Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2024-05-04

概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

概均質ベクトル空間：RETROSPECTIVE ACCOUNT

伊吹山 知義

Contents

1. 前説（概要に代えて） 2
2. 前史: Contour integral と次元公式（特殊値の時代） 3
2.1. 周回積分入門 4
3. 1970–1980 年代の Contour integral を用いたいくつかの試み 6
3.1. 新谷卓郎氏 (1943–1980) の結果 6
3.2. 佐武一郎氏 (1927–2014)・尾形庄悦氏の数学 6
3.3. 栗原章氏の数学 7
3.4. 荒川恒男氏 (1949–2003) の数学:周回積分の終焉 8
4. 対称行列全体のなす概均質ベクトル空間のゼータ関数 10
4.1. ゼータ関数の定義 11
4.2. $GL_n(\mathbb{Z})$ 同値と $SL_n(\mathbb{Z})$ 同値 12
4.3. 一般の符号の場合のゼータ関数の定義 13
4.4. 定義から直ちに思いつく、ゼータ関数のナイーブな計算法 14
4.5. 問題 1：積の条件 $\prod_v \epsilon_v(x_v) = 1$ をどうするのか？ 17
4.6. 問題 2 ：局所的な同型類 $GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p, d)$ をどう記述するか 17
4.7. Igusa local zeta 18
4.8. 問題 3 : 足し算のまとめ方 20
4.9. 結論の例 21
4.10. 問題 4 ：出てきた結果の解釈 22
4.11. 実解析的アイゼンシュタイン級数と関数等式 23
4.12. 新谷の 2 重ディリクレ級数 27
4.13. Degeneration for $n = 2$ 28
4.14. ゼータ関数の特殊値 30
5. 次元公式と概均質ベクトル空間のゼータ関数 31
5.1. ジーゲル保型形式の場合 31
5.2. Tube domain の保型形式の次元公式とゼータ関数 33
6. 専門家の言うことを信じてはいけないという話 38
7. Koecher-Maass series 39
7.1. Koecher version for theta series 39
7.2. Maass version for Siegel modular forms 39
7.3. 対称管状領域上の保型形式に対する、量指標付き Koecher Maass 級数の関数等式 40

本研究は JSPS 科研費 JP23K03031, JP19K03424, JP20H00115 の助成を受けたものです.

7.4. $Sp(n,\mathbb{Z})$ の Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数 43
7.5. 証明のキーポイント 46
8. Siegel 公式とアイゼンシュタイン級数 47
8.1. 正定値の場合 47
8.2. 不定符号の場合 48
9. 指数和とベルヌーイ数 49
9.1. 未解決問題の宝庫 49
9.2. Hecke の結果 51
9.3. Hecke の結果の拡張 (Hilbert case and Siegel case) 52
9.4. Arakawa identity and Tsukano conjecture 56
10. 付録：ジョルダン分解の補足的解説 59
11. 引用論文のタイプミス訂正 61
参考文献 61

1. 前説（概要に代えて）

私もいい歳 (７５歳）なので、あえて読み物風に昔語りをしたいと思う。私の周辺の人たちが昔何を考えていたかというのを記録しておくのも無駄ではあるまいと思う。これらは日本の研究の大切な遺産なのに、もうみんなもう忘れているような気もするからである。当時の日本人の仕事に対するオマージュだと思ってくれてもよい。別に私の残す言葉というわけでもないが、当時のみんなの気持ちが何だったかというのは数学的にも大切な部分はあると思う。ただし個人的なバイアスをあえて気にせずに書くので、自分の知っている話と違うという方がいたら、ご容赦いただきたい。また、かなり敬称を略しているので、これもご容赦いただきたい。

1992 年に齋藤裕さん (1947–2010) との共同研究で「対称行列全体のなすベクトル空間のゼータ関数の明示的公式」を証明した。これは概均質ベクトル空間の一般論では決して迫りえない新しい結果をいろいろ含んでいるし、次元公式にも決定的な応用があったので、自分では良い仕事だと思い満足していた。当時、伊原康隆先生が IMRN の編集者で、そこに速報を投稿する関係でお世話になったのだが、彼から「佐藤幹夫先生 (1928–2023) にも話しておけば」と言われたので、京大の生協食堂で佐藤先生に偶然お会いしたときに「具体的に書けることが証明できました」と話した。しかし佐藤先生からは

「そういう話はいろいろあるようですね」

という非常に気のない反応が返ってきた。また「２元３次形式についてはどうですか？」と聞かれた。「全然わかりません」と答えると笑顔になった。

私はこの反応はちょっとショックで、「どうもわかってくれないんだな」という感想を持った。また「２元３次形式」のゼータ関数は、たぶん佐藤先生にとっては他では取り扱えない新発見だという気があって、これは他からは説明できないのだというのが彼のこの理論に対するプライドだったのかなとも思った。だから彼にとって、自分の定義した

ゼータ関数が既知のもので書けるという結果は、そう嬉しい結果ではないのかもしれないな、と思ったのは、まあ、こちらのひがみだったかな。それで「２元３次形式のゼータは実は既知のものなのだ」というような結果があれば、たぶん一番認めてくれる結果なのであろうが、今に到るもこれは結果が何もない。わりと外国でも会う人ごとに聞いてみているのだが。(Datskovsky-Wright の具体的表示と言うのはあるけれどこれは私の求める結果ではない。)

さて、彼が「そういう話はいろいろ」と言ったときの、いろいろの中味は何かと考えてみると、それ以前の木村達雄さん, 小木曽岳義さんの岩澤・テイトの理論（[43], [44]) が念頭にあったのかもしれない。しかしこれは G_A orbit が有限個の場合というもので、我々の場合は、これとは全然違う話である。つまり、われわれの場合は大雑把に言って、各 local での軌道が２個以上あり、これらの積は無限個あり、そのなかから global から来る適当な組み合わせをとる、という形であるから、本質的に話が違うのである。たとえば、オイラー積は全然持たない、というか一般にはオイラー積を持つ部分の無限和になっている。これはいろいろな意味で、非常に新しい結果であった。

2. 前史: Contour integral と次元公式（特殊値の時代）

1990 年当時、私は概均質ベクトル空間については全く素人だったので（今もそうだが)、全体がどんな理論なのか、あまり知識がなかった。しかし、対称行列全体のなすゼータ関数の特殊値がジーゲル保型形式の次元公式に現れることは知っており、これについては前から興味が非常にあった。対称行列全体で決まるゼータ関数というのは、とりあえずの定義は

$$\zeta(s,L)=\sum_{T\in SL_n(\mathbb{Z}))\backslash L^+}\frac{1}{|SO(T,\mathbb{Z})|\det(T)^s}$$

である。ここで $S_n(R):=Sym_n(R)$ を R 係数の n 次対称行列の全体とする。$S_n(\mathbb{Q}):=Sym_n(\mathbb{Q})$ に対して $GL_n(\mathbb{Q})$ の作用を $T\to AT\,{}^tA$ と定義する。

$$L_n=S_n(\mathbb{Z})=Sym_n(\mathbb{Z})$$
$$L_n^*=\{T=(t_{ij})\in S_n(\mathbb{Q});t_{ii}\in\mathbb{Z},2t_{ij}\in\mathbb{Z}\}$$

とおく。また $S_n(\mathbb{Q})$ の部分格子 L に対して L^+ を L の中の正定値行列の全体とする。また $T\in L^+$ に対して、

$$Aut(T)=SO(T,\mathbb{Z})=\{A\in SL_n(\mathbb{Z});AT\,{}^tA=T\}$$

としている。これはもちろん有限群である。(注意：$SL_n(\mathbb{Z})$ 同値と $SL_n(\mathbb{Z})$ 自己同型を $GL_n(\mathbb{Z})$ 同値と $GL_n(\mathbb{Z})$ 自己同型に変えても、ゼータ関数は全体が 1/2 倍されるだけである。）ジーゲル保型形式の次元公式の観点からは $\zeta(s,L_n^{*,+})$ の s が負の整数点での値が問題になっていた。

それとは全然違う話なのだが、新谷卓郎氏は、代数体のゼータ関数の特殊値は初等的に公式が与えられるのではないかというヘッケの予

想に興味を持っており、これを contour integral (周回積分表示）で解決した。([86], また日本語の解説は [1] など). またそののちに、山崎正 (1972, 修士論文)、森田康夫 (1974) などの 2 次ジーゲル保型形式の次元公式を契機として、新谷 (1975) は $\begin{pmatrix} 1_n & x \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}$ という形の行列に $\mathbb{Q}$ 共役な元の n 次ジーゲル保形形式の次元への寄与が、初等的な定数を除き $\zeta(r-n, L_r^*)$ $(r = rank(x)$) で与えられるという定理を証明した。当然 $\zeta(r-n, L_r^*)$ は具体的にどういう値なのかが気になるところだったが、これは $n=2$ の場合以外は当時 (1990 年代初め以前）は全く知られていなかった。そこで、本稿では最初に、ゼータ関数の値という観点で、当時、皆がどういう研究を試みてきたのかと言うことから、話を始めたい。

ちなみに、本稿では、途中でいくつか未解決問題というのをあげているが、これはあまり深い理由があって書いているわけではない。とりわけ重要というような意味ではなく、そういえばこういうこともやってなかったな、というような軽い気持ちで書いているが、それでも何かの参考になれば幸いである。

2.1. **周回積分入門.** 普通、周回積分 (contour integral) というのは、次のような道 C に沿った複素線積分のことを言う。

$\epsilon > 0$ を適当な正の数として、複素平面上の曲線で、次の 3 つをつないだもの C を考える。
(1) ∞ から ϵ に向かう道
(2) $(\epsilon, 0)$ から原点を中心として反時計回りに一周する道 $C(\epsilon)$
(3) $(\epsilon, 0)$ から ∞ に実軸上を向かう道、

普通のリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ について $\zeta(1-m)$ (m は ≥ 1 となる整数）の値は以下に示すように周回積分を用いて求まる。

ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は $Re(s) > 0$ について、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

で定義されている。
（ちなみに黒川信重君は、ガンマ関数の逆関数はマンガ関数でリーマン予想を証明するのに必要だと、よく冗談とも本気ともつかないことを言っていた。私が他大学で集中講義をしたのは彼のいたころの東工大 (1985 年？）が初めてで、古澤昌秋君などが出席していた。）

さて、$\Gamma(s)$ の収束範囲は $Re(s) > 0$ である。ここで x を nx に取り替えても dx/x は変わらないから、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nx} (nx)^s \frac{dx}{x}$$

であり、

$$\Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-ns} x^s \frac{dx}{x}$$

である。ここで $Re(s) > 1$ ならば積分と和の順序交換ができて、

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} x^{s-1} dx$$

と書ける。しかし、ここで s を $\mathbb{C}$ に拡張したい。そのために、

$$\int_C \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx$$

を考えたい。C を (1), (2), (3) の 3 つの path に分割する。正の実軸以外で

$$\log(t) = \log|t| + i \arg t \qquad (0 < \arg t < 2\pi)$$

ととって、t^s の分岐を $e^{s \log t}$ で定義すると、$x = \epsilon e^{i\theta}$ として評価すると

$$\int_C \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx = \int_{C(\epsilon)} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx + (e^{2\pi is} - 1) \int_\epsilon^\infty \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx.$$

である。$C(\epsilon)$ を一周すると x^s の分岐が $e^{s \log x + 2\pi is \log x} = e^{x+2\pi is}$ に変るからである。また

$$\left| \int_{C(\epsilon)} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx \right| = \epsilon^{Re(s)} \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{is\theta}}{e^{\epsilon e^{i\theta}} - 1} \right| d\theta$$

であり、これは $\epsilon \to 0$ で 0 となる。よって、$\zeta(s)$ は

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)(e^{2\pi is} - 1)} \int_C \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx$$

により解析接続される。（後者の積分は任意の s に対して正則である。）
ここで m を正の整数として $s = 1 - m$ とすると、

$$\frac{1}{e^x - 1} x^{-m} = \frac{x}{e^x - 1} x^{-m-1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{B_n x^{n-m-1}}{n!}$$

また

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{s}{\Gamma(s+1)} = \cdots = \frac{s(s+1)\cdots(s+m-1)}{\Gamma(s+m)}$$
$$e^{2\pi is} - 1 = 2\pi i(s+m-1) + O((s+m-1)^2)$$

であるから、

$$\lim_{s \to 1-m} \frac{s+m-1}{\Gamma(s)(e^{2\pi is} - 1)} = (-1)^{m-1}(m-1)!/2\pi i.$$

よって留数定理より、$m \geq 1$, $m \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\zeta(1-m) = (-1)^{m-1+m} \frac{B_m}{m} = -\frac{B_m}{m} \tag{1}$$

となる。ほぼ同様の証明で、 χ を modulo $f > 0$ の原始的ディリクレ指標とし、一般ベルヌーイ数 $B_{n,\chi}$ を

$$\sum_{a=1}^f \frac{\chi(a) t e^{at}}{e^{ft} - 1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_{n,\chi}}{n!} t^n$$

で定義すると、Dirichle の L 関数の特殊値は

$$L(1-m,\chi) = -\frac{B_{m,\chi}}{m} \tag{2}$$

であることがわかる。

3. 1970–1980 年代の Contour integral を用いたいくつかの試み

3.1. 新谷卓郎氏 (1943–1980) の結果.

