}^\times = \mathbb{A}^1\,\underline{\mathbb{R}_{>0}}$ と直積に分解される.

4.2 S-整数環とそのイデアル

S を Σ の有限部分集合で $\Sigma_\infty \subset S$ となるものとする.

$$F_S = \prod_{v \in S} F_v \qquad (\text{直積環})$$

と定義し, $F_\infty := F_{\Sigma_\infty}$ とおく. $(t_v)_{v\in S} \in F_S^\times$ を $t_v = 1\,(v \in \Sigma - S)$ としてイデール $t = (t_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ と見做すことで $F_S^\times \subset \mathbb{A}^\times$ と埋め込む. $(\mathbb{A}^\times)^S$ を S 成分が 1 であるイデール全体のなす部分群とすると, $\mathbb{A}^\times = F_S^\times\,(\mathbb{A}^\times)^S$ となる. $t \in \mathbb{A}^\times$ に対して, $|t|_S := \prod_{v\in S} |t_v|_v$ と定義する. イデール $t \in \mathbb{A}^\times$ に対して, $t_S \in F_S^\times$, $t^S \in (\mathbb{A}^\times)^S$ を t の $F_S^\times$, $(\mathbb{A}^\times)^S$ への射影とする. 従って, $t_S \in F_S^\times$, $t^S \in (\mathbb{A}^\times)^S$, $t = t_S t^S$ である. 同様に, $g \in G(\mathbb{A})$ について $g_S \in G(F_S)$, $g^S \in G(\mathbb{A})^S$ を定義する.

$\mathfrak{O}_F(S)$ を S-整数環とする, i.e.,

$$\mathfrak{O}_F(S) := \{x \in F \mid \mathrm{ord}_v(x\mathfrak{O}_v) \geqslant 0\,(\forall v \in \Sigma - S)\} = F \cap (F_S \prod_{v \notin S} \mathfrak{O}_v).$$

$\mathfrak{O}_F(S)$ は F の Dedekind 部分環で $\mathfrak{O}_F\ (= \mathfrak{O}_F(\Sigma_\infty))$ を部分環に含む. $\mathfrak{O}_F(S)$ の可逆 (i.e., 零でない) イデアル $\mathfrak{a}$ のノルムは

$$\mathbf{N}_S(\mathfrak{a}) = \#(\mathfrak{O}_F(S)/\mathfrak{a})$$

で定義される. ($S = \Sigma_\infty$ のとき, $\mathbf{N}_S(\mathfrak{a})$ を単に $\mathbf{N}(\mathfrak{a})$ と書く.) 可逆イデアル $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{O}_F(S)$ に対してイデール $\alpha = (\alpha_v)_v$ を, $\alpha_v = \varpi_v^{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{a}\mathfrak{O}_v)}$ $(v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - S)$, $\alpha_v = 1\,(v \in S)$ で定義すると, 対応 $\mathfrak{a} \mapsto \alpha$ は積を保ち, $\mathbf{N}_S(\mathfrak{a}) = \prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - S} |\alpha_v|_v^{-1}$ となる. これより, $\mathbf{N}_S(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathbf{N}_S(\mathfrak{a})\mathbf{N}_S(\mathfrak{b})$ となる. $\nu \in \mathfrak{O}_F(S) - (0)$ に対して, $\mathbf{N}_S(\nu) := \mathbf{N}_S(\nu\mathfrak{O}_F(S))$ とおく. $\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\nu)$ を体のノルム写像とすると,

$$\mathbf{N}_S(\nu) = |\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\nu)|_S, \quad \nu \in \mathfrak{O}_F(S) - (0)$$

となることが分かる．対応 $\mathfrak{a} \mapsto \alpha$ は $\mathfrak{O}_F(S)$ のイデアル類群から, イデール群の商

$$\mathrm{Cl}(F,S) := \mathbb{A}^\times / F^\times F_S^\times \prod_{v \notin S} \mathfrak{O}_v^\times$$

の上への同型を導く．これは有限群なのでその位数を $h_F(S)$ とおく．$S \subset S'$ ならば全射準同型 $\mathrm{Cl}(F,S) \to \mathrm{Cl}(F,S')$ があるから, $h_F(S') \mid h_F(S)$ である．$\mathrm{Cl}(F,\Sigma_\infty)$ は通常のイデアル類群であるから, もし F の類数が 1 ならば $h_F(S)=1$ である．F が一般でも S が十分大きければ $h_F(S)=1$ となる．

4.3 Iwasawa-Tate 理論 (大域)

χ をイデール類群 $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の連続指標で $\chi|\underline{\mathbb{R}_{>0}} = 1$ なるものとする．各 $v \in \Sigma$ に対して $\chi_v := \chi|F_v^\times$ とおくと, $\chi(x) = \prod_v \chi_v(x_v)$, $x = (x_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ となる．$\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{A})$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ について

$$\zeta(s,\chi,\phi) := \int_{\mathbb{A}^\times} \phi(x)\chi(x)|x|_{\mathbb{A}}^s \, \mathrm{d}^\times x,$$
$$\zeta_+(s,\chi,\phi) := \int_{\substack{\mathbb{A}^\times \\ |t|_{\mathbb{A}} \geqslant 1}} \phi(x)\chi(x)|x|_{\mathbb{A}}^s \, \mathrm{d}^\times x$$

とおく．$\zeta(s,\chi,\phi)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ において, $\zeta_+(s,\chi,\phi)$ は任意の $s \in \mathbb{C}$ で広義一様に絶対収束してその領域で正則函数を定める．Poisson 和公式を使うことで示される次の等式によって $\zeta(\phi,\chi,s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に $s=0,1$ で高々 1 位の極を除いて正則に解析接続される:

$$\zeta(s,\chi,\phi) = \zeta_+(s,\chi,\phi) + \zeta_+(1-s,\chi^{-1},\widehat{\phi}) - \mathrm{vol}(\mathbb{A}^1/F^\times)\delta_{\chi,\mathbf{1}}\left(\tfrac{1}{s}\phi(0) + \tfrac{1}{1-s}\widehat{\phi}(0)\right). \tag{4.4}$$

完備ヘッケの L-函数 $L(s,\chi)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ においては次の絶対収束するオイラー積で定義される:

$$L(s,\chi) := \prod_{v \in \Sigma} L(s,\chi_v), \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

$\phi = \otimes_v \phi_v$, $\phi_v \in \mathscr{S}(F_v)$, S は Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合で $v \notin S$ ならば $\mathfrak{f}_{\chi_v} = \mathfrak{O}_v$, $\phi_v = \mathbb{1}_{\mathfrak{O}_v}$, $d(\psi_{F_v}) = 0$ となるものとすると

$$\widetilde{\zeta_{F_v}}(s,\chi_v,\mathbb{1}_{\mathfrak{O}_v}) = L(s,\chi_v), \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

であり, (4.3) より

$$\zeta(s,\chi,\phi) = \Delta_F^{-1/2} L(s,\chi) \prod_{v \in S} \frac{\widetilde{\zeta_{F_v}}(s,\chi_v,\phi_v)}{L(s,\chi_v)} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

と分解される, ただし S は Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合である. 以上のことから, 函数 $L(s,\chi)$ は $\mathbb{C}$ 全体上の有理型函数に解析接続されて, $s=0,1$ での高々 1 位の極以外では正則となること, $s=0,1$ が極になる条件は χ が自明指標になることが示される. $\chi=\mathbf{1}$ のとき, $L(s,\mathbf{1})$ はガンマ因子で完備化された Dedekind ゼータ函数 $\zeta_F(s)$ である. 有限集合 $S\subset\Sigma$ に対して, $L^S(s,\chi)$ を $\Sigma-S$ 上での部分積で定義する. $S(\chi):=\{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}\mid \chi_v|\mathfrak{O}_v^\times\neq\mathbf{1}\}$ とおき, χ の導手 $\mathfrak{f}_\chi$ を $\mathfrak{O}_F$ のイデアル $\mathfrak{f}_{\chi_v}\cap\mathfrak{O}$ の $v\in S(\chi)$ に亘る積として定義する.

$$\Lambda(s,\chi):=(\Delta_F\mathbf{N}(\mathfrak{f}_\chi))^{s/2}\,L(s,\chi),\qquad W(\chi):=\prod_{v\in S(\chi)\cup\Sigma_\infty}\varrho_{\chi_v}$$

とおくと, 函数等式 $\Lambda(s,\chi)=W(\chi)\Lambda(1-s,\chi)$ が成り立つ. さらに, $|W(\chi)|=1$ であり, $\chi^2=\mathbf{1}$ ならば $W(\chi)=1$ であることもいえる ([RV, p.303, Excercise 11]). とくに $\chi=\mathbf{1}$ のときを考えると, $\Lambda_F(s):=\Delta_D^{s/2}\zeta_F(s)$ は函数等式 $\Lambda_F(1-s)=\Lambda_F(s)$ を満たす. これより, $\zeta_F^{\Sigma_\infty}(s)$ の非対称的な函数等式：

$$\zeta_F^{\Sigma_\infty}(1-s)=\Delta_F^{s-1/2}\cos\left(\tfrac{\pi s}{2}\right)^{t+r_2}\sin\left(\tfrac{\pi s}{2}\right)^{r_1-t+r_2}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2+2r_2}\,\zeta_F^{\Sigma_\infty}(s)\quad(4.5)$$

を得る.

4.3.1 凸評価 (Convexity bound)

$\kappa(\sigma)=0\,(\sigma\geqslant 1)$, $\kappa(\sigma)=\frac{1-\sigma}{2}\,(0\leqslant\sigma\leqslant 1)$, $\kappa(\sigma)=\frac{1}{2}-\sigma\,(\sigma\leqslant 0)$ とおくと, 函数等式とガンマ因子の評価 (Stirling 公式), Phragmen-Lindelöf の凸性原理を使うと次の評価が得られる ([IK, Excercise 3])：任意の $\varepsilon>0$ に対して定数 $C_\varepsilon>0$ が存在して, $\mathbb{C}$ 上で [10]

$$|s(1-s)\,L^{\Sigma_\infty}(s,\chi)|\leqslant C_\varepsilon\,(1+|s|)^2\,\{(3+|\mathrm{Im}(s)|)^{[F:\mathbb{Q}]}\mathbf{N}(\mathfrak{f}_\chi)\}^{\kappa(\mathrm{Re}(s))+\varepsilon}.\quad(4.6)$$

4.3.2 実 Hecke 指標とその類体論による記述

$\mathfrak{C}_F$ をイデール類指標 $\chi=\prod_v\chi_v\in\widehat{\mathbb{A}^\times/F^\times\mathbb{R}_{>0}}$ であって $\chi^2=\mathbf{1}$ を満たすものとする. S を Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合とする. $\chi\in\mathfrak{C}_F$ について, $\chi_S:=\otimes_{v\in S}\chi_v\in\widehat{[F_S^\times]_2}$ とおく. $\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}$ に対して, $\mathfrak{C}_F(\omega_S)$ をイデール類指標 $\chi\in\mathfrak{C}_F$ で $\chi_S=\omega_S$ を満たすもの全体の集合とする. $\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)$ に対し

[10](4.6) 左辺の $s(1-s)$ は $\chi=\mathbf{1}$ のときに極を解消するためにかけてある. 右辺の最初の $1+|s|)^2$ で $s(1-s)$ の影響はキャンセルされる.

て, $\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi\mathfrak{O}_F(S))$ を $\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)$ と略記する, ここで $\mathfrak{f}_\chi \subset \mathfrak{O}_F$ は χ の導手である. つまり, $\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi) = \prod_{v\notin S} \mathrm{N}(\mathfrak{f}_{\chi_v}) = \prod_{v\notin S} \#(\mathfrak{O}_v/\mathfrak{f}_{\chi_v})$.

$\delta \in [F^\times]_2$ に対して, $\chi_\delta \in \mathfrak{C}_F$ を

$$\chi_\delta(x) := \prod_{v\in\Sigma} (\delta, x_v)_{F_v}, \quad x = (x_v)_v \in \mathbb{A}^\times$$

で定義する. (殆どすべての素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ で $\delta, x_v \in \mathfrak{O}_v^\times$ かつ $v \notin \Sigma_2$ なので $(\delta, x_v)_{F_v} = 1$ に注意する.) $\delta \notin (F^\times)^2$ ならば, χ_δ の核は大域類体論で F の 2 次拡大 $F(\sqrt{\delta})/F$ に対応する開部分群に一致する. このことから, 群準同型写像 $[F^\times]_2 \ni \delta \longmapsto \chi_\delta \in \mathfrak{C}_F$ は同型になる. χ_δ の導手は $\mathfrak{f}_{\chi_\delta} = \mathrm{N}_{F(\sqrt{a})/F}(\mathfrak{d}_{F(\sqrt{a})/F})$(相対判別式) で与えられる.

4.3.3 実 Hecke 指標の L-函数

$\omega_S = \otimes_{v\in S}\omega_v \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ に対して, $t = t(\omega_S) := \#\{v \in \Sigma_\mathbb{R} \mid \omega_v = \mathbf{1}\}$,

$$\Gamma_S(s,\omega_S) := \Delta_F^{s-1/2} \cos\left(\tfrac{\pi s}{2}\right)^{t+r_2} \sin\left(\tfrac{\pi s}{2}\right)^{r_1-t+r_2} \Gamma_\mathbb{C}(s)^{[F:\mathbb{Q}]} \times \prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}} \mathrm{N}(\mathfrak{f}_{\omega_v})^{s-1/2} \frac{L(s,\omega_v)}{L(1-s,\omega_v)} \tag{4.7}$$

とおく.

補題 4.2 $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ とする. $\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)$ に対して, $L^S(s,\chi)$ は次の函数等式を満たす:

$$L^S(1-s,\chi) = \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s-1/2}\,\Gamma_S(s,\omega_S)\,L^S(s,\chi). \tag{4.8}$$

証明 $\chi = \mathbf{1}$ の場合, $L^S(s,\chi) = \zeta_F^S(s)$ だから結果は (4.5) から従う. 以下 χ が非自明とし, E/F を大域類体論で $\mathbb{A}^\times/F^\times F_\infty^0$ の指数 2 の開部分群 $\ker(\chi)$ に対応する 2 次拡大とする. すると E の実素点の個数は $2t = 2t(\omega_S)$, E の複素素点の個数は $r_1 - t + 2r_2$ となる. $\zeta_E^{\Sigma_\infty^E}(s)$, $\zeta_F^{\Sigma_\infty}(s)$ の函数等式 (4.5) および関係式 $\zeta_E^{\Sigma_\infty^E}(s) = L^{\Sigma_\infty}(s,\chi)\zeta_F^{\Sigma_\infty}(s)$, $\Delta_E = \Delta_F^2\,\mathbf{N}(\mathfrak{f}_\chi)$ から, $S = \Sigma_\infty$ の場合の函数等式が従う. 一般の S では $L^S(s,\chi) = L^{\Sigma_\infty}(s,\chi)\prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}} L(s,\omega_v)^{-1}$ に注意すれば $S = \Sigma_\infty$ のときの結果から従う. □

補題 4.3 $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ について, $\Gamma_S(s,\omega_S)\,\Gamma_S(1-s,\omega_S) = 1$.

証明 これは直接計算で出る. 或いは $\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)$ を一つ選び, $L^S(s,\chi)$ に函数等式 (4.8) を 2 回使い, $L^S(s,\chi)$ が函数として 0 でないことを使っても従う. □

4.4 大域ゼータ積分の定義 (収束性)

$$\mathcal{D} := \{s \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(s_1) > 1,\ \mathrm{Re}(s_2) > 1\} \tag{4.9}$$

とおく. $G(\mathbb{A})$ の右ハール測度を $g \in G(\mathbb{A})$ の成分 (2.1) によって

$$\mathrm{d}g = \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c \tag{4.10}$$

で定義する.

定義 4.4 $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$, $s = (s_1, s_2) \in \mathcal{D}$ に対して,

$$Z(\Phi, s) := \int_{G(\mathbb{A})/G(F)} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Big\{ \sum_{X \in V^0(F)} \Phi(\rho(g)X) \Big\}\, \mathrm{d}g$$

命題 4.5 $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ とする. 領域 $\mathcal{D}$ 上で

$$\int_{G(\mathbb{A})/G(F)} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s_1)} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s_2)} \sum_{X \in V^0(F)} |\Phi(\rho(g)X)|\, \mathrm{d}g < +\infty$$

であり, 函数 $s \mapsto Z(\Phi, s)$ は $\mathcal{D}$ 上で正則になる。

証明 補題 5.3 および補題 3.4 を使うと, 命題 5.6 の議論から従う. □

4.5 大域ゼータ積分の函数等式

概要は [KTW, §4] で述べたが, ようするに [新谷, Lemma 4] の議論 [11] をアデール上で展開しなおすことに尽きるため証明は殆ど省略した. ここでは読者の便を考えなるべく細部を補うことにする. $\mathcal{D}$ を含む次の領域を考える:

$$\mathcal{D}_1 := \{s \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(s_1) > 1\}. \tag{4.11}$$

補題 4.6 $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$, $s = (s_1, s_2) \in \mathcal{D}_1$ に対して, truncate された大域ゼータ積分

$$Z_+(\Phi, s) := \int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F) \\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}} > 1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Big\{ \sum_{X \in V^0(F)} \Phi(\rho(g)X) \Big\}\, \mathrm{d}g$$

は $\mathcal{D}_1$ において広義一様に絶対収束して, $\mathcal{D}_1$ 上の正則函数を定義する.

