概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

整数軌道の数え上げ：数の幾何と平均法

鈴木雄太 （立教大学理学部数学科）

概要

種々の数論的対象と概均質ベクトル空間の整数軌道の間の対応を使えば, 整数軌道の数え上げによって, 数論的対象の統計を行える．本稿では, 数の幾何を用いて整数軌道を数え上げる方法を概説する．特に, 数え上げる範囲が非有界な場合には根本的な困難が生じるが, これを乗り越える Bhargava の平均法について解説する．

1　整数軌道の数え上げと数論的対象の統計

1.1　本稿の目的

概均質ベクトル空間の整数軌道と数論的対象の間の対応を用いることで, 数論的対象の統計を行うことができる．本稿では,「数の幾何」の技法を用いて数論的対象の統計を行う方法を解説する．この手法は, たとえば Davenport–Heilbronn [13] によって 3 次体の数え上げに用いられたが, Bhargava はその方法を大きく発展させることで, 4 次体と 5 次体を数え上げる次の定理を証明した：

定理 1.1（Bhargava [2, Theorem 1]） 実数 X と $i = 0, 1, 2$ に対して,

$$N_4^{(i)}(X) \coloneqq \#\{K : 4-2i \text{ 個実埋め込みを持つ } \mathfrak{S}_4\text{-4 次体} \mid |\operatorname{Disc}(K)| < X\}$$

とおくと,

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_4^{(i)}(X)}{X} = \frac{1}{2n_i}\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4}\right)$$

が $n_0 \coloneqq 24$, $n_1 \coloneqq 4$, $n_2 \coloneqq 8$ とともに成立する．（ここで, $\mathfrak{S}_4$-4 次体とは K の Galois 閉包の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群が 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ になる 4 次の代数体 K のことを指した.）

定理 1.2（Bhargava [4, Theorem 1]） 実数 X と $i = 0, 1, 2$ に対して,

$$N_5^{(i)}(X) \coloneqq \#\{K : 5 - 2i \text{ 個実埋め込みを持つ } 5 \text{ 次体} \mid |\operatorname{Disc}(K)| < X\}$$

とおくと,

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_5^{(i)}(X)}{X} = \frac{1}{2n_i} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^5}\right)$$

が $n_0 \coloneqq 120$, $n_1 \coloneqq 12$, $n_2 \coloneqq 8$ とともに成立する.

上記の 2 つの定理は Bhargava の Fields 賞受賞業績の一部になっている.

このような統計を行う方法には, 本稿で解説する数の幾何によるアプローチのほか, 概均質ベクトル空間のゼータ関数を用いるアプローチがある. こちらについては本報告集の Frank Thorne 氏の記事 [24] を参照されたい.

また, 本稿に関連した文献として, 谷口隆氏の雑誌「数学セミナー」と「数学」の記事 [21, 22] を挙げておく. 雑誌「数学セミナー」の記事 [21] では, 数の幾何の解説から始め, 本稿で述べる手法の大きな流れが易しくかつわかりやすくまとめられている. 雑誌「数学」の記事 [22] はもう少し踏み込んだ解説である. また, どちらの記事も本稿で取り扱わなかった楕円曲線のセルマー群の統計を主題として整数軌道の数え上げについて解説している.

1.2 数え上げの舞台 — 少し一般的な設定

本稿では数え上げの手法を一般的な形で厳密に記述することは目標としないが, ある程度一般的な枠組みがわかるように, 次のような仮定を置いておく：

仮定 1.3 概均質ベクトル空間 (G, V) であって, 次を満たすものを考える：

(A1) G は簡約可能代数群.

(A2) 特異集合 S は, ある既約多項式 $\operatorname{Disc} \in \mathbb{Z}[V]$ で

$$S = \{x \in V \mid \operatorname{Disc}(x) = 0\}$$

と定義される既約超曲面である.

(A3) (G, V) は $\mathbb{Z}$ 上定義されている.

(A4) 任意の $x \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ に対して, 固定部分群

$$\operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x) \coloneqq \{g \in G_{\mathbb{R}} \mid gx = x\}$$

が有限群となる.

特異集合の定義方程式に現れる既約多項式を Disc と書いたのは, ここで考えるような応用では, この既約多項式が適切な「判別式」で与えられるためである.

この 仮定 1.3 の下, 次が成立することを思い出しておく：

命題 1.4　仮定 1.3 の下, 次が成り立つ：

(i) Disc は (G, V) の「基本」相対不変式である. つまり, (G, V) の任意の相対不変式は定数 c を用いて $c\,\mathrm{Disc}^m$ の形に書ける.
(ii) (G, V) は正則概均質ベクトル空間である.

証明 (i) については, (A2) と木村 [17, p. 38] の定理 2.9 を用いればよい. (ii) については, (A1) and (A2) とと木村 [17, p. 61] の定理 2.28 を用いればよい. □

命題 1.5　仮定 1.3 の下, $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}}^{(1)} \sqcup \cdots \sqcup V_{\mathbb{R}}^{(r)}$$

と有限個の $G_{\mathbb{R}}$ 軌道たち $V_{\mathbb{R}}^{(1)}, \ldots, V_{\mathbb{R}}^{(r)}$ へと分解する. （以後, この分解を用いる.）

証明 木村 [17, 系 4.4, p. 153] または谷口隆氏の記事 [23, 系 1.2] を参照. □

命題 1.6　仮定 1.3 の下, $n \coloneqq \dim V$ および $d \coloneqq \deg \mathrm{Disc}$ と書くと,

$$d\mu(x) \coloneqq |\,\mathrm{Disc}(x)|^{-\frac{n}{d}}\,dx$$

は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 上の $G_{\mathbb{R}}$ 不変な正則 Radon 測度である. （以後, この測度を用いる.）

証明 線形表現 (G, V) を $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ によって表すことにする. 要となるのは, (G, V) が正則概均質ベクトル空間なので, $\det \rho(g)^2$ に対応する相対不変式が "$\log \mathrm{Disc}$ の Hessian" に相当するもので構成できるという事実（木村 [17, 系 2.17, p. 47]）である. 直接には, 命題 1.4 から (G, V) は正則概均質ベクトル空間なので, 木村 [17, p. 48] の命題 2.18 を用いることができ, Disc に対応する $G_{\mathbb{R}}$ の指標を χ と書けば, 任意の $g \in G_{\mathbb{R}}$ に対して,

$$|\,\mathrm{Disc}(gx)|^{-\frac{n}{d}}\,d(gx) = |\det \rho(g)||\chi(g)|^{-\frac{n}{d}}\,|\,\mathrm{Disc}(x)|^{-\frac{n}{d}}\,dx = |\,\mathrm{Disc}(x)|^{-\frac{n}{d}}\,dx$$

となることから主張が従う. □

命題 1.7　仮定 1.3 の下, $v^{(i)} \in V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ と Borel 可測関数 $\phi\colon V_{\mathbb{R}}^{(i)} \to \mathbb{C}$ に対して

$$\int_{x \in V_{\mathbb{R}}^{(i)}} \phi(x) d\mu(x) = \int_{g \in G_{\mathbb{R}}} \phi(gv^{(i)}) dg$$

が, $G_{\mathbb{R}}$ 上の適切に正規化された Haar 測度 dg に対して成立する.

証明 両辺はともに $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ 上の積分として, $G_{\mathbb{R}}$ 不変かつ, (A4) より $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ のコンパクトな部分集合の特性関数に対して有限であるから, 不変測度の一意性から従う. □

補足 1.8　実は, 楕円曲線の Selmer 群に関する統計 [5, 6, 7, 8] を行う場合には, 対応する代数群の表現の Zariski 稠密な単一 $G_{\mathbb{C}}$ 軌道が存在せず, $G_{\mathbb{C}}$ 軌道は楕円曲線を $y^2 = x^3 - \frac{I}{3}x - \frac{J}{27}$ と書いたときの不変量 I, J によってパラメトライズされる. したがって, この問題は概均質ベクトル空間の文脈で取り扱うことができない. この場合は, より一般に代数群の表現 (G, V) であって不変式環が多項式環と同型になるような**余正則空間**と呼ばれる数え上げの舞台を用意する必要がある. 余正則空間の場合でも議論の大枠は概均質ベクトル空間の場合とパラレルに進むが, 例えば, 積分公式を与える 命題 1.7 は

$$\int_{x \in V_{\mathbb{R}}} \phi(x) d\mu(x) = \int_{(I,J) \in R} \int_{g \in G_{\mathbb{R}}} \phi(g \cdot v^{(I,J)}) dg dI dJ$$

というような形のものを証明して用いることになる. ただしここで, R は不変量の組 (I, J) に対応する集合で, $v^{(I,J)}$ は不変量 I, J を持つような $V_{\mathbb{R}}$ の元である.