Theorem 3.1 (Siegel, Klingen, Shintani). F を総実代数体、$\zeta_F(s)$ を F のデデキントゼータ関数とするとき、
(1) （*Siegel, Klingen) F* の整イデアル $\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{n}$ の *Strahl Klass (=ray class)* $\mathfrak{c}$ を固定して、

$$\zeta_{\mathfrak{n}}(s,\mathfrak{c}) = \sum_{\textit{integral ideal } \mathfrak{a}\in\mathfrak{c}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

と定義するとき、任意の整数 $m \geq 1$ に対して $\zeta_{\mathfrak{n}}(1-m,\mathfrak{c}) \in \mathbb{Q}$ である。
(2) (Shintani) $\zeta_F(1-m)$ を表す初等的な式がある。これは $\mathbb{R}_+^n$ を単数群の基本領域に分解して、

$$(\mathbb{R}_+)^n = \coprod_{j=1}^{m}\coprod_{\epsilon\in E} \epsilon C_j(v_{j1},\ldots,v_{jr(j)})$$

と *simplicial cones* $C_j(v_{j1},\ldots,c_{jr_j})$ に分解し、そのそれぞれで *contour integral* を計算する方法による。

以上は [86], [1] を参照されたい。

次元公式への寄与についてはすでに少し述べたが、あとでまた取り上げる。

3.2. 佐武一郎氏 (1927–2014)・尾形庄悦氏の数学.

佐武先生は、カスプの次元が 0 次元で他にカスプがない数論多様体について、保型形式の次元公式を幾何学的な方法で書いた。そして尾形庄悦氏とともに、いろいろな予想とか、cone のゼータ関数とかを調べた。文献 [71] や [72] は幾何学の話が書いてあるだけで、概均質とは関係ない。しかし symmetric cone (=self dual homogeneous cone) とそれを含むベクトル空間は, 大抵は自然に概均質ベクトル空間となり、有界対称領域の保型形式の次元と関係がある。（実際上は概均質であることが本質的なわけではない。いろいろな技術的手法が似てはいるが。）特に、[70], [73], [74], [60] は、解析的計算に問題が生じないように、cone を作用する離散群の基本領域に分割するときに、その生成元が内点のみからなっているという仮定のもとに、ゼータ関数の特殊値の周回積分による計算法を与えている。佐武先生は、この計算は新谷を見習った物であると述べていた。しかし、実はこの、**生成元が内点のみからなる基本領域分割**というのは、**めったに成り立たない条件**でもある。彼らは次元公式を、0 次元カスプしかない場合について述べている。これは Hilbert modular, 2 次ジーゲルで不定符号四元数環と対応する場合、$SU(n,n)$ と対応する、ある場合などである。これがどの程度具体的な公式なの

か、実はよく知らない。(2次ジーゲルの場合は荒川 [2] の結果があった。ヒルベルト保型形式は文献は略すが、もちろん清水英男の結果がある。)

正直なところ、この佐武の理論ないしは各種の予想の周辺が結局のところ、現在どういう状態に落ち着いているのか、ということが私にはよくわかっていない。尾形氏がいまどうしているのかはよくしらないが一度解説を頼むとよいかもしれない。

3.3. **栗原章氏の数学.** Kurihara [52] は以上の流れで、符号が $(1, n-1)$ の2次形式のジーゲルゼータ関数の特殊値を周回積分で計算しようと試みた。このような符号の2次形式のゼータ関数は $SO(2,n)$ に付随する有界対称領域の次元公式に登場する([26])のだが、栗原氏にそのような観点があったかどうかはよくわからない。しかし、当然特殊値が有理数だという目論見はあったものと思う。

さて、S を符号 $(1, n-1)$ の2次形式とすると、領域 $\{x \in \mathbb{R}^n : xS\,{}^tx > 0\}$ はふたつの cone に分解する。たとえば $S = diag(s_1, -s_2 \ldots, -s_n)$ $(s_i > 0)$ ならば $D = \{x_1 > 0, xS\,{}^tx > 0\}$ がその一つである。$x \in D$ に対して、$\Gamma_x = \{\gamma \in SO(S); \gamma x = x\}$ とすると、これは $SO(n-1)$ に埋め込めるので有限群になり、$Q(x) = xS\,{}^tx$ と書くと

$$\zeta(s, Q) = \sum_{x \in SO(S,\mathbb{Z}) \backslash D} \frac{1}{|\Gamma_x| Q(x)^s}$$

と定義するのが自然である。しかし $\zeta(s, Q)$ で, D での基本領域の cone 分割の生成元が内点にあることを条件とすると $Q(x) = 0$ なる点 $x \in \mathbb{Q}^n$ が存在しては困ることになる。一方で、任意の不定符号2次形式は $n \geq 5$ で $\mathbb{Q}^n$ 内に自明でないゼロをもつのは, Hasse 原理により、よく知られている。よって $n \leq 4$ が必要となる。$n = 3$ は本質的にジーゲルに結果があるので、本当に新しいのは $n = 4$ で $Q(x) = 0$ なる $x \in \mathbb{Q}^4$ が存在しない場合ということになる。この場合は contour integral で書くことが一応は可能である。

周回積分で特殊値を書くためには、D の基本領域の分解 (rational open simplicial cones への分解)を考えなければならず、それぞれで、

$$\sum_{m_1,\ldots,m_l=0}^{\infty} Q(\sum_{i=1}^{l} (\xi_i + m_i) v_i))^{-s}$$

という形で与えられるゼータ関数の和が $\zeta(s, Q)$ になる。

ところが、これは**周回積分法のあきらかな欠点**だと思うのだが、**基本領域の分解 (open simplicial cones への分解)というところがあまり理論的とは言えず**、分解の取りかたによっては一つ一つの cone に対する $s = 1 - m$ の値は一般に超越数になったりする。それぞれは超越数だが和を採ると有理数、という格好になっている。彼が実際に $n \geq 4$ で得た特殊値の有理性に関する結果は、次のもののみである。

Theorem 3.2 (Kurihara [52])**.** $Q(x) = x_1^2 - 7x_2^2 - 7x_3^2 - 7x_4^2$ を考えると、分解のそれぞれでの周回積分は超越数だが、まとめると有理数に

なる、つまり $\zeta(0,Q)$ は有理数である。（彼の方法では具体的な値はわからない。）

Proof. 彼の証明はかなりすさまじい。基本領域の分解を２種類与えておいて、それぞれの cone からの寄与は大体 $m_1 \log m_2$ というような数であり、全体はその線形結合になるのだが、これらに A. Baker の超越数論を適用して、あらわれる $m_1 \log m_2$ のような形の数が線形独立なことより、有理数でないと矛盾ということをいうのである。 □

その後の発展（ゼータ関数の特殊値ではなくて、ゼータ関数自身を具体的に書きくだし、その結果、特殊値の結果を出す方法）については [31] の第７章に詳しく書いたのでここでは繰り返さない。[31] を参照されたい。

3.4. **荒川恒男氏 (1949–2003) の数学:周回積分の終焉.** 荒川 [3] は、前述のような状況がよい場合ではなくて、基本領域の生成元が境界に属するものがあって、そのままでは周回積分の経路に特異点が生じるような場合に、むりやり値を求める計算をおこなった。この論文は 70 ページもあり、そのほとんどが計算からなっていて、なかなか読むのが大変な論文である。私は出版された直後に詳しく読んだ。しかし、この方法でスマートな値を与えるのは無理なのだろうな、と逆の意味で納得して、次に進む契機になった。

さて、彼は論文でいろいろなゼータを扱っているが、よくわからない主要なゼータは次のものであった。

p を奇素数とする。$T \in L_2^{*+} = (1/2)S_2^+(\mathbb{Z})_e$ (つまり２次の正定値半整数対称行列）とする。このとき、L_2^{*+} 上の関数 ψ を次のように定義する。

もし $rank(T \bmod p) \neq 1$ ならば、$\psi(T) = 0$. もし $rank(T \bmod p) = 1$ ならば、

$$UT\,{}^tU \equiv \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bmod p$$

となる $U \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ が存在するが、このとき、

$$\psi(T) = \left(\frac{t}{p}\right), \qquad \left(\frac{*}{p}\right) \text{ は平方剰余記号}$$

と定義する。ここで

$$L(s, L_2^*, \psi) = \sum_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash L_2^{*+}} \frac{\psi(T)}{|SO(T,\mathbb{Z})| \det(T)^s}$$

と定義する。これは $Re(s) > 3/2$ で絶対一様収束する。ここで問題は $L(1-m, L_2^*, \psi)$ は何かということである。ちなみに、このような L 関数は橋本喜一朗 [14] で始めて導入されたので、当時、何人かの人はこれを橋本の L 関数と呼んでおり、荒川君はこの指標を ψ_H と書いているが、この H は Hashimoto の H であろう。しかし、のちに事情がわかってみるとこのゼータ関数は大雑把に言ってリーマンゼータであり、指標 ψ は２行２列の対称行列を古典的に２次体と解釈すれば、いわゆ

る種指標 (genus character) に過ぎないことがわかったので、現在そのように呼ぶ人はいない。（解決編は [18], [4] を参照。）ちなみに、齋藤さんも論文 [64] で ψ と類似の指標を一般の次数の場合に考えており、Siegel modular form に関する twisting operator などに応用している。

以上の L 関数とその特殊値については、詳しくは、あとの指数和の章を参照されたい。また [18], [20] III も参照されたい。

それはともかく、当時 $L(0, L_2^*, \psi)$ などは何であるか、全くわかっていなかったので、荒川君はこれを計算するために死力を尽くしたわけである。

いずれにしても、計算の基本は cone のガンマ関数であり、一般論は symmetric cone のガンマ関数 (Symmetric tube domain に対応する形式的実ジョルダン代数のなかの self-dual homogeneous cone) としてよく知られている ([12]). 今の場合は, $Y = (y_{ij})$, $T \in S_2^+(\mathbb{R})$ に対して

$$\det(T)^{-s} = \frac{1}{\Gamma_2(s)} \int_{Y>0} \det(Y)^{s-3/2} e^{-tr(TY)} \prod_{1 \le i \le j \le 2} dy_{ij}$$

ただしここで

$$\Gamma_2(s) = \pi^{1/2}\Gamma(s)\Gamma(s-1/2)$$

としている。ここで $Y > 0$ を $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用に関する基本領域に分割するのだが、基本領域は Minkowski の簡約行列の集合

$$R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 & y_{12} \\ y_{12} & y_2 \end{pmatrix}; 0 \le 2y_{12} \le y_1 \le y_2, 0 < y_1 \right\}$$

にとれる。これは実は cone に分割できる。それにはまず、

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。また $W_i \in S_2(\mathbb{Z})_{\ge 0}$ (半正定値) のときに、

$$C(W_1, \ldots, W_r) = \{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j W_j; \lambda_j > 0\}$$

とおく。ここで $C_{123} = C(V_1, V_2, V_3)$, $C_{ij} = C(V_i, V_j)$ $(i \ne j)$, $C_j = C(V_j)$ $(j = 1, 2)$ とおくと、

$$R_2 = C_{123} \cup C_{12} \cup C_{13} \cup C_{23} \cup C_1 \cup C_2$$

となるのである。（ちなみに、正定値対称行列の空間の cone 分解については、**Voronoi の簡約理論**というのがあって、perfect lattice などを使うものが知られている。たとえば [77] に解説があるようだが、私はあまりきちんと読んだことはない。このあたりの一般化については、たぶん渡部隆夫氏が詳しいのだと思う。将来的に、この分野で使われるべき道具かもしれないと思っている。たとえば、Duke-Imamoglu-Toth [9] には、この方向の話がでている。そこでは [20] I が引用されていて、一つの意外な応用が述べられている。）

ここに登場する各凸錐 C では、C を固定する限り、すべての $Y \in C$ について $|O(Y,\mathbb{Z})|$ は同じになる。そこで, $C \cup L_2^{*+}$ のそれぞれでゼータ関数を考える。つまり $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbb{R}_+^n$ に対して

$$\zeta(s, W_1, \ldots, W_r, \xi) = \sum_{m_1,\ldots,m_r=0}^{\infty} \det(\sum_{j=1}^{r}(\xi_j + m_j)W_j)^{-s}$$

とおく。ここで ξ を適当にうまくとると、$L_2(s, L_2^*.\psi)$ はこれらの線形結合でかける ([3] (2,4,1), (2,4,2))。そこで、$\zeta(s, W_1, \ldots, W_r, \xi)$ を contour integral で計算することになるのだが、$Y > 0$ なる行列は $k \in SO(2)$ に対して $kY\,{}^tk = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$ の形になるので、この $y_1 > 0$ と $y_2 > 0$ で２重の周回積分をするというのが方針である。ところが $r = 3, W_3 = V_3$ のときには V_3 が $S_2^+(\mathbb{R})$ の境界にあるという事情から、一回 y_1 で周回積分をしたあとに、y_2 で周回積分を続けようと思ったら、この積分路がそこら中で特異点を横切ってしまって、うまく帰着できないので、その手前で計算をやめて、評価する。ここが [3] の最も難しい部分であり、今見ても、その膨大な計算には圧倒される。

$n = 2$ でもここまで難しいのだから、$n = 3$ を試みる人は昔はいなかったのだが、最近　Brad Isaacson が試みたいと言っていた。まあどうなるのか、お手並み拝見というところである。

次元公式という観点からは、当該の L 関数自身が単純な関数であるということが後に [18] でわかってしまったので、荒川の手法は避けることができる。ちなみに、類似の L 関数の n が一般の場合は論文 [20] の III に述べてある通りである。このパート III の論文を読んだ人は、レフェリー以外にはいないのではないかと思っていたが、最近 Brad Isaacson が真面目に読んでいるようである。

荒川以降、contour integral で何かを求めようとした例は聞いたことがなく、ここで現在のところ歴史が途絶えているように見える。前にも述べた通り、それがかえって次のステップに進める契機になったとも言えるのである。実際にゼータの明示公式の研究を開始したのは、私が 1991 年に $L(s, L_2^*, \psi)$ の明示公式を発見したことが契機であり、歴史的な順番としては、その話を先に述べた方がいいのかもしれないが、それについては、またあとの第 9 節の指数和の話で述べることにして、ここで歴史の流れを無視して、ゼータの明示公式の話に移る。

4. 対称行列全体のなす概均質ベクトル空間のゼータ関数

以下、しばらくの間 [20] I, II, III の解説を行う。最初は、取り合えず正定値全体のなす空間のゼータ関数を定義する。（ゼータ関数をいろいろな符号で考えるのは、概均質は $\mathbb{R}$-orbit 分解で考えているからで、$\mathbb{R}$-orbit ごとに定義上別のゼータ関数があって、これらのゼータ関数のなすベクトルの間に関数等式があるというのが、佐藤・新谷の一般論である。しかし、後で見るように、この一般論には非常に misleading な点がある。）

4.1. **ゼータ関数の定義.** 記号を準備する。R を $\mathbb{R}$、または $\mathbb{Q}_p$ の単位部分環とする。また $d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$ とする。このとき、次のように記号を定める。

$S_n(R)$: R 係数の n 次の対称行列全体の集合。
$S_n(R)_e$; $S_n(R)$ の元で、対角成分が $2R$ に属するもの.
$S_n(R,d)$; $x \in S_n(R)$ で $\det(x) = d$ となるもの全体の集合
$S_n(R,d)_e = S_n(R,d) \cap S_n(R)_e$.