---

[11] ゼータ積分の特異部分の解析は [杉山, §1] も参照. [杉山, 注意 4.3 (2)] にあるように, 「難しさ」はテスト函数 Φ とそのフーリエ変換 $\widehat{\Phi}$ の台が特異軌道と交わることから生じている. 議論の原型は (4.4) の証明にある.

証明 $Z_+(|\Phi|, \mathrm{Re}(s)) \leqslant Z(|\Phi|, \mathrm{Re}(s))$ なので, $s \in \mathcal{D}$ ならば収束性は命題 4.5 から従う. 領域 $\mathrm{Re}(s_1) > 1$, $\mathrm{Re}(s_2) < 2$ においては, $|\tau(g)|_{\mathbb{A}} > 1$ ならば $|\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s_2)} \leqslant |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^2$ なので, $Z_+(|\Phi|, \mathrm{Re}(s)) \leqslant Z_+(|\Phi|, \mathrm{Re}(s_1), 2) < +\infty$ となり収束が従う. □

$\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ に対して,

$$T(\Phi, s) := \int_{\mathbb{A}^\times} \int_{\mathbb{A}} |a|_{\mathbb{A}}^{s-1} \Phi(a, b, a^{-1}b^2)\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times a \quad \mathrm{Re}(s) > 1 \tag{4.12}$$

任意の素点 $v \in \Sigma$ と $\Phi_v \in \mathscr{S}(V(F_v))$ に対して,

$$T_v(\Phi_v, s) := \int_{F_v^\times} \int_{F_v} |a|_v^{s-1} \Phi_v(a, b, a^{-1}b^2)\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times a, \quad \mathrm{Re}(s) > 1/2$$

補題 4.7 (1) $T_v(\Phi_v, s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ で局所一様絶対収束して正則函数を定める. $s \mapsto T_v(\Phi_v, s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に解析接続され, $\zeta_{F_v}(2s-1)^{-1}\, T_v(\Phi_v, s)$ は $\mathbb{C}$ 上正則になる.

(2) $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ について

$$T_v(\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}, s) = \frac{1 - q_v^{-2s}}{(1 - q_v^{-s})(1 - q_v^{-2s+1})}$$

(3) $T(\Phi, s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で局所一様に絶対収束して正則函数を定める. $\Phi = \otimes_v \Phi_v$ のとき, 任意の Σ_∞ を含む有限集合 $S \subset \Sigma$ について,

$$T(\Phi, s) = \frac{\zeta_F^S(s)\zeta_F^S(2s-1)}{\zeta_F^S(2s)} \prod_{v \in S} T_v(\Phi_v, s) \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

が成立する. この式の右辺の表示によって $T(\Phi, s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型函数に解析接続される.

証明 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ の場合の概略. $\Phi_v \in \mathscr{S}(V(F_v))$ について

$$\widetilde{\Phi}_v(a) := \int_{F_v} \Phi\left(a \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ b & b^2 \end{smallmatrix}\right]\right) \mathrm{d}b, \quad a \in F_v$$

と定義する. これは絶対収束して, 函数 $a \mapsto \widetilde{\Phi}_v(a)$ は $\mathscr{S}(F_v)$ に属する. あとは Iwasawa-Tate の局所ゼータの性質を使う. □

$\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ のフーリエ変換 $\widehat{\Phi} \in \mathscr{S}(\mathbb{A})$ を

$$\widehat{\Phi}(Y) := \int_{V(\mathbb{A})} \Phi(X)\psi_F(\langle X, Y\rangle)\,\mathrm{d}X, \quad Y \in V(\mathbb{A}) \tag{4.13}$$

で定義する, ここで $\mathrm{d}X$ は $V(\mathbb{A})$ のハール測度で, $X \in V(\mathbb{A})$ の成分 (2.2) によって $\mathrm{d}X = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_{12}\,\mathrm{d}x_2$ で定義されるものとし, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は (2.8) で定義される pairing $V(\mathbb{A}) \times V(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}$ である.

定理 4.8 $s \in \mathcal{D}$, $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ に対して,

$$\begin{aligned} Z(\Phi, s) = Z_+(\Phi, s) + Z_+(\widehat{\Phi}, f_\gamma(s)) + \frac{c_F}{2s_1+2s_2-3}\,T(\widehat{\Phi}, s_1) - \frac{c_F}{2s_2}\,T(\Phi, s_1) \\ + \frac{c_F}{2s_2-2}\,\zeta(\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,\cdot), s_1) - \frac{c_F}{2s_1+2s_2-1}\,\zeta(\Phi^{(3)}(0,0,\cdot), s_1) \end{aligned}$$

ここで, $f_\gamma \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ は (6.3) で定義される affine 変換, $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ の部分フーリエ変換 $\Phi^{(3)}\mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ は

$$\Phi^{(3)}(x_1, x_{12}, y_2) := \int_{\mathbb{A}} \Phi(x_1, x_{12}, x_2)\psi_F(x_2 y_2)\,\mathrm{d}x_2 \tag{4.14}$$

で定義され, $c_F := \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F(s) = \mathrm{vol}(\mathbb{A}^1/F^\times)$ とおいた.

$f_\gamma(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_1$ に注意しよう.

系 4.9 $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ とする. $s \mapsto (s_2-1)(2s_1+2s_2-3)Z(\Phi, s)$ $(s \in \mathcal{D})$ は領域 $\mathcal{D}_1$ まで正則函数に解析接続され, 次の函数等式を満たす：

$$Z(\Phi, f_\gamma(s)) = Z(\widehat{\Phi}, s), \quad s \in \mathcal{D}_1.$$

4.5.1 証明の準備

ρ の反傾表現 $\hat{\rho}$ を想起する (§2.1.1). 式 (2.10) より, $\hat{\rho}(g) = \tau(g)^{-1}\rho(g)$ $(g \in G(\mathbb{A}))$ であることに注意する.

補題 4.10 任意の $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$, $g \in G(\mathbb{A})$ に対して

$$\sum_{X \in V(F)} \Phi(\rho(g)X) = |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{-3/2} \sum_{Y \in V(F)} \widehat{\Phi}(\hat{\rho}(g)Y), \quad g \in G(\mathbb{A}).$$

証明 $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ と $g \in G(\mathbb{A})$ に対して, 函数 $\Phi^{\rho(g)}, \Phi^{\hat{\rho}(g)} \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ を $\Phi^{\rho(g)}(X) := \Phi(\rho(g)X)$, $\Phi^{\hat{\rho}(g)}(X) := \Phi(\hat{\rho}(g)X)$ で定義する. これと, $V(\mathbb{A})$ のハール測度の変数変換法則

$$\mathrm{d}(\rho(g)X) = |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{3/2}\,\mathrm{d}X$$

および pairing の不変性 (2.9) を組み合わせると容易に次の公式が示せる:

$$\widehat{(\Phi^{\rho(g)})} = |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{-3/2}\,(\widehat{\Phi})^{\hat{\rho}(g)}, \quad g \in G(\mathbb{A}). \tag{4.15}$$

Poisson の和公式を $\Phi^{\rho(g)} \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ に適用して, (4.15) を用いれば所望の公式が従う. □

$g = (a, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & x \end{smallmatrix}\right]) \in G(\mathbb{A})$ に対して,

$$g' := (a^{-1}c^{-2}, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & x \end{smallmatrix}\right]) \in G(\mathbb{A})$$

とおく. 単純計算により次の補題が分かる:

補題 4.11 $g \mapsto g'$ は $G(\mathbb{A})$ の位数 2 の位相群自己同型写像であり, ハール測度 (4.10) を不変にする. さらに,

$$\hat{\rho}(g) = \rho(g'), \quad \tau_1(g) = \tau_1\tau^{-1}(g'), \quad \tau(g) = \tau^{-1}(g')$$

$V^0(F)$ は一つの $G(F)$-軌道だったから, 補集合 $S(F) := V(F) - V^0(F)$ は $G(F)$ 安定である. 簡単な計算で次が分かる:

補題 4.12 集合

$$\mathscr{O} := \{X \in V(F) \mid P_1(X) \neq 0,\, P(X) = 0\}$$

は $V(F) - V^0(F)$ の点 $Z := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ の $G(F)$-軌道に一致する. Z の固定部分群は次のようになる：

$$G(F)^Z = \left\{(1, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right] \mid c \in F^\times\right\}.$$

注意 4.13 補集合 $V(F) - (V^0(F) \cup \mathscr{O})$ は 3 つの $G(F)$-軌道 $\{x_1 = 0, x_{12} \neq 0\}$, $\{x_1 = x_{12} = 0, x_2 \neq 0\}$, $\{0\}$ の合併であることが簡単に分かる. 以下では, これら 3 個の軌道を「まとめて」扱うためこの軌道構造の詳細は不要.

4.5.2　定理 4.8 の証明

(*cf.* [新谷, Lemma 4]. [谷口 2, §2.3] も参照) 補題 4.10 より,

$$\sum_{X\in V^0(F)} \Phi(\rho(g)X) = \boldsymbol{\Sigma}_1(g) + \boldsymbol{\Sigma}_2(g) + \boldsymbol{\Sigma}_3(g),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1(g) := |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{-3/2} \sum_{Y\in V^0(F)} \widehat{\Phi}(\hat{\rho}(g)Y)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(g) := |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{-3/2} \sum_{Y\in \mathscr{O}} \widehat{\Phi}(\hat{\rho}(g)Y) - \sum_{X\in \mathscr{O}} \Phi(\rho(g)X),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_3(g) := |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{-3/2} \sum_{Y\in V(F)-(V^0(F)\cup\mathscr{O})} \widehat{\Phi}(\hat{\rho}(g)Y) - \sum_{X\in V(F)-(V^0(F)\cup\mathscr{O})} \Phi(\rho(g)X).$$

となる. よって形式的には

$$I_j(\Phi, s) := \int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F) \\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}}<1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2}\, \boldsymbol{\Sigma}_j(g)\, \mathrm{d}g, \quad (j = 1, 2, 3) \tag{4.16}$$

として,

$$Z(\Phi, s) = Z_+(\Phi, s) + I_1(\Phi, s) + I_2(\Phi, s) + I_3(\Phi, s) \tag{4.17}$$

が成り立つ. 以下の議論のなかで, 各 j に対して $s \in \mathcal{D}$ ならば積分 $I_j(\Phi, s)$ が絶対収束することが示されるため, 等式 (4.17) は $s \in \mathcal{D}$ で成立している. この点も含め, 定理の主張は以下の 3 つの補題 4.14, 4.15 および 4.16 と等式 (4.17) から従う.

補題 4.14　$I_1(\Phi, s)$ は $s \in \mathcal{D}$ 上絶対収束して

$$I_1(\Phi, s) = Z_+(\widehat{\Phi}, s_1, \tfrac{3}{2} - s_1 - s_2), \quad s \in \mathcal{D}$$

証明　$I_1(\Phi, s)$ の積分で変数変換 $g \to g'$ を行い補題 4.11 を使う. □

補題 4.15　$I_2(\Phi, s)$ は $s \in \mathcal{D}$ 上絶対収束して

$$I_2(\Phi, s) = \frac{c_F}{2s_1 + 2s_2 - 3} T(\widehat{\Phi}, s_1) - \frac{c_F}{2s_2} T(\Phi, s_1).$$

証明　$I_2(\Phi, s)$ の $\widehat{\Phi}$ を含む方の積分を変数変換 $g \to g'$ で補題 4.11 を使い書き直す. $I_2(\Phi, s)$ は次の 2 つの積分の和になる:

$$\int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F) \\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}}>1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{3/2-s_1-s_2} \sum_{Y\in\mathscr{O}} \widehat{\Phi}(\rho(g)Y)\, \mathrm{d}g, \tag{4.18}$$

$$- \int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F) \\ |\tau(g)|_{\mathbb{A}}<1}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \sum_{X\in\mathscr{O}} \Phi(\rho(g)Y)\, \mathrm{d}g \tag{4.19}$$

補題 4.12 から $\mathscr{O} = \{\rho(\gamma)Z \mid \gamma \in G(F)/G(F)^Z\}$, $G(\mathbb{A})/G(F)^Z = \{(a, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right]) \mid a \in \mathbb{A}^\times,\, b \in \mathbb{A},\, c \in \mathbb{A}^\times/F^\times\}$ だから (4.19) =

$$\begin{aligned}
&- \int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F)^Z \\ |\tau(g)|_\mathbb{A}<1}} |\tau_1(g)|_\mathbb{A}^{s_1} |\tau(g)|_\mathbb{A}^{s_2} \Phi(\rho(g)Z)\, \mathrm{d}g \\
&= - \int_{a\in\mathbb{A}^\times} \int_{b\in\mathbb{A}} \int_{\substack{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |ac|_\mathbb{A}<1}} |a|_\mathbb{A}^{s_1} |(ac)^2|_\mathbb{A}^{s_2}\, \Phi(a, ab, ab^2)\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times c \\
&= - \int_{a\in\mathbb{A}^\times} \int_{b\in\mathbb{A}} |a|_\mathbb{A}^{s_1}\, \Phi(a, ab, ab^2)\, \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b \times \int_{\substack{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |c|_\mathbb{A}<1}} |c|_\mathbb{A}^{2s_2} \mathrm{d}^\times c.
\end{aligned}$$

最初の a, b についての積分は $T(\Phi, s)$ で $\mathrm{Re}(s_1) > 1$ で絶対収束する (補題 4.7). $c = u\underline{t}$ ($u \in \mathbb{A}^1/F^\times$, $t > 0$) と分解すると,

$$\int_{\substack{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |c|_\mathbb{A}<1}} |c|_\mathbb{A}^{2s_2} \mathrm{d}^\times c = \int_0^1 |t|^{2s_2} \mathrm{d}^\times t \times \mathrm{vol}(\mathbb{A}^1/F^\times) = \frac{c_F}{2s_2}$$

となる. よって (4.19) は $\frac{-c_F}{2s_2} T(\Phi, s)$ と計算された. 同様して, (4.18) は $\mathrm{Re}(s_1) > 1$ で絶対収束して $\frac{c_F}{2s_1+2s_2-3} T(\widehat{\Phi}, s_1)$ に等しいことが分かる. □

補題 4.16 $I_3(\Phi, s)$ は $s \in \mathcal{D}$ 上絶対収束して

$$I_3(\Phi, s) = \frac{c_F}{2s_2 - 2}\, \zeta(\widehat{\Phi}^{(3)}(0, 0, \cdot), s_1) - \frac{c_F}{2s_1 + 2s_2 - 1}\, \zeta(\Phi^{(3)}(0, 0, \cdot), s_1).$$

証明 $I_3(\Phi, s)$ は次の 2 つの項の和である:

$$\int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F) \\ |\tau(g)|_\mathbb{A}<1}} |\tau_1(g)|_\mathbb{A}^{s_1} |\tau(g)|_\mathbb{A}^{s_2-3/2} \sum_{y_{12}, y_2 \in F} \widehat{\Phi}(\hat{\rho}(g) \left[\begin{smallmatrix} 0 & y_{12} \\ y_{12} & y_2 \end{smallmatrix}\right])\, \mathrm{d}g, \tag{4.20}$$

$$- \int_{\substack{G(\mathbb{A})/G(F) \\ |\tau(g)|_\mathbb{A}<1}} |\tau_1(g)|_\mathbb{A}^{s_1} |\tau(g)|_\mathbb{A}^{s_2} \sum_{x_{12}, x_2 \in F} \Phi(\rho(g) \left[\begin{smallmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right])\, \mathrm{d}g \tag{4.21}$$

$G(\mathbb{A})/G(F)$ の基本領域として

$$g = \left(a, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right]\right), \quad a, c \in \mathbb{A}^\times/F^\times,\, b \in \mathbb{A}/F$$

の形の点全体が取れる. (a, b, c) を「座標」として $G(\mathbb{A})$ のハール測度を書くと $\mathrm{d}g = \mathrm{d}^\times a\, \mathrm{d}b\, |c|_\mathbb{A} \mathrm{d}^\times c$ となる. 上の g に対して

$$\rho(g) \left[\begin{smallmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right] = a \left[\begin{smallmatrix} 0 & cx_{12} \\ cx_{12} & c^2x_2+2bc^2x_{12} \end{smallmatrix}\right]$$