1.3　数え上げの舞台 — いくつかの具体例

前節のような状況の下の $V_{\mathbb{Z}}$ の $G_{\mathbb{Z}}$ 軌道と数論的対象の間の対応の例として, 本報告集の石塚裕大氏の記事 [16] で解説されたような, 代数体の整数環ないしはより一般に r 次環の数え上げに用いられる, 次のような対応を思い出す（[1, 3]）:

- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{Sym}^3 \mathbb{Z}^2)$ ：Levi–Delone–Faddeev 対応
  2 元 3 次形式の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 軌道と 3 次環の同型類の間の対応.
- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^3)$ ：Bhargava の高次合成則 III
  3 元 2 次形式の 2 つ組の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ 軌道と 4 次環 Q とその 3 次レゾルベント環 R の 2 つ組 (Q, R) の同型類の間の対応.

- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_5(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^4 \otimes \wedge^2 \mathbb{Z}^5)$ ：Bhargava の高次合成則 IV
  5 元 2 次交代形式の 4 つ組の $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_5(\mathbb{Z})$ 軌道と 5 次環 R とその 6 次レゾルベント環 S の 2 つ組 (R, S) の同型類の間の対応.

上の対応では, r 次環と $V_{\mathbb{Z}}$ の間で判別式が一致するというだけでなく,

- r 次環の整域性や $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群の様子は $V_{\mathbb{Z}}$ におけるある種の「既約性」へと
- r 次環の極大性や素数の分解の様子は $V_{\mathbb{Z}}$ における合同条件（の組）へと

翻訳できる.（これら $x \in V_{\mathbb{Z}}$ に関する性質は, もちろん $G_{\mathbb{Z}}$ 不変となる.）よって, 考えたい数論的対象に対応する $G_{\mathbb{Z}}$ 不変な集合 $S \subseteq V_{\mathbb{Z}}$ を取り, 個数関数

$$N(S; X) \coloneqq \sum_{\substack{G_{\mathbb{Z}} x \in G_{\mathbb{Z}} \backslash S \\ 0 < |\operatorname{Disc}(x)| < X}} 1 \tag{1.1}$$

を考察すれば, 数論的対象の $|\operatorname{Disc}(x)|$ を「高さ」とする数え上げができる. 本稿では数の幾何を用いてこの数え上げを行う方法を概観したい.

なお, 楕円曲線の Selmer 群の平均位数を計算する場合には

- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}), \operatorname{Sym}^4 \mathbb{Z}^2)$：
  2 元 4 次形式の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ 軌道と楕円曲線 E およびその 2-Selmer 群の元 η の組 (E, η) の同型類の間の対応.
- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Z}), \operatorname{Sym}^3 \mathbb{Z}^3)$：
  3 元 3 次形式の $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{Z})$ 軌道と楕円曲線 E およびその 3-Selmer 群の元 η の組 (E, η) の同型類の間の対応.
- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2 \otimes \operatorname{Sym}^2 \mathbb{Z}^4)$：
  4 元 2 次形式の対の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ 軌道と楕円曲線 E およびその 4-Selmer 群の元 η の組 (E, η) の同型類の間の対応.
- $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}) = (\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^5 \otimes \wedge^2 \mathbb{Z}^5)$：
  5 元 2 次交代形式の 5 つ組の $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$ 軌道と楕円曲線 E およびその 5-Selmer 群の元 η の組 (E, η) の同型類の間の対応.

といった対応（[5, 6, 7, 8]）を使うことになる. この対応については, 本報告集の佐野薫氏の記事 [20] に詳しい解説がある. また, 楕円曲線の Selmer 群の平均位数に対する本稿のような数え上げの手法の応用については, [22, 21] に簡単な解説がある.

1.4　$\mathfrak{S}_4$-4 次体の場合

上の設定を $\mathfrak{S}_4$-4 次体の場合にもう少しだけ詳しく見てみる．まず, $V_{\mathbb{Z}}$ は

$$2(A,B)=\left(\begin{bmatrix}2a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & 2a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & 2a_{33}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{12} & 2b_{22} & b_{23}\\ b_{13} & b_{23} & 2b_{33}\end{bmatrix}\right)\ \text{ただし}\ a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{Z}$$

というような整数係数 3 元 2 次形式の組 (A,B) がなす階数 12 の格子で与え, 代数群は $G=\mathrm{GL}_2\times\mathrm{SL}_3$ で与える．線形表現は

$$(g_2,g_3)\in\mathrm{GL}_2\times\mathrm{SL}_3\quad\text{ただし}\quad g_2=\begin{pmatrix}r & s\\ t & u\end{pmatrix}$$

に対して

$$(g_2,g_3)\cdot(A,B)=(g_3(rA+sB)g_3^t,g_3(tA+uB)g_3^t)$$

で定める．このとき, $(A,B)\in V$ に対して

$$f(x,y)=f_{(A,B)}(x,y):=4\det(Ax-By)$$

と定めると, これは明らかに SL_3 不変な 2 元 3 次形式を与える．また, $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ であれば, 係数 4 によって f は整数係数である．そこで, さらにこの 2 元 3 次形式の判別式を取り,

$$\mathrm{Disc}(A,B):=\mathrm{Disc}(4\det(Ax-By))$$

とすれば, この多項式は $(g_2,g_3)\in G$ に対して

$$\mathrm{Disc}((g_2,g_3)\cdot(A,B))=\det(g_2)^6\,\mathrm{Disc}(A,B)$$

と変換される整数係数を持つ相対不変式である．特に, Disc は既約な基本相対不変式であり, (G,V) の特異集合は $\mathrm{Disc}(A,B)=0$ によって与えられる．（石塚裕大氏の記事 [15] で証明されている系 2.7 と定理 2.8 から従う．また, Bhargava [2, Section 2], 木村 [17, 例 2.8, p. 75–77] でも言及されている.）

Bhargava の高次合成則によれば, $\mathfrak{S}_4$-4 次体に対して, 次の対応がある：

定義 1.9（強既約） $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ が 2 条件

- A,B の定める $\mathbb{P}^2$ の 2 次曲線は $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ で共有点を持たない.

- 2 元 3 次形式 $f(x,y)=\det(Ax-By)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約.

を満たすとき, (A,B) は**強既約**であると言う.

定理 1.10（Bhargava の高次合成則 III [1], [2, p. 1037]）
次の全単射が存在する：

$$\begin{aligned}&\{(Q,R)/\cong \mid Q: 4\text{ 次環},\ R: Q\text{ の 3 次レゾルベント環}\}\\ \longleftrightarrow\quad & G_{\mathbb{Z}}\backslash\{(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}\}.\end{aligned}$$

（ただし, 左辺の $(Q,R)/\cong$ は同型類を表す.）さらに, この全単射を通して

- 判別式の値が $\mathrm{Disc}(Q)=\mathrm{Disc}(R)=\mathrm{Disc}(A,B)$ と一致している.
- 強既約な (A,B) の $G_{\mathbb{Z}}$ 軌道と (Q,R) であって Q が A_4 ないしは $\mathfrak{S}_4$-4 次体の整環であるものの同型類が一対一に対応している.
- 素数 p に対して, $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ に対応する 4 次環 Q を考えたとき, $Q\otimes\mathbb{Z}_p$ が $\mathbb{Z}_p$ 上の極大な 4 次環である必要十分条件は, $(\mathrm{mod}\ p^2)$ の合同条件で与えられる. この合同条件を満たす $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ の集合を $\mathcal{U}_p\subseteq V_{\mathbb{Z}}$ と書こう. すると, 対応する 4 次環が極大である $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ の集合は $\bigcap_p \mathcal{U}_p$ で与えられる. また, 素数 p に対して, 合同条件を満たす $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ の割合は

$$\mu_p(\mathcal{U}_p)=\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^4}\right)$$

で与えられる. なお, 極大な 4 次環の 3 次レゾルベント環は一意的に定まる.

この 定理 1.10 により, 上のように与えた (G,V) に対して, $S\subseteq V_{\mathbb{Z}}$ を A_4 ないしは $\mathfrak{S}_4$-4 次体の整数環に対応するようにとり, 個数関数 (1.1) を考察すれば, 本稿冒頭の定理 1.1 が示せるはずである（なお, 判別式が X 以下の A_4-4 次体の個数は $O(X^{\frac{5}{6}+\varepsilon})$ であることが Wong [25, Theorem 1.1] で示されているので, 無視できる）.

以下, 具体的に計算を追いたい場合には, この 4 次体の数え上げの設定を用いる.

2 数の幾何

2.1 基本領域と群 $G_{\mathbb{R}}$ に沿った座標表示

以下, 実際に (1.1) を計算する数え上げを行おう. しかし, 命題 1.5 で与えられた軌道分解は r 次環の実埋め込みの個数に対応するため, (1.1) の代わりに

$$N(S^{(i)}; X) \coloneqq \sum_{\substack{G_{\mathbb{Z}}x \in G_{\mathbb{Z}} \backslash S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(x)| < X}} 1$$

ただし

$$S^{(i)} \coloneqq S \cap V_{\mathbb{R}}^{(i)}$$

を別々に考えることにする. さらに, それぞれの軌道を

$$V_{\mathbb{R}}^{(i)} = G_{\mathbb{R}} v^{(i)} \quad \text{ただし} \quad v^{(i)} \in V_{\mathbb{R}}^{(i)}$$

と書くことにしよう.