また $R = \mathbb{R}$ (実数体）のとき

$$S_n^{i,n-i}(\mathbb{R},d) = \{x \in S_n(\mathbb{R},d) : x \text{ の } \mathbb{R} \text{ で符号が } (i,n-i)\}$$

とおく。特に $L_n = S_n(\mathbb{Z})$, $L_n^* = \frac{1}{2}S_n(\mathbb{Z})_e$ とおく。実は $S_n(\mathbb{Q})$ の部分格子で $SL_n(\mathbb{Z})$ で不変なものは、$n \geq 3$ のときは定数倍を除いて L_n または L_n^* に限る ([20] I Lemma 1.1)。($n = 2$ のときは、定数倍を除き、全部で 4 つあるのは [18] に記載してある通りである。)

L^+ を L のなかで正定値のものの全体を表す。L を $SL_n(\mathbb{Z})$ で不変と仮定する。正定値の対称行列全体に付随する概均質ベクトル空間のゼータ関数の定義はそれなりに単純で

$$\zeta(s,L^+) := \zeta_n(s,L) = \sum_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash L^+} \frac{1}{|SO(T,\mathbb{Z})| \det(T)^s}$$

で与えられる。ここで添え字の n は符号が $(n,0)$ であることを示している。前に述べたように、実際には $L = L_n$ または L_n^* を考えている。L_n と L_n^* は内積 $Tr(xy)$ (x, $y \in S_n(\mathbb{Q})$) に対し、互いに dual lattice である。$\zeta_n(s,L_n) = \sum_{d>0} a(d)d^{-s}$ と書くとき、d^{-s} の係数は

$$a(d) = \sum_{T \in SL_n(\mathbb{Z})\backslash S^+(\mathbb{Z},d)} \frac{1}{|SO(T,\mathbb{Z})|}$$

である。

$\mathbb{Z}_v = \mathbb{R}$ (if $v = \infty$), $\mathbb{Z}_v = \mathbb{Z}_q$ (q 進整数環）(if $v = prime\ q$) と書くことにする。2 次形式論で T_1, $T_2 \in L_n$ でかつ、すべての v に対し、ある $U_v \in GL_n(\mathbb{Z}_v)$ があって、${}^tU_vT_1U_v = T_2$ となるとき、T_1 と T_2 は同じ種 (genus) $\mathfrak{L}$ に属するという。同じ種に属する T については $\det(T)$ は同じであるので、これを $d(\mathfrak{L})$ または $\det(\mathfrak{L})$ と書くことにしよう。$S^+(\mathbb{Z},d)$ は一般にいくつかの異なる種にわかれるが、もちろん $S_n^+(\mathbb{Z},d)$ 自身が単一の種であることもある。L_n ではなくて L_n^* を考えるときは $S(\mathbb{Z})_2 = 2L_n^*$ として、$d = \det(2T)$ を考えることになる。

それはともかく、1 つの種に対して、

$$M(\mathfrak{L}) = \sum_{T \in GL_n(\mathbb{Z})\backslash \mathfrak{L}} \frac{1}{|O(T,\mathbb{Z})|}$$

は種の Mass と呼ばれる。$T \in \mathfrak{L}$ に対して

Theorem 4.1 (Siegel and Minkowski)**.** $n \geq 2$ で次が成り立つ。

$$M(\mathfrak{L}) = 2\frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{i}{2})}{\pi^{n(n+1)/4}} \det(\mathfrak{L})^{(n+1)/2} \times \frac{1}{\prod_p \alpha_p(\mathfrak{L},\mathfrak{L})}.$$

ここで $\alpha_p(T,T)$ の定義は Siegel のよるもので、

$$\alpha_p(T,T)=2^{-1}\lim_{r\to\infty}(p^r)^{n(n+1)/2-n^2}A_{p^r}(T,T).$$

ただし、

$$A_{p^r}(T,T)=\{X\in M_n(\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p);T[X]\equiv T \bmod p^r(S_n(\mathbb{Z}_p))\}$$

とおく。$\alpha_p(T,T)$ の定義では極限を取っているが、実際には r が十分大きくなると、極限の中身は一定になる。つまり十分大きい r については、これは極限ではなくて等式になるわけである。T から T への local density $\alpha_p(T,T)$ の具体的な公式は、昔からいろいろな論文があるが、大抵ミスプリがある。私の知る限り、もっとも正確で信用できる文献は [45] であって、[45] p. 108 Theorem 5.6.3 で $\beta_p(T,T)$ を調べた後に、[45] p. 98 の関係式

$$\alpha_p(T,T)=2^{n\delta_{2,p}-1}\beta_p(T,T)$$

によって、$\alpha_p(T,T)$ を求めればよい。（Theorem 5.6.3 の公式は書き方があまりわかりやすくない点もあって、非常に注意深く読まないと読み間違えそうになるので注意が必要であるが、私の知る限り、完全に正しい式が書いてある。）

たとえば、p が奇数で $\det(T)\in\mathbb{Z}_p^\times$ (local に unimodular) のときは、大雑把に言って

$$\alpha_p(T,T)\sim\prod_{\nu=1}^{[n/2]}(1-p^{-2\nu})\begin{cases}1, & n \text{ 奇数の場合}\\ 1+p^{-n/2}\left(\frac{(-1)^{n/2}\det(T)}{p}\right), & n \text{ 偶数の場合}\end{cases}$$

である。このように n が奇数と偶数で local density が非常に異なり、これが最終結果の違いまで大きく影響する。

以上は $T[X]\equiv T$ と T を T で表す話をしていた。ここで行き先を S に変えて $T[X]\equiv S$ で、T から S への local density というのが、定義される。$T\neq S$ の場合（たとえば S のサイズが T より小さい場合など）の local density $\alpha_p(T,S)$ を完全に具体的に書いた公式の文献は佐藤・広中 [76], Tonghai Yang [103](p odd), Tonghai Yang [104]($p=2$) などがあると思うが、使ったことはないので、詳しくは知らない。

4.2. $GL_n(\mathbb{Z})$ 同値と $SL_n(\mathbb{Z})$ 同値. われわれは、ゼータ関数の定義を $SL_n(\mathbb{Z})$ 同値で与えていた。（これは元々の新谷の定義に合わせてあるからである。）

しかし上の Mass formula は $GL_n(\mathbb{Z})$ で考えているので、両者のずれを見ておく必要がある。そもそも $[GL_n(\mathbb{Z}):SO_n(\mathbb{Z})]=2$ なので、$O(T,\mathbb{Z})=\{g\in GL_n(\mathbb{Z}):=gT\,{}^tg=T\}$ として、$[O(T,\mathbb{Z}):SO(T,\mathbb{Z})]\leq 2$ である。$[O(T,\mathbb{Z}):SO(T,\mathbb{Z})]=2$ ならば、T と $GL_n(\mathbb{Z})$ 同値なものは、$SL_n(\mathbb{Z})$ 同値でもある。この場合

$$\frac{2}{|O(T,\mathbb{Z})|}=\frac{1}{|SO(T,\mathbb{Z})|}$$

一方で $O(T,\mathbb{Z})=SO(T,\mathbb{Z})$ ならば、$gT\,{}^tg=hT\,{}^th$ (g, $h\in GL_n(\mathbb{Z})$, $\det(g)=-1$, $\det(h)=1$) とすると $gh^{-1}\notin SO(T,\mathbb{Z})$ となって矛盾だ

から、T と $GL_n(\mathbb{Z})$ 同値であるが、$SL_n(\mathbb{Z})$ 同値でないものがひとつある。この場合

$$\frac{1}{SO(T,\mathbb{Z})}+\frac{1}{SO(gT\,{}^tg,\mathbb{Z})}=\frac{2}{|O(T,\mathbb{Z})|}$$

である。つまり $SL_2(\mathbb{Z})$ 同値で考えたときの mass は $GL_n(\mathbb{Z})$ **同値で考えたときの Mass の２倍である。**よって、Siegel and Minkowski の定理を $SL_n(\mathbb{Z})$ 同値な分類に読み替えると

$$c_n=2\pi^{-n(n+1)/4}\prod_{i=1}^{n}\Gamma(i/2)$$

とおくとき、

$$\sum_{T\in SL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{L}}=2c_n\det(\mathfrak{L})^{(n+1)/2}\prod_p\alpha_p(T,T).$$

である。

4.3. **一般の符号の場合のゼータ関数の定義.** まえに、とりあえず正定値の場合のゼータ関数の定義を述べたが、概均質ベクトル空間の一般論では、$T\in S_n(\mathbb{Z})$ の符号が $(i,n-i)$ (i 個プラス、$n-i$ 個マイナスの固有値を持つ場合）も考えるのが自然である。$i(n-i)\neq 0$ の場合は、$SO(T,\mathbb{Z})$ は有限群では無いから、$|SO(T,\mathbb{Z})|$ で割るという訳にはいかない。この場合は、適当な測度について、$\mu(T)=vol(SO(T,Z)\backslash SO(T,\mathbb{R}))$ を代わりにとればよい。しかし、たとえば、T が $n=2$. $i=1$ (不定符号２元２次形式）で、かつ $-\det(T)$ が平方数の時は、この体積は有限にならないので、そこをどう修正するかという問題がある。これに対しては新谷 [85], 佐藤文広 [75], 伊吹山・齋藤 [20] II の三通りの解答の与え方があるが、今は略す。(あとで Degeneration for $n=2$ という小節で少し述べる。）一方で $n\geq 3$ の場合でも問題があって、S はいろいろあって、いろいろな S についての和を考えるのだから、結局のところ、全体的にどう統一して測度の定数などをとるのか、というような問題は当然あるわけで、これはたとえば、[20] I あるいは、[31] 第７章 section 3.3 に述べてある通りである。ここでは具体的に [85], [20] の通りに述べる.

個々の $x\in S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z})$ に対し、$\mu(x)$ を定義したい。$GL_n(\mathbb{R})$ の測度を $g=(g_{ij})\in GL_n(\mathbb{R})$ に対し、$dg=\det(g)^{-n}\prod_{i,j}dg_{ij}$, $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{R})$ の測度を $y=(y_{ij})={}^ty$ に対して、$dy=|\det(y)|^{-(n+1)/2}\prod_{1\leq i\leq j\leq n}dy_{ij}$ と定義する。K を $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{R})$ の相対コンパクト集合として、$x\in S_n^{(i,n-i}(\mathbb{R})$ に対して、K_0 を $GL_n^+(\mathbb{R})=\{g\in GL_n(\mathbb{R});\det(g)>0\}$ の元で $g\to gx\,{}^t\in K$ となるものの全体とする。また $\Gamma_x=\{x\in SL_n(\mathbb{Z}):\gamma x\,{}^t\gamma=x\}$ とおく。（一般に無限群である。）Γ_x は Y に作用するが、この作用の基本領域を Y_0 とする。このとき

$$\mu(s)=\int_{Y_0}dg\backslash\int_K|\det(y)|^{-(n+1)/2}dy.$$

と定義する。特に $x\in S_n^{(n,0)}(\mathbb{Z})$ のときは

$$c_n\mu(x) = \frac{1}{|SO(x,\mathbb{Z})|}$$

となる。(本当に具体的な測度という点では [31] の解説の方がわかりやすいかと思うので、興味のある方はそちらを参照されたい。)

いずれにせよ。符号 $(i, n-i)$ なる $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z})$ に関するゼータ関数は

$$\zeta_i(s,L) = c_n \sum_{x \in SL_n(\mathbb{Z})\backslash L\cap S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{R})} \frac{\mu(x)}{\det(x)^s}$$

と定義する。

Minkowski Siegel の Mass formula というのは、定符号でない場合も全く同様に成立する。これは以下のようになる。

Theorem 4.2 (Siegel formula)**.** $\mathfrak{L}$ を $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z},d)$ 内の種とするとき、

$$\sum_{x\in SL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{L}} \mu(x) = 2|d|^{(n+1)/2}\prod_p \alpha_p(x)^{-1}$$

ただし、簡単のため $\alpha_p(x,x) = \alpha_p(x)$ と書いた。定符号の場合は $c_n\mu(x) = 1/|SO(x,Z)|$ に合わせたいので、定義は一般の符号でも c_n を掛けている。

4.4. 定義から直ちに思いつく、ゼータ関数のナイーブな計算法.