だから (4.21) =

$$-\iint_{\substack{(a,c)\in\mathbb{A}^\times/F^\times\times\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |ac|_\mathbb{A}<1}} |a|_\mathbb{A}^{s_1+2s_2}|c|_\mathbb{A}^{2s_2+1}$$

$$\times\int_{\mathbb{A}/F}\left\{\sum_{x_{12}\in F^\times, x_2\in F}\Phi(0,acx_{12},ac^2(x_2+2bx_{12})+\sum_{x_2\in F}\Phi(0,0,ac^2x_2)\right\}\mathrm{d}b\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^\times c$$

$$=-\iint_{\substack{(a,c)\in\mathbb{A}^\times/F^\times\times\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |ac|_\mathbb{A}<1}} |a|_\mathbb{A}^{s_1+2s_2}|c|_\mathbb{A}^{2s_2+1}$$

$$\times\left\{\int_\mathbb{A}\sum_{x_{12}\in F^\times}\Phi(0,acx_{12},ac^2u)\,\mathrm{d}u+\sum_{x_2\in F}\Phi(0,0,ac^2x_2)\right\}\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^\times c$$

同様にして

$$(4.21)=\iint_{\substack{(a,c)\in\mathbb{A}^\times/F^\times\times\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |ac|_\mathbb{A}<1}} |a|_\mathbb{A}^{s_1+2s_2}|c|_\mathbb{A}^{2s_2+1}|ac|_\mathbb{A}^{-3}$$

$$\times\left\{\int_\mathbb{A}\sum_{x_{12}\in F^\times}\widehat{\Phi}(0,(ac)^{-1}x_{12},a^{-1}u)\,\mathrm{d}u+\sum_{x_2\in F}\widehat{\Phi}(0,0,ac^2x_2)\right\}\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^\times c.$$

ここで, $\Phi\in\mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$, $a,c\in\mathbb{A}^\times$ に対して

$$\Phi_{a,c}(X):=\Phi(ax_1,acx_{12},ac^2x_2),\quad X\in V(\mathbb{A})$$

と定義すると, 簡単な計算で

$$\widehat{\Phi_{a,c}}(Y)=|ac|_\mathbb{A}^{-3}(\widehat{\Phi})_{a^{-1}c^{-2},c}(Y)$$

が確かめられる. この記号で上の計算結果を書きなおすと,

$$I_3(\Phi,s)=\iint_{\substack{(a,c)\in\mathbb{A}^\times/F^\times\times\mathbb{A}^\times/F^\times \\ |ac|_\mathbb{A}<1}} |a|_\mathbb{A}^{s_1+2s_2}|c|_\mathbb{A}^{2s_2+1}\{\sum_{i=1}^4 J_i(a,c)\}\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^\times c, \tag{4.22}$$

$$J_1(a,c):=\sum_{x_{12}\in F^\times}\int_\mathbb{A}\widehat{\Phi_{a,c}}(0,x_{12},u)\,\mathrm{d}u,\qquad J_2(a,c):=\sum_{x_2\in F}\widehat{\Phi_{a,c}}(0,0,x_2),$$

$$J_3(a,c):=-\sum_{x_{12}\in F^\times}\int_\mathbb{A}\Phi_{a,c}(0,x_{12},u)\,\mathrm{d}u,\qquad J_4(a,c):=-\sum_{x_2\in F}\Phi_{a,c}(0,0,x_2)$$

となる．$J_1(a,c)$ は次のように変形される：$J_1(a,c) =$

$$\sum_{x_{12}\in F^\times}\int_{\mathbb{A}} \mathrm{d}u \int_{\mathbb{A}^3} \Phi_{a,c}(y_1,y_{12},y_2)\,\psi(-2y_{12}x_{12}+uy_1)\,\mathrm{d}Y$$
$$= \sum_{x_{12}\in F^\times}\int_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(0,y_{12},y_2)\,\psi(-2y_{12}x_{12})\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2$$
$$= \sum_{x_{12}\in F}\int_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(0,y_{12},y_2)\,\psi(-2y_{12}x_{12})\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 - \int_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(0,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2$$
$$= \sum_{\alpha\in F}\int_{\mathbb{A}} \Phi_{a,c}(0,\alpha,y_2)\,\mathrm{d}y_2 - \int_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(0,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 \quad (\because \text{Poisson 和公式})$$
$$= -J_3(a,c) + \int_{\mathbb{A}} \Phi_{a,c}(0,0,y_2)\,\mathrm{d}y_2 - \int_{\mathbb{A}} \Phi_{a,c}(0,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2,$$

$J_2(a,c)$ は次のように変形される：

$$J_2(a,c) = \iint_{\mathbb{A}^2} \{\sum_{x_2\in F}\int_{\mathbb{A}^3} \Phi_{a,c}(y_1,y_{12},y_2)\,\psi(y_1x_2)\,\mathrm{d}y_1\}\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2$$
$$= \iint_{\mathbb{A}^2} \sum_{\alpha\in F} \Phi_{a,c}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,dy_2 \quad (\because \text{Poisson 和公式}),$$

$J_4(a,c)$ は次のように変形される：

$$J_4(a,c) = -\sum_{x_2\in F} \widehat{\widehat{\Phi_{a,c}}}(0,0,-x_2)$$
$$= \sum_{\alpha\in F}\iint_{\mathbb{A}^2} \widehat{\Phi_{a,c}}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_3 \qquad (\because J_2(a,c) \text{ の変形と同様の議論})$$
$$= \sum_{\alpha\in F^\times}\iint_{\mathbb{A}^2} \widehat{\Phi_{a,c}}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 + \int_{\mathbb{A}} \Phi_{a,c}(0,0,x_2)\,\mathrm{d}x_2$$

以上から，

$$\sum_{i=1}^4 J_i(a,c) = \sum_{\alpha\in F^\times}\iint_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 - \sum_{\alpha\in F^\times}\iint_{\mathbb{A}^2} \widehat{\Phi_{a,c}}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2$$

更に $\Phi^{(3)}$ の定義を使うと，

$$\iint_{\mathbb{A}^2} \Phi_{a,c}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 = (\widehat{\Phi_{a,c}})^{(3)}(0,0,\alpha) = |ac|_{\mathbb{A}}^{-3}|a|_{\mathbb{A}}\,\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,a\alpha),$$
$$\iint_{\mathbb{A}^2} \widehat{\Phi_{a,c}}(\alpha,y_{12},y_2)\,\mathrm{d}y_{12}\,\mathrm{d}y_2 = \Phi^{(3)}_{a,c}(0,0,\alpha) = |ac^2|_{\mathbb{A}}^{-1}\Phi^{(3)}(0,0,a^{-1}c^{-2}\alpha).$$

よって

$$\sum_{i=1}^{4} J_i(a,c) = \sum_{\alpha\in F^\times} |ac|_{\mathbb{A}}^{-3}|a|_{\mathbb{A}}\,\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,a\alpha) - \sum_{\alpha\in F^\times} |ac^2|_{\mathbb{A}}^{-1}\Phi^{(3)}(0,0,a^{-1}c^{-2}\alpha).$$

これを (4.22) に代入して, 少し変形すると

$$\begin{aligned}
I_3(\Phi,s) &= \int_{\mathbb{A}^\times} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1}\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,a)\,\mathrm{d}^\times\Bigg(\int_{\substack{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times\\ |c|_{\mathbb{A}}<1}} |c|_{\mathbb{A}}^{2s_2-2}\,\mathrm{d}^\times c\Bigg)\\
&\quad - \int_{\mathbb{A}^\times} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1-2s_2+1}\Phi^{(3)}(0,0,a)\Bigg(\int_{\substack{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times\\ |c|_{\mathbb{A}}>|a|_{\mathbb{A}}}} |c|_{\mathbb{A}}^{-2s_1-2s_2+1}\,\mathrm{d}^\times c\Bigg)\,\mathrm{d}^\times a\\
&= \tfrac{c_F}{2s_2-2}\int_{\mathbb{A}^\times} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1}\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,a)\,\mathrm{d}^\times a - \tfrac{c_F}{2s_1+2s_2-1}\int_{\mathbb{A}^\times} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1}\Phi^{(3)}(0,0,a)\,\mathrm{d}^\times a.
\end{aligned}$$

□

4.6　大域ゼータ積分の分解 (局所/大域原理)

S を Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合, $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ とする.

定理 4.17　$\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ とする. $s \in \mathcal{D}$ について等式

$$Z(\Phi,s) = \frac{1}{2}\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F}\int_{\mathbb{A}^\times}\int_{\mathbb{A}}\int_{\mathbb{A}^\times} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1+2s_2}|c|_{\mathbb{A}}^{s_2}\chi(c)\Phi(a,ab,ab^2-ac)\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^\times b\,\mathrm{d}^\times c$$

が成り立つ. $\Phi = \otimes_v\Phi_v$ で S が (5.7) を満たすとき,

$$\begin{aligned}
Z(\Phi,s) &= \frac{1}{2}\Delta_F^{-3/2}\prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}}(1-q_v^{-1})^{-2}\\
&\quad\times\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F}\prod_{v\in S}\widetilde{Z_v}(\Phi_v,s,\chi_v)\prod_{v\notin S}\frac{\zeta_{F_v}(s_1)\,\zeta_{F_v}(2s_1+2s_2-1)\,L(s_2,\chi_v)}{L(2s_1+s_2,\chi_v)\,\mathrm{N}(\mathfrak{f}_{\chi_v})^{s_1}}.
\end{aligned}$$

4.6.1　証明の準備

補題 4.18　$\sigma > 1$ ならば

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)}\frac{1}{\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^\sigma} < +\infty$$

証明 可逆イデアル $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{O}_F$ に対して, $S(\mathfrak{f}) := \{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} \mid \mathrm{ord}_v(\mathfrak{f}\mathfrak{O}_v) > 0\}$,

$$U(\mathfrak{f}) := \prod_{v \in S(\mathfrak{f})} (1 + \mathfrak{f}\mathfrak{O}_v) \prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - S(\mathfrak{f})} \mathfrak{O}_v^\times$$

とおき, $C(\mathfrak{f}) := F^\times (\mathbb{A}^\times)^2 U(\mathfrak{f}) \backslash \mathbb{A}^\times$ と定義する.
すると, $C(\mathfrak{f})$ は有限群 $\mathbb{A}^\times / F^\times U(\mathfrak{f})(F_\infty)^0$ の商なので再び有限であって, 任意の $\varepsilon > 0$ に関して $\#(C(\mathfrak{f})) \ll_\varepsilon \mathbf{N}(\mathfrak{f})^\varepsilon$ が成り立つ. $\mathfrak{f}_\chi = \mathfrak{f}$ なる $\chi \in \mathfrak{C}_F$ は $C(\mathfrak{f})$ の指標と同一視される. $\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)$ ならば, $\mathbf{N}(\mathfrak{f}_\chi) = \prod_{v \in S} \mathrm{N}(\mathfrak{f}_{\omega_v}) \times \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)$ なので, 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)} \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{-\sigma} = \prod_{v \in S} \mathrm{N}(\mathfrak{f}_{\omega_v})^\sigma \sum_{\mathfrak{f} \subset \mathfrak{O}_F} \#(C(\mathfrak{f}))\mathbf{N}(\mathfrak{f})^{-\sigma} \ll_\varepsilon \zeta_F^{\Sigma_\infty}(\sigma - \varepsilon).$$

よって, Dedekind zeta 函数が $\sigma > 1$ で収束することから結論が従う. □

補題 4.19 無限級数

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)} \frac{L^S(s_2, \chi)}{L^S(2s_1 + s_2, \chi)\, \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}}$$

は領域

$$\mathcal{D}_2 := \{s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(2s_1 + s_2) > 2 + \max(\mathrm{Re}(s_2), 1 - \mathrm{Re}(s_2), 1)\} \tag{4.23}$$

で広義一様絶対収束して $\mathcal{D}_2$ 上の正則函数を定める.[12]

証明 $\mathrm{Re}(z) \geqslant 3$ 上で一様に $|L^S(z, \chi)^{-1}| \ll 1$ であるから, $\mathcal{D}_2$ 上一様に

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)} \left| \frac{L^S(s_2, \chi)}{L^S(2s_1 + s_2, \chi)\, \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}} \right| \ll \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)} \frac{|L^S(s_2, \chi)|}{\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{\mathrm{Re}(s_1)}} \tag{4.24}$$

が成り立つ. $\varepsilon > 0$ を任意の微小な正数とする. U を $\mathbb{C}$ の任意のコンパクト集合とすると, (4.6) から

$$|(s_2 - 1)L^S(s_2\chi)| \ll_\varepsilon \mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{\kappa(\mathrm{Re}(s_2)) + \varepsilon}, \quad s \in U$$

[12] [KTW, Theorem 4.3] では $\mathcal{D}$ に限定して収束性を示しているが, [KTW, Theorem 4.20](函数等式) につなげるためにはここに書いたようにより広い領域での収束が必要とされる. $\mathcal{D}_2$ の定義は [KTW] とは異なる.

が成り立つ. よって, (4.24) は U 上で一様に次の級数で上から評価される:

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)} \frac{\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{\kappa(\mathrm{Re}(s_2))+\varepsilon}}{\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{\mathrm{Re}(s_1)}}$$

補題 4.18 から, この級数は $\mathrm{Re}(s_1) - \kappa(\mathrm{Re}(s_2)) > 1$ なら収束する. $s \in \mathcal{D}_2$ は $\mathrm{Re}(s_1) - \kappa(\mathrm{Re}(s_2)) > 1$ と同値である. □

補題 4.20 [13] 連続函数 $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ および $s \in \mathbb{C}$ が次の条件を満たすとする.

(i) 任意のコンパクト集合 $N \subset \mathbb{A}^\times$ について非負連続函数 $\phi_1 : \mathbb{A} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ が存在して

$$\phi(xu) \leqslant \phi_1(x), \ (x \in \mathbb{A},\, u \in N) \text{ かつ } |c|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s)} \phi_1(c) \text{ は } \mathbb{A}^\times \text{ 上可積分}$$

(ii) $\displaystyle\sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F} \left| \int_{\mathbb{A}^\times} |c|_{\mathbb{A}}^s \chi(c)\phi(c)\,\mathrm{d}^\times c \right| < +\infty.$

このとき, 次の等式が成立する:

$$\int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} |c^2|_{\mathbb{A}}^s \sum_{z \in F^\times} \phi(c^2 z)\,\mathrm{d}^\times c = \frac{1}{2} \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F} \int_{\mathbb{A}^\times} \chi(c)|c|_{\mathbb{A}}^s \phi(c)\,\mathrm{d}^\times c.$$

証明 $U = F^\times \backslash \mathbb{A}^1$ とおく. U はコンパクトアーベル群だから, $\iota : U \ni u \longmapsto u^2 \in U$ は連続準同型写像となる. $U^2 := \iota(U)$ とおくと, U^2 はコンパクトとくに閉なる部分群であり, $U/U^2 \cong \mathbb{A}^\times / F^\times (\mathbb{A}^\times)^2$. 写像 $t \mapsto t^2$ は $\underline{\mathbb{R}}_{>0}$ 上では同型なので, $F^\times(\mathbb{A}^\times)^2 \backslash \mathbb{A}^\times \cong U^2 \backslash U$ となる. $\mathbb{A}^\times$, $\mathbb{A}^1$ にはハール測度が決められている (*cf.* §4.1). 定義から, $a \in \mathbb{A}^\times$, $a = u\underline{t}\,(u \in \mathbb{A}^1,\, t \in \mathbb{R}_{>0}$ のとき, $\mathrm{d}^\times a = \mathrm{d}u \otimes \frac{\mathrm{d}t}{t}$ となる. U^2 のハール測度 $\mathrm{d}x$ を, U^2 上の任意の連続函数 f に対して

$$\int_{U^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_U f(u^2)\,\mathrm{d}u$$

と成るように定義できる. これにより, $\mathrm{vol}(U^2) = \mathrm{vol}(U)$ となるので, U/U^2 上の商測度に関して $\mathrm{vol}(U/U^2) = 1$ となる.

$$f(c) := \sum_{z \in F^\times} \phi(zc), \quad c \in \mathbb{A}^\times$$

とおくと, 仮定から任意のコンパクト集合 $\mathcal{N} \subset \mathbb{A}^\times$ に対して, $|\phi(xy)| \leqslant \phi_1(x)\,(x \in \mathbb{A},\, y \in \mathcal{N})$ を満たす非負値函数 $\phi_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{A})$ を選べる. 対応す

[13] [KTW, §4.2] での議論のなかで $\widetilde{f}(c)$ の連続性を確保するには条件 (i) が必要のようです.