実際に数えるのは $V_{\mathbb{R}}$ 内の単なる格子点 $V_{\mathbb{Z}}$ ではなく, それをさらに $G_{\mathbb{Z}}$ の作用で割ったものである. そこで, $G_{\mathbb{Z}}$ の作用を見やすくするため, 各軌道 $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ を群 $G_{\mathbb{R}}$ に沿って座標表示を行いつつ, 作用 $G_{\mathbb{Z}} \curvearrowright G_{\mathbb{R}}$ の基本領域を取る. 作用 $G_{\mathbb{Z}} \curvearrowright G_{\mathbb{R}}$ の基本領域 $\mathcal{F}$（きちんと $\mathcal{F} \to G_{\mathbb{Z}} \backslash G_{\mathbb{R}}$ が全単射になるような狭義の基本領域）であって, semialgebraic（後述）かつ連結であり, 適当な Siegel set に含まれるものを取る. これは 4 次体の場合には, 岩澤分解による座標を用いて

$$\mathcal{F} \subseteq N' A' K \Lambda$$

と取る. ただし, 右辺の Siegel set および座標の取り方は絶対定数 $c_1, c_2 > 0$ を用いて

$$\begin{aligned}
K &\coloneqq \{k \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\}, \\
A' &\coloneqq \left\{ a(s) = \left(\begin{pmatrix} s_1^{-1} & \\ & s_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2^{-2} s_3^{-1} & & \\ & s_2 s_3^{-1} & \\ & & s_2 s_3^2 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; s_1, s_2, s_3 \geq c_1 \right\}, \\
N' &\coloneqq \left\{ n(u) = \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ u_1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ u_2 & 1 & \\ u_3 & u_4 & 1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; |u_1|, |u_2|, |u_3|, |u_4| \leq c_2 \right\}, \\
\Lambda &\coloneqq \{\lambda = (\lambda I_2, I_3) \mid \lambda > 0\}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

と与える．ここで, 座標の入れ方に下三角行列を使った理由や, 上のような対角行列の座標表示を使った理由は, 後に出てくる議論において $V_{\mathbb{R}}$ の元の a_{11} 成分に着目するためだったり, 変数 s_1, s_2, s_3 の範囲をわかりやすくしたかった等の理由による．

すると, $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ 内の任意の $G_{\mathbb{Z}}$ 軌道は $\mathcal{F}v^{(i)}$ に唯一つ代表元を持つ．しかし, 後に $\mathcal{F} \subseteq G_{\mathbb{R}}$ の側で座標表示を行いたいので, $G_{\mathbb{Z}}x \in G_{\mathbb{Z}} \backslash V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ に対して, 重複度

$$\sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ G_{\mathbb{Z}} h v^{(i)} = G_{\mathbb{Z}} x}} 1$$

を考察する必要がある．固定部分群に関して

$$\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}(x) \coloneqq \{g \in G_{\mathbb{R}} \mid gx = x\} \quad \text{および} \quad \mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(x) \coloneqq \{g \in G_{\mathbb{Z}} \mid gx = x\}$$

と書くことにすれば,

$$\sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ G_{\mathbb{Z}} h v^{(i)} = G_{\mathbb{Z}} x}} 1 = \frac{\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}(x)}{\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(x)}$$

を得る．ここで分子の $\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}(x)$ は, $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ 上に $G_{\mathbb{R}}$ が推移的に作用するから, 各 $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ 上で一定値を取る．一方, 分母の $\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(x)$ については興味ある数論的対象を数えるときに使う「既約性」を課せば, 一定値ないしは無視できる例外的な x を除いて 1 であることが期待できる．そこで,

$$n_i \coloneqq \frac{\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}(v^{(i)})}{\#\,\mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(v^{(i)})}$$

と書いてしまおう．特に 4 次体の場合には次のようになる：

命題 2.1（Bhargava [2, Proposition 18]） $v^{(i)} \in V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ とすると,

$$\mathrm{Stab}_{\mathbb{R}}(v^{(i)}) \cong \begin{cases} \mathfrak{S}_4 & i = 0 \text{ のとき}, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & i = 1 \text{ のとき}, \\ D_4 & i = 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．ここで D_n は 2 面体群.

命題 2.2（Bhargava [2, p. 1039]） 強既約な $x \in V_{\mathbb{Z}}$ に対して, $\mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}}(x) \cong 1$.
（注：これは 4 次体の場合の話で, 問題によっては無視できる量の例外が存在する.）

以上の準備により, 全単射 $\mathcal{F} \to G_{\mathbb{Z}} \backslash G_{\mathbb{R}}$ を用いれば, 「既約元」のみからなる $G_{\mathbb{Z}}$ 不変な集合 $S \subseteq V_{\mathbb{Z}}$ に対して,

$$\begin{aligned} N(S^{(i)}; X) = \sum_{\substack{G_{\mathbb{Z}} y \in G_{\mathbb{Z}} \backslash S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(y)| < X}} 1 &= \frac{1}{n_i} \sum_{\substack{G_{\mathbb{Z}} y \in G_{\mathbb{Z}} \backslash S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(y)| < X}} \sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ G_{\mathbb{Z}} h v^{(i)} = G_{\mathbb{Z}} y}} 1 \\ &= \frac{1}{n_i} \sum_{\substack{G_{\mathbb{Z}} y \in G_{\mathbb{Z}} \backslash S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(y)| < X}} \sum_{\substack{x \in S^{(i)} \\ G_{\mathbb{Z}} x = G_{\mathbb{Z}} y}} \sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ h v^{(i)} = x}} 1 \end{aligned}$$

つまり

$$N(S^{(i)}; X) = \frac{1}{n_i} \sum_{\substack{x \in S^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(x)| < X}} \sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ h v^{(i)} = x}} 1 \tag{2.2}$$

との表示を得る. 今, 集合 S は格子 $V_{\mathbb{Z}}$ ないしはそこに「既約性」と合同条件を付したものであり, 「既約性」について無視すると, (2.2) の右辺は単に格子点を領域 $\mathcal{F} v^{(i)}$ で数えることを意味する. そこで, 次に格子点を数える技法の 1 つである数の幾何について思い出してみる.

2.2 数の幾何とその応用における困難

「数の幾何」とは与えられた格子点の分布についての理論であった. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の性質の良い領域 $\mathcal{R}$ を考え, $\mathcal{R}$ 内の格子点の個数

$$\#(\mathcal{R} \cap \mathbb{Z}^n)$$

を数えることを考えてみる. Gauss の円問題（原点中心の円盤内の格子点の数え上げ）等を思い出してみると, 次のようにすればよいのであった：まず, 各格子点に単位立方体を配置する（各格子点には各立方体の「左下」等の指定した頂点をのせる）. すると, 領域 $\mathcal{R}$ と交わる立方体と交わらない立方体がある. 交わっている立方体の個数と領域 $\mathcal{R}$ 内の格子点の個数の誤差は, おおよそ「$\mathcal{R}$ の境界と交わる立方体」の個数で評価できるはずであり, また, 「$\mathcal{R}$ と交わる立方体」の合併は $\mathcal{R}$ を近似するはずである. よって, 単位立方体の体積は 1 だから, $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度を Vol と書けば

$$\#(\mathcal{R} \cap \mathbb{Z}^n) \approx \#\{\mathcal{R} \text{ と交わる立方体}\} \approx \operatorname{Vol}(\mathcal{R}) \tag{2.3}$$

と期待できるのであった. 誤差評価のためには $\mathcal{R}$ の形状, 特に境界の様子が気になるが, 次の Davenport による一般的な結果がある：

定義 2.3 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 E が, 実数上の加法・乗法・等号・不等号, つまり

$$+, \quad \times, \quad =, \quad >,$$

および実数値定数から作られる 1 階の論理式 Φ によって

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x)\}$$

と書かれるとき, E は **semialgebraic set** であるという.（正確には, この定義が通常の semialgebraic set の定義と同値であるというのが, Tarski–Seidenberg の定理の主張だといえる. 詳しくは [14] の Introduction and Overview と Corollary 2.11 を参照のこと.）

補題 2.4（Davenport [10]） ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\mathcal{R}$ が

(i) $\mathcal{R}$ は有界.
(ii) $\mathcal{R}$ は semialgebraic.

を満たすとき,

$$\#(\mathcal{R} \cap \mathbb{Z}^d) = \mathrm{Vol}(\mathcal{R}) + O\left(\max_{0 \le i \le n-1} \mathrm{Vol}_i(\mathcal{R})\right)$$

が成立する. ただし, π_i がいくつかの座標を無視する射影 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^i$ を渡るとき

$$\mathrm{Vol}_i(\mathcal{R}) \coloneqq \begin{cases} \max_{\pi_i} \mathrm{Vol}(\pi_i(\mathcal{R})) & 1 \le i \le n-1 \text{ のとき}, \\ 1 & i = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とし, implicit constant は $\mathcal{R}$ を定義するのに使われる 1 階の論理式に含まれる量化子, 論理結合子, 加法, 乗法, 等号, 不等号, 定数の個数（つまり semialgebraic set $\mathcal{R}$ の「複雑度」）のみに依存し, 特に, 論理式に含まれる定数の大きさには依存しない.