4.4.1. 種になるのは何か?*(global vs local).* まず最初に問題になるのは、local にどのような行列を集めると、これが global からくるものになるのか、つまり $S_n(\mathbb{Z},d)$ に含まれる種の全体は何なのかである。

$$S_n(\mathbb{Z}_p,d) = \{x \in S_n(\mathbb{Z}_p); \det(x) = d\}$$

とおくと、$S_n(\mathbb{Z},d)$ に含まれる種全体のなす集合を $S_n(d,\mathbb{Z})/\sim$ と書くとき、これからの写像

$$S_n(\mathbb{Z},d)/\sim \to \prod_p (GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p,d)) \tag{3}$$

が自然に定まり、これは定義により明らかに単射だが、全射では無い。ここで $x \in Sym(\mathbb{Z}_p)$ で $\det(x) \neq 0$ のとき、x の Hasse invariant を次のように定義する。まず x は $GL_n(\mathbb{Q})$ 同値 (i.e. $x \to Ux\,{}^tU$) で対角化可能なことはよく知られている。ここで x が $diag(a_1,\ldots,a_n)$ と同値とするとき、任意の $\mathbb{Q}$ の place $v=\infty$ or prime に対して、

$$\epsilon_v(x) := inv_v(x) = \prod_{1\le i\le j\le n} (a_i,a_j)_v$$

とおく。ここで $(a_i,a_j)_v$ は v でのヒルベルト記号で $a_ix^2 + a_jy^2 = 1$ が $(x.y) \in \mathbb{Q}_v^2$ なる解を持てば $+1$, 持たなければ -1 としている。(ちなみにこれは O'Meara [62] の定義であり、Serre [79] の定義はこれとは

異なっている。）ヒルベルト記号の定義により、Hasse invariant では、あきらかに積公式が成り立ち

$$\prod_v \epsilon_v(x) = \prod_v inv_v(x) = 1$$

である。よって (3) は全射ではない。しかし、この写像の像は決定できる。記号として $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z}, d)$ を、行列式が d, その $\mathbb{R}$ 上の対称行列としての符号が $(i, n-i)$（つまり正の固有値 i 個、負の固有値 $n-i$ 個）の対称行列の集合とする。ここで $x \in S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z}, d)$ ならば、$(1,1)_\infty = (1,-1)_\infty = 1$, $(-1,-1)_\infty = -1$ だから、$\epsilon_\infty(x) = inv_\infty(x) = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ である。

Proposition 4.3. 自然な写像

(4) $S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z}, d)/\sim \ni x \longrightarrow$

$$\{(x_p) \in \prod_{p:prime} (GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p, d)); \prod_p \epsilon_p(x_p) = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}\}$$

は全射である。

上の命題は、要するに $det = d$ となる局所的な対称行列 x_v を（$v = \infty$ をこめて）$\prod_v \epsilon_v(x_v) = \prod_v inv(x_v) = 1$ となるように集めてきたら、これは global から来る、と言っているわけだが、$v = \infty$ での Hasse invariant は $(i, n-i)$ ではなくて、$(-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ にしかよらず $(i, n-i)$ 自身に依っているわけではないという点は、ゼータ関数の個数が見かけ上よりも減っている原因であって、これはなかなか面白い。

Proof. さて、[20] I では簡略な証明を与えているが、やや簡略すぎるように思うので、ここでは読者の便宜のために詳しく証明する。まず、素数での local な $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ 上の同型類は、行列式 d, 次元 n, Hasse invariant $int(x_v)$ のみで決まっている (O'Meara [62]). このような x が局所的に存在するための条件は $n = 1$ ならば必然的に $inv_p(x_p) = (det(x_p), -1)_p$ が条件である。$n = 2$ ならば $-1 \in \det(x)(\mathbb{Q}_p^\times)^2$ のときは, $(\det(x), -1)_v = inv_v(x_v)$ が条件 (つまり $<1> \perp <-1>$ のときである。）それ以外（たとえば $n \geq 3$ ならいつでも）は無条件である ([62] Theorem 63.23)。しかし、以上は今の議論にはあまり関係が無い。問題なのは、局所的に $(x_v) \in \prod_v Sym_n(\mathbb{Q}_v)$ かつ $det(x_v) = d$ を与えたときに, 一体いつ $x \in Sym_n(\mathbb{Q})$ で、$x \sim x_v$ ($GL_n(\mathbb{Q}_v)$ 同値）となる x が存在するかである。これはたとえば O'Meara [62] Theorem 72.1 に解答がある。答は、
(1) $d \in \mathbb{Q}^\times$ があって、すべての place v で $\det(x_v) = d$.
(2) ほとんどすべての v に対して $inv_v(x_v) = 1$.
(3) $\prod_v inv_v(x_v) = 1$.
である。これはつまり与えられた $(x_v) \in \prod_v S_n(\mathbb{Q}_v)$ に対して $\mathbb{Q}$ 上の元 $x \in S_n(\mathbb{Q})$ で, すべての素点 v に対し $\mathbb{Q}_v$ 上 x_v と同値な元が存在するための条件である。ここでわれわれの場合、条件 (2) は自動的に成

り立つ。何故かというと、われわれは $x_p \in S_n(\mathbb{Z}_p, d)$ としているので、実は $p \neq 2$ のときは、x_p は $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ で対角化され、$d \in \mathbb{Z}$ ともしているので、$p \nmid d$ ならば $\epsilon_p(x_p) = 1$ になる。（言い換えると $2d$ と素な素数では $\epsilon_p(x_p) = 1$ である。）また (1), (3) は取りかたの条件であるからそう取っておくことにすれば、関係ない。よって、とにかく global な $S_n(\mathbb{Q})$ の元 x で local に $\mathbb{Q}_v$ 上 x_v と同値になるものがあるわけである。次なる問題は、どういう (x_v) の集合が、ある $x \in S_n(\mathbb{Z})$ とすべての v で $GL_n(\mathbb{Z}_v)$ 同値になるかである。ここで $x_\infty = diag(1_i, -1_{n-i})$ と取っておくことにする。以上により、(4) の右辺の元を (x_v) とすると、前に述べた $\mathbb{Q}$ 上の話より、$y \in S_n^{i,n-i}(\mathbb{Q})$ であって、すべての素数 p についてある $g_p \in GL_n(\mathbb{Q}_p)$ が存在して、$x_p = g_p y\, {}^t g_p$ となる。さて、次に $\mathbb{Z}_p$ 上の同値を見る。p を $y \in S(\mathbb{Z}_p)$ となるような素数とする。もちろん有限個の素数を除き、これは成り立っている。ここで $p \nmid 2d$ とすると、$\det(y) = \det(x_p)$ は p と素であるから、$y, x_p \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ である。このような行列は unimodular という。奇素数 p に対しては unimodular な整数行列は $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 同値で

$$\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

と同値であることが知られている。（[45] Theorem 5.2.4, [31] p.301 命題 7.6). ということは y を x_p は、ほとんどすべての p で $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 同値でもあると言うことである。言い換えると $(g_p) \in GL_n(\mathbb{Q}_{A_f})$ ($\mathbb{Q}_{A_f}$ はアデールの有限部分) としてよい。強近似定理により、$M_n(\mathbb{Q})$ の類数は 1 だから、$(g_p) = (\gamma_p)\gamma, (\gamma_p \in GL_n(\mathbb{Z}_p), \gamma \in GL_n(\mathbb{Q}))$ としてよい。$x = \gamma y\, {}^t\gamma$ とおけば、$x \in S_n(\mathbb{Q})$ だが、$x_p = g_p y\, {}^t g_p = \gamma_p (x)\, {}^t\gamma_p$ である。ここで $\gamma_p \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ より $x \in \cap_p S_n(\mathbb{Z}_p) = S_n(\mathbb{Z})$ である。また y は ∞ で $diag(1_i, -1_{n-i})$ と同値なのだから、もちろん $x \in S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{R})$ であり、よって $SL_n(\mathbb{Z})\backslash S^{(i,n-i)}(\mathbb{Z}, d)$ から $(x_v) \in \prod_v GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p, d)$ with $\prod_v \epsilon_v(x_v) = 1$ への全射もわかる。 □

以上の (4) と Mass formula を用いて、局所的な計算に帰着できたことになる。面倒なので $\alpha_p(x, x) = \alpha_p(x_v)$ および $\epsilon_v(x_v) = inv_v(x_v)$ と書くことにして、局所的な計算というのは、要するに

$$\sum_{x_p \in S_n(\mathbb{Z}_p, d)/\sim} \alpha_p(x_p)^{-1}$$

を計算して、これを $\prod_p \epsilon_v(x_p) = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ となるような各 p について 掛け合わせて、$|d|^s$ でわるということである。

重大な観察

以上から直ちにわかることだが、実は $\zeta_i(s, L)$ は ∞ での Hasse invariant $\epsilon = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ および、d の符号 $\delta = (-1)^{n-i}$ にしかよっていないのである。だから、

$$\zeta_i(s, L) = \zeta(s, L, \delta, \epsilon)$$

とでも書く方が正当である。（実際、[20] ではそのような書き方をした。）さらには $T \in S_n^{(i,n-i)}(\mathbb{Z})$ ならば $-T \in S_n^{(n-i,i)}(\mathbb{Z})$ であるから、

$\zeta_i(s,L)=\zeta_{n-i}(s,L)$ である。だから、概均質ベクトル空間の一般論では $n+1$ 個あるはずのゼータ関数は、実際上は２つか３つしか異なるものはないのである。以上は、概均質ベクトル空間の一般論からはわからないことであるが、一方で、定義からは直接的にわりとすぐわかることなのである。

したがって、関数等式は大幅に簡略化される。これは [20] II に詳しく書いてある。実際上、関数等式はゼータ関数の具体形より、直接証明される。一般論と比較して証明を試みたことはないので、比較したら、何かいいことがあるのかないのか、よくしらない。たとえば、一般論では f という test function がついた関数を考えているので、そのようにすると何か変わったことがでるのかどうかはよく知らない。

4.5. 問題 1：積の条件 $\prod_v \epsilon_v(x_v)=1$ をどうするのか?. これを解決する方法は単純で

$$\frac{1}{2}\Bigg(\prod_p \sum_{x_p\in GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p,d)} \alpha_p(x_p)^{-1}+ (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}\prod_p \sum_{x_p\in S_n(\mathbb{Z}_p,d)/\sim} \epsilon_p(x_p)\alpha_p(x_p)^{-1}\Bigg) \tag{5}$$

をとれば、$\prod_p \epsilon(x_p)=(-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ のところだけ残る。

歴史的に言えば、最初の unknown case である $n=3$ のときは、$GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p,d)$ の分類と、[49] の $n=3$ に対する具体的な Mass formula を用いて、正定値の場合に私が無理矢理計算しきったのが理論の始まりであった (１９９２年１月１６日夜半)。結果は

$$\zeta_3(s,L_3^*)=\frac{2^{2s}}{24}\Big(\zeta(s-1)\zeta(2s-1)-\zeta(s)\zeta(2s-2)\Big)$$

であった。この単純さには驚嘆した。

4.6. 問題２：局所的な同型類 $GL_n(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p,d)$ をどう記述するか.

これは p が奇数ならば同型類は標準的なジョルダン分解と 1 対 1 であることがわかっている。また p が奇数の時は $\alpha_p(x)$ の公式は易しい ([45] または [49]). よってジョルダン分解ごとに直接計算するという手段がとれる。実際に最初はこの場合を一般の次数で計算したわけで、その結果が大変きれいだったので、次に進む気になれた。

しかし、問題は $p=2$ である。$p=2$ のときの $GL_n(\mathbb{Z}_2)$ 同値類の分類はわかっていた（O'Meara [62]). しかしこれは愕然とするぐらい複雑なものだった。

北岡良之さん曰く。あれは分類ではなくて、分類の存在定理にすぎない。

最初はこの分類を用いて計算を試みていたのだが、らちがあかなかった。これに対する解答は、

「種で分類して local density で考えるのをやめていきなり $\det(x_p)=d$

全体で Siegel Minkowski にあたる公式を書く。」と言うものであった。具体的な方針は以下の通りである。

まず $R_\nu = \mathbb{Z}_p/p^\nu\mathbb{Z}_p$ とおく。任意の環 R に対して、

$$GL_n^d(R) = \{g \in GL_n(R); (\det g)^2 d = d\}$$

とする。（たとえば $R = R_\nu$ ならば、d は可逆とは限らないから、$\det(g)^2 = 1$ にできるわけではない。）

ν が十分大ならば

$$GL_n^d(R_\nu)\backslash S_n(R_\nu, d) \cong GL_n^d(\mathbb{Z}_p)\backslash S_n(\mathbb{Z}_p, d)$$

である。R_ν の方で考えると、多少有限集合だから考えやすい点がある。

$n = n_1+\cdots+n_m$ $(n_i \in \mathbb{Z}_{>0})$ を n の partition, $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ を整数列とする。

$S_n^0(R_\nu, d, \{n_i\}, \{t_i\})$ を $S_n(R_\nu, d)$ の部分集合で次の形の元からなるもの全体とする。

$$x = \begin{pmatrix} p^{t_1}x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{t_2}x_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p^{t_m}x_m \end{pmatrix}$$

の形で、各 $x_i \in S_{n_i}(R_\nu)$ が unimodular, かつ $det(x) = d$ であるもの。

また

$$S_n(R_\nu, d, \{n_i\}, \{t_i\})$$

を $S_n^0(R_\nu, d, \{n_i\}, \{t_i\})$ の元と $GL_n(R_\nu)$ 同値な $S_n(R_\nu, d)$ の部分集合全体とする。（もちろんジョルダン分解に関する定理により、任意の $x \in S_n(R_\nu, d)$ は $S_n^0(R_\nu, d, \{n_i\}, \{t_i\})$ のどれかの元と $GL_n(R_\nu)$ 同値になる。）

4.7. **Igusa local zeta.** 実は、後から気がついたのだが、われわれの local なゼータ関数は、井草が研究していたいわゆる Igusa local zeta と関係がある。単純な場合で言えば、Igusa local zeta というのは、K を local field, R を K の整数環とするとき、多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に対して

$$\int_{R^n} |f(x_1, \ldots, x_n)|^s dx_1 \cdots dx_n$$

と定義される。我々の計算はこれよりは詳細なことをやっている。実際、たとえば $S_n(\mathbb{Q}_p)$ に関する Igusa local zeta はわれわれの結果から計算できる。またわれわれはHasse symbol 付きの local zeta を必要としているという点からも既存の Igusa local zeta の計算よりは細かい。(Igusa では character つきの計算というのは、やられていない。）詳しく述べるのは面倒なので、ここでは [34] を引用するにとどめておく。いくつかの単純な古典領域のゼータ関数（たとえは４元数的エルミート上半空間の次元に関係するゼータなど）は、Igusa zeta から単純に計算されるはずである。しかし、できそうなことがすべて論文として発表されているわけではない。私自身は、どうも新しいことを発見すると言う方向に目が向きがちで、この数学に限らず、やったことの後