る $f_1(c) := \sum_{z\in F^\times}\phi_1(cz)$ を考えると, $|f(cy)| \leqslant f_1(c)\,(c\in\mathbb{A}^\times,\, y\in\mathcal{N})$ となる. これより, $f(c)$ が $\mathbb{A}^\times$ 上広義一様に絶対収束して $\mathbb{A}^\times/F^\times$ 上の連続函数を定義することが分かる. 仮定 (i) から $|c|_{\mathbb{A}}^s\, f(c)$ は $\mathbb{A}^\times/F^\times$ 上の可積分函数になる. 任意の $\chi\in\mathfrak{C}_F$ は $\mathbb{A}^\times/F^\times(\mathbb{A}^\times)^2\cong U/U^2$ の指標と同一視される. U/U^2 上の函数 $\widetilde{f}$ を

$$\widetilde{f}(x) := 2\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}|c^2|_{\mathbb{A}}^s\, f(xc^2)\,\mathrm{d}^\times c, \qquad x\in U/U^2 \tag{4.25}$$

と定義する. U における U/U^2 の基本領域 $\mathcal{U}$ をとり, さらに U の単位元のコンパクト近傍 $\mathcal{N}_1$ との積 $\mathcal{N}=\mathcal{U}^{-1}\mathcal{N}_1$ に対して f_1 を構成すると, $|f(au^{-1}y)|\leqslant f_1(a)$ $(a\in\mathbb{A}^\times, u\in\mathcal{U},\, y\in\mathcal{N}^1)$ だから $|f(ay)|\leqslant f_1(au)$ となる. $a=xc^2$ として $c\in\mathbb{A}^\times/F^\times$, $u\in\mathcal{U}$ で積分をとると

$$\widetilde{f}(x)\leqslant\int_{U/U^2}\widetilde{f}_1(xu)\,\mathrm{d}u \quad (x\in U) \tag{4.26}$$

が得られる. 以下の計算を f の代わりに f_1 で「絶対値付き」で行うと, (4.26) と仮定 (i) から積分 (4.25) が U 上広義一様絶対収束することが分かり, とくに $\widetilde{f}(x)$ は U/U^2 上の連続函数となる.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\chi(c)\,|c|_{\mathbb{A}}^s f(c)\,\mathrm{d}^\times c &= \int_{\mathbb{R}_{>0}} t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_U \chi(u)\, f(u\underline{t})\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}_{>0}} t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{U/U^2}\chi(u)\int_{U^2} f(u\underline{t}x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}_{>0}} t^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{U/U^2}\chi(u)\int_{U} f(u\underline{t}y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_{\mathbb{R}_{>0}} (t^2)^s\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{U/U^2}\chi(u)\int_{U} f(u(\underline{t}y)^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_{U/U^2}\chi(u)\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}|c^2|_{\mathbb{A}}^s\, f(uc^2)\,\mathrm{d}^\times c
\end{aligned}$$

この計算により, $\widetilde{f}$ の χ-フーリエ成分が $\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\chi(c)\,|c|_{\mathbb{A}}^s f(c)\,\mathrm{d}^\times c$ で与えられることが分かる. そこで,

$$\widetilde{f}_1(x) := \sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F}\chi(x)\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\chi(c)\,|c|_{\mathbb{A}}^s f(c)\,\mathrm{d}^\times c, \quad x\in U/U^2$$

と定義すると, (ii) からこの級数は U 上で一様に絶対収束し, $\widetilde{f}_1$ は U/U^2 上の連続函数を定義する. $\widetilde{f}$ と $\widetilde{f}_1$ はすべてのフーリエ係数が同じなので, 2 つの函数の連続性から各点 $x\in U/U^2$ において $\widetilde{f}(x)=\widetilde{f}_1(x)$ が結論される. 特に $x=1$ とすれば所望の結果を得る. □

補題 4.21 [14] $\Phi \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ および $w \in \mathbb{C}$ に対して

$$\phi_w(c) := \int_{\mathbb{A}^\times} \int_{\mathbb{A}} |a|^w \, \Phi(a, b, a^{-1}b^2 - ac) \, \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b, \qquad c \in \mathbb{A}^\times$$

とおく．$\mathrm{Re}(w) > 1$ においてこの積分は広義一様に絶対収束して $\mathbb{A}^\times$ 上の連続函数を定める．この函数は

$$1 < \mathrm{Re}(s), \quad \mathrm{Re}(s) + 1 < \mathrm{Re}(w), \quad 2\mathrm{Re}(s) - 1 < \mathrm{Re}(w) \tag{4.27}$$

を満たすとき, s に対する補題 4.20 の条件 (i) を満たす.

証明 N を $\mathbb{A}^\times$ の任意のコンパクト集合とする．十分大きな素点の有限集合 $\Sigma_\infty \subset S$ にたいして, $\Phi = \otimes_v \Phi_v$, $\Phi_v \in \mathscr{S}(F_v)$, $\Phi_v = \mathbb{1}_{\mathfrak{O}_v}$, $N = \prod_{v \in S} N_v \prod_{v \notin S} \mathfrak{O}_v^\times$ ($N_v \subset F_v^\times$ はコンパクト) の形であるとしても良い．各 Φ_v に対して,

$$\Phi_v^{(w)}(c) := \int_{F_v^\times} \int_{F_v} |a|_v^s \, \Phi_v(a, b, a^{-1}b^2 - ac) \, \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b, \qquad c \in F_v^\times$$

とおく．$v \notin S$ のとき, $\Phi_v^{(w)}(c)$ は函数 $|a|_v^w$ を $\mathfrak{O}_v \cap F_v^\times \times \mathfrak{O}_v$ の条件 $b^2 - a^2 c \in a\mathfrak{O}_v$ で定義される部分集合 X 上で積分したものになる．$(a, b) \in X$ ならば $a^2 c \in b^2 + a\mathfrak{O}_v \subset \mathfrak{O}_v$ だから, 次の不等式が成り立つ：

$$|\Phi_v^{(w)}(c)| \leqslant \int_{\substack{(a,b) \in (\mathfrak{O}_v - \{0\}) \times \mathfrak{O}_v \\ a^2 \in c^{-1}\mathfrak{O}_v}} |a|_v^{\mathrm{Re}(w)} \, \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b$$

$|c|_v \leqslant 1$ ならば右辺の積分領域は $(\mathfrak{O}_v - \{0\}) \times \mathfrak{O}_v$ 全体になるから, 簡単な計算で右辺は $(1 - q_v^{-\mathrm{Re}(w)})^{-1}$ となる．$|c|_v > 1$ ならば $c^{-1}\mathfrak{O}_v \subset c^{-2}\mathfrak{O}_v$ だから, 右辺の積分領域を $a \in c^{-1}\mathfrak{O}_v$ に広げたほうが大きくなる．よって

$$|\Phi_v^{(w)}(c)| \leqslant \int_{\substack{(a,b) \in (\mathfrak{O}_v - \{0\}) \times \mathfrak{O}_v \\ a \in c^{-1}\mathfrak{O}_v}} |a|_v^{\mathrm{Re}(w)} \, \mathrm{d}^\times a \, \mathrm{d}b = |c|_v^{-\mathrm{Re}(w)} \, (1 - q_v^{-\mathrm{Re}(w)})^{-1}.$$

となり, $v \notin S$ のとき $F_v^\times$ 上で不等式 $|\Phi_v^{(w)}(c)| \leqslant (1 - q_v^{-\mathrm{Re}(w)})^{-1} \sup(1, |c|_v)^{-\mathrm{Re}(w)}$ が得られた．有限被覆を使った議論をすれば $v \in S$ のとき, ある $y_v \in F_v^\times$ があって $N_v \subset y_v(F_v)^2$ となっているとしてもよい．よって, あるコンパクト集合 $\mathcal{U}_v \subset F_v^\times$ があり, $u_v \in N_v$ は $u_v = y_v x_v^2$ ($x_v \in \mathcal{U}_v$) の形に書ける．補題 3.2

[14][KTW, §4.2] に対応する補題 4.20 の主張を少し弱めたため, [KTW, Lemma 4.5] の証明にはこのかなり技術的な補題が必要になります.

から, $\Phi_v \in \mathscr{S}(F_v)$ は $\Phi_v(X) = f_{v,1}(x_1)f_{v,2}(x_{12})f_{v,3}(x_2)$ ($f_j \in \mathscr{S}(F_v)$) の形であるとしても良い. すると, 変数変換で

$$\begin{aligned}\Phi_v^{(w)}(cu_v) &= \int_{F_v^\times}\int_{F_v} |a|_v^w f_{v,1}(a)f_{v,2}(b)f_{v,3}(a^{-1}b^2 - acy_vx_v^2)\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b \\ &= \int_{F_v^\times}\int_{F_v} |a|_v^w f_{v,1}(ax_v^{-2})f_{v,2}(bx_v)f_{v,3}(a^{-1}b^2 - acy_v)\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b\end{aligned}$$

補題4.1(の局所体版)から $|f_{v,1}(bx_v)| \leqslant \phi_1(b)$ $|f_{v,2}(bx_v^{-1})| \leqslant \phi_2(b)$ ($b \in F_v, x_v \in \mathcal{U}_v$) となる $\phi_{v,1}, \phi_{v,2} \in \mathscr{S}(F_v)$ が取れる. そこで,

$$\Phi_{v,1}(X) := \phi_{v,1}(x_1)\phi_{v,2}(x_{12})f_{v,3}(x_2), \quad X \in V(F_v)$$

と定義すると, $\Phi_{1,v}^{(\mathrm{Re}(w))}$ は $|\Phi_v^{(w)}(cu_v)| \leqslant \Phi_{1,v}^{(\mathrm{Re}(w))}(c)$ ($c \in F_v^\times, u_v \in N_v$) を満たす. $\mathrm{Re}(w) > 1$ ならば, 連続函数 $\phi_1 : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ を, $c = (c_v)_v \in \mathbb{A}^\times$ に対して

$$\phi_1(c) := \prod_{v\in S}\Phi_{1,v}^{(\mathrm{Re}(w))}(c_v) \times \prod_{v\notin S}(1-q_v^{-\mathrm{Re}(w)})^{-1}\,\sup(1,|c|_v)^{-\mathrm{Re}(w)}$$

で定義できる. $|\phi_w(cu)| \leqslant \phi_1(c)$ ($c \in \mathbb{A}^\times, u \in N$) は構成から明らかに成り立つ. $1 < \mathrm{Re}(w) < \mathrm{Re}(s)$ とすると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}^\times} |c|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s)}\,\phi_1(c)\,\mathrm{d}^\times &= \prod_{v\in S}\int_{F_v^\times} |c|_v^{\mathrm{Re}(s)}\Phi_{1,v}^{(\mathrm{Re}(w))}(c_v)\,\mathrm{d}^\times c_v \\ &\quad\times\prod_{v\notin S}(1-q_v^{-\mathrm{Re}(w)})^{-1}\int_{F_v^\times}|c_v|_v^{\mathrm{Re}(s)}\sup(1,|c_v|_v)^{-\mathrm{Re}(w)}\,\mathrm{d}^\times c_v\end{aligned}$$

ここで $v \in S$ に対する因子は $\widetilde{Z_{F_v}}(\Phi_1, \mathrm{Re}(w-2s+1), \mathrm{Re}(s), \mathbf{1})$ に等しいことが分かるので (*cf.* 補題 3.5), 補題 3.4 からそれは $\mathrm{Re}(w-s+1) > 1/2$, $\mathrm{Re}(s-2s+1) > 0$ で収束する. $v \notin S$ に対する因子は計算できて $(1-q_v^{-\mathrm{Re}(s)})^{-1}(1-q_v^{-\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Re}(s)})^{-1}$ になる. よって, $v \notin S$ に亘る無限積の収束条件は $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\mathrm{Re}(w) > 1$, $\mathrm{Re}(w-s) > 1$ である. □

4.6.2 定理 4.17 の証明 (*cf.* [KTW, Lemma 4.5])

補題2.1から, $V^0(F)$ は $G(F)\,X_z$ ($z \in [F^\times]_2$) の非交和に分解され, $G(F)^{X_z} = \{(1, \mathrm{diag}(1, \pm 1))\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である. これより, $Z(\Phi, s)$ の定義 (4.4) は次のように変形される (補題 4.5 から, $s \in \mathcal{D}$ では以下の式変形の各ステップは Fubini の定理から正当化される.)

$$\int_{G(\mathbb{A})/G(F)} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2}\sum_{z\in[F^\times]_2}\sum_{\gamma\in G(F)/G(F)^{X_z}}\Phi(g\gamma\,X_z)\,\mathrm{d}g$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{z\in[F^\times]_2} \int_{G(\mathbb{A})/G(F)^{X_z}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1} |\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Phi(g\,X_z)\,\mathrm{d}g \\
&= \sum_{z\in[F^\times]_2} \int_{c\in\mathbb{A}^\times/\{\pm1\}} \iint_{\mathbb{A}^\times\times\mathbb{A}} |a|_{\mathbb{A}}^{s_1} |a^2c^2|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2 - zc^2))\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}^\times c \\
&= \sum_{z\in[F^\times]_2} \int_{c\in\mathbb{A}^\times/F^\times} \sum_{\tau\in F^\times/\{\pm1\}} \\
&\qquad \iint_{\mathbb{A}^\times\times\mathbb{A}} \left(|a|_{\mathbb{A}}^{s_1} |a^2\tau^2c^2|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Phi(a, ab, a(b^2 - z\tau^2c^2))\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b \right) \mathrm{d}^\times c
\end{aligned}
$$

ここで, $(z,\tau)\mapsto z\tau^2$ は $[F^\times]_2\times(F^\times/\{\pm1\})$ から $F^\times$ の上への全単射なので, 最後の式で z の和と τ の和を合体させることで

$$
Z(\Phi.s) = \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} |c|_{\mathbb{A}}^{s_2} \sum_{z\in F^\times} \Phi^{(s_1+2s_2-1)}(c^2z) \tag{4.28}
$$

が示された, ここで $\Phi^{(s_1+2s_2-1)}$ は補題 4.21 で定義した $\mathbb{A}^\times$ 上の函数である. $s\in\mathcal{D}$ のとき, 補題 (4.21) から, この函数は条件 (4.27) を $w = s_1 + 2s_2 - 1$, $s = s_2$ として満たすから, $\Phi^{(s_1+2s_2-1)}$ は $s = s_2$ として補題 4.20 の条件 (i) を満たしている. 補題 4.20 の条件 (ii) を確認する. 補題 (3.6) (1) より

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F} \left| \int_{\mathbb{A}^\times} |c|_{\mathbb{A}}^{s_2} \Phi^{(s_1+2s_2-1)}(c)\,\mathrm{d}^\times c \right| \\
&\leqslant \prod_{v\in S} \widetilde{Z_{F_v}}(\Psi_v, \mathrm{Re}(s), \mathbf{1}) \times |\zeta_F^S(s_1)\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)| \sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F} \left| \frac{L^S(s_2,\chi)}{L^S(2s_1+s_2,\chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_2}} \right|.
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Re}(s_1) > 1$, $\mathrm{Re}(s_2) > 1$ なので, 補題 4.19 より, 右辺の χ についての和は収束している. よって, 条件 (4.25) も満たされる. 補題 4.20 を (4.28) の右辺に適用し, $v\notin S$ での因子を補題 3.6 (1) で計算すれば所望の結果を得る.

5 一般化された新谷 2 重ゼータ函数

5.1 定義

§4.2 の記号を想起する. S は Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合, $\mathfrak{O}_F(S)$ は S-整数環である.

5.1.1 軌道型

$[F_S^\times]_2 := (F_S^\times)^\times/(F_S^\times)^2$ とおく. これは $[F_v^\times]_2\,(v\in S)$ の直積群だから位数 $\prod_{v\in S} 4|2|_v^{-1} = 4^{\#S}|2|_S^{-1}$ の有限群である (*cf.* 補題 3.1).

$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{O}_F(S)$ の $\mathfrak{O}_F(S)$ の 2 つのイデアルとする．$\mu\in\mathfrak{a},\nu\in\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$, $\nu\mu\neq 0$ について

$$A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)=\{x\in\mathfrak{ab}/\nu\mathfrak{ab}^2\mid x^2\equiv\mu\pmod{\mu\mathfrak{ab}^2}\}$$

とおく．自明な評価

$$\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)\leqslant\#(\mathfrak{ab}/\mu\mathfrak{ab}^2)=\#(\mathfrak{O}_F(S)/\mu\mathfrak{b})=\mathbf{N}_S(\mu)\mathbf{N}_S(\mathfrak{b})\tag{5.1}$$

よりこれは有限集合である．$(\varepsilon,\eta)\in\mathfrak{O}_F(S)^\times\times\mathfrak{O}_F(S)^\times$ の $F^\times\times F^\times$ への作用を $(\mu,\nu)\mapsto(\varepsilon\mu,\eta^2\nu)$ で定義し, $[\mu,\nu]$ を (μ,ν) の $\mathfrak{O}_F(S)^\times\times\mathfrak{O}_F(S)^\times$-軌道とすると,$\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)$ は $[\mu,\nu]$ のみで決まることが分かる．

定義 5.1 可逆イデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subset\mathfrak{O}_F(S)$ および類 $\delta_S\in[F_S^\times]_2$ に対して, $\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)$ を条件

$$\mu\in\mathfrak{a}-(0),\quad \nu\in\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2-(0),\quad \nu\in\delta_S(F_S^\times)^2$$

を満たす $\mathfrak{O}_F(S)^\times$ 軌道 $[\mu,\nu]$ 全体の集合とする．そこで,

$$\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(s,\delta_S):=\frac{1}{2}\mathbf{N}_S(\mathfrak{a})^{s_1}\mathbf{N}_S(\mathfrak{ab})^{2s_2}\sum_{[\mu,\nu]\in\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)}\frac{\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)}{\mathbf{N}_S(\mu)^{s_1}\mathbf{N}_S(\nu)^{s_2}}$$

と定義する．

中国式剰余定理と Hensel の補題を使うと, (5.1) は次のように改善される：

補題 5.2 任意の $\varepsilon>0$ に対してある定数 $C_\varepsilon>0$ が存在して, 任意のイデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\subset\mathfrak{O}_F(S)$, および $\mu\in\mathfrak{a}-(0)$, $\nu\in\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2-(0)$ について不等式

$$\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)\leqslant C_\varepsilon\,\mathbf{N}_S(\mu)^\varepsilon$$

が成り立つ．

補題 5.3 (1) 級数 $\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(s,\delta_S)$ は領域 $\mathcal{D}$(*cf.* (4.9)) で絶対収束する．

(2) $\mathfrak{a}',\mathfrak{b}'$ が $\mathfrak{O}_F(S)$ の可逆イデアルでそれぞれ $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ と同値なものとすると, $\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(s,\delta_S)=\xi^S_{c\mathfrak{a},c'\mathfrak{b}}(s,\delta_S)$ である．

証明 (1) $\sigma_i:=\mathrm{Re}(s_i)\,(i=1,2)$ とおく．任意に $\varepsilon>0$ を与えると, 補題 5.2 から $\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\sigma_1,\sigma_2,\delta_S)$ は次の級数を優級数にもつ：

$$\sum_{(\mu,\nu)\in\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)}\mathbf{N}_S(\mu)^{-\sigma_1+\varepsilon}\mathbf{N}_S(\nu)^{-\sigma_2}\leqslant[\mathfrak{O}_F(S)^\times:(\mathfrak{O}_F(S)^\times)^2]\,\zeta_F^S(\sigma_1-\varepsilon)\,\zeta_F^S(\sigma_2)$$

$\mathfrak{O}_F(S)^\times$ は有限生成アーベル群なので, 右辺の群指数は有限である. Dedekind ゼータ函数の性質から $\zeta_F^S(\sigma) < +\infty\,(\sigma > 1)$ であることから (1) が従う.