つまり, 数えたい範囲 $\mathcal{R}$ の形状については, $\mathcal{R}$ が semialgebraic だというだけで数の幾何が適用できるのである. 今, $\mathcal{F}$ は semialgebraic なものを取っているから, (2.2) の数える範囲 $\mathcal{F}v^{(i)}$ は semialgebraic である.（さらに内側の和は semialgebraic sets の上で定数とできる.）したがって, $v \in V_{\mathbb{R}}$ と $X > 0$ に対して,

$$\mathcal{R}_X(v) \coloneqq \{x \in \mathcal{F}v \mid |\mathrm{Disc}(x)| < X\}$$

とおけば,

$$V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)} \coloneqq \{(A, B) \in V_{\mathbb{Z}} \mid (A, B) : \text{「既約」}\} \tag{2.4}$$

に対して, (2.2) から

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}; X) = \frac{1}{n_i} \int\limits_{x \in \mathcal{R}_X(v^{(i)})} \Bigg(\sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ hv^{(i)} = x}} 1 \Bigg) dx + (\text{誤差}) \tag{2.5}$$

程度のことが期待できる.（実際には「既約性」の効果を評価する必要がある.）この右辺の体積が有限であるか気になるところである. 4 次体の場合は, (2.1) において, s_1, s_2, s_3 は有界でないながらも, (2.5) 中の積分を $G_{\mathbb{R}}$ 側で座標表示して Haar 測度の密度関数に s_1, s_2, s_3 の十分な負べきが現れることを見れば体積の有限性が分かる.（つまり, s_1, s_2, s_3 が ∞ に向かう部分は「カスプ形状」を持っているはずである.）

…今, 何と言ったであろうか？実は (2.1) において s_1, s_2, s_3 の範囲は有界でないので, 領域 $\mathcal{R}_X(v)$ は有界ではないのである. よく見てみると, Davenport の補題（補題 2.4）には領域が有界である旨の条件 (i) がある. これはどれほど致命的なのだろうか？ Heuristics (2.3) を思い出してみると, 領域 $\mathcal{R}$ が有界でなければ (2.3) の真ん中の立方体の個数の部分が無限大になりえて, この heuristics は破綻することが分かる. 実際, 有理直線に沿ったカスプ状の領域を例に考えてみれば, 体積は有限ながらも, 含まれる格子点の個数は無限個になってしまう領域の存在がわかる. したがって, 領域 $\mathcal{R}$ 内の格子点の分布について情報がなければ, 非有界な領域 $\mathcal{R}$ に対して 補題 2.4 を拡張するのは不可能であろう. しかし, そもそも格子点の分布を考えるために 補題 2.4 を用意したのであった…

この事態は 4 次体に限った話ではなく, 特別な場合を除き, 作用 $G_{\mathbb{Z}} \backslash G_{\mathbb{R}}$ に関する基本領域は有界にならない.

3 Bhargava の平均法

前節最後に直面した「領域 $\mathcal{R}_X(v)$ が非有界であるために数の幾何による数え上げが破綻する」という困難をシステマティックに乗り越えるために編み出されたのが, これから見る Bhargava による「平均法」である.

3.1 カスプ領域の観察

$V_{\mathbb{R}}$ の有界集合

$$H \subseteq \{x \in V_{\mathbb{R}} \mid |\,\mathrm{Disc}(x)| \geq 1\}$$

を取る．簡単のため, 話を 4 次体の数え上げの場合に限定し, H に対する $\mathcal{F}$ の作用およびカスプ領域の様子を座標表示 (2.1) を使って記述しよう．(2.1) の記号の下, $g = n(u)a(s)k\lambda \in \mathcal{F}$ を H の元 v に作用させてみれば, $gv = (A, B)$ の成分について, 少しの計算の後に

$$\begin{aligned}
&a_{11} \ll \lambda s_1^{-1} s_2^{-4} s_3^{-2}, && a_{12} \ll \lambda s_1^{-1} s_2^{-1} s_3^{-2}, && a_{13} \ll \lambda s_1^{-1} s_2^{-1} s_3,\\
&a_{22} \ll \lambda s_1^{-1} s_2^{2} s_3^{-2}, && a_{23} \ll \lambda s_1^{-1} s_2^{2} s_3, && a_{33} \ll \lambda s_1^{-1} s_2^{2} s_3^{4},\\
&b_{11} \ll \lambda s_1 s_2^{-4} s_3^{-2}, && b_{12} \ll \lambda s_1 s_2^{-1} s_3^{-2}, && b_{13} \ll \lambda s_1 s_2^{-1} s_3,\\
&b_{22} \ll \lambda s_1 s_2^{2} s_3^{-2}, && b_{23} \ll \lambda s_1 s_2^{2} s_3, && b_{33} \ll \lambda s_1 s_2^{2} s_3^{4}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

を得る．ただしここで, implicit constant は H, c_1, c_2 に依存する．以後,

$$T \coloneqq \{a_{11}, \dots, a_{33}, b_{11}, \dots, b_{33}\}$$

を $(A, B) \in V_{\mathbb{Z}}$ の成分の集合とし, $t \in T$ に対して, (3.1) を

$$t \ll w(t)$$

と書く．この $w(t)$ を t の **weight** と呼ぶことにする．たとえば,

$$w(a_{11}) = \lambda s_1^{-1} s_2^{-4} s_3^{-2}, \quad w(a_{12}) = \lambda s_1^{-1} s_2^{-1} s_3^{-2}, \quad w(b_{11}) = \lambda s_1 s_2^{-4} s_3^{-2}$$

となる．注意であるが,

$$n(u)a(s)k\lambda H \subseteq \prod_{t \in T} [-cw(t), +cw(t)]$$

がある定数 $c > 0$ に対して成立することになる．前節では $\mathcal{R}_X(v)$ が非有界になることが問題になった．そこで, $\mathcal{R}_X(v)$ の元を $g \in \mathcal{F}$ を用いて gv と表し, 座標表示 $g = n(u)a(s)k\lambda$ における変数 u, s, k, λ の様子を観察しよう．まず, $gv \in \mathcal{R}_X(v)$ に対しては $|\operatorname{Disc}(gv)| < X$ という条件があるため, $\lambda \ll X^{\frac{1}{12}}$ という条件が付く．次に $k \in K$ や $u = (u_1, \dots, u_4)$ は $\mathcal{F}$ の定義の時点でそもそも有界である．残る変数は $s = (s_1, s_2, s_3)$ である．確かに s_i たちが大きくなってしまえば, weight $w(a_{11})$ は 1 未満になり, a_{11} が 0 でない整数になる場合はこのような gv は存在しないが, 依然として $a_{11} = 0$ となる gv の可能性は排除できない．よって, $s_1, s_2, s_3 \geq c_1$ であったことを思い出せば, 前節で問題になったカスプ部の格子点は $a_{11} = 0$ となっているような元たちからなるということが観察できる．

このようなカスプ領域の問題はより簡単な問題にも現れる．例えば, Dirichlet の約数問題, つまり実数 X 以下の自然数の約数の個数の総和の評価を思い出す．このときには, $\mathbb{R}^2$ 内の領域

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y>0 \text{ かつ } 0<xy\leq X\}$$

の格子点の個数を数えることになる．この領域自体は非有界であり, x 軸と y 軸に漸近するカスプを持つが, $x,y\in\mathbb{Z}$ かつ $x,y>0$ ならば $x,y\geq 1$ なので, 領域を

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x,y\leq X \text{ かつ } 0<xy\leq X\}$$

と有界な範囲へと狭めることができる．3 次体ないしは 3 次形式の数え上げの場合には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ のカスプ領域は比較的見やすい（実際, (2.1) における変数 s に対応する部分が 1 次元分しかない）ので, カスプ領域には既約な 3 次形式が少ないということが比較的容易に示せる（[11, 12]）．しかし, 4 次体, 5 次体の場合には, 上に見たようにカスプ領域の様子は複雑であり, よりシステマティックに取り扱う必要がある．このために, Bhargava は平均法という技法を導入した．平均法を用いれば, 一見矛盾するようだが, 数の幾何の適用を阻んでいたカスプ領域の既約元の個数評価に数の幾何を用いることができるようになる．

3.2 事前平均

まず, 先に (2.2) で得た表示（内で $v^{(i)}$ を v と書いたもの）

$$N(S^{(i)};X)=\frac{1}{n_i}\sum_{\substack{x\in S^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv=x}}1 \tag{3.2}$$

は任意の $v\in V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ に対して成立することに注意する．そこで, $V_{\mathbb{R}}$ の semialgebraic かつ空でない内部を持つ K 不変な有界領域

$$H\subseteq\{x\in V_{\mathbb{R}} \mid |\operatorname{Disc}(x)|\geq 1\}$$

をとり（以後, implicit constant は H に依存してよいものとする）, $v\in H^{(i)}:=H\cap V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ に渡って (3.2) の平均を取る．すると,

$$N(S^{(i)};X)=\frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\int_{v\in H^{(i)}}\Bigg(\sum_{\substack{x\in S^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv=x}}1\Bigg)d\mu(v). \tag{3.3}$$