始末をきっちりしなかったきらいがあるのは反省点である。$\mathbb{Q}$ を一般の代数体上に変えた話とか、２次形式をエルミート形式に変えるなどの、いくつかの具体的な一般化等々の、関連する齋藤裕さんの業績については、[66], [67], [68], [69] などを参照されたい。このあたりのことをちゃんと後始末するというのが、私と齋藤さんの気質の違いであろうか。齋藤さんは現職のまま亡くなったが、また聞きであるが、「数学上の仕事はちゃんとやったので、思い残すことは何もない」、と述べていたそうである。これはどうも私には持ちえない感想に思われる。

4.7.1. キーポイント（１）. 記号 ω を $\omega=\iota$ (恒等写像 1) または ϵ_v としよう。

$$\lambda_\nu(d,\omega) := p^{(n(n-1)\nu/2} \sum_{x\in GL_n^d(R_\nu)\backslash S_n(R_\nu,d)} \frac{\omega(x)}{|O(x)|}$$

とおくと、これは結局、$S_n(R_\nu,d)$ 上での ω の和に帰着する。つまり

$$\begin{aligned}\lambda_\nu(d,\omega) &= \frac{2}{|GL_n^d(R_\nu)|} p^{(n(n-1)\nu/2} \sum_{x\in S_n(R_\nu,d)} \omega(x) \\ &= \frac{2^{-\delta_{2,p}} p^{v(d)+(n(n-1)\nu/2}}{|SL_n(R_\nu)|} \sum_{x\in S_n(R_\nu,d)} \omega(x)\end{aligned}$$

となる。ここで $S_n(R_\nu,d)$ は $S_n(R_\nu,d,\{n_i\},\{t_i\})$ の和に分解するわけである。ここですでに何と何が同値かと言う話は消滅している。

4.7.2. キーポイント（２）. $S_n(R_\nu,d,\{n_i\},\{t_i\})$ での和を $S_n^0(R_\nu,d,\{n_i\},\{t_i\})$ での和に帰着するには次の補題を用いる。

Lemma 4.4. 有限集合 S に有限群 G が作用しており、ω を G の作用で不変な S 上の関数とする。S の部分集合 S_0 が S の元の任意の G 軌道と交点があるとする。また $s_0\in S_0$ に対して、

$$H_{s_0} = \{g\in G : gx_0\in S_0\}$$

と定義する。ここで、もし $|H_{s_0}|$ が $s_0\in S_0$ の元の取り方によらないならば、

$$\frac{1}{|S|}\sum_{x\in S}\omega(x) = \frac{1}{|S_0|}\sum_{x\in S_0}\omega(x)$$

となる。

この補題において $S=S_n(R_\nu,d,\{n_i\},\{t_i\})$, $S_0=S_n^0(R_\nu,d,\{n_i\},\{t_i\})$, $G=GL_n^d(R_\nu)$ とすると、仮定が成り立つことがわかる。この証明は、実際に $|H_{s_0}|$ を m に関する帰納法で行列計算することにより求めることによる。(m は分割の個数だった。)

4.7.3. キーポイント（３）.

$$\lambda_\nu(d,\omega,\{n_i\},\{t_i\}) = 2^{-\delta_{2,p}} p^{-v(d)+n(n-1)\nu/2} |SL_n(R_\nu)|^{-1} \sum_{x\in S_n(R_\nu,d,n_i,t_i)} \omega(x)$$

$(v(d)=\sum_{i=1}^m n_i t_i)$ として、これをキーポイント (2) の手法で具体的に計算しきってしまう。p 奇数と $p=2$ では、このようにしてもやはり難しさがかなり違う。Partition $\{n_i\}$ において、すべての n_i が偶数の時 $\{n_i\}$ を even, ひとつでも odd な n_i があるとき $\{n_i\}$ を odd という。これらにわけて計算する必要が生じる。たぶん一番易しい場合は次の場合である。

結果の例：$\omega=\iota$, $t=\sum_{i=1}^m n_i t_i$. $d=p^t d_0$. $(d_0\in\mathbb{R}_{\nu-t}^\times)$. で、かつ p が奇数の時、

$$\lambda(d,\iota,\{n_i\},\{t_i\}) = p^{Q(\{n_i\},\{t_i\})} \prod_{i=1}^m (p^{-2})^{-1}_{[n_i/2]}$$
$$\times \begin{cases} 1 & \text{if } \{n_i\} \text{ is odd} \\ 1+((-1)^{n/2}d_0,p)p^{-n/2} & \text{if } \{n_i\} \text{ is even.} \end{cases}$$

ただし、

$$Q(\{n_i\},\{t_i\}) = -\sum_{i=1}^m \frac{n_i(n_i+1)}{2} t_i - \sum_{1\le j<i\le m} n_i n_j t_j$$

また

$$(p^{-2})_n = \prod_{i=1}^n (1-p^{-2i}) \qquad n=0 \text{ ならば } 1$$

とおいた。これ以外に p が odd で $\omega=\epsilon_v$, $p=2$ で $\omega=\iota$ or ϵ_v で $\{n_i\}$ が odd と even といろいろ場合分けして計算する。結果は [20] I に書いてあるので, ここでは省略する。

4.8. **問題３：足し算のまとめ方.**

場合分けした Local な計算の足し算を、どうやって綺麗なものに変えるか？我々が本当にほしいのは、

$$Z_n(u,\omega,d_0) = \sum_{\{n_i\}} \sum_{0\le t_1<t_2<\cdots<t_m} \lambda'(p^t d_0,\omega,\{n_i\},\{t_i\}) p^{(n(n+1)/2)t} u^t$$

である。ここで $t=\sum_i n_i t_i$, また λ' というのは, $\omega=\epsilon_p$ のときに λ を少しだけ modify するのであるが計算にとってはあまり本質的ではないので、定義は省略する。この級数は、大雑把に言って

$$\frac{1}{(1-p^{-2})(1-p^{-4})\cdots(1-p^{-n_i})}$$

などにいろいろな係数を掛けて和を取るという、かなりゴタゴタした量である。しかし、実例としては、たとえば n が奇数の時には、和を

取った結果は大変綺麗で

$$Z_n(u,t,d_0) = 2^{-\delta_{2,p}} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (1-p^{-2i})^{-1}$$
$$\times (1-p^{(n-1)/2}u)^{-1} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (1-p^{2i-1}u^2)$$

となる。このような和が綺麗になる保証は、一体どこから来るのか？

この解答は、q series の (q analogue 風の）公式にある。q 級数の理論より、次の定義をする。

$$(U,q)_m; = \prod_{i=1}^{m}(1-q^{i-1}U) \quad \text{ただし } m=0 \text{ なら } 1 \text{ とする.}$$

$$(q)_m := (q,q)_m = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m), \qquad \binom{m}{r}_q = \frac{(q)_m}{(q)_r(q)_{m-r}}$$

q アナローグにおいて $1-q^n$ （ないしは $(1-q^n)/(1-q)$) は $n = \lim_{q\to 1}(1-q^n)/(1-q)$ の代わりであるから、$(q)_m$ は $m!$ の代わりである。このとき

Lemma 4.5.

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r}_q U^{m-r}(U,q)_r = 1.$$

ここで $(U,q)_r$ は $(1-x)^r$ の代わりであって、この補題の式は

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} x^{m-r}(1-x)^r = 1$$

の代わりである。

4.9. **結論の例.** 前と同様 $\delta = (-1)^{n-i}$, $\epsilon = (-1)^{(n-i)(n-i+1)/2}$ とおく。

Theorem 4.6. $n \geq 3$ *odd* のとき、

$$\zeta(s, L_n^*, \delta, \epsilon) = b_n 2^{(n-1)s}\Bigg(\zeta(s - \frac{n-1}{2}) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \zeta(2s-2i+1)$$
$$+ \epsilon\delta^{(n+1)/2}(-1)^{(n^2-1)/8}\zeta(s) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \zeta(2s-2i)\Bigg)$$

$n \geq 4$, *even* のとき、

$$\zeta(s, L_n^*, \delta, \epsilon) = b_n 2^{ns}\Bigg((-1)^{[n/4]} D_n^*(s,\delta) \prod_{i=1}^{n/2-1} \zeta(2s-2i)$$
$$+ \epsilon\delta_n(-1)^{n(n+2)/8}\frac{2|B'_{n/2}|}{n} \prod_{i=1}^{n/2} \zeta(2s-2i+1)\Bigg).$$

ただし

$$D_n^*(s,\delta) = const \sum_{(-1)^{n/2}\delta D_K>0} |d_K|^{(n-1)/2-s} L(\frac{n}{2},\chi_K)\frac{\zeta(2s)\zeta(2s-n+1)}{L(2s-\frac{n}{2}+1,\chi_K)}$$

と定義している。const はもちろんある具体的な定数であるが、本質的ではないので、知りたいかたは論文 [20]I, II を参照されたい。

4.10. **問題４：出てきた結果の解釈.**

出てきた計算結果は一体何なのかを解釈する。これは n が奇数ならば、リーマンゼータ関数しか出てこないから, とくに言うべきことはない。しかし n が偶数の時は、計算で直接的に出てくる公式は、大雑把に言って　$\delta = (-1)^{n-i}$ で $n \geq 3$ とするとき、

$$\sum_{(-1)^{n/2}\delta d_K>0} |d_K|^{(n-1)/2} L(\frac{n}{2},\chi_K)\frac{\zeta(2s)\zeta(2s-n+1)}{L(2s-\frac{n}{2}+1,\chi_K)}|d_K|^{-s}$$

なのであって、これは一体何だと言う話になる。

答：これは半整数ウェイトの Cohen 型アイゼンシュタイン級数のメリン変換である。($\delta = 1$ ならば正則、また $\delta = -1$ ならば実解析的アイゼンシュタイン級数）

この結果を発表した頃、多くの人から、なぜ Cohen 型アイゼンシュタイン級数が出てくることがわかったのか、という説明がないことが不満だという声がいろいろあった。齋藤さんはこう言われると「伊吹山に聞いてくれ」と言っていた。私としては、計算する前からこれが出てくると信じていた。その理由は $n = 2$ のときの新谷の正定値のゼータについての結果は、$k = 3/2$ の実解析的アイゼンシュタイン級数の一部であったからだ。$k = 3/2$ だとアイゼンシュタイン級数は収束しないので、実解析的になるが、$k \geq 5/2$ では正則アイゼンシュタイン級数はまさにこの形をしている。その「直接的な」定義は, Cohen [8] にある。$r \geq 2$ を整数として、ウェイトが $r + 1/2$ の Cohen 型のアイゼンシュタイン級数を $E_{r+1/2}$ とする。([8] p. 273. 正確な定義は関数等式のところで述べる。）また、1 以上の整数 r, N に対して、次のような記号を定義する。ここで $(-1)^r N \equiv 0$ or $1 \bmod 4$ のとき、$(-1)^f N = Df^2$ となる 2 次体の基本判別式 D または $D = 1$ がある。この場合

$$H(r,N) = L(1-r,\chi_D)\sum_{d|f}\mu(d)\chi_D(d)d^{r-1}\sigma_{2r-1}(f/d)$$

と定義する。ここで χ_D は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})/\mathbb{Q}$ に対応するディリクレ指標($D = 1$ ならば単位指標)、μ はメビウス関数、$\sigma_{2r-1}(n) = \sum_{m|n} m^{2r-1}$ である。また $H(r,0) = \zeta(1-2r) = -B_{2r}/(2r)$ (ベルヌーイ数）, N が以上以外の時は $H(r,N) = 0$ とおく。このとき、H_1 を複素上半平面として、

$$\mathcal{H}_{r+1/2} = \sum_{N\geq 0} H(r,N)q^N \qquad q = e^{2\pi i\tau}, \tau \in H_1$$

とおくと、$r \geq 2$ で、これは $\Gamma_0(4)$ に関するウェイトが $r+1/2$ （半整数ウェイト）の正則アイゼンシュタイン級数で、いわゆる Kohnen plus space に属している。ここで $D_n^*(s,1)$ は $\mathcal{H}_{(n+1)/2}$ の普通の意味でのメリン変換と定数倍しか違わない。

実は $r=1$ とおくと、この係数から決まるディリクレ級数は、新谷の論文 [85] の $n=2$ の場合に登場する級数の一部である。しかし $r=1$ では、ウェイト 3/2 のアイゼンシュタイン級数は、このままの級数としては収束しないので、正則アイゼンシュタイン級数の係数になるわけではない。（実は実解析的アイゼンシュタイン級数から出てくる。）しかし、$r=1$ $(3/2=(2+1)/2)$ で出てくる級数が一般の偶数次数 n に対して $r+1/2=(n+1)/2$ でも計算結果に出てくると期待するのは当然のことであり、私はこの級数がでてくると最初から確信していた。（これは単純な直感というだけではなく、Mass formula ともよく符合していたからである。）結果はその通りであった。

しかし、われわれはこれ以外に $D_n^*(s.-1)$ というのがある。これは何であろうか？実はこれは実解析的アイゼンシュタイン級数のメリン変換の一部なのだが、これは後で述べよう。

未解決問題 1. 一般の概均質のゼータで、計算結果の解釈はいつでも問題になり得る。計算して具体的に書ければそれで終わりというわけではない。他の概均質ベクトル空間の場合についても、結果の解釈をいろいろ述べよ。

4.11. **実解析的アイゼンシュタイン級数と関数等式.** 半整数ウェイトの１変数実解析的アイゼンシュタイン級数を定義して、それと概均質ベクトル空間の関数等式との関係、およびそれを利用した２重ディリクレ級数の関数等式の証明について述べよう。これらは [20]II (2012) に書いてあることだが、大部分は MPI のプレプリントシリーズに 1997 年頃に掲載してあったものである。新谷の２重ディリクレ級数の関数等式の別証については、投稿後にレフェリーからの質問に答える形で付け加えたものであり、MPI のプレプリントには記載していない。（レフェリーが誰であったかは不明である。）