(2) $\mathfrak{a}' = c\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = c'\mathfrak{b}$ $(c, c' \in F^\times)$ としてよい. $x \mapsto (cc')^2 x$ は集合 $A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)$ から $A_{c\mathfrak{a},c'\mathfrak{b}}(c\mu,(cc')^2\nu)$ の上への全単射なので, $\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu) = \#A_{c\mathfrak{a},c'\mathfrak{b}}(c\mu,(cc')^2\nu)$ となる. $(\mu,\nu) \mapsto (c\mu,(cc')^2\nu)$ は $\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)$ から $\mathbf{X}_{c\mathfrak{a},c'\mathfrak{b}}(\delta_S)$ の上への全単射であることにより (2) の主張は従う. このとき, $\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(s,\delta_S)$ の定義式の右辺の最初の因子 $\mathbf{N}_S(\mathfrak{a})^{s_1}\mathbf{N}_S(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{2s_2}$ が必要なことに注意する. □

$\{\mathfrak{a}_j\}_{j=1}^{h_F(S)}$ を $\mathfrak{O}_F(S)$ のイデアル類群の完全代表系とする. そこで

$$\xi^S(s,\delta_S) := \sum_{j=1}^{h_F(S)}\sum_{k=1}^{h_F(S)} \xi^S_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}(s,\delta_S) \tag{5.2}$$

と定義する. 補題 5.3(2) からこれは代表系 $\{\mathfrak{a}_j\}$ の選択によらない. この定義が見かけ上異なる形をした [KTW, §4.1] の定義と一致することを説明する. $\mathfrak{O}_F(S)$ の可逆イデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対応するイデールをそれぞれ α, β として

$$\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} := \left(\alpha^{-1}, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta^{-1}\end{smallmatrix}\right]\right) \in G(\mathbb{A})$$

とおく. さらに

$$\Gamma_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}} := G(F) \cap \gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{-1} G(\mathbb{A},S)\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \{\left(\varepsilon, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \xi & \eta\end{smallmatrix}\right]\right) \mid \varepsilon,\eta \in \mathfrak{O}_{F,S}^\times,\ \xi \in \mathfrak{b}\},$$
$$\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}} := V(F) \cap \rho(\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})^{-1} V(\mathbb{A},S) = \left\{\left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{12} & x_2\end{smallmatrix}\right] \mid x_1 \in \mathfrak{a}, x_{12} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b},\ x_2 \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2\right\}$$

とおく. ただし,

$$G(\mathbb{A},S) := G(F_S) \times \prod_{v\notin S} G(\mathfrak{O}_v) \quad V(\mathbb{A},S) := V(F_S) \times \prod_{v\notin S} V(\mathfrak{O}_v).$$

$\delta_S = (\delta_v)_{v\in S} \in [F_S^\times]_2$ に対して $V^0(F_S,\delta) := \prod_{v\in S} V^0(F_v,\delta_v)$ とし,

$$\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S) := \mathscr{L}_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cap V^0(F_S,\delta_S)$$

とおく. $X \in V^0(F)$ の $G(F)$ での固定部分群を $G(F)^X$ とする.

補題 5.4 $s \in \mathcal{D}$ とする. 任意の $\delta_S \in [F_S^\times]_2$ に対して,

$$\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(s,\delta) := |\tau_1(\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})|_S^{s_1} |\tau(\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})|_S^{s_2} \sum_{X \in \Gamma_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\backslash \mathscr{L}_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)} \frac{\#(\Gamma_{S,\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cap G(F)^X)^{-1}}{|P_1(X)|_S^{s_1} |P(X)|_S^{s_2}}. \tag{5.3}$$

証明 ここだけの記号として, $\gamma_{\varepsilon,\eta}(\xi) = \left(\varepsilon, \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \xi & \varepsilon^{-1}\eta \end{smallmatrix}\right]\right) \in \Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S}$ とおく. $X = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathscr{L}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cap V^0(F)$ に対して $\mu = P_1(X) = x_1$, $\nu = P(X) = x_{12}^2 - x_1x_2$ とおくと $\mu \in \mathfrak{a} - (0)$, $\nu \in \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (0)$, $x_{12} \in \mathfrak{ab}$, $x_2 \in \mathfrak{ab}^2$ であり

$$x_{12}^2 - \nu = \mu x_2 \in \mu\mathfrak{ab}^2 \qquad \therefore\ x_{12}^2 \equiv \nu \pmod{\mu\mathfrak{ab}^2}$$

となる. これより, $X \mapsto (\mu, \nu, x_{12})$ は $\mathscr{L}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cap V^0(F)$ から, 集合

$$\mathbf{Y} := \{(\mu,\nu,x) \in (\mathfrak{a}-(0)) \times (\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (0)) \times \mathfrak{ab} \mid x^2 \equiv \nu \pmod{\mu\mathfrak{ab}^2}\}$$

の上への全単射を与える. また $X' \in \mathscr{L}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cap V^0(F)$, $\mu' = P_1(X')$, $\nu' = P(X')$ とすると, $X' = \rho(\gamma_{\varepsilon,\eta}(\xi))X$ は

$$\mu' = \varepsilon\mu, \quad \nu' = \eta^2\nu, \quad x'_{12} = \varepsilon(\eta x_{12} + \xi\mu)$$

と同値であることが分かる. よって, これが $\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S}$ の集合 $\mathbf{Y}$ への作用を記述している. $(\mu,\nu) \in (\mathfrak{a}-(0)) \times (\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2-(0))$ に対して, $\mathbf{Y}(\mu,\nu) := \{(\mu,\nu)\} \times \mathfrak{ab}) \cap \mathbf{Y}$ とおく. $\gamma_{\varepsilon,\eta}(\xi)$ がファイバー $\mathbf{Y}(\mu,\nu)$ を保つ条件は, $\varepsilon = 1$, $\eta = \pm 1$ であり, $\gamma_{1,\pm1}(\xi)$ の作用は $(\mu,\nu,x) \mapsto (\mu,\nu,\pm x + \xi\mu)$ となる. この作用による $\mathbf{Y}(\mu,\nu)$ の商集合を $\bar{\mathbf{Y}}(\mu,\nu)$ とすると, $\bar{\mathbf{Y}}(\mu,\nu) \cong A(\mu,\nu)/\{\pm1\}$ となる. $x \in A(\mu,\nu)$ に対して, $\tilde{x} := \begin{bmatrix} \mu & x \\ x & (x^2-\nu)/\mu \end{bmatrix}$ を対応する $\mathscr{L}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cap V^0(F)$ の元とすると, (5.3) の右辺の和の部分は

$$\sum_{[\mu,\nu] \in \mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\delta_S)} \left\{ \sum_{x \in A(\mu,\nu)/\{\pm1\}} \#(\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S} \cap G(F)^{\tilde{x}})^{-1} \right\} \mathbf{N}_S(\mu)^{-s_1} \mathbf{N}_S(\nu)^{-s_2}$$

と書きなおせるから,

$$\sum_{x \in A(\mu,\nu)/\{\pm1\}} \#(\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S} \cap G(F)^{\tilde{x}})^{-1} = \tfrac{1}{2}\#A(\mu,\nu) \tag{5.4}$$

が成立することを示せばよい.
さて, $\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S} \cap G(F)^{\tilde{x}} \subset \{\gamma_{1,1}(0)(\text{単位元}), \gamma_{1,-1}(2x\mu^{-1})\}$ だから

$$\#(\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},S} \cap G(F)^{\tilde{x}})^{-1} = \begin{cases} 2^{-1} & (x \equiv -x \pmod{\mu\mathfrak{b}}), \\ 1 & (x \not\equiv -x \pmod{\mu\mathfrak{b}}) \end{cases}$$

である. これより (5.4) がすぐ従う. □

$\mathfrak{a}_j$ に対応するイデールを α_j とすると, $\{\alpha_j^{-1}\}_j$ は商 $\mathrm{Cl}(F,S)$ の $(\mathbb{A}^\times)^S$ における完全代表系であることに注意すると, 補題 5.4 より式 (5.2) は [KTW,] の定義と一致する [15])

[15][KTW, p.484] の $\xi^S(s,\delta_S)$ の定義式の訂正: 因子 $|\tau_1(\gamma_{jk})|_S^{s_1} |\tau(\gamma_{jk})|_S^{s_2}$ を入れる.

5.1.2 指標型

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を $\mathfrak{O}_F(S)$ の可逆イデアルとし, ω_S を有限群 $[F_S^\times]_2$ の指標とする.

定義 5.5

$$\widetilde{\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}(s,\chi_S) := \frac{2^{\#S}}{\#([F_S^\times]_2)\,|2|_S}\mathbf{N}_S(\mathfrak{a})^{s_1}\mathbf{N}_S(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{2s_2}\sum_{[\mu,\nu]\in\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}\omega_S(\nu_S)\,\frac{\#A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mu,\nu)}{\mathbf{N}_S(\mu)^{s_1}\mathbf{N}_S(\nu)^{s_2}}$$

と定義する. ただし, $\mathbf{X}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ は $(\mu,\nu)\in(\mathfrak{a}-(0))\times(\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2-(0))$ の $\mathfrak{O}_F(S)^\times\times\mathfrak{O}_F(S)^\times$-軌道全体の集合である. また, ν_S は $\nu\in F^\times$ の $F_S^\times$ への対角埋め込み像を表す. さらに,

$$\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S) := \sum_{j=1}^{h_F(S)}\sum_{k=1}^{h_F(S)}\widetilde{\xi^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}(s,\omega_S)$$

と定義する, ここで $\{\mathfrak{a}_j\}_{j=1}^{h_F(S)}$ は $\mathfrak{O}_F(S)$ のイデアルからなる類群の完全代表系である.

定義 5.1, 5.5 から明らかに収束域 $\mathcal{D}$ において等式

$$\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S) = \frac{2^{\#(S)+1}}{\#([F_S^\times]_2)|2|_S}\sum_{\delta_S\in[F_S^\times]_2}\omega_S(\delta_S)\,\xi^S(s,\delta_S) \tag{5.5}$$

が成り立つ. $[F_S^\times]_2$ のフーリエ反転公式から

$$\xi^S(s,\delta_S) = \frac{|2|_S}{2^{\#S+1}}\sum_{\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}}\omega_S(\delta_S)\,\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S). \tag{5.6}$$

5.2 大域ゼータ積分/ゼータ函数

(*cf.* [木村, 命題 5.14]) $S\subset\Sigma$ を Σ_∞ を含む有限集合とする. 函数 $\Phi\in\mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ を $\Phi=\otimes_v\Phi_v$, $\Phi_v\in\mathscr{S}(V(F_v))$ かつ

$$\Phi_v = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)} \qquad v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}-S \tag{5.7}$$

となるように取って, 大域ゼータ積分 $Z(\Phi,s)$ を考える (定義 4.5). $\Phi_S := \otimes_{v\in S}\Phi_v\in\mathscr{S}(V(F_S))$ とおき, $\delta_S=(\delta_v)_{v\in S}\in[F_S^\times]_2$, $\omega_S=\otimes_{v\in S}\omega_v\in\widehat{[F_S^\times]_2}$ について

$$Z_S(\Phi_S,s,\delta_S) := \prod_{v\in S}Z_{F_v}(\Phi_v,s,\delta_v),\quad \widetilde{Z_S}(\Phi_S,s,\omega_S) = \prod_{v\in S}\widetilde{Z_{F_v}}(\Phi_v,s,\omega_v)$$

とおく (*cf.* 定義 3.3). 定義 (5.1) と式 (5.2) によって軌道型 2 重ゼータ函数 $\xi^S(s,\delta_S)$ $(\delta \in [F_S^\times]_2)$ および指標型ゼータ函数 $\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S)$ $(\omega \in \widehat{[F_S^\times]_2})$ が定義された.

命題 5.6 $s \in \mathcal{D}$ において次の等式が成り立つ:

$$Z(\Phi,s) = \frac{2^{\#S}}{|2|_S}\Delta_F^{-3/2}\prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}}(1-q_v^{-1})^{-2}\sum_{\delta_S\in[F_S^\times]_2} Z_S(\Phi_S,s,\delta_S)\,\xi^S(s,\delta_S) \tag{5.8}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta_F^{-3/2}\prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}}(1-q_v^{-1})^{-2}\sum_{\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}} \widetilde{Z_S}(\Phi_S,s,\omega_S)\,\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S). \tag{5.9}$$

証明 ([KTW, Lemma 4.2], *cf.* [杉山, §3]) $h = h_F(S)$ とおく. $\mathbb{A}$ の部分群 $F_S\prod_{v\notin S}\mathfrak{O}_v$ は $\mathbb{A}/F$ の代表系を含む. これと $\mathbb{A}^\times = \bigcup_{j=1}^h F^\times\alpha_j^{-1}(F_S^\times\prod_{v\notin S}\mathfrak{O}_v^\times)$ より

$$G(\mathbb{A})/G(F) = \bigsqcup_{j,k=1}^{h}\prod_{v\notin S} G(\mathfrak{O}_v)\,(G(F_S)/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})\,\gamma_{j,k}$$

となる. これと測度の関係 (4.2) および (4.3) から

$$\begin{aligned}
&\Delta_F^{3/2}\times Z(\Phi,s)\\
&=\sum_{j,k}\int_{G(F_S)/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}}|\tau_1(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_2}\sum_{X\in V^0(F)}\Phi(g_S\gamma_{j,k}X)\,\mathrm{d}g_S\\
&=\sum_{j,k}\sum_{\delta_S\in[F_S^\times]_2}\int_{G(F_S)/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}}|\tau_1(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_2}\sum_{X\in V(F)\cap V^0(F_S,\delta_S)}\Phi(g_S\gamma_{j,k}X)\,\mathrm{d}g_S
\end{aligned}$$

ただし, $\mathrm{d}g_S$ は $G(F_S)=\prod_{v\in S}G(F_v)$ の直積測度である. (5.7) より, $\Phi(g_S\gamma_{j,k}X)\neq 0$, $X\in V(F)\cap V^0(F_S,\delta)$ ならば $X\in\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}(\delta_S)$ である. さらに, $\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}$ を $\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}$-軌道分解して, 各軌道 $\rho(\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})X$ と $\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\cap G(F)^X$ の全単射を利用すると, 最後の式は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k}\sum_{\delta_S\in[F_S^\times]_2}\int_{G(F_S)/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}}|\tau_1(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g_S\gamma_{j,k})|_{\mathbb{A}}^{s_2}\\
&\quad\times\sum_{X\in\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\backslash\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}(\delta_S)}\ \sum_{\gamma\in\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}/\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\cap G(F)^X}\Phi_S(g_S(\gamma X)_S)\,\mathrm{d}g_S.
\end{aligned}$$

ここで, 補題 (5.7) を使い, さらに γ に亘る和で g_S の積分領域を合体させることで, 次の式を得る:

$$\sum_{j,k}|\tau_1(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_S^{s_1}|\tau(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_S^{s_2}\sum_{\delta_S\in[F_S^\times]_2}\sum_{X\in\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\backslash\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}(\delta_S)}\frac{\#(\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\cap G(F)^X)^{-1}}{|P_1(X_S)|_S^{s_1}|P(X_S)|_S^{s_2}}$$
$$\times\int_{G(F_S)}|P_1(g_S(\gamma X)_S)|_S^{s_1}|P(g_SX_S)|_S^{s_2}\Phi_S(g_SX_S)\,\mathrm{d}g_S.$$