を得る．（ここで μ は 命題 1.6 に現れた不変測度である.）こうしておいて (2.5) を達成するには, ほとんどすべての v に対して, 上の積分の中の和に数の幾何の heuristics が適用できればよいわけである．そこで, 以後, S のカスプ部分のような「悪い」部分集合 E をとり, その寄与を上から評価してしまうことを考える．(3.3) において, S を E に取り替えたものを考える（E が $G_{\mathbb{Z}}$ 不変とは限らない場合へと定義を拡張する）：

$$N(E^{(i)};X) \coloneqq \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\int_{v\in H^{(i)}}\Bigg(\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv=x}} 1\Bigg)d\mu(v).$$

そして, 有界な積分範囲 $H^{(i)}$ と非有界な和の範囲 $\mathcal{F}v$ を取り替えられたらよいのにと思う．そこで, ひとまず x の和を外に出す：

$$N(E^{(i)};X) = \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\int_{v\in H^{(i)}}\Bigg(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv=x}} 1\Bigg)d\mu(v).$$

ここで, 内側の積分を 命題 1.7 を用いて変数変換する．すると,

$$N(E^{(i)};X) = \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\int_{g\in G_{\mathbb{R}}}\Bigg(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hgx=x}} 1\Bigg)\mathbb{1}_{gx\in H^{(i)}}\,dg$$

となる．（ここで, $\mathbb{1}_{\mathsf{P}}$ は条件 P に対する指示関数であり, P が成立するとき 1, そうでなければ 0 となる.）すると, $hgx = x$ とは $hg \in \operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x)$ のことだから

$$N(E^{(i)};X) = \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \sum_{\delta\in\operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x)}\int_{g\in G_{\mathbb{R}}}\mathbb{1}_{g\delta^{-1}\in\mathcal{F}^{-1}}\mathbb{1}_{gx\in H^{(i)}}\,dg.$$

ここで $g \rightsquigarrow g^{-1}\delta$ と変数変換して（今, G は簡約可能だから dg は両側不変である）

$$N(E^{(i)};X) = \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\ \sum_{\delta\in\operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x)}\int_{g\in\mathcal{F}}\mathbb{1}_{\delta x\in gH^{(i)}}\,dg.$$

しかし, 上式の右辺では $\delta \in \operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x)$ であり, $\#\operatorname{Stab}_{\mathbb{R}}(x) = n_i$ と思って良いので,

$$N(E^{(i)};X) = \frac{1}{\mu(H^{(i)})}\sum_{\substack{x\in E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}\int_{g\in\mathcal{F}}\mathbb{1}_{x\in gH^{(i)}}\,dg$$

つまり

$$N(E^{(i)};X)=\frac{1}{\mu(H^{(i)})}\int_{g\in\mathcal{F}}\Bigg(\sum_{\substack{x\in gH^{(i)}\cap E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}1\Bigg)dg. \tag{3.4}$$

を得る．これにより数の幾何を使う和の範囲を有界な $gH^{(i)}$ へと変えることができた.

3.3　座標表示

これから行うのは, S 内の「悪い」部分, つまりカスプ領域および「既約性」を満たさない領域の (3.4) を用いた評価である．抽象的な (3.4) のままでは様子が分かりづらいので, 本稿では以後, 話を 4 次体の場合に限定し, 座標表示 (2.1) を用いて (3.4) を書き直そう．まず, $\mathbb{R}_{>0}^{\times}$ と $(\mathbb{R}_{>0}^{\times})^3$ の Haar 測度を $d^{\times}\lambda=d\lambda/\lambda$ および $d^{\times}s:=ds_1/s_1ds_2/s_2ds_3/s_3$ と書き, $du=du_1du_2du_3du_4$ を Lebesgue 測度とし, さらに K 上の Haar 測度 dk を取る．すると, 座標表示 (2.1) に対して, $G_{\mathbb{R}}$ の Haar 測度は定数倍を除き

$$s_1^{-2}s_2^{-6}s_3^{-6}dud^{\times}sdkd^{\times}\lambda$$

となる．よって, (3.4) は $n=n(u)$ および $a=a(s)$ の略記の下,

$$N(E^{(i)};X)\ll\int_{nak\lambda\in N'A'K\Lambda}\Bigg(\sum_{\substack{x\in nak\lambda H^{(i)}\cap E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}1\Bigg)s_1^{-2}s_2^{-6}s_3^{-6}dud^{\times}sdkd^{\times}\lambda$$

と評価できる．この右辺で, $v\in H$ と $g=nak\lambda$ によって, $x=gv\in V_{\mathbb{Z}}^{(i)}$ と書けば

$$1\le|\operatorname{Disc}(gv)|<X \text{ かつ } \lambda^{12}\le|\operatorname{Disc}(gv)|\ll\lambda^{12}\quad\rightsquigarrow\quad\lambda\in[c,X^{\frac{1}{12}}]$$

と絶対定数 c を用いて λ の範囲を制限できる．さらに,

$$\sigma(E^{(i)};s,\lambda):=\sup_{\substack{n\in N'\\ k\in K}}\sum_{\substack{x\in nak\lambda H^{(i)}\cap E^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}}1 \tag{3.5}$$

とおけば,

$$N(E^{(i)};X)\ll\int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}}\int_{s_1,s_2,s_3\ge c_1}\sigma(E^{(i)};s,\lambda)s_1^{-2}s_2^{-6}s_3^{-6}d^{\times}sd^{\times}\lambda \tag{3.6}$$

を得る．この不等式が「悪い」部分の評価の基本道具の 1 つになる.

3.4 「悪い」部分の評価

では「悪い」部分の評価に移ろう．ここでは「可約」な部分の寄与の評価については割愛し, カスプ領域における既約元の個数の評価を行いたい．先に見たようにカスプ領域にある元とは $a_{11}=0$ なる元たちのことと思えるから, $a_{11}=0$ なる強既約な元が少ないことを示せばよい：

補題 3.1（Bhargava [2, Lemma 11]） 集合 $E \subseteq V_{\mathbb{Z}}$ を

$$E \coloneqq \{(A,B) \in V_{\mathbb{R}} \mid (A,B) : \text{強既約},\ a_{11}=0\}$$

で定めると,

$$N(E^{(i)};X) \ll X^{\frac{11}{12}}$$

が $i=0,1,2$ に対して成立する．

証明 (A,B) は強既約なので, A と B の定める 2 次曲線は $[1:0:0] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ を共通部分に持たない．よって, $(A,B) \in E$ ならば $a_{11}=0$ だから $b_{11} \neq 0$ とわかる．さらに, 3 次形式 $\det(Ax-By)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約でもなければならず, 特に $\det(A) \neq 0$ である必要がある．よって, $a_{12}=0$ であるか否かによって, 評価すべき集合 E は次の 2 通りに分類される：

Case 1 $a_{11}=0$ かつ $a_{12}, b_{11} \neq 0$.
Case 2 $a_{11}, a_{12}=0$ かつ $a_{13}, a_{22}, b_{11} \neq 0$.

これら場合分けを零な成分の集合 $T_0 \subseteq T$ と非零な成分の集合 $T_1 \subseteq T$ によって,

$$E(T_0,T_1) \coloneqq \{(A,B) \in E \mid t=0 \ \ (\forall t \in T_0) \quad \text{かつ} \quad t \neq 0 \ \ (\forall t \in T_1)\}$$

と書くことにしよう．

さて, (3.6) を用いるので, (3.5) を評価する必要がある．そこで $\mathcal{F}$ の作用を明示的に書いた (3.1) を思い出す．また, T_0 に含まれる成分は 0 になるだけなので, (3.5) における格子点数え上げの範囲は

$$nak\lambda H^{(i)} \cap E(T_0,T_1)^{(i)} \subseteq \prod_{t \in T_0} \{0\} \times \prod_{t \in T \setminus T_0} [-cw(t), cw(t)]$$

とある定数 $c > 0$ によって評価できる．もしここで, $T \setminus T_0$ に対応する成分の範囲がすべて長さ $\gg 1$ の区間であれば, $T \setminus T_0$ の成分に対応する部分空間内で 補題 2.4 を用いることで

$$\sum_{\substack{x \in nak\lambda H^{(i)} \cap E(T_0,T_1)^{(i)} \\ |\operatorname{Disc}(x)| < X}} 1 \ll \prod_{t \in T \setminus T_0} w(t)$$

が得られる．実は, 先の Case 1, Case 2 の T_1 は必ず定数倍を除いた minimal weight を与える $t \in T \setminus T_0$ を含むようになっている．T_1 に含まれる成分は非零になるよう要求されているので, 結局, $T \setminus T_0$ に対応する成分の範囲はすべて長さ $\gg 1$ の区間であり, 上記の評価は成立する．

以上より, (3.6) を用いれば

$$N(E(T_0,T_1)^{(i)}; X) \ll \int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}} \int_{s_1,s_2,s_3 \geq c_2} \prod_{t \in T \setminus T_0} w(t) s_1^{-2} s_2^{-6} s_3^{-6} d^\times s d^\times \lambda \qquad (3.7)$$