まず半整数ウェイトの保型因子を定義する。

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n^2 z) \qquad e(z) = e^{2\pi i z}$$

とおき、$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 4c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ に対して

$$j(\gamma, z) = \theta(\gamma z)/\theta(z)$$

とおく。これは具体的に言えば

$$j(\gamma, z) = \epsilon_d^{-1}\left(\frac{4c}{d}\right)(cz+d)^{1/2}$$

ただし、$(c\tau+d)^\alpha = e^{\alpha\log(c\tau+d)}$, $-\pi < \log(c\tau+d) < \pi$ としている。また $p \equiv 1 \bmod 4$ であるか $3 \bmod 4$ であるかに応じて $\epsilon_d = 1$ または i と定義している。$\left(\frac{4c}{d}\right)$ は平方剰余記号であるが、その正確な定義は [81]

p.442 にある。ここで k を奇数と仮定しておきウェイト $-k/2$ の $\Gamma_0(4)$ に関する実解析的アイゼンシュタイン級数 $E(k,\sigma,z)$ を

$$E(k,\sigma,z) = y^{\sigma/2} \sum_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(4)} j(\gamma,z)^{k/2}|j(\gamma,z)|^{-\sigma}$$

と定義する。このような定義を最初に述べたのは、正則なときは [81], 実解析的な時は [83] であろうか。ところで Cohen [8] 1975 は正則なもので（$\sigma = 0, k < -4$ という仮定下で）$\Gamma_0(4)$ の半整数ウェイトの保型形式ではあるが、レベル 1 とも見なせるような部分空間に属するアイゼンシュタイン級数を定義して、その係数が L 関数の負での値になるようなものを考えた（まえにのべた $\mathcal{H}_r$ である。）これは後に Kohnen [50] 1980 で Kohnen plus space と呼ばれるようになった空間の元である。Cohen のアイゼンシュタイン級数の定義は Kohnen 1980 よりも前の結果であり、おそらく Kohnen の定義の動機にもなっていたのではないかと推察される。それはともかく、われわれも当然レベル 1 のものがほしいので Cohen を見習って、次のように定義する。

$$E^*(k,\sigma,z) = E(k,\sigma,-\frac{1}{4z})(-2iz)^{k/2}$$
$$F(k,\sigma,z) = E(k,\sigma,z) + 2^{k/2-\sigma}(e(k/8)+e(-k/8))E^*(k,\sigma,z)$$

ただし、$e(\pm k/8) := e^{\pm 2\pi i k/8}$ としている。この $F(k,\sigma,z)$ がわれわれに必要なアイゼンシュタイン級数である。この級数はこのままでは $Re(\sigma) - k/2 > 2$ のときは絶対収束するが、それ以外の場合については、変数 σ に関する解析接続などについて [83] などに説明されている。また、これらの級数は $z = x + iy$ とするとき、$e(nx)$ $(n \in \mathbb{Z})$ の級数としてフーリエ展開される。正則なものは $e(nz)$ で展開されるが、実解析的な場合は $e(nx)$ の n が正負の両方があるところが違っている。またその係数は y の関数だが、ある種の Wittacker 関数の定数倍である。このフーリエ展開の様子は [81], [94] などでよく調べられている。実際には、彼らの計算では、少し足りない部分もあったので、[20] II で詳しく計算を追加しておいた。

さて、関数等式に関して、アウトラインを大雑把に説明すると次のようになる。

(1) $F(\sigma,k,z)$ は z についての保型形式であるから、普通のヘッケの理論により、$F(\sigma,k,iy)$ から定数項を引いたもののメリン変換と、$F(\sigma,k,i/y)$ から定数項を引いたもののメリン変換との間に関数等式があるのは通常と全く同じである。これはメリン変換の変数 s と実解析的アイゼンシュタイン級数の定義にあらわれるパラメーター σ を両方含んでいるので、最初から 2 重級数である。これらを適当に解釈すると新谷の 2 重ディリクレ級数の関数等式の別証が得られる。（実際にはいろいろ複雑なことがあるのだが、[20] II の p. 291 Proposition 3.7 に記載してあるとおりである。ちなみに、**新谷の論文 [85] の序文の定義にはミスプリがある。[85] p. 35 の定義が正しい定義である。**）

(2) $F(\sigma,k,-(4z)^{-1})$ は、これが Kohnen plus space に属することによりそのフーリエ展開が $F(\sigma,k,z)$ のフーリエ係数を使って具体的に書け

る。より具体的に書くと、その係数は、適当な (σ, k) に対して $D_n(s, \pm 1)$ の線形結合を含んでいる。
(3) もちろんフーリエ係数は Wittaker function (合流型超幾何関数) を含んでいるから、メリン変換は一筋縄ではいかない、ある積分 $I(s, (\sigma - k)/2, \sigma/2)$ を含んでいる。しかし $\sigma = 0$, $k = -n-1$, または $\sigma = 2$, $k = -n+3$ $(n \geq 4)$ とすると、この積分はうまくまとめると Γ 関数などで具体的にかける。
(4) 大部分のフーリエ係数は収束し本質的に $\mu(x)/|\det(x)|^s$ から来ているが、σ と k が特殊な場合には、、$\mu(x) = \infty$ となるところでは、発散していることがある。このばあい、 σ を特殊な値にとるかわりに、関数等式の両辺を $\sigma = 2$ で Laurent 展開して、その Laurent 展開のそれぞれの項を比較することで s に関するディリクレ級数の関数等式を得ることができる。$\sigma = 2$ での Laurent 展開の定数項の各項をみると、大部分は $\mu(x)/|\det(x)|^s$ になるが、このようにならない項が残っている。この残りが、ゼータ関数を定義するときの補正項であって、これをゼータの定義に入れてしまえば、新しい関数等式が得られる。この補正は結果的に新谷の定義を同じである。

以上がアウトラインであるが、実際の計算はなかなか大変である。もう少し詳しく書いてみる。任意の H_1 上の関数 $f(z)$ について

$$f|U_4 = \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3} f\Big(\frac{z+\nu}{4}\Big)$$

とおく。

$$g(z) = y^{-\sigma/2}F(k, \sigma, z)$$
$$h(z) = (y^{-\sigma/2}F(k, \sigma, z))|U_4$$

とおく。ここで

$$g(z) = \sum_{d=-\infty}^{\infty} c_d(y)e(dx)$$

と書くと、

$$h(z) = \sum_{d=-\infty}^{\infty} c_d(y/4)e(dx)$$

となる。ここで $G(y) = g(iy)$, $H(y) = h(iy)$ とおいて、$G(1/4y) = (-1)^{(k^2-1)/8}\sqrt{2}y^{\sigma-k/2}H(y)$ がわかる。この等式はメリン変換の関数等式の根拠になる。さて、普通のヘッケの関数等式の証明でよくやるように、定数項は邪魔な部分だから、

$$\Phi_{\sigma,k}(s) = \int_0^{\infty}(G(y) - c_0(y))y^{s-1}dy$$

$$\Psi_{\sigma,k}(s) = \int_0^{\infty}(H(y) - c_0(y/4))y^{s-1}dy$$

とおく。まずメリン変換の関数等式に関する普通のヘッケの論法で次が容易にわかる。

Proposition 4.7 ([20] Proposition 3.2)**.**

$$\Phi_{\sigma,k}(\sigma - \frac{k}{2} - s) = 2^{2s-2\sigma+k+1/2}(-1)^{(k^2-1)/8}\Psi_{\sigma,k}(s).$$

さらに d_K を 2 次体の基本判別式または 1、 として次のように記号を定める。

$$Z^*(k,\sigma,s,d_K) = |d_K|^{\sigma-k/2-1-s}\frac{L(\sigma-(k+1)/2,\chi_K)\zeta(2s)\zeta(2s-2\sigma+k+2)}{\zeta(2\sigma-k-1)L(2s-\sigma+(k+3)/2,\chi_K)}.$$

これを $Z^*(k,\sigma,s,d_K) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ と表すとき、

$$Z(k,\sigma,s,d_K) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(4n)}{n^s}$$

とおく。また定数 $C_{\sigma,k}$ を

$$C_{k,\sigma} = (-1)^{(k^2-1)/8}\frac{2^{k/2-\sigma+3/2+\sigma-k/2}}{\Gamma((\sigma-k)/2)\Gamma(\sigma/2)}$$

で定義する。また Whittaker function のメリン変換を表すために α, $\beta \in \mathbb{C}$ について、次の積分を定義する。

$$I(s,\alpha,\beta) = \int_0^{\infty}\frac{(1+u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}}{(1+2u)^s}du.$$

ただし、この積分表示で絶対収束するのは、$Re(\beta) > 0$, $Re(s) > Re(\alpha) + Re(\beta) - 1$ のときであるが、一般にこれは Γ 関数の積と超幾何級数の積でかけ、α, β がなんであっても意味を持つ。以上記号の準備の元で、つぎがわかる。

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma,k}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)C_{\sigma,k}\Bigg(&I(s,\frac{\sigma-k}{2},\frac{\sigma}{2})\sum_{(-1)^{k+1/2\cdot d_K}>0}Z^*(k,\sigma,s,d_K)\\ &+ I(s,\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma-k}{2})\sum_{(-1)^{(k+1)/2}d_K<0}Z^*(k,\sigma,s,d_K),\Bigg)\\ \Psi_{\sigma,k}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)C_{\sigma,k}\Bigg(&I(s,\frac{\sigma-k}{2},\frac{\sigma}{2})\sum_{(-1)^{(k+1)/2}d_K>0}Z(k,\sigma,s,d_K)\\ &+ I(s,\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma-k}{2})\sum_{(-1)^{(k+1)/2}d_K<0}Z(k,\sigma,s,d_k)\Bigg)\end{aligned}$$

となる。これにより、$I(s,*,*)$ の部分さえ、うまく解釈できるならば、$Z(k,\sigma,s,d_K)$, $Z^*(k,\sigma,s,d_k)$ の和の間の関数等式がでるわけである。この部分は、定義から明らかなように、$k-2\sigma$ にしかよらない。（つま

り k と σ に別々によっているわけではない。）しかし、$I(s,*,*)$ の部分は、もちろん σ, k によっている。

$$c'_n = (-1)^{n(n+2)8+[n/4]}\pi^{n+1/2} \times \Gamma(\frac{n+1}{2})^{-1/2}\Gamma(\frac{n}{2})^{-1}\zeta(n)^{-1}$$

とおく。積分の変換公式などをよく考えると

Lemma 4.8. *(1)* $I(s, \frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma-k}{2})$ は $\sigma = 0$ で正則であり、よって
$\Gamma(\sigma/2)^{-1}I(s, \frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma-k}{2})$ は $\sigma = 0$ で 0 である。
(2) $\Gamma(\sigma/2)^{-1}I(s, \frac{\sigma-k}{2}, \frac{\sigma}{2})$ は $\sigma = 0$ で 1 になる。

これらより、n が偶数の時 $D_n(s,\delta)$, $D_n^*(s,\delta)$ との関係は次のようになる。

$$\Phi_{0,-n-1}(s) = c'_n(2\pi)^{-s}\Gamma(s)D_n^*(s,1),$$
$$\Psi_{0,-n-1}(s) = c'_n(2\pi)^{-s}\Gamma(s)D_n(s,1).$$

一方で、$(\sigma,k) = (2,-n+3)$ ととれば

$$\Phi_{2,-n+3}(s) = c'_n(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\left(D_n^*(s,1)I(s,\frac{n-1}{2},1) + D_n^*(s,-1)I(s,1,\frac{n-1}{2})\right)$$
$$\Psi_{2,-n+3}(s) = c'_n(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\left(D_n(s,1)I(s,\frac{n-1}{2},1) + D_n(s,-1)I(s,1,\frac{n-1}{2})\right).$$

以上より、$I(s,*,*)$ の関数の性質をよく調べると、関数等式の一部を片側に寄せることができて、次を得る。

Proposition 4.9 ([20] II Prop 3.3)**.** n が $n \geq 4$ となる偶数ならば、

$$D_n^*(\frac{n+1}{2} - s, 1) = (-1)^{n(n-2)/8}2^{-n/2}\pi^{-2s+(n-1)/2} \times \Gamma(s)\Gamma(s-\frac{n-1}{2})\cos(\pi s)D_n(s,1)$$
$$D_n^*(\frac{n+1}{2} - s, -1) = 2^{-n/2}(-1)^{n(n+2)/8+1}\pi^{-2s+(n-1)/2} \times ((\sin\pi s)D_n(s,-1) + (-1)^{n/2+1}D_n(s,1))$$

前半の式については Sturm [94] も参照されたい。フーリエ展開の 2 巾以外の計算は [81], [82], [94] にも書いてあるが、彼らには plus space という考え方がなく、この点で 2 巾の部分は書いていないので、厳密に計算して補う必要があった。

4.12. **新谷の２重ディリクレ級数.** 次の、新谷の導入した、２変数のディリクレ級数を考える。これらの関数等式は [85] にあるが、これの別証明が上記の考察から自然に得られることを、一応解説しておく。整数

m, n について、$A(m,n)$ で $x^2 \equiv n \bmod m$ となる $x \bmod m$ の個数を表すとする。次のようにおく。

$$\xi_i(s_1,s_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A(4m,(-1)^{i-1})m^{-s_1}n^{-s_2}$$
$$\xi_i^*(s_1,s_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A(m,(-1)^{i-1})m^{-s_1}(4n)^{-s_2}.$$

さらに

$$\eta_i^*(\sigma,s) = \sum_{(-1)^{i-1}d_K>0} Z^*(k+\sigma+\frac{k+1}{2},s,d_K)$$
$$\eta_i(\sigma,s) = \sum_{(-1)^{i-1}d_K>0} Z(k,\sigma+\frac{k+1}{2},s,d_K)$$