$X\in\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}(\delta_S)\subset V^0(F_S,\delta_S)$ なので, X と $X_{\delta_S}:=(X_{\delta_v})_{v\in S}$(*cf.* (2.8)) は同じ $G(F_S)$-軌道に属する. よって (3.14) より

$$\begin{aligned}&\int_{G(F_S)}|P_1(g_SX_S)|_S^{s_1}|P(g_SX_S)|_S^{s_2}\Phi_S(g_S(\gamma X)_S)\,\mathrm{d}g_S\\&=\prod_{v\in S}\int_{G(F_v)}|P_1(g_vX_{\delta_v}|_v^{s_1}|P(g_vX_{\delta_v})|_v^{s_2}\Phi_v(g_vX_{\delta_v})\,\mathrm{d}g_v\\&=\prod_{v\in S}2|2|_v^{-1}(1-q_v^{-1})^{-2}Z_{F_v}(\Phi_v,s,\delta_v).\end{aligned}$$

以上の議論を s_j の代わりに $\mathrm{Re}(s_j)$, Φ の代わりに $|\Phi(X)|\leqslant\Psi(X)$ なる非負な $\Psi\in\mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$(補題 4.1) に置き換えて行うと, 非積分函数の非負性から $Z(\Phi,s)$ の絶対収束が $Z_v(\Psi_v,\mathrm{Re}(s),\delta_v)$ の収束 (補題 3.4) および $\xi^S(\mathrm{Re}(s),\delta_S)$ の収束 (命題 5.3) から従う. これで命題 4.5 の証明および等式 (5.8) の証明が終了する. (5.9) は (5.6) および (3.11) を使うと (5.8) から得られる. □

補題 5.7 $g_S\in G(F_S)$, $X\in\mathscr{L}_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}$, $\gamma\in\Gamma_{S,\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}$ とすると, $j=1,2$ について [16]

$$|\tau_j(g_S(\gamma X)_S)|_S=\frac{|P_j(g_S(\gamma X)_S|_S}{|P_j(X_S)|_S}\times|\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_S$$

証明 P_j は連続写像 $P_j:X=(X_v)_v\ni V^0(\mathbb{A})\longmapsto P_j(X)=(P_j(X_v))_v\in\mathbb{A}^\times$ を定義する. よって, $P_j(X)_S$, $P_j(X)^S$ が意味を持つ. $|P_j(X)_S|_{\mathbb{A}}=|P_j(X_S)|_S$ に注意する.

$$\begin{aligned}|P_j(g_S\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma X)|_{\mathbb{A}}&=|P_j(g_S\,(\gamma X))_S|_{\mathbb{A}}\,|P_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma X)^S|_{\mathbb{A}}\\&=|P_j(g_S\,(\gamma X)_S)|_S\,|\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma^S)|_{\mathbb{A}}\,|P_j(X)^S|_{\mathbb{A}}.\end{aligned}$$

[16][KTW] の訂正：論文 p.485 (4.6) 式の右辺の最後に因子 $|\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}|_S$ を入れる. 対応して, p.484 (4.4) 式の直前で $\alpha_j\in\mathbb{A}^1\cap(F^\times)^S$ を $\alpha_j\in(F^\times)^S$ に訂正.

ここで, $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}$ より $\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma^S\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}^{-1} \in \prod_{v\notin S} G(\mathfrak{O}_v)$ なので, $|\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma^S)|_{\mathbb{A}} = |\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_{\mathbb{A}} = |\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_S$. また $X \in V(F)$ だから, $|P_j(X)^S|_{\mathbb{A}} = |P_j(X)_S|_{\mathbb{A}}^{-1} = |P_j(X_S)|_S$. よって,

$$|P_j(g_S\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma X)_S|_{\mathbb{A}} = |P_j(g_S\,(\gamma X)_S)|_S\,|\tau_j(\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_S\,|P_j(X_S)|_S^{-1}. \tag{5.10}$$

一方, $\gamma X \in V(F)$ より $|P_j(\gamma X)|_{\mathbb{A}} = 1$ なので,

$$|P_j(g_S\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k}\gamma X|_{\mathbb{A}} = |\tau_j(g_S\gamma_{\mathfrak{a}_j,\mathfrak{a}_k})|_{\mathbb{A}} \tag{5.11}$$

(5.10), (5.11) を比較することで所望の式が得られる. □

5.3 2重ゼータ函数の「明示公式」

この節では, 軌道型2重ゼータ函数 $\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S)$ の別表示 ([KTW, Theorem 4.3]) を証明する.

定理 5.8 $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ とする. $s \in \mathcal{D}$ に対して, 次が成り立つ：

$$\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S) = \zeta_F^S(s_1)\,\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)}\frac{L^S(s_2,\chi)}{L^S(2s_1+s_2,\chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}}. \tag{5.12}$$

証明 $s \in \mathcal{D}$ とする. (5.9) と定理 4.17 より

$$\begin{aligned}&\sum_{\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}}\widetilde{Z_S}(\Phi_S,s,\omega_S)\,\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S)\\ &= \sum_{\omega_S\in\widehat{[F_S^\times]_2}}\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F}\widetilde{Z_S}(\Phi_S,s,\omega_S)\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)}\frac{\zeta_F^S(s_1)\,\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)\,L^S(s_2,\chi)}{L^S(2s_1+s_2,\chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}}.\end{aligned}$$

が $\Phi_v = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}\,(v\notin S)$ であるような任意の $\Phi = \otimes_v\Phi_v \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ で成り立つ. $\Phi_v\,(v\in S)$ を走らせると系 3.8 から, 任意の $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ について等式 (5.12) が得られる. □

5.4 ２重ゼータの「明示公式」II

命題 5.9 S を Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合とし, $\delta_S \in [F_S^\times]_2$ とする. $S' = S \cup \Sigma_2$ とおく. $s \in \mathcal{D}$ に対して,

$$\xi^S(s,\delta_S) = \tfrac{1}{2}\Delta_F^{3/2}\frac{\zeta_F^{S'}(s_1)}{\zeta_{S'}^F(2s_1)}\zeta_F^{S'}(2s_2)\zeta_F^{S'}(2s_1+2s_2-1) \times \sum_{\substack{d\in[F^\times]_2 \\ d_S\in\delta_S(F_S^\times)^2}} \frac{L^{S'}(s_1,\omega_d)\,\mathfrak{L}_{\Sigma_2-S}(s,d)}{L^{S'}(2s_2+s_1,\omega_d)\,\mathbf{N}_{S'}(\mathfrak{f}_{\omega_d})^{s_2}}, \tag{5.13}$$

ここで

$$\mathfrak{L}_{\Sigma_2-S}(s,d) := \prod_{v\in\Sigma_2-S} 2|2|_v^{-1}(1-q_v^{-1})^{-2}|d_v|_v^{s_2} Z_{F_v}(\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}, s, d_v)$$

であり, $d \in [F^\times]_2$ に対して $\omega_d \in \mathfrak{C}_F$ は §4.3.2 で定義される実指標, d_S は d の $[F_S^\times]_2$ への自然な像を表す. 領域

$$\mathcal{D}_2' := \{s\in\mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(s_1+2s_2) > 2+\max(\mathrm{Re}(s_1), 1-\mathrm{Re}(s_1), 1)\}$$

において級数 (5.13) は広義一様に絶対収束し, 上の式によって $\xi^S(s,\delta_S)$ は $\mathcal{D}_2'$ に有理型に解析接続される [17]

証明 $\Phi = \otimes_v\Phi_v$, $\Phi_v \in \mathscr{S}(V(F_v))$, $\Phi_v = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}$ $(v \notin S)$ とする. §4.6.2 の最初の式変形から

$$Z(\Phi,s) = \sum_{d\in[F^\times]_2}\int_{G(\mathbb{A})/G(F)^{X_d}} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2}\Phi(gX_d)\,\mathrm{d}g.$$

$G(F)^{X_d} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるから,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{d\in[F^\times]_2}\int_{G(\mathbb{A})} |\tau_1(g)|_{\mathbb{A}}^{s_1}|\tau(g)|_{\mathbb{A}}^{s_2}\Phi(gX_d)\,\mathrm{d}g \\
&= \frac{1}{2}\sum_{d\in[F^\times]_2}\prod_v\int_{G(F_v)} |\tau_1(g_v)|_v^{s_1}|\tau(g_v)|_v^{s_2}\Phi_v(g_vX_d)\,\mathrm{d}g_v \\
&= \frac{1}{2}\sum_{d\in[F^\times]_2}\prod_v\{(1-q_v^{-1})^{-2}2|2|_v^{-1}Z_{F_v}(\Phi_v,s,d_v)\},
\end{aligned}$$

[17] $\mathcal{D}_2'$ は [KTW, Prop.4.9] で考えた領域と同じ.

ここで, 最後の等式は (3.14) による. $v \notin S' = S \cup \Sigma_2$ のとき, $\Phi_v = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}$ だから, 補題 3.6(2) の式を代入して, $Z(\Phi, s) =$

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta_F^{S'}(s_1)\zeta_F^{S'}(2s_2)}{\zeta_F^{S'}(2s_1)}\zeta_F^{S'}(2s_1+2s_2-1)\sum_{d\in[F^\times]_2}\frac{L^{S'}(s_1,\omega_d)\mathfrak{L}_{\Sigma_2-S}(d,s)}{L^{S'}(s_1+2s_2,\omega_d)\,\mathbf{N}_{S'}(\mathfrak{f}_{\omega_d})^{s_2}}$$
$$\times\prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}}\{(1-q_v^{-1})^{-2}2|2|_v^{-1}\}\prod_{v\in S}Z_{F_v}(\Phi_v, s, \delta_v).$$

命題 5.8 の証明の最後の部分と同様の議論により, Φ_v $(v \in S)$ を走らせてこれと (5.8) を比較することで所望の式を得る.

定義 3.3 および補題 3.4 から $\mathcal{D}'$ 上広義一様に評価 $|Z_{F_v}(\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_V)}, s, d_v)| \ll 1$ が成り立つことに注意すると, 後半部分は補題 4.19 と同じ議論で証明される. □

注意 5.10 §8 で述べた背景から, 表示式 (5.13) は 2 重ゼータを「不分岐 Eisenstein 級数のトーラス周期付き Dirichlet 級数」と見たときの明示的な公式であると思える. 実際, (5.13) は Eisenstein 級数のトーラス周期を与える Hecke の公式を内包している.

例： [伊吹山・齋藤 II, p.291] で, 次の式が述べられている [18]($\xi_i(s)$ の方は省略)[19]:

$$\xi_i^*(s) = \frac{\zeta^{(2)}(2s_2)\zeta^{(2)}(s_1)}{\zeta^{(2)}(2s_1)\zeta^{(2)}(s_2)}\times\zeta^{(2)}(s_2)\zeta^{(2)}(2s_1+2s_2-1)$$
$$\times\sum_{(-1)^{i-1}D>0}\frac{L^{(2)}(s_1,\chi_D)}{L^{(2)}(2s_2+s_1,\chi_D)}\frac{1}{(D^{(2)})^{s_2}}\times\left\{\sum_{e=2}^{\infty}\frac{a_D^{(s_1)}(2^e)}{(2^e)^{s_1+s_2-\frac{1}{2}}}\right\} \tag{5.14}$$

ここで, $a_D^{(s_1)}(2^e)$ はオイラー 2 因子の Dirichlet 級数展開係数である:

$$\frac{\zeta_2(s_1)}{\zeta_2(2s_1)}\zeta_2(2s_2)\zeta_2(2s_1+2s_2-1)\frac{L_2(s_1,\chi_D)}{L_2(2s_2+s_1,\chi_D)}\frac{1}{D_2^{s_2}} = \sum_{e=0}^{\infty}\frac{a_D^{(s_1)}(2^e)}{(2^e)^{s_1+s_2-1/2}} \tag{5.15}$$

[18] 公式 (5.14) は命題 (1.2)(3) の式と良く似ているが大きな違いは s_1, s_2 の場所が入れ替わっている点である. 公式 (5.14) の証明は [Z, Prop.3.1(1)] を使うと初等的な変形で容易にできる, 未確認だが命題 1.2(3) の公式は (5.14) から Blomer の議論 (途中で Kronecker 記号による 2 次相互法則を使う 2 重級数の変形) によって導けると思われる. *cf.* $S = \{\infty, 2\}$ のとき [KTW, §A3] 参照.

[19] [KTW, §A.2] で述べたように $\xi_i(s)$ の対応する公式は谷口の結果からも従う.

公式 (5.14) は命題 5.9 で得られた表示式 (5.13) を $F = \mathbb{Q}$, $S = \{\infty\}$ で使うと, あとは $\mathfrak{L}_{\{2\}}(d, s)$ を計算することで得られる. $[\mathbb{Q}_2^\times]_2$ の代表系を §7.1 のように取る. $\delta \in [\mathbb{Q}_2^\times]_2$ について, ω_δ の導手は $\delta = 1, 5$ のとき $\mathbb{Z}_2$, $\delta = 3, 7$ のとき $4\mathbb{Z}_2$, $\delta \equiv 0 \pmod 2$ のとき $8\mathbb{Z}_2$ となる。よって $\delta \neq 1, 5$ のとき $L(z, \omega_\delta) = 1$, $L(z, \omega_1) = 1 - 2^{-z}$, $L(z, \omega_5) = 1 + 2^{-z}$ となる (*cf.* (3.1)). これに注意し, 補題 3.6(1) の式を公式 (3.12) に代入して計算すると, $Z_{\mathbb{Q}_2}(\mathbb{1}_{V(\mathbb{Z}_2)}, s, \delta)$ は次のようにもとまる:

$$\frac{2^{-4}}{(1-2^{-2s_2})(1-2^{1-2s_1-2s_2})} \begin{cases} \frac{1+2^{-s_1}}{1-2^{-s_1}}(1 - 2^{-s_1} + 2^{1-2s_1} - 2^{1-2s_1-2s_2}) & (\delta = 1), \\ (1 + 2^{-s_1} + 2^{1-2s_1} - 2^{1-2s_1-2s_2}) & (\delta = 5), \\ 1 + 2^{-s_1} \quad (\delta = 3, 7), \\ (1 + 2^{-s_1})2^{-s_2} \, (\delta \equiv 0 \pmod 2)). \end{cases}$$

一方, 展開 (5.15) を場合分けして調べてこの結果と比較することで次を得る:

$$2^4 \, Z_{\mathbb{Q}_2}(\mathbb{1}_{V(\mathbb{Z}_2)}, s, \delta) = 2^{2s_2} \times \sum_{e=2}^{\infty} \frac{a_\delta^{(s_1)}(2^e)}{(2^e)^{s_1+s_2-1/2}}.$$

6 函数等式

S を Σ_∞ を含む Σ の有限部分集合とする. $\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}$ に対して,

$$\Xi^S(s, \omega_S) := \frac{\zeta_F^S(2s_1)}{\zeta_F^S(s_1)} \widetilde{\xi^S}(s, \omega_S), \quad s = (s_1, s_2) \in \mathcal{D} \tag{6.1}$$

と定義する. $\widehat{[F_S^\times]_2}$ を添え字集合とし, 次のベクトル値有理型函数を導入する.

$$\boldsymbol{\Xi}^S(s) := (\Xi^S(s, \omega_S))_{\omega_S \in \widehat{[F_S^\times]_2}}$$

6.1 定義

$\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ を $\mathbb{C}^2$ の可逆アフィン変換全体のなす群とする. $\mathbb{C}^2$ 上の有理型函数 [20] 全体のなす体を $\mathfrak{M}$ とし, 群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ の体 $\mathfrak{M}$ への右作用を

$$\phi^f(s_1, s_2) := \phi(f(s_1, s_2)), \quad \phi(s_1, s_2) \in \mathfrak{M}, \ f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$$

[20] $\mathbb{C}^2$ の稠密開集合上で定義された複素数値函数で, 局所的には正則函数の比で与えられるものを有理型関数と呼ぶ

で定義する. I を空でない有限集合とする. このとき, $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ は $\mathfrak{M}$ に成分を持つ I 上の行列環 $\mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})$ に自然に作用するので, 半直積群 $\mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ が考えられる. ここで, $\mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})^\times$ は可逆行列全体の乗法群を表す.

定義 6.1 (i) $\mathfrak{c} = (\mathbf{C}(s), f) \in \mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ とする.

$$\mathbf{\Xi}(f(s)) = \mathbf{C}(s)\,\mathbf{\Xi}(s)$$

が成り立つとき, $\mathfrak{c}$ 型の函数等式を満たすという.

(ii) H を有限群とする. $\mathbf{\Xi}(s) = (\Xi_i(s))_{i\in I} \in \mathfrak{M}^I$ を $\mathbb{C}^2$ 上のベクトル値有理型函数とする. 群準同型 $\mathbf{\Gamma} : H \longrightarrow \mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ が $\mathbf{\Xi}(s)$ の H-函数等式系であるとは, $\mathbf{\Gamma}(h) = (\mathbf{C}_h(s), f_h)\,(h \in H)$, $\mathbf{C}_h(s) \in \mathbf{Mat}_{I\times I}(\mathfrak{M})$, $f_h \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ とするとき,

(a) $\mathbf{\Xi}(s)$ が任意の $h \in H$ について $\mathbf{\Gamma}(h)$ 型の函数等式を満たし, かつ

(b) $h \mapsto f_h$ は H から $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ への単射

が成り立つことを意味する.