が分かる．ここで

$$\prod_{t \in T \setminus T_0} w(t) = \frac{\lambda^{12}}{\prod_{t \in T_0} w(t)}$$

に注意すれば, Case 1 の場合は

$$N(E(T_0,T_1)^{(i)}; X) \ll \int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}} \int_{s_1,s_2,s_3 \geq c_1} \lambda^{11} s_1^{-1} s_2^{-2} s_3^{-4} d^\times s d^\times \lambda \ll X^{\frac{11}{12}}$$

となる．ここでは s_1, s_2, s_3 の指数がすべて負になっていることが重要である．Case 2 の場合は s_1 の指数が 0 になってしまうが, $w(a_{13}) \gg |a_{13}| \gg 1$ であるから, (3.7) の時点でこの weight $w(a_{13})$ を余分にかけてあげれば

$$\begin{aligned} N(E(T_0,T_1)^{(i)}; X) &\ll \int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}} \int_{s_1,s_2,s_3 \geq c_1} w(a_{13}) \prod_{t \in T \setminus T_0} w(t) s_1^{-2} s_2^{-6} s_3^{-6} d^\times s d^\times \lambda \\ &\ll \int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}} \int_{s_1,s_2,s_3 \geq c_1} \lambda^{11} s_1^{-1} s_2^{-2} s_3^{-1} d^\times s d^\times \lambda \ll X^{\frac{11}{12}} \end{aligned}$$

を得る．以上をまとめて主張を得る． □

注意 3.2 上記の 補題 3.1 の証明は [2] の証明に 5 次体の数え上げを行う [4] の証明のスタイルを加えたものである. 上記の 補題 3.1 では場合分けが高々 2 通りであるが, [4] では 151 通り（！）もの場合分け（8 ページに渡る表にまとめられている）が必要であり, 手計算するにせよ計算機にチェックさせるにせよ, 上記のように機械的に実行できる場合分けを準備する必要がある.

強既約でない部分の寄与については, 以下を引用するだけにとどめておく：

補題 3.3（Bhargava [2, Lemma 12, 13]） 集合 $E \subseteq V_{\mathbb{Z}}$ を

$$E := \{(A,B) \in V_{\mathbb{R}} \mid (A,B) : \text{強既約でない},\ a_{11} \neq 0\}$$

で定めると,

$$N(E^{(i)}; X) = o(X) \quad (X \to \infty)$$

が $i = 0, 1, 2$ に対して成立する.

3.5 主要部の計算

以上で「悪い」部分を取り除くことができ, 4 次体の場合の (2.4) である

$$V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)} := \{(A,B) \in V_{\mathbb{Z}} \mid (A,B) : \text{強既約}\}$$

に対して, 次が得られる：

補題 3.4（Bhargava [2, Proposition 17]） 実数 $X > 0$ に対して,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}; X) = \frac{1}{n_i} \int_{x \in \mathcal{R}_X(v^{(i)})} \Bigg(\sum_{\substack{h \in \mathcal{F} \\ hv^{(i)} = x}} 1 \Bigg) dx + o(X) \quad (X \to \infty).$$

証明 集合

$$S_0 := \{(A,B) \in V_{\mathbb{Z}} \mid a_{11} \neq 0\}$$

を考える. すると, (3.4) を用いた後, 補題 3.1 と 補題 3.3 を用いれば,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}; X) = N(S_0^{(i)}; X) + o(X) \quad (X \to \infty)$$

が分かり, $N(S_0^{(i)};X)$ を評価すれば良いことがわかる. (3.4) から,

$$N(S_0^{(i)};X) = \frac{1}{\mu(H^{(i)})}\int_{g\in\mathcal{F}}\Bigg(\sum_{\substack{x\in gH^{(i)}\cap S_0^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}} 1\Bigg)dg$$

を得る. $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ に対して $a_{11}\neq 0$ ならば $|a_{11}|\geq 1$ だから

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_X(g) &\coloneqq \{x\in gH \mid |\operatorname{Disc}(x)|<X\},\\ \widetilde{\mathscr{H}}_X(g) &\coloneqq \{x\in gH \mid |\operatorname{Disc}(x)|<X \text{ かつ } |a_{11}|\geq 1\}\end{aligned}$$

とおけば, 上記内側の和は

$$\sum_{\substack{x\in gH^{(i)}\cap S_0^{(i)}\\ |\operatorname{Disc}(x)|<X}} 1 = \sum_{x\in\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}\cap V_{\mathbb{Z}}^{(i)}} 1 \tag{3.8}$$

と書き直せる. ここで, H が semialgebraic かつ有界だから $\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}$ は semialgebraic な有界領域であり, Davenport の補題（補題 2.4）を適用できる. その際の誤差評価を行おう. まず, $v\in H^{(i)}$, $g=nak\lambda\in\mathcal{F}$ かつ $x=gv\in\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}$ ならば $|a_{11}|\geq 1$ より

$$1\ll w(a_{11}) = \lambda s_1^{-1}s_2^{-4}s_3^{-2}$$

である. a_{11} は minimal weight を与える成分なので, $\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}$ をいくつかの座標を 0 にするよう射影したとき, その体積は

$$\ll \frac{\prod_{t\in T} w(t)}{w(a_{11})} \ll \lambda^{11}s_1s_2^4s_3^2$$

と評価できる. 以上より, Davenport の補題（補題 2.4）を適用して

$$\operatorname{Vol}(\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}) = \operatorname{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)}) - \operatorname{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)}\setminus\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)})$$

と分解してやれば, $X\to\infty$ のとき,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)};X) = \frac{1}{\mu(H^{(i)})}\int_{g\in\mathcal{F}}\operatorname{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)})dg + O(R_1+R_2) + o(X)$$

ただし

$$R_1 \coloneqq \int_{g\in\mathcal{F}}\operatorname{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)}\setminus\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)})dg \quad \text{および} \quad R_2 \coloneqq \int_{g\in\mathcal{F}}\lambda^{11}s_1s_2^4s_3^2dg$$

である．主要項については Section 3.2 の計算の連続類似を逆にたどれば

$$\frac{1}{\mu(H^{(i)})}\int_{g\in\mathcal{F}} \mathrm{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)})dg = \frac{1}{n_i\mu(H^{(i)})}\int_{v\in H^{(i)}}\int_{x\in\mathcal{R}_X(v)}\left(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv=x}} 1\right)dxd\mu(v)$$

となるが, 命題 1.7 のような積分公式を用いれば, 内側の積分

$$\int_{x\in\mathcal{R}_X(v)}\left(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv=x}} 1\right)dx$$

は v がどの $G_{\mathbb{R}}$ 軌道 $V_{\mathbb{R}}^{(i)}$ に入るかのみに依存する事がわかるので,

$$\frac{1}{\mu(H^{(i)})}\int_{g\in\mathcal{F}} \mathrm{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)})dg = \frac{1}{n_i}\int_{x\in\mathcal{R}_X(v^{(i)})}\left(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv^{(i)}=x}} 1\right)dx$$

とわかる．次に誤差項 R_1 について考える．$\mathscr{H}_X(g)^{(i)}\setminus\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}$ においては a_{11} は $|a_{11}|\leq 1$ の範囲に含まれる．また, a_{11} の値を固定すると, $\mathscr{H}_X(g)^{(i)}\setminus\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}$ の残りの成分は直方体

$$\prod_{t\in T\setminus\{a_{11}\}}[-cw(t),+cw(t)]$$

に含まれる．この直方体の体積は

$$\prod_{t\in T\setminus\{a_{11}\}} w(t)\ll\frac{\prod_{t\in T}w(t)}{w(a_{11})}\ll\lambda^{11}s_1s_2^4s_3^2$$

と評価できる．したがって,

$$\mathrm{Vol}(\mathscr{H}_X(g)^{(i)}\setminus\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)})\ll\int_{|a_{11}|\leq 1}\lambda^{11}s_1s_2^4s_3^2da_{11}\ll\lambda^{11}s_1s_2^4s_3^2$$

を得る．よって, $R_1\ll R_2$ と評価できるから, R_2 を評価すればよい．この R_2 に対しては成分表示 (2.1) を用いて Section 3.3 のように積分を座標表示すれば

$$R_2\ll\int_{\lambda=c}^{X^{\frac{1}{12}}}\int_{s_1,s_2,s_3\geq c_2}\lambda^{11}s_1^{-1}s_2^{-2}s_3^{-4}d^{\times}sd^{\times}\lambda\ll X^{\frac{11}{12}}$$

と評価でき無視できる．以上をまとめて主張を得る． □

あとは主要項の積分の計算が必要である：

命題 3.5　実数 $X>0$ と $i=0,1,2$ に対して

$$\frac{1}{n_i}\int_{x\in\mathcal{R}_X(v^{(i)})}\Bigg(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv^{(i)}=x}} 1\Bigg)dx=\frac{\zeta(2)^2\zeta(3)}{2n_i}X.$$