とおく。注意として、定義により、この右辺は k によらないことがわかる。実はここで

$$\eta_i^*(\sigma,s) = \zeta(\sigma)^{-1}\xi_i(\sigma,s+\frac{1}{2}-\sigma)$$
$$\eta_i(\sigma,s) = 2^{2s}\zeta(\sigma)^{-1}\xi_i^*(\sigma,s+\frac{1}{2}-\sigma)$$

であることがわかる。ここで　$\Phi_{\sigma,k}$, $\Psi_{\sigma,k}$ の関数等式より次の関数等式がわかる。

Proposition 4.10 ([20] II Proposition 3.7)**.**

$$\begin{pmatrix}\eta_1^*(\sigma,\sigma+\frac{1}{2}-s)\\ \eta_2^*(\sigma,\sigma+\frac{1}{2}-s)\end{pmatrix} = \frac{\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2}-\sigma)}{2^{\sigma}\pi^{2s-\sigma+1/2}}M(s)\begin{pmatrix}\eta_1(\sigma,s)\\ \eta_2(\sigma,s)\end{pmatrix}$$

ただし、

$$M(s) = \begin{pmatrix}\cos\pi(s-\frac{\sigma}{2}) & \sin(\frac{\pi\sigma}{2})\\ \cos\frac{\pi\sigma}{2} & -\sin\pi(s-\frac{\sigma}{2})\end{pmatrix}.$$

以上の証明の根拠はメリン変換にすぎないので、（ゼータ関数のベクトルの間の）関数等式はひとつしか得られない。より詳しい関数等式については、都築氏の講演報告を参照されたい。

4.13. **Degeneration for** $n=2$**.** 以上の記号の元で、$D_2^*(s,1)$ と $D_2(s,1)$ の間の関数等式はやさしいが、$D_2^*(s,-1)$. $D_2(s,-1)$ を込めた関数等式は非常に面倒である。まず易しい方から結論だけ述べると次のようになる。

Proposition 4.11 ([20] II p.287 Proposition 3.4)**.**

$$D_2^*(\frac{3}{2}-s,1) = 2^{-1}\pi^{1/2-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-\frac{1}{2})\big(\cos(\pi s)D_2(s,1)-\zeta(2s-1)\big)$$

ただし、$D_2^*(s,1)$ と $D_2(s,1)$ はそれぞれ、$s=1$, $3/2$ 以外では正則である。（極の留数も具体的にわかる。）

これは [87], [85] にも証明がある。

しかし $D_2^*(s,-1)$, $D_2(s,-1)$ のときは、そうはいかない。この場合に関数等式を最初に示したのは [85] であり、以下はその別証である。

$\Phi_{\sigma,1}(s)$ と $\Psi_{\sigma,1}(s)$ を考えると、これらの "Main term" には新谷の定義した関数の一部

$$\xi_+^M(s) = \zeta(2s)\sum_{d=1}^{\infty} h(d)\log(\epsilon_d)d^{-s}$$

$$\xi_+^{*,M} = \zeta(2s)\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{h(4d)\log(\epsilon_{4d})}{(4d)^s} + 2^{-2s}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{h(4d+1)\log(\epsilon_{4d+1})}{(4d+1)^s}\right)$$

$$\xi_-(s) = 2\zeta(2s)\sum_{d=1}^{\infty} h(-d)w_{-d}^{-1}d^{-s}$$

$$\xi_-^*(s) = 2\zeta(2s)\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{h(-4d)}{w_{-4d}(4d)^{-s}} + 2^{-2}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{h(-4d+1)}{w_{-4d+1}(4d-1)^{-s}}\right)$$

が現れる。これは概均質ゼータの $\mu(x)$ が有限になるところである。

一方で $\Phi_{\sigma,1}(\sigma-s-\frac{1}{2})$ と $\Psi_{\sigma,1}(s)$ は σ の関数として有理型であるが、これを $\sigma=2$ でローラン展開すると、$\sigma=2$ で一位の極をもち、大雑把に言って、両方とも

$$A(\sigma,s) + B(\sigma,s)\zeta(\sigma-1)$$

のような形をしている。ここで $A(\sigma,s)$ と $B(\sigma,s)$ はともに $\sigma=2$ で正則で、$\zeta(\sigma-1)$ はもちろん $\sigma=2$ で極をもつ。Φ と Ψ の関数等式を書いて、両辺を $\sigma=2$ でローラン展開すると、$(\sigma-2)^{-1}$ の係数からはリーマンゼータで書ける部分がでて、左右両辺を比較すると一致することが容易にわかるから、何も新しいことはでない。しかし $\sigma=2$ でのローラン展開の定数項をとると、これは非常に複雑であり、$A(2,s)$ と 「$B(\sigma,s)$ の $\sigma=2$ での微分」などがあらわれる。A の部分は概ね $\mu(x)<\infty$ となる x からの寄与だが、残りの寄与は複雑である。この複雑な項が、ゼータ関数の定義の補正項であり、実際に計算してみると、新谷が与えた補正と完全に一致する。ローラン展開の各項は、s について関数等式が成立するのは全く当たり前である。

新谷は、アイゼンシュタイン級数のようなよいガイドなしにむりやりゼータ関数の補正と関数等式を発見したのであるから、大変だっただろうと思う。のちに佐藤文広は（[20] II より以前に) 概均質ベクトル空間の一般論から、非常に自然な 2 変数のディリクレ級数を考えて、別証明を与えている。彼の証明と我々の証明は、少なくとも発想、手段などかなり異なっていると思われる。

我々の証明はアイゼンシュタイン級数のメリン変換の関数等式があるということから直ちに何らかの関数等式があることは保証されていると言う点で、計算は大変でも、目標に対する安心感がある。しかし、以上の我々の証明の計算は非常に複雑で、これぞ「ハードアナリシス」という感じの面白い計算のオンパレードで、目標に確信が持てなけれ

ば続ける気になれない計算であった。興味がある方は [20] II の section 3, 4, 5 を参照してください。

未解決問題 2. 上の論法でいけば、$(\sigma-2)$ のローラン展開の係数はいつでも関数等式を満たすのだから、たとえば $e\geq 1$ のときの $(\sigma-2)^e$ の係数について、あたらしい関数等式が書けるはずである。これは何を意味するのだろうか？何か意味があるのだろうか？

4.14. **ゼータ関数の特殊値.**

さて、ジーゲル保型形式の次元公式には、以上で登場した

$$\zeta(s,L_n^*,1,1)=\zeta(s,L_n^{*,+})$$

の $s=1-m$ (m は 1 以上の整数）での値が現れる。これは一体いくつだろうか。

とりあえず $n\geq 3$ の場合を考えると、まず n が奇数ならば、リーマンゼータ関数しか現れないのだから、これの特殊値は全部ベルヌーイ数で書ける。一方、$n\geq 4$ で n が偶数の場合は、わからないところは $D_n^*(s,1)$ が出ているところである。しかし、$D_n^*(s,1)$ はウェイト $(n+1)/2$ の正則保型形式のメリン変換だから、Hecke の普通の論法より、$s=0,(n+1)/2$ 以外では s について正則である。しかるに $D_n^*(s,1)$ には

$$A_n(s)=\prod_{i=1}^{n/2-1}\zeta(2s-2i)$$

がかかっており、$n\geq 4$ としているから、$\zeta(2s-2)$ が $A_n(s)$ には必ず入っている。これは $s=1-m$ では $\zeta(-2m)=0$ であり、よってこの部分の寄与はゼロになるから $D_n^*(1-m,1)$ の値については気にしなくて良い。一方で $n=1$ とすれば、ゼータはリーマンゼータであるから問題が無い。

最後に残る、$n=2$ の場合は、上の論法のままでは適用できない。このときは Proposition 4.11 を用いる。

Proposition 4.12. $\zeta(0,L_2^*,1,1)=\frac{1}{48}$ である。また $m\geq 2$ ならば、

$$\zeta(1-m,L_2^*,1,1)=\frac{(-1)^m B_{2m}}{2^{2m}(2m)}$$

である。

論文 [20] II p.310 Theorem 6 では証明は $n\geq 3$ の場合は詳しいが $n=2$ の場合はかなり省略されているので、補足として少し詳しく解説しておこう。まず

$$\zeta(s,L_2^*,1,1)=2^{2s-1}D_2^*(s,1)$$

である（[20] II p. 270 line 1)。そこで $D_2^*(s,1)$ の特殊値に帰着する。これを求めるには Proposition 4.11 を用いる。まず $s=0$ の場合であるが、この場合 Proposition 4.11 の左辺で $s=3/2$ とおく。すると、

$D_2(s,1)$ の $s=3/2$ での留数は $\pi/3$ であることがわかっており、このとき、

$$\cos(\pi s) = \pi(s-\frac{3}{2}) + c_2(s-\frac{3}{2})^2 + \cdots$$

であるから、$\zeta(2)=\pi^2/6$ を用いて

$$D_2^*(0,1) = 2^{-1}\pi^{-5/2}\Gamma(3/2)(\pi^2/3-\pi^2/6) = \frac{1}{24}.$$

よって $\zeta(0,L_2^*,1,1)=\frac{1}{48}$ である。次に $m\geq 2$ として $\zeta(1-m,L_2^*,1,1)$ と求める。Proposition 4.11 の左辺で, $s=m+1/2$ として、$\cos(\pi(m+1/2))=0$ かつ $D_2(s.1)$ は $s=m+1/2$ で正則だから右辺のこの部分の項は消える。残りをみて

$$D_2^*(1-m,1) = -2^{-1}\pi^{-2m-1/2}\Gamma(m+1/2)\Gamma(m)\zeta(2m)$$

ここで

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!}$$

であり、

$$\Gamma(m+1/2) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(m) = (m-1)!$$

であるから、

$$\Gamma(m+1/2)\Gamma(m) = \frac{(2m-1)!!(m-1)!}{2^m}\sqrt{\pi} = \frac{(2m-1)!\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}$$

よって

$$D_2^*(1-m,1) = \frac{(-1)^m 2^{2m}B_{2m}}{2^2(2m)*2^{2m-1}}$$

$$\zeta(1-m,L_2^*,1,1) = 2^{1-2m}D_2^*(1-m,1) = \frac{(-1)^m B_{2m}}{2^{2m}\cdot 2m}$$

$|B_1|=1/2$ であるから、これは

$$\frac{(-1)^m|B_1|B_{2m}}{2^{2m}\cdot m}$$

となる。これは [20] p. 310 Theorem 6 の通りである。

5. 次元公式と概均質ベクトル空間のゼータ関数

5.1. ジーゲル保型形式の場合. レベル N のジーゲル主合同部分群を

$$\Gamma_n(N) = \{g\in Sp(n,\mathbb{Z}); g\equiv 1_{2n} \bmod N\}$$

と定義する。

一般の次数のジーゲル保型形式の次元公式の特殊な巾単元の寄与を概均質ベクトル空間の特殊値で書いたのは新谷である。文章でいえば次のとおりである。

Theorem 5.1 (Shintani [85](1975))**.** $(n-r)(n-r+1)/2$ 次元カスプと対応する *maximal parabolic* P_{n-r} の *unipotent radical* の中心に属する *unipotent elements* u で $rank(1_{2n}-u)=r$ となるものに共役な元全体の $\dim S_k(\Gamma_n(N))$ への寄与を *Selberg-Godement* の跡公式で計算すると、

(k の $(n-r)(n-r+1)/2$ 次式の具体的な多項式) $\times\zeta(r-n,,L_r^{*+})$ である。

以上のような巾単元を中心的巾単元と呼ぶことにする。

森田康夫の $n=2$ での次元公式 ([58], 1974 年) は、上記の新谷の結果の端緒になった計算である。当時は佐藤・新谷の概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論が登場したばかりであり、$n=2$ のときに、3 元２次形式のゼータ（実は概均質ベクトル空間のゼータ）が結果的に現れたので森田康夫氏は非常にうれしかったと言っていた。なお、山崎正氏 (1972) の証明は Riemann Roch による。Christian の証明は森田と独立であり、お互いに相手のことを知らないで計算していた。また Christian の当初の結果は少し間違いがあった ([7])。

Theorem 5.2 (Yamazaki[102], Morita [58], Christian [6])**.**

$k\geq 4,\ N\geq 3$ で

$$\dim S_k(\Gamma_2(N)) = N^{10}\prod_{p|N}(1-p^{-2})(1-p^{-4})\times$$

$$\left\{\frac{1}{2^{10}\cdot 3^3\cdot 5}(2k-2)(2k-3)(2k-4)-\frac{1}{2^6\cdot 3^2\cdot N^2}(2k-3)+\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot N^3}\right\}$$

Theorem 5.3 (Tsushima [97])**.** $k\geq 5,\ N\geq 3$ で

$$\dim S_k(\Gamma_3(N)) = N^{21}\prod_{p|N,p:prime}(1-p^{-2})(1-p^{-4})(1-p^{-6})$$
$$\times\left(\frac{1}{2^{16}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7}(2k-2)(2k-3)(2k-4)^2(2k-5)(2k-6)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5\cdot N^5}(2k-4)+\frac{1}{2^8\cdot 3^3\cdot N^{15}}\right)$$

対馬氏の当時の疑問：なぜ $n=3$ の公式に k の３次の項がでないのだろうか？

疑問に対する答は、ここに対応するゼータの値がゼロになるということである。関連するゼータは、たとえば

$$\zeta(s,L_3^{*,+})=\frac{2^{2s}}{24}\Big(\zeta(s-1)\zeta(2s-1)-\zeta(s)\zeta(2s-2)\Big)$$
$$\zeta_2(s,L_2^{*,+})=complicated$$
$$\zeta_1(s,L_1^{*,+})=\zeta(s).$$

となるが、$r=1, n=3$ として $r-n=-2$ より

$$\zeta(-2)=0$$

を反映しているだけである。このように $\zeta(r-n, L_r^*)$ の値はしばしばゼロになる。たとえば、n が奇数で $n-(r-1)/2$ も奇数ならば、$\zeta(r-n, L_r^*)=0$ である。たとえば $n=5$, $r=1$ ならばゼロであり、$\dim S_k(\Gamma_5(N))$ には $\zeta(-4, L_1^*)=0$ に相当する k の 10 次の項にはない。