6.2 函数等式 I

Affine 変換 $f_\beta : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$f_\beta : s = (s_1, s_2) \longmapsto \left(s_1 + s_2 - \tfrac{1}{2}, 1 - s_2\right) \tag{6.2}$$

で定義する. この変換の位数は 2 である. $\mathsf{B}_S(s) \in \mathbf{Mat}_{\widehat{[F_S^\times]_2}\times\widehat{[F_S^\times]_2}}(\mathfrak{M})$ を ω_S-対角成分が $\Gamma_S(s_2, \omega_S)$ (*cf.* (4.7)), 対角成分以外は 0 として定義する. $\mathsf{B}_S(s)$ は s_2 のみの函数である. (4.23) で定義される領域 $\mathcal{D}_2$ を想起しよう. 容易に分かるように, $f_\beta(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_2$ である.

定理 6.2 $\mathcal{D}$ 上の正則函数 $(s_2 - 1)\mathbf{\Xi}^S(s)$ は $\mathcal{D}_2$ 上の正則函数に解析接続され,

$$\mathbf{\Xi}^S(f_\beta(s)) = \mathsf{B}_S(s)\,\mathbf{\Xi}^S(s), \quad s \in \mathcal{D}_2$$

が成り立つ.

証明 定理 (5.8) と (6.1) から $s \in \mathcal{D}$ において

$$\Xi^S(s, \omega_S) = \zeta_F^S(2s_1)\,\zeta_F^S(2s_1 + 2s_2 - 1) \sum_{\chi \in \mathfrak{C}_F(\omega_S)} \frac{L^S(s_2, \chi)}{L^S(2s_1 + s_2, \chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1}}$$

である. 補題 4.19 より, 右辺の級数表示は $\mathcal{D}_2$ 上で収束して正則函数を定義している. $\zeta_F^S(2s_1)$, $\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)$, $(s_2-1)L^S(s_2,\chi)$ は $\mathcal{D}_2$ 上正則だから, 上の表示によって $(s_2-1)\Xi^S(s,\omega_S)$ は $\mathcal{D}_2$ 上で正則に解析接続される. f_β は 2 つの多項式 $2s_1$, $2s_1-2s_2-1$ を入れ替え, s_2, $1-s_2$ も f_β で入れ替わる. よって補題 4.2 によれば, $s\in\mathcal{D}_2$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&\Xi^S(f_\beta(s),\omega_S)\\
&=\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)\,\zeta_F^S(2s_1)\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)}\frac{L^S(1-s_2,\chi)}{L^S(2s_1+s_2,\chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1+s_2-1/2}}\\
&=\zeta_F^S(2s_1+2s_2-1)\,\zeta_F^S(2s_1)\sum_{\chi\in\mathfrak{C}_F(\omega_S)}\frac{\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_2-1/2}\,\Gamma_S(s_2,\omega_S)\,L^S(s_2,\chi)}{L^S(2s_1+s_2,\chi)\,\mathbf{N}_S(\mathfrak{f}_\chi)^{s_1+s_2-1/2}}\\
&=\Gamma_S(s_2,\omega_S)\,\Xi^S(s,\omega_S)
\end{aligned}
$$

□

注意 6.3　表示式 (5.9), 定義 5.5 および (6.1) から, 定理 6.2 と同様の論法で $\mathbf{\Xi}^S(s)$ の $f_\gamma\circ f_\alpha^3:(s_1,s_2)\mapsto(1-s_1,s_1+s_2-\frac{1}{2})$ に関する函数等式が得られる.(*cf.* §1(iii) で述べた新谷の結果. 注意 5.10 も参照.)

6.3　函数等式 II

Affine 変換 $f_\gamma:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$ を

$$
f_\gamma:(s_1,s_2)\longmapsto\left(s_1,\tfrac{3}{2}-s_1-s_2\right), \tag{6.3}
$$

で定義する. この変換は位数 2 で, 領域 $\mathcal{D}_1=\{s\in\mathbb{C}^2\mid\mathrm{Re}(s_1)>1\}$ を保つことに注意する. $\omega_S=\otimes_{v\in S}\omega_v$, $\chi_S=\otimes_{v\in S}\chi_v\in\widehat{[F_S^\times]_2}$ に対して,

$$
\widetilde{G_S}(s,\omega_S,\chi_S):=\prod_{v\in S}\widetilde{G_{\psi_{F_v}}}(s,\omega_v,\chi_v)
$$

とおき (*cf.* 定義 3.12(2)),

$$
\mathsf{C}_S(s):=(\widetilde{G_S}(s,\omega_S,\chi_S))_{(\chi_S,\omega_S)}\in\mathbf{Mat}_{\widehat{[F_S^\times]_2}\times\widehat{[F_S^\times]_2}}(\mathfrak{M})
$$

と定義する [21].

[21][KTW, Theorem 4.21] の等式の右辺の最初の因子 $\Delta_F^{-3/2}$ は不要.

定理 6.4 $\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は $\mathcal{D}_1$ 上の有理型函数に解析接続され, $(s_2-1)(s_1+s_2-3/2)\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は $\mathcal{D}_1$ 上正則になる. S が $\Sigma_2 \cup \Sigma_\infty \cup \{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} \mid \mathrm{ord}_v(\mathfrak{d}_{F_v/\mathbb{Q}}) > 0\}$ を含むとすると, $s \in \mathcal{D}_1$ に対して,

$$\boldsymbol{\Xi}^S(f_\gamma(s)) = \mathsf{C}_S(s)\,\boldsymbol{\Xi}^S(s).$$

証明 まず, $\delta_S = (\delta_v)_{v\in S} \in [F_S^\times]_2$ について $\xi^S(s,\delta)$ の解析接続を導く. $v \notin S$ に対しては $\Phi_v = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}$ とおき, $v \in S$ に対する $\Phi_v \in \mathscr{S}(V(F_v))$ を $\mathrm{Supp}(\Phi_v) \subset V^0(F_v,\delta_v)$ と成るように選んで $\Phi := \otimes_v \Phi_v \in \mathscr{S}(V(\mathbb{A}))$ とおく. この函数に対して定理 4.8 を適用する. Φ の選び方から

$$T(\Phi, s_1) = 0 \quad (\mathrm{Re}(s_1) > 1), \tag{6.4}$$
$$\zeta(\Phi^{(3)}(0,0,\cdot), s_2) = 0 \quad (\mathrm{Re}(s_1) > 1) \tag{6.5}$$

となる. これらは, 行列 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a^{-1}b^2 \end{smallmatrix}\right]$ および行列 $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_2 \end{smallmatrix}\right]$ が特異集合 $V - V^0$ に含まれるので定義 (4.12) および (4.14) から直ちに従う. 定理 4.8, (6.4), (6.5) から

$$\begin{aligned} Z(\Phi,s) &= Z_+(\Phi, s_1, s_2) + Z_+(\widehat{\Phi}, s_1, \tfrac{3}{2} - s_1 - s_2) \\ &\qquad + \frac{c_F}{2s_1+2s_2-3}\,T(\widehat{\Phi}, s_1) + \frac{c_F}{2s_2-2}\,\zeta(\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,\cdot), s_1). \end{aligned}$$

この式の右辺の最初の 2 項は $\mathcal{D}_1$ において正則函数になる. $\zeta(\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,\cdot), s_1)$ は $\widehat{\Phi}^{(3)}(0,0,\cdot) \in \mathscr{S}(\mathbb{A})$ にたいする Tate の大域ゼータ積分なので $\mathrm{Re}(s_1) > 1$ では正則函数になる. また $T(\widehat{\Phi}, s)$ は補題 4.7 (3) より $\mathrm{Re}(s) > 1$ で正則函数である. よって, $(s_2-1)(s_1+s_2-3/2)\,Z(\Phi,s)$ が $\mathcal{D}_1$ で正則に成ることが分かった.

Φ の選び方から $Z_S(\Phi_S, s, \delta'_S) = 0$ ($\delta'_S \neq \delta_S$) だから, (5.8) より

$$Z(\Phi,s) = \frac{2^{\#S}}{|2|_S}\Delta_F^{-3/2} \prod_{v \in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}} (1-q_v^{-1})^{-2} Z_S(\Phi_S, s, \delta_S)\,\xi^S(s,\delta_S), \quad s \in \mathcal{D}.$$

この式の右辺に $(s_2-1)(s_1+s_2-3/2)$ をかけると $\mathcal{D}_1$ で正則函数になる. 補題 3.7 から各点 $w \in \mathcal{D}_1$ において $Z_S(\Phi_S, w, \delta_S) \neq 0$ となるように Φ_v ($v \in S$) を選べるから,

$$\xi^S(s,\delta_S) = \frac{|2|_S}{2^{\#S}}\Delta_F^{3/2} \prod_{v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}} (1-q_v^{-1})^2\,\frac{1}{Z_S(\Phi_S, s, \delta_S)} \times Z(\Phi,s)$$

によって $(s_2-1)(s_1+s_2-3/2)\,\xi^S(s,\delta_S)$ は $w \in \mathcal{D}_1$ の近傍で正則になることが分かる. (5.5) により, $(s_2-1)(s_1+s_2-3/2)\,\widetilde{\xi^S}(s,\omega_S)$ についても同じことが言える.

次に函数等式を導く．S が Σ_2 および $\mathfrak{d}_{F/\mathbb{Q}}$ の素因子をすべて含むとの仮定から $\widehat{\mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}} = \mathbb{1}_{V(\mathfrak{O}_v)}$ $(v \notin S)$ となる (補題 3.10)．よって, 系 4.9 と (5.8) から

$$Z_S(\Phi_S, f_\gamma(s), \delta_S)\,\xi^S(f_\gamma(s), \delta_S) = \sum_{\varepsilon_S \in [F_S^\times]} Z_S(\widehat{\Phi_S}, s, \varepsilon_S)\,\xi^S(s, \varepsilon_S), \quad s \in \mathcal{D}_1$$

ここで (3.19) より得られる等式

$$Z_S(\widehat{\Phi_S}, s, \varepsilon_S) = \sum_{\eta_S \in [F_S^\times]_2} G_S(s, \varepsilon_S, \eta_S)\,Z_S(\Phi_S, f_\gamma(s), \eta_S) = G_S(s, \varepsilon_S, \delta_S)\,Z_S(\Phi_S, f_\gamma(s), \delta_S)$$

を使うと,

$$Z_S(\Phi_S, f_\gamma(s), \delta_S)\,\xi^S(f_\gamma(s), \delta_S) = \sum_{\varepsilon_S \in [F_S^\times]} G_S(s, \varepsilon_S, \delta_S)\,Z_S(\Phi_S, f_\gamma(s), \delta_S)\,\xi^S(s, \varepsilon_S).$$

Φ_v $(v \in S)$ を走らせると補題 3.7 より,

$$\xi^S(f_\gamma(s), \delta_S) = \sum_{\varepsilon_S \in [F_S^\times]} G_S(s, \varepsilon_S, \delta_S)\,\xi^S(s, \varepsilon_S)$$

を得る．さらに (5.5), (5.6),(6.1) などを使うと $\Xi^S(s, \omega_S)$ 達の間の所望の函数等式が得られる． $\square$

6.4 アフィン変換による 2 面体群の実現

位数 12 の 2 面体群は次の生成元と関係式で定義される

$$D_{12} := \langle \gamma, \beta \mid \gamma^2 = \beta^2 = (\beta\gamma)^6 = 1 \rangle$$

あるいは $\alpha = \beta\gamma$ とおけば次のようにも書ける:

$$D_{12} = \langle \gamma, \alpha \mid \gamma^2 = \alpha^6 = 1,\ \gamma\alpha\gamma = \alpha^{-1} \rangle$$

f_γ, $f_\beta \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ を (6.3), (6.2) で定義し, $f_\alpha := f_\beta \circ f_\gamma$ と定義すると,

$$f_\gamma^2 = f_\alpha^6 = 1, \quad f_\gamma \circ f_\alpha \circ f_\gamma = (f_\alpha)^{-1}$$

であり, f_γ, f_α は位数 12 の 2 面体群 D_{12} と同型な $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ の部分群を生成する．その要素は以下の表で与えられる．

1	f_α	f_α^2	f_α^3	f_α^4	f_α^5
$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s_1+s_2-1/2 \\ 1-s_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s_2 \\ 3/2-s_1-s_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-s_1 \\ 1-s_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3/2-s_1-s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-s_2 \\ s_1+s_2-1/2 \end{pmatrix}$

f_γ	$f_\beta = f_\gamma \circ f_\alpha$	$f_\gamma \circ f_\alpha^2$	$f_\gamma \circ f_\alpha^3$	$f_\gamma \circ f_\alpha^4$	$f_\gamma \circ f_\alpha^5$
$\begin{pmatrix} s_1 \\ 3/2-s_1-s_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s_1+s_2-1/2 \\ 1-s_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-s_1 \\ s_1+s_2-1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3/2-s_1-s_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-s_2 \\ 1-s_1 \end{pmatrix}$

6.5 解析接続

定理 6.5 [22] S が Σ の有限部分集合で, Σ_∞ を含むとする. このとき $(s_1-1)(s_2-1)(s_1+s_2-\frac{3}{2})\,\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は $\mathbb{C}^2$ 上の正則函数に解析接続される. $\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は $(\mathsf{B}_S(s), f_\beta)$ 型函数等式および $(\mathsf{C}_S(s), f_\gamma)$ 型函数等式の両方を満たす.

証明 多変数ゼータの解析接続でよく使われる Hartogs の拡張定理を使った議論による (*cf.* [佐藤 82-1, p.603], [谷口 1, §5.4], [KTW, Cor.4.17]). 命題 5.9, 定義 5.5 および定理 6.4 から, $(s_1-1)(s_2-1)(s_1+s_2-\frac{3}{2})\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ は領域 $\mathcal{D}_2'$, $\mathcal{D}_1$ の上で正則である. よって, $\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2'$ の線型凸包 $\mathrm{Conv}(\mathcal{D}_2'\cup\mathcal{D})$ まで正則に延長される. $\mathrm{Conv}(\mathcal{D}_2'\cup\mathcal{D}_1)=\mathbb{C}^2$ なので結論を得る. □

注意 6.6 この証明では $\mathcal{D}_2'$ での解析性の確保に表示式 5.13 が使われている. $\mathcal{D}_2$ が $\mathcal{D}_1$ に含まれてしまうため, 良く似た表示式 (5.12) の方からは $\mathbb{C}^2$ への解析接続は得られない [23].

7 $F=\mathbb{Q}$ の場合

$F=\mathbb{Q}$ とする. $\Sigma_{\mathbb{R}}=\{\infty\}$, $\Sigma_{\mathbb{C}}=\emptyset$, Σ_{fin} は素数全体の集合と同一視される. $\mathbb{Q}$ の素点の有限集合 S 全体を $\mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}$ とする.

7.1 定理 1.1 の導出

$\mathbb{Q}_p$ の 2 次ヒルベルト記号や $[\mathbb{Q}_p^\times]_2$ の構造などについては, 例えば [志村, p.19, pp.33-34] に詳しい説明がある. まとめておく.

- p が奇素数の場合, $u_p\in\mathbb{Z}_p^\times-(\mathbb{Z}_p)^2$ を一つ固定すると,

$$[\mathbb{Q}_p^\times]_2=\{1,u_p,p,pu_p\}$$

 と代表系がとれる. $u\in\mathbb{Z}-\{0\}$ が p と互いに素な整数ならば,

$$(p,u)_{\mathbb{Q}_p}=\left(\frac{u}{p}\right),\quad (p,p)_{\mathbb{Q}_p}=\left(\frac{-1}{p}\right),\quad (u,v)_{\mathbb{Q}_p}=1$$

[22] 前半の正則性の部分は $F=\mathbb{Q}$, $S=\{\infty\}$ の場合は [佐藤 82-1] から従う. 佐藤文広先生から講演中にいただいたコメントによると, Eisenstein 級数を $\mathscr{S}(\mathbb{A}^2)$ の元から構成する Godment の方法 (古典的には Eisenstein 級数を Epstein ゼータと関連付けることに対応) を適用すると, §8 を [佐藤 82-1, §2] にある多変数設定に書き換えることが出来ると思われます. [佐藤 82-1] をアデールを使って代数体へ一般化することは実質的に [谷口 1] で行われている.