証明 以下のような UL 分解を考える：

$$G_{\mathbb{R}}=N\overline{N}A\Lambda$$

ただし, 部分群 $N,\overline{N},A,\Lambda$ と座標表示は

$$\begin{aligned}
N &:= \left\{ n(x)=\left(\begin{pmatrix}1 & x_1\\ & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & x_2 & x_3\\ & 1 & x_4\\ & & 1\end{pmatrix}\right) \;\middle|\; x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}\right\},\\
\overline{N} &:= \left\{ \overline{n}(u)=\left(\begin{pmatrix}1 & \\ u_1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & & \\ u_2 & 1 & \\ u_3 & u_4 & 1\end{pmatrix}\right) \;\middle|\; u_1,u_2,u_3,u_4\in\mathbb{R}\right\},\\
A &:= \left\{ a(t)=\left(\begin{pmatrix}t_1 & \\ & t_1^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t_2 & & \\ & t_3t_2^{-1} & \\ & & t_3^{-1}\end{pmatrix}\right) \;\middle|\; t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}_{>0}\right\},\\
\Lambda &:= \{\lambda=(\lambda I_2, I_3)\mid \lambda\in\mathbb{R}_{>0}\}
\end{aligned}$$

で与える. この分解の下, $G_{\mathbb{R}}$ 上の Haar 測度を可測関数 $\phi\colon G_{\mathbb{R}}\to\mathbb{C}$ に対して

$$\int_{g\in G_{\mathbb{R}}}\phi(g)dg:=\int_{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}}\int_{s\in\mathbb{R}^3_{>0}}\int_{u\in\mathbb{R}^4}\int_{x\in\mathbb{R}^4}\phi(n(x)\overline{n}(u)a(s)\lambda)dxdud^{\times}sd^{\times}\lambda$$

で定める. すると, Langlands [18] の結果から

$$\int_{G_{\mathbb{Z}}\backslash G_{\mathbb{R}}^{\pm1}}dg=\zeta(2)\cdot\zeta(2)\zeta(3)$$

を得ることができる. ただしここで

$$G_{\mathbb{R}}^{\pm1}=\{(g_2,g_3)\in G_{\mathbb{R}}\mid \det(g_2)=\pm1\}$$

とした. この Haar 測度を通して, $v^{(i)}$ として計算しやすい特殊な元を取り明示的に

計算すれば 命題 1.7 の類似物が得られ,

$$\frac{1}{n_i}\int_{x\in\mathcal{R}_X(v^{(i)})}\Bigg(\sum_{\substack{h\in\mathcal{F}\\ hv^{(i)}=x}}1\Bigg)dx=\frac{6}{n_i}\int_0^{\left(\frac{X}{|\operatorname{Disc}(v^{(i)})|}\right)^{\frac{1}{12}}}\lambda^{12}|\operatorname{Disc}(v^{(i)})|d^\times\lambda\int_{G_\mathbb{Z}\backslash G_\mathbb{R}^{\pm1}}dg$$
$$=\frac{6\zeta(2)^2\zeta(3)}{n_i}\int_0^{X^{\frac{1}{12}}}\lambda^{12}d^\times\lambda=\frac{\zeta(2)^2\zeta(3)}{2n_i}X$$

を得る. □

なお, 集合 $S\subseteq V_\mathbb{Z}$ として, $V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}$ 全体でなく, 法 $q\in\mathbb{N}$ での合同条件を付した

$$S\coloneqq V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}\cap\bigsqcup_{a\in\mathscr{A}_q}(a+qV_\mathbb{Z})\quad \text{ただし}\quad \mathscr{A}_q\subseteq V_\mathbb{Z}/qV_\mathbb{Z}$$

を用いた場合も考察する必要がある. この場合には (3.8) において,

$$\sum_{x\in\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}\cap(a+qV_\mathbb{Z})}1=\sum_{x\in q^{-1}(\widetilde{\mathscr{H}}_X(g)^{(i)}-a)\cap V_\mathbb{Z}}1$$

と書き直してあげれば同様に計算でき, 結局, 次を得る:

定理 3.6 集合 $\mathscr{A}_q\subseteq V_\mathbb{Z}/qV_\mathbb{Z}$ と実数 $X>0$ に対して,

$$\sum_{a\in\mathscr{A}_q}N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)}\cap(a+qV_\mathbb{Z});X)=\mu_q(\mathscr{A}_q)\frac{\zeta(2)^2\zeta(3)}{2n_i}X+o_q(X)\quad(X\to\infty).$$

を得る. ただしここで $\mu_q(\mathscr{A}_q)$ は (mod q) での $\mathscr{A}_q$ の密度

$$\mu_q(\mathscr{A}_q)\coloneqq q^{-12}|\mathscr{A}_q|$$

であり, $o_q(X)$ の “q” はこの誤差項の収束のスピードが q に依存することを意味する.

4 代数体の整数環の篩い出し

定理 3.6 により, $V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}$ の $G_\mathbb{Z}$ 軌道を数え上げることができた. しかし, 定理 1.10 を思い出すと, このままでは A_4, $\mathfrak{S}_4$-4 次体の整環をしかもその 3 次レゾルベント環の重複度まで含めて数え上げを行ってしまっていることがわかる. 4 次体を数え上げるのには整数環, つまり, これら整環の中で環の拡大に関して極大なもののみをレゾル

ベント環の重複度を無視して抽出する必要がある.（なお, 極大な 4 次環の 3 次レゾルベント環は一意的に定まることが知られているので, 極大でない 4 次環の寄与を除けば自動的に 3 次レゾルベント環の重複度は取り除ける.）$G_{\mathbb{Z}}$ 軌道 $G_{\mathbb{Z}}(A,B)$ が極大な 4 次環に対応する必要十分条件は 定理 1.10 により各素数 p に対して $(\mathrm{mod}\ p^2)$ の合同条件 $(A,B)\in\mathcal{U}_p$ で与えられる. つまり,

$$N_4^{(i)}(X) = N\Big(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)} \cap \bigcap_p \mathcal{U}_p; X\Big) \tag{4.1}$$

となる. すると, 一見, 定理 3.6 を用いれば極大な整環を数え上げられそうに思えるが, 考慮すべき合同条件はすべての素数を法として考えなければならないため, 定理 3.6 はそのままでは適用できない. 特に, 定理 3.6 では誤差評価は q に関して一様ではない. この問題は $\mathcal{U}_p$ の補集合の評価を与えたあとに無平方篩を適用することで乗り越えられる.

まず, 素数の大きさを制限するパラメター $P>0$ を用意し, (4.1) より

$$\begin{aligned} N_4^{(i)}(X) &= N\Big(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)} \cap \bigcap_{p\le P} \mathcal{U}_p; X\Big) + O\bigg(N\Big(V_{\mathbb{Z}}^{(i)} \setminus \Big(\bigcap_{p>P}\mathcal{U}_p\Big); X\Big)\bigg) \\ &= N\Big(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)} \cap \bigcap_{p\le P} \mathcal{U}_p; X\Big) + O\bigg(\sum_{p>P} N(V_{\mathbb{Z}}^{(i)} \setminus \mathcal{U}_p; X)\bigg) \end{aligned} \tag{4.2}$$

とする. 右辺第 1 項は中国式剰余定理を用いれば, 定理 3.6 より

$$N\Big(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)} \cap \bigcap_{p\le P} \mathcal{U}_p; X\Big) = \prod_{p\le P} \mu_p(\mathcal{U}_p)\frac{\zeta(2)^2\zeta(3)}{2n_i}X + o_P(X) \quad (X\to\infty)$$

とできる. 主要項の係数については, 定理 1.10 にある $\mathcal{U}_p$ の密度から

$$\mu_p(\mathcal{U}_p) = 1 + O(p^{-2}) \tag{4.3}$$

だとわかるので, $P\to\infty$ のとき,

$$\begin{aligned} \prod_{p\le P} \mu_p(\mathcal{U}_p) &= (1+o(1))\prod_p \mu_p(\mathcal{U}_p) \\ &= (1+o(1))\frac{1}{\zeta(2)^2\zeta(3)}\prod_p\Big(1+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^4}\Big) \end{aligned}$$

と知れる. 一方, 誤差項については (4.3) を 定理 3.6 と組み合わせれば, $V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)} \setminus \mathcal{U}_p$ の密度は $O(p^{-2})$ であると期待したいところである. しかし, 定理 3.6 の誤差項が無視

できず, この期待を正しく証明するのは非自明な問題である．実際には, 高次合成則を通して評価を 4 次環とその 3 次レゾルベント環の数え上げに翻訳した後に, 4 次環と 3 次レゾルベント環の数え上げに関する既知の結果を組み合わせることで, 次を示すことができる：

補題 4.1　素数 p と実数 $X > 0$ に対して,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \frac{X}{p^2}.$$

ただし, implicit constant は絶対定数.

証明のために用いる 4 次環と 3 次レゾルベント環の数え上げに関する結果をいくつか述べる．まず, 4 次体の整環であって整数環との間で与えられた指数を持つものの個数を評価するために, 次の中川 [19] の結果を用いる．より一般の体についてはBrakenhoff [9] が類似した結果を示している．

補題 4.2（中川 [19]）　4 次体の整数環の指数 k の整環の個数は

$$\ll \prod_{p^v \| k} p^{(2+\varepsilon)\lfloor v/4 \rfloor}$$

と評価できる．ただしここで, p は素数, v は非負整数をわたり, $\lfloor x \rfloor$ は実数 x を超えない最大の整数を表し,「$p^v \parallel k$」とは「$p^v \mid k$ かつ $p^{v+1} \nmid k$ である」ことを意味し, implicit constant は $\varepsilon > 0$ のみに依存する.