[23] 講演の中では間違った事を言いました, このように訂正します

- $p=2$ の場合, $1+8\mathbb{Z}_2=(\mathbb{Z}_2^\times)^2$ であり,

$$[\mathbb{Q}_2^\times]_2=\{1,3,5,7,2,6,-6,-2\}$$

と代表系が取れる. u が奇数ならば,

$$(2,u)_{\mathbb{Q}_2}=\left(\frac{2}{|u|}\right),\quad (2,2)_{\mathbb{Q}_2}=1,\quad (u,v)_{\mathbb{Q}_2}=(-1)^{\frac{(|u|-1)(|v|-1)}{4}}$$

自然数 n と素数 p に対して, $n=n_pn^{(p)}$, $(n_p,n^{(p)})=1$, n_p は p のべき) によって自然数 n_p, $n^{(p)}$ を決める. N を平方因子を持たない自然数として $S(N)$ を N の素因子の集合, $S=S(N)\cup\{\infty\}$ とする. 正の約数 $Q\mid N$, $\mathbf{d}\in T_N$, $j=1,2$ の組 $(j,Q,\mathbf{d})$ にたいして

$$\delta(j,Q,\mathbf{d})=\left((-1)^{j-1},2^{\mathrm{ord}_2(Q)}d_2,\{p^{\mathrm{ord}_p(Q)}u_p^{\frac{1-d_p}{2}}\}_{p\in S(N^{(2)})}\right)$$

として $[\mathbb{Q}_S^\times]_2=[\mathbb{R}^\times]_2\times[\mathbb{Q}_2^\times]_2\times\prod_{p\in S(N^{(2)})}[\mathbb{Q}_p^\times]_p$ の要素を定義する ($2\nmid N$ のときは, 2 因子は取る). これによって, 集合 $[\mathbb{Q}_S^\times]_2$ の要素は 3 つ組み $(j,Q,\mathbf{d})$ 全体と 1 : 1 に対応する. $\delta\in[\mathbb{Q}_S^\times]_2$ に対して定義される実指標 $\omega_\delta\in\widehat{[\mathbb{Q}_S^\times]_2}$ ((4.3.2) の最後) を想起しよう. 対角埋め込み $\mathbb{Q}^\times\hookrightarrow\mathbb{Q}_S^\times$ により, 整数 $n\neq 0$ に対し $\omega_\delta(n)\in\{1,-1\}$ が決まる.

補題 7.1 $\delta=\delta(j,Q,\mathbf{d})\,\mathbf{d}=(d_p)_{p\in S(N)})$ に対して, $\omega_\delta(n)\,(n\in\mathbb{Z}-\{0\})$ は §1.2 であたえた完全乗法函数 $\omega_{j,Q,\mathbf{d}}(n)$ に一致する.

証明 $2\mid N$ のときを考える. $(n,N)=1$ のとき, 上で復習したヒルベルト記号の値と, ヤコビ記号の性質を使って計算すれば出来る. □

$F=\mathbb{Q}$ は類数 1 なので $\xi^S(s,\delta)$, $\widetilde{\xi^S}(s,\omega_\delta)$ は $\xi^S_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}}(s,\delta)$, $\widetilde{\xi^S_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}}}(s,\omega_\delta)$ (*cf.* 定義 5.1, 定義 5.5) にそれぞれ等しい. さて, $S=\{\infty\}\cup S(N)$ について,

$$\mathbb{Z}_S^\times=\{\pm\prod_{p\in S(N)}p^{\nu_p}\mid\nu_p\in\mathbb{Z}\}$$

なので, $(\mathbb{Z}\cap Q^\times)\times(\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}^\times)$ での $\mathbb{Z}_S^\times\times\mathbb{Z}_S^\times$ 軌道 $[m,n]$ (*cf.* §5.1) の完全代表元として $\{(m,nl)\mid 0<l\mid N,\ (m,n)\in X_N\}$ (ただし, X_N は §1.2 の集合) が取れることは明らか. $\delta=\delta(j,Q,\mathbf{d})$ のとき, 集合 $X_S(\delta)$ は $X_N(j,Q,\mathbf{d})$ に対応する. これらのことに注意すると, $\xi^S_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}}(s,\delta)$, は (1.5) に一致する. また補題 7.1 を使うと, $\widetilde{\xi^S_{\mathbb{Z},\mathbb{Z}}}(s,\omega_\delta)$ は, (1.6) に一致する. そうすると定理 1.1(1), (2) は定理 6.2, 6.4, 6.5 から従う. 定理 1.2 は定理 5.8 から従う. 定理 1.1 (3) は次章で説明する.

7.2 D_{12}-函数等式系

この節の結果は [平本] による．行列 $\mathsf{B}_S(s)$, $\mathsf{C}_S(s)$ は $\infty \in S$ でなくても $S \in \mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}$ に対して同じ公式で定義される．

定理 7.2 (1) $S \in \mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}$ に対して, 単射的群準同型写像

$$\boldsymbol{\Gamma}^S : D_{12} \longrightarrow \mathbf{Mat}_{\widehat{[F_S^\times]_2} \times \widehat{[F_S^\times]_2}}(\mathfrak{M})^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$$

で次の条件を満たすものが唯ひとつ存在する:

$$\boldsymbol{\Gamma}^S(\beta) = (\mathsf{B}_S(s), f_\beta), \qquad \boldsymbol{\Gamma}^S(\gamma) = (\mathsf{C}_S(s), f_\sigma) \tag{7.1}$$

さらに, $S_1, S_2 \in \mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}, S_1 \cap S_2 = \emptyset$ に対して, $\boldsymbol{\Gamma}^{S_1 \cup S_2}(s) = \boldsymbol{\Gamma}^{S_1}(s) \otimes \boldsymbol{\Gamma}^{S_2}(s)$ が成り立つ．ただし, $\otimes$ は行列のクロネッカー積を表す．

(2) $S \in \mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}$, $\{\infty, 2\} \subset S$ ならば, $\boldsymbol{\Gamma}^S$ は $\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ の D_{12}-函数等式系である．

証明 (1) 群準同型写像 $\boldsymbol{\Gamma}^S$ の一意性は $D_{12} = \langle \beta, \gamma \rangle$ であることと条件 (7.1) から明らか．定義より, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ならば

$$\mathsf{B}_{S_1 \cup S_2}(s) = \mathsf{B}_{S_1}(s) \otimes \mathsf{B}_{S_2}(s), \quad \mathsf{C}_{S_1 \cup S_2}(s) = \mathsf{C}_{S_1}(s) \otimes \mathsf{C}_{S_2}(s)$$

となっている．よってあとは, $S = \{p\}\,(p \neq 2, \infty)$, $S = \{\infty, 2\}$ の場合に D_{12} の生成元 γ, β の基本関係式に相当する次の式を半直積群 $\mathfrak{M}^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ において直接計算で確かめれば $\boldsymbol{\Gamma}^S$ の存在が示せれたことになる: $\mathfrak{c} := (\mathsf{C}_S(s), f_\gamma)$, $\mathfrak{b} := (\mathsf{B}_S(s), f_\beta)$, $\mathfrak{e} = (1, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$ として

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{b}^2 = (\mathfrak{b}\mathfrak{c})^6 = \mathfrak{e}$$

$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{e}$ は Hecke の L-函数のガンマ因子の性質 (補題 4.3) から分かる．$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{e}$ は概均質局所ゼータのガンマ行列の性質 (系 3.15 (2)) から従う．よって問題となるのは $(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^6 = \mathfrak{e}$ だが, [平本] ではこの関係式をチェックしている．

(2) $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathbf{Mat}_{\widehat{[F_S^\times]_2} \times \widehat{[F_S^\times]_2}}(\mathfrak{M})^\times \ltimes \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$ で $\boldsymbol{\Xi}^S(s)$ が $\mathfrak{a}_1$ 型函数等式を満たしかつ $\mathfrak{a}_2$ 型函数等式を満たせば, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ 型函数等式を満たすことは明らか．このことと定理 6.5 と (1) から (2) の主張は従う． $\square$

注意 7.3 $S = \{2, \infty\}$ の場合, ここでの $\boldsymbol{\Xi}^{\{2,\infty\}}(s)$ の D_{12}-函数等式系は [B] で得られていたものに帰着され, [平本] はその別証明に加え, Blomer のガンマ行列 (16×16 正方行列) が, 実は無限素点由来の 4×4 行列と素点 2 由来の 4×4 行列のクロネッカー積に分解される, という新たな事実も示している．

8　付録: Eisenstein 級数のトーラス周期付きゼータ函数

この章では, §1.1 で言及した「新谷の方法」について説明を補足する.

古典的によく知られた $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 不変な非正則 Eisenstein 級数を, 群 $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+ := \{h \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ 上の函数として

$$E(g, w) := \sum_{\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})/\mathbf{B}(\mathbb{Z})^+} y(g\gamma)^{\frac{w+1}{2}}, \quad \mathrm{Re}(w) > 1$$

と定義する, ここで, $y : \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+ \to \mathbb{R}_{>0}$ は, 任意の $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+$ を岩澤分解により,

$$g = \left[\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right] \times a \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right] \in \mathbf{SO}(2)\mathbf{B}(\mathbb{R})^+$$

と書き表し $y(g) := c^{-1}$ で定義される. ($\mathbf{B}$ は $\mathbf{GL}_2$ の下半三角行列全体のなす部分群, $\mathbf{B}(\mathbb{R})^+$ は正の対角成分を持つ $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ の要素全体.) $E(g, w)$ は半平面上 $\mathrm{Re}(w) > 1$ で広義一様に絶対収束して正則函数を定め, w について有理型解析接続され

$$\mathrm{Res}_{w=1} E(g, w) = C > 0 \quad (\text{定数函数}) \tag{8.1}$$

となることが知られている. 以下は収束を無視した「発見的考察」である. $L^* = V(\mathbb{Z})$ とし, §1 で「定義」を紹介した (このままでは定義されない)$\zeta_i(s, L^*)$ に関連するゼータ積分 ($-\det x \in (\mathbb{Q}^\times)^2$ の寄与で発散)(1.3) の x についての和の範囲を, 群作用で安定な 2 つの部分

$$(L^*)_2 := L^* \cap \{-\det(x) \in (\mathbb{Q}^\times)^2\}, \qquad (L^*)_1 := L^* - (L^*)_2$$

で分割して, (1.3) を 2 つの和 $Z_1(s, \Phi) + Z_2(s, \Phi)$ と考える. 「非平方数」の部分 $Z_1(s, \Phi)$ の方は収束していて, 留数公式 (8.1) を利用して, 次のように形式的に変形できる：

$$\begin{aligned}
Z_1(\Phi, s) &= \int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})} |\det g|^s 1 \sum_{x \in (L^*)_1} \Phi(gx^tg)\, \mathrm{d}g \\
&= \int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})} |\det g|^s \left\{C^{-1}\mathrm{Res}_{w=1} E(g, w)\right\} \sum_{x \in (L^*)_1} \Phi(gx^tg)\, \mathrm{d}g \\
&= C^{-1}\mathrm{Res}_{w=1} \int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})} |\det g|^s E(g, w) \sum_{x \in (L^*)_1} \Phi(gx^tg)\, \mathrm{d}g
\end{aligned}$$

(最後で留数と和を入れ替えたが,「発見的考察」なので気にしない.) ここで unfolding (Eisenstein 級数の定義を代入して基本領域上の積分と結合させる) を行う：

$$
\begin{aligned}
&I(s,w,\Phi)\\
&:= \int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})} |\det g|^s E(g,w) \sum_{x\in(L^*)_1} \Phi(gx^tg)\,\mathrm{d}g\\
&= \int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})} \sum_{\gamma\in\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})/\mathbf{B}(\mathbb{Z})^+} |\det g\gamma|^s y(g\gamma)^{(w+1)/2} \sum_{x\in(L^*)_1} \Phi(g\gamma x^t(g\gamma))\,\mathrm{d}g\\
&= \int_{\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})^+/\mathbf{B}(\mathbb{Z})^+} |\det g|^s y(g)^{(w+1)/2} \times \sum_{x\in(L^*)_1} \Phi(gx^tg)\,\mathrm{d}g.
\end{aligned}
$$

岩澤分解で $g = \left[\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right] h,\ h = a\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right]$ のとき, $\mathrm{d}g = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\,\mathrm{d}h,\quad \mathrm{d}h := \mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}^\times c$. よって $\Phi^0(x) := \int_{\mathbf{SO}(2)} \Phi(kx^tk)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ とすると

$$
I_1(s,w,\Phi) = \int_{\mathbf{B}(\mathbb{R})^+/\mathbf{B}(\mathbb{Z})^+} |\det h|^s y(h)^{\frac{w+1}{2}} \sum_{x\in(L^*)_1} \Phi^0(hx^th)\,\mathrm{d}h
$$

この式の右辺においては, $(L^*)_1$ を L^* 全体にしても収束が確保される. こうして, 新谷の (original の形) の 2 重ゼータ積分が次の形で自然に導入される:

$$
Z^{\mathbf{B}}(s_1,s_2,\Phi) := \int_{\mathbf{B}(\mathbb{R})^+/\mathbf{B}(\mathbb{Z})^+} |\det h|^s y(h)^{\frac{w+1}{2}} \sum_{x\in L^*} \Phi(hx^th)\,\mathrm{d}h,
$$
$$
(s = 2s_2 + s_1,\ w = 2s_1 + 1)
$$

そこで $Z^{\mathbf{GL}_2}(\Phi,s)$ の代替物が $2^{-1}C^{-1}\mathrm{Res}_{s_1=1} Z^{\mathbf{B}}(s_1, \frac{s}{2} - s_1)$ と考える.

注意 8.1 このノートでは, $\mathbf{B}$ の代わりに変数 a を「外付け」にして $G = \mathbf{GL}_1 \times \left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right]\right\}$ とした. (a の V への作用は a^2 倍ではなく, a 倍に変わる.)

参考文献

[B] Blomer, V., *Subconvexity for a double Dirichlet series*, Comp. Math. **147** 355–374 (2011).

[DG] Diamantis, N., Goldfeld, D., *A converse theorem for double Dirichlet series and Shintani zeta functions*, J. Math. Soc. Japan **66** (2), 449–477 (2014).

[GH] Goldfeld,D., Hoffstein. J., *Eisenstein series of $\frac{1}{2}$-integral weight and the mean value of real Dirichlet L-series*. Invemt. math. **80**, 185–208 (1985).

[KTW] H.Kim, M.Tsuzuki, S.Wakatsuki, *The Shintani double zeta functions*, Forum Math. **34** , no. 2, 469–505 (2022).

[Kim-若槻-山内] Kim. H., Wakatsuki, S., Yamauchi, T., *Equidistribution theorems for holomorphic Siegel cusp forms of general degree*, arXiv:2106.07811.

[平本] C. Hiramoto, *On the functional equations of the Shintani double zeta functions*, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli **70**, 1–10 (2022)

[伊吹山・齋藤 I] Ibukiyama. T., Saito, H., *On zeta functions associated to symmetric matrices I: explicit form of zeta functions,* Amer. J. Math. **117** (1995), 1097–1155.

[伊吹山・齋藤 II] Ibukiyama. T., Saito, H., *On zeta functions associated to symmetric matrices, II: functional equations and special values*, Nagoya Math. J., **208** (2012), 265–316.

[IK] Iwaniec, H., Kowalski, E., *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications **53**, AMS (2004).

[池田] 池田保「付録 Weil Constant の基本性質」(第 4 回整数論サマースクール「Weil 表現入門」報告集に採録されている)

[木村] 木村達雄 「概均質ベクトル空間」 (岩波書店)

[LL] Labesse, J-P., Langlands, R.P., *L-indistinguishability for* $SL(2)$, Can. J. Math. XXXI No.4 (1979), 726–785.

[新谷] T. Shintani, *On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **22** (1975), 25–65.

[齋藤] Saito, H., *Explicit form of the zeta functions of prehomogenous vector spaces*, Math. Ann. **315** (1999), 587–615.

[佐藤 82-1] Sato, F., *On zeta functions of ternary forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1982), 585–604.

[佐藤 82-2] Sato, F., *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces, I. Functional equations*, Tohoku Math. J. (2) **34** (1982), 437–483.

[佐藤 94] Satō, F, *Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms*, K. G. Ramanathan memorial issue, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., **104**, 99–135 (1994).

[佐藤 89] F. Sato, *On functional equations of zeta distributions*, Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties, 465–508, Adv. Stud. Pure Math., 15, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[志村] Shimura, G., *Arithmetic of Quadratic Forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer (2010).

[谷口 1] Taniguchi, T., *Distributions of discriminants of cubic algebras*, arXiv:0606109v1.

[T] Tate, J., *Fourier analysis in number theory and Hecke's zeta-functions*, in Algebraic Number Theory (edited by Cassels and Frölich) (1967), 305–347.

[RV] Ramakrishnan, D., Valenza, R.J., *Fourier Analysis on Number Fields*, GTM 186 Springer-Verlag (1999).

[雪江] Yukie, A., *Shintani Zeta Functions*, London Mathematical Society Lecture Note Series **183** Cambridge University Press (1993).

[若槻] Wakatsuki, S., *The dimension of spaces of Siegel cusp formsof general degree*, Adv. Math. **340** (2018), 1012–1066.

[W] Weil, A., *Basic Number Theory*, Springer-Verlag (1967).

[Z] Zagier, D., *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*, Lecture Notes in Math., 627, 105?169, Springer, 1977.

[杉山] 杉山和成 (この報告集採録)

[鈴木 (美)] 鈴木美裕 (この報告集採録)

[谷口 2] 谷口隆 (この報告集採録)

[伊吹山] 伊吹山知義 (この報告集採録)

[佐藤] 佐藤文広 (この報告集採録)