また, 3 次レゾルベント環の個数を評価するために content という量を導入する：

定義 4.3　4 次環 Q に対して, その **content** $\mathrm{ct}(Q)$ を

$$\mathrm{ct}(Q) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid Q = \mathbb{Z} + nQ' \text{ となる 4 次環 } Q' \text{ が存在する }\}$$

で定める.

すると 3 次レゾルベント環の個数は次のように与えられる：

補題 4.4（Bhargava [1, Corollary 4, p. 1333]）　4 次環 Q の 3 次レゾルベント環の個数は $\mathrm{ct}(Q)$ の約数の総和 $\sigma(\mathrm{ct}(Q)) = \sum_{d \mid \mathrm{ct}(Q)} d$ で与えられる.

以上を用いて, 補題 4.1 を示そう.

証明（補題 4.1）$V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p$ は 定理 1.10 で与えられた対応によって, 4 次体の整環と 3 次レゾルベント環の組 (Q,R) であって, 素数 p にて Q が極大でない（$Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ が極大な rank 4 の $\mathbb{Z}_p$-代数になっていない）ものに対応する．よって,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \sum_{\substack{Q:4\text{ 次体の整環}\\ Q:\text{not maximal at }p\\ |\operatorname{Disc}(Q)|<X}} \sum_{R:Q\text{ のレゾルベント環}} 1$$

となる．ここで Q を $n \coloneqq \mathrm{ct}(Q)$ で分類して 補題 4.4 を用いれば

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \sum_{\substack{Q:4\text{ 次体の整環}\\ Q:\text{not maximal at }p\\ |\operatorname{Disc}(Q)|<X\\ \mathrm{ct}(Q)=n}} 1$$

となる．ここで $\mathrm{ct}(Q) = n$ なる 4 次環 Q と $Q = \mathbb{Z} + nQ'$ なる content 1 の 4 次環 Q' は一対一に対応し, この対応の下で $\operatorname{Disc}(Q) = n^6 \operatorname{Disc}(Q')$ となるから,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \sum_{\substack{Q':4\text{ 次体の整環}\\ \mathbb{Z}+nQ':\text{not maximal at }p\\ |\operatorname{Disc}(Q')|<n^{-6}X\\ \mathrm{ct}(Q')=1}} 1$$

である．ここで $p \nmid n$ であれば, 上の和において Q' は素数 p にて極大でないままである．よって, Q' の整閉包 Q'' を取って, 指数 $k \coloneqq [Q'' : Q']$ で場合分けすれば, $p \nmid n$ ならば $p \mid k$ である．また, $\operatorname{Disc}(Q') = k^2 \operatorname{Disc}(Q'')$ である．よって, 補題 4.2 より

$$\begin{aligned} N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll & \sum_{\substack{n=1\\ p\nmid n}}^{\infty} \sigma(n) \sum_{\substack{k=1\\ p\mid k}}^{\infty} \prod_{p^v \| k} p^{(2+\varepsilon)\lfloor v/4 \rfloor} \sum_{\substack{Q'':4\text{ 次体の整数環}\\ |\operatorname{Disc}(Q'')|<n^{-6}k^{-2}X}} 1 \\ & + \sum_{\substack{n=1\\ p\mid n}}^{\infty} \sigma(n) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{p^v \| k} p^{(2+\varepsilon)\lfloor v/4 \rfloor} \sum_{\substack{Q'':4\text{ 次体の整数環}\\ |\operatorname{Disc}(Q'')|<n^{-6}k^{-2}X}} 1. \end{aligned}$$

ここで, 定理 3.6 を用いれば, 上からの評価

$$\sum_{\substack{Q'':4\text{ 次体の整数環}\\ |\operatorname{Disc}(Q'')|<n^{-6}k^{-2}X}} 1 \ll \frac{X}{n^6 k^2}$$

を得る．したがって,

$$N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \sum_{\substack{n=1 \\ p\nmid n}}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^6} \sum_{\substack{k=1 \\ p|k}}^{\infty} \prod_{p^v \| k} p^{(2+\varepsilon)\lfloor v/4 \rfloor - 2v} X + \sum_{\substack{n=1 \\ p|n}}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^6} X \ll \frac{X}{p^2}$$

と主張を得る． □

上に示した評価 補題 4.1 を用いれば, (4.2) の誤差項は

$$\sum_{p>P} N(V_{\mathbb{Z},\mathrm{irr}}^{(i)} \setminus \mathcal{U}_p; X) \ll \sum_{p>P} \frac{X}{p^2} \ll \frac{X}{P}$$

と抑えることができ,

$$N_4^{(i)}(X) = \frac{1}{2n_i} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4}\right) X + o_P(X) + O\left(\frac{X}{P}\right) \quad (X \to \infty)$$

を得る．あとは, X に比べて P をゆっくり大きくしていけば, 定理 1.1 を得ることができる．

謝辞

第 30 回整数論サマースクール世話人の谷口隆先生，杉山和成先生，石塚裕大先生には貴重な勉強の機会をいただいたことを感謝申し上げます．また, 整数論サマースクールの講演準備や本稿の執筆の際には, 谷口隆先生, 石塚裕大先生, 佐藤文広先生, 都築正男先生, Frank Thorne 先生, 佐野薫先生, 山本修司先生に, 筆者が理解不足な部分について解説していただいたり, 間違いを指摘していただいたりしました．この場をお借りして感謝申し上げます．しかし依然として, 本稿には不正確な部分が残っていると思いますが, これはすべて筆者の勉強不足によるものだということをお断りしておきます．

参考文献

[1] M. Bhargava, *Higher composition laws III: The parametrization of quartic rings*, Ann. of Math. **159** (2004), 1329–1360.

[2] M. Bhargava, *The density of discriminants of quartic rings and fields*, Ann. of Math. **162** (2005), 1031–1063.

[3] M. Bhargava, *Higher composition laws IV: The parametrization of quintic rings*, Ann. of Math. **167** (2008), 53–94.

[4] M. Bhargava, *The density of discriminants of quintic rings and fields*, Ann. of Math. **172** (2010), 1559–1591.

[5] M. Bhargava and A. Shanker, *Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves*, Ann. of Math. **181** (2015), 191–242.

[6] M. Bhargava and A. Shanker, *Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank* 0, Ann. of Math. **181** (2015), 587–621.

[7] M. Bhargava and A. Shanker, *The average number of elements in the* 4-*Selmer groups of elliptic curves is* 7, arXiv preprint, `arXiv:1312.7333`.

[8] M. Bhargava and A. Shanker, *The average size of the* 5-*Selmer group of elliptic curves is* 6*, and the average rank is less than* 1, arXiv preprint, `arXiv:1312.7859`.

[9] J. Brakenhoff, *Counting problems for number rings*, Ph.D. thesis, Leiden University, 2009.

[10] H. Davenport, *On a principle of Lipschitz*, J. London Math. Soc. **26** (1951), 179–183, *Corrigendum: "On a principle of Lipschitz"*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 580.

[11] H. Davenport, *On the class-number of binary cubic forms* (I), J. London Math. Soc. **26** (1951), 183–192, *Corrigendum: On the class-Number of binary cubic forms* (I), J. London Math. Soc. **27** (1952), 512.

[12] H. Davenport, *On the class-number of binary cubic forms* (II), J. London Math. Soc. **26** (1951), 192–198.

[13] H. Davenport and H. Heilbronn, *On the density of discriminants of cubic fields.* II, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci. **322** (1971), 405–420.

[14] L. van den Dries, *Tame Topology and O-minimal Structures*, (Cambridge University Press, 1998).

[15] 石塚裕大, 三元二次形式のペアと射影空間の幾何, **本報告集**, 2023.

[16] 石塚裕大, 有理軌道，整軌道の解釈, **本報告集**, 2023.

[17] 木村達雄, 概均質ベクトル空間, (岩波書店, 1998).

[18] R. P. Langlands, The volume of the fundamental domain for some arithmetical subgroups of Chevalley groups, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups* (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, pp. 143–148.

[19] J. Nakagawa, *Orders of a Quartic Field*, Mem. Amer. Math. Soc. **122** (1996), no. 583, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[20] 佐野薫, 余正則空間と楕円曲線の Selmer 群, **本報告集**, 2023.

[21] 谷口隆, フィールズ賞業績紹介：バルガバ, 数学セミナー **54** (1), 2015 年 1 月, 34–40.

[22] 谷口隆, Manjul Bhargava 氏の業績 — 楕円曲線の平均階数と数の幾何 —, 数学 **68** (1), 2016 年 1 月, 72–82.

[23] 谷口隆, 本論のための準備, **本報告集**, 2023.

[24] Frank Thorne, *Counting cubic fields using Shintani's zeta function*, **本報告集**, 2023.

[25] S. Wong, *Densities of quartic fields with even Galois groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2873–2881.