Theorem 5.4 (Ibukiyama-Saito [16], [20] II)**.** $\dim S_k(\Gamma_n(N))$ の次元公式に現れる、前に述べた中心的巾単元の寄与、つまり概均質ベクトル空間のゼータ関数の特殊値からの寄与は初等的な項を除けば、いろいろなベルヌーイ数の積として具体的に表される。具体的に言えば、これは下記の $I_n(\Pi_r, k, N)$ で正確に与えられる。また、次元公式の予想が任意の n と $N \geq 3$ について具体的に書き下せる。

もっと具体的に言えば、次のような予想になったのである。記号を準備する。

$$\begin{aligned}C_{n-r} &:= C_{n-r}(k,N)\\ &= [Sp(n,\mathbb{Z}):\Gamma_n(N)]N^{-r(n-\frac{r-1}{2})}\prod_{t=1}^{n-r}\frac{t!}{(2t-1)!!}\binom{k-1-\frac{n-t}{2}}{t}.\end{aligned}$$

r が奇数の時は、

$$I_n(\Pi_r,k,N)=C_{n-r}\frac{(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}|B_{n-\frac{r-1}{2}}B_2B_4\cdots B_{r-1}B_2B_4\cdots B_{2n-r-1}|}{2^{n+\frac{r-1}{2}}(n-\frac{r-1}{2})!(\frac{r-1}{2})!}$$

とおく。r が偶数の時は、

$$I_n(\Pi_r,k,N)=C_{n-r}\frac{(-1)^{r(1+\delta_{nr})/2}|B_2\cdots B_{r-2}B_{r/2}|\cdot|B_2B_4\cdots B_{2n-r}|}{2^{2n-\frac{r}{2}}(\frac{r}{2})!(n-\frac{r}{2})!}$$

とおく。これらが前に説明した中心的巾単元の寄与である。このとき、

Conjecture 5.5 ([16], [20] II)**.** $N \geq 3$ で $k > 2n$ のとき、

$$\dim S_k(\Gamma_n(N))=\sum_{r=0}^{n} I_n(\Pi_r,k,N)$$

と予想される。(実際は $k > n+1$ でよい。)

Theorem 5.6 (若槻聡 [101])**.** 上の予想は正しい。つまり次元公式に寄与するのは、$\pm 1_{2n}$ と中心的べき単元 Π_r からの寄与 $I_n(\Pi_r,k,N)$ のみである。

証明のポイントはもちろん中心的べき単元以外のべき単元の寄与が全部消えるという点にある。$n=2$ のときは、この事実の証明は [58] に書かれているが、若槻はこれを一般の n で証明した。

5.2. **Tube domain の保型形式の次元公式とゼータ関数.** この節の内容については [26] に記述している。英文については [19] にアナウンスがあり、これは Margaret Robinson によって review されている。

昔から、$\Gamma_n(N)$ に関するウェイト $k > 2n$ のジーゲル保型形式に関しては、単位元 $\pm 1_{2n}$ と $\begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$ の形の元と共役なものしか次元公式に寄与はないであろうというのは漠然と予想されていた。（実際には $k > n+1$ でよい。）これは森田康夫氏、新谷卓郎氏も当然そのように考えていた。これらについて、書いた文献はないかもしれないが、私は口頭で聞いている。

ところで、一般の tube domain についは極大 $\mathbb{Q}$ 放物部分群の unipotent radical の中心の元で rank が最大のものの寄与の和を考えるのが正当である。これ以外の寄与は消えるだろう、というのを私は 1982 年ごろに考えていた。これは橋本喜一朗氏には話したことがある。

D をエルミート有界対称領域、G を対応する $\mathbb{Q}$ 上の半単純代数群とする。このとき、G の $\mathbb{Q}$ 上の root 系は D が tube domain ならば C 型である。ここで G の maximal $\mathbb{Q}$ parabolic の代表系 P_r を考えると、その unipotent radical の center を U_r は $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ というように、包含関係があるようにとれて、共役で U_r に属するが、U_{r-1} に属さない unipotent elements の全体の跡公式への寄与を考える。するとこれは U_r を概均質ベクトル空間とみなすとき、そのゼータ関数の特殊値になっている。(実際には概均質かどうかは関係なく、以上の設定ではゼータは「普通に」定義され、関数等式は個別に証明されるので、概均質にならない特殊な場合を気にする必要はない。）この証明は [26] に書いたとおりである。詳しくは [26] 自身を見ていただきたいが、簡単に説明しておく。

簡単のために、V が形式的実単純ジョルダン代数、Ω を V に付随する symmetric cone, $\mathscr{T} = V + \sqrt{-1}\Omega$ とする。（形式的実ジョルダン代数については [12] に極めて優れた解説がある。簡単に言えば、一般の V を全部、実対称行列と同じように簡単に扱えるようにするための道具や言葉が一般的に書かれている。）ここで $r = rank(V)$, $n = \dim V$, $\{e_i\}_{i=1}^r$ を V の直交巾等元とする。$e_i : V \ni x \to e_i x \in V$ なる写像の固有値は 0, 1, 1/2 のどれかであり、$V(e_i, \lambda)$ を固有値 λ に対する (V 内の）固有空間とする。$V_{ij} = V(e_i, 1/2) \cap V(e_j, 1/2)$ とおくと $d = \dim V_{ij}$ は一定である。つぎの関係式が知られている。

$$n = r + \frac{dr(r-1)}{2}.$$

V に対して、det, tr などが自然に定義される ([12])。特に V が単純なとき、$\det(x) = \Delta(x)$ と書くことにしよう。次を cone の Γ 関数という。

$$\Gamma_\Omega(s) = \int_\Omega e^{-tr(x)} \Delta(s)^{s-\frac{n}{r}} dx.$$

(dx は V の適当なユークリッド測度で、正確な説明は略す。）次の領域を考える。

$$\mathcal{H}_\nu(\mathscr{T}) = \{F(z) : \text{holomorphic on } \mathscr{T}, ||F(z)||_2 < \infty\}.$$

ただし

$$||F||_2 = \int_{\mathscr{T}} |F(z)|^2 \Delta(y)^{\nu - \frac{2n}{r}} dxdy$$

とした。ここで $z = x + iy$ としている。

Theorem 5.7. $\nu > 1 + d(r-1)$ のとき、$\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ 上の関数を

$$K(z, w) = \frac{\Gamma_\Omega(\nu)}{(4\pi)^n \Gamma(\nu - n/r)} \Delta \left(\frac{z - \overline{w}}{2i} \right)^{-\nu}$$

とおくとき、これは $\mathcal{H}_\nu(\mathscr{T})$ の再生核である。

さて、この再生核を用いれば Godement の公式にあたるものが書ける。Γ を $G(\mathbb{R})$ の covolume finite な離散群として $Z(\Gamma)$ を Γ の中心とし、

$$K_\Gamma(z, w) = \frac{1}{|Z(\Gamma)|} \sum_{\gamma \in \Gamma / Z(\Gamma)} K(\gamma z, w) J(\gamma, z)^{-1}$$

とおく。ただし、$J(\gamma, z)$ は次のように定義する。まず $G \times \mathscr{T}$ の保型因子 $j(g, z)$ で

$$|j(g, z)|^{2n/r} = \det(Jac(g, z))$$

となるものがある。ここで $Jac(g, z)$ は $z \to gz$ のヤコビアンである。ここで $J(g, z) = j(g, z)^\nu$ とおく。簡単に言えば、これはウェイト ν の保型因子である。

Theorem 5.8 ([26])**.** 上の記号の元で、$\nu > 2 + 2d(r-1)$ と仮定すると

$$\dim S_\nu(\Gamma) = \int_{\Gamma \backslash \mathscr{T}} K_\Gamma(z, z) \Delta(y)^{\nu - \frac{2n}{r}} dxdy$$

となる。

この証明は Godement [11] Theorem 8 の証明のまねをすればできるので [12] で道具立てがそろっている今となっては、証明は難しくはない。たとえば清水英男の本 [80] I の次元公式の部分は、一見 $SL_2(\mathbb{R})$ しか扱っていないように見えるが、実際は一般の場合に容易に読み替えられることを意図して書いたと著者本人から伺ったことがある。ここで注意すべきなのは、積分と和は交換可能ではないと言うことである。

さて、ここまでは普通で証明も易しいが、次は central unipotent の寄与の話と概均質ベクトル空間のゼータの話になり、これは易しくない部分がある。この話を正確に述べるには収束の正確な評価することが本質的である。この点が一番神経を使うべきところである。

さて証明の細部は [26] を見ていただくとして、ここでは次元公式への概均質ベクトル空間の寄与をなるべく手っ取り早く見ることを目指して記述する。V を形式的実単純ジョルダン代数として、$G_0 = \{g \in GL(V); g\Omega = \Omega\}$ とする。このとき (G_0, V) は自然な作用で、概均質ベクトル空間になる。L を V の格子として、

$$L^* = \{x \in V; \text{すべての } y \in L \text{ に対して } tr(xy) \in \mathbb{Z}\}$$

とおく。G_0 を V の自己同型で Ω を不変にするものとして、Γ_0 を L を不変に作用する G_0 の離散群とするとき

$$\zeta(s, L^+) = \sum_{x \in L \cap \Gamma_0 \backslash \Omega} \frac{\mu(x)}{\Delta(x)^s}$$

と定義する。ここで $\mu(x) = vol(G_{0,x}/\Gamma_x)$ である。

次に、tube domain を考える。G を前に書いたように $G/Z(G) = Aut(\mathscr{T})$ となる $\mathbb{Q}$ 上の代数群とする。ここで

$$\mathscr{T} = V + i\Omega$$

としておく。P を G の maximal $\mathbb{Q}$ parabolic のひとつとして、V_P を P の unipotent radical の中心とする。V_P は自然に形式的実ジョルダン代数の構造をもつ。（$\mathscr{T} = V + i\Omega$ となる V の部分空間である。）Γ を G の covolume finite な離散群とする。$\gamma \in \Gamma$ が中心的べき単元というのは、γ のある $G(\mathbb{Q})$ 共役が、ある maximal $\mathbb{Q}$ parabolic の unipotent radical の中心に属すことと定義する。$V_P \subset V$ とみなせる。

P を上の通りとして、

$$G(\mathbb{Q}) = \coprod_{i=1}^{v} \Gamma \kappa_i P \quad (disjoint)$$

としておく。（幾何的に言えば P に対応する佐武コンパクト化のカスプの代表元が κ_i である。）

仮定: P の $\mathbb{Q}$ 上の Levi 分解 $P = A \cdot B$ があって、

$$\kappa_i^{-1}\Gamma\kappa_i = (\kappa_1^{-1}\Gamma\kappa_1 \cap A) \cdot (\kappa_i^{-1}\Gamma\kappa_i \cap B)$$

となっていると仮定する。

Theorem 5.9. *m を G の real rank とする。また $\nu > 2 + 2d(r-1)$ と仮定する。このとき、前の仮定の下で、Γ の中心的巾単元で rank b のもの全体の $\dim S_\nu(\Gamma)$ への寄与は*

$$c_\kappa(\Gamma) \prod_{j=1}^{m-b} \frac{\Gamma(\nu - \frac{(j+b-1)d}{2})}{\Gamma(\nu - \frac{d(j-1)}{2} - 1 - \frac{d(m-1)}{2})} \zeta(d(b-r), L_\kappa^*)$$

ここで κ はある P に対するカスプの代表、$c_\kappa(\Gamma)$ は κ にはよるが ν にはよらない定数、

$$L_\kappa = V_P \cap k_\kappa^{-1}\Gamma k_\kappa$$

である。なお $\Gamma_\kappa := \Gamma \cap \kappa A \kappa^{-1}$ が L_κ に作用する離散群、ガンマ因子の部分は結果的に、$(m-b)(1+d(m-b-1)/2)$ 次の多項式である。また $\zeta(s, L_\kappa^{*,+})$ は V_P に付随する概均質ベクトル空間のゼータ関数である。

証明のキーポイントは次の補題のポアソン公式である。ただし V が対称行列の時 (形式的実ジョルダン代数として I 型、つまりジーゲル保型形式と対応する場合）は面倒な解析が必要になるが、この場合は新谷による。一般の場合も収束の厳密な評価がないと形式的に話をすすめることはできない。以下の補題から得られる、収束に関する詳しい

話は [26] にある程度書いてある。大雑把に言って、ポアソン公式から得られるのは、格子の元全体であるが、我々がほしいのは格子の元のなかで maximal rank の元だけである。このずれの部分をきちんと見ると言うことが問題の核心である。

Lemma 5.10 (Ibukiyama [32])**.** 任意の $Z \in \mathscr{T} = V + i\Omega$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ で $Re(\alpha) > d(r-1)+1$ と仮定する。L を V の格子とすると、

$$\sum_{T \in L^* \cap \Omega} e^{2\pi i Tr(TZ)} \det(T)^{\alpha - n/r} = vol(L^*)^{-1}(2\pi)^{-r\alpha}\Gamma_\Omega(\alpha)\sum_{S \in L} \det\left(\frac{Z+S}{i}\right)^{-\alpha}$$

となる。

もう少し解説を続ける。e を単純ジョルダン代数 V の単位元とする。また (M, V, ρ) を概均質ベクトル空間とする。例外集合 $S = \{x \in V; \Delta(x) = 0\}$ である。

複素変数 λ と $x \in V$ に対して

$$f = f_r(x, \lambda) = \begin{cases} \Delta(s)^{\lambda - n/r} exp(-2\pi tr(x)) & \text{if } x \in \Omega \\ 0 & otherwise \end{cases}$$
$$f^* = f_r^*(x.\lambda) = \Delta(e - \sqrt{-1}x)^{-\lambda}$$

とおく。M^+ を $M(\mathbb{R})$ の 1 を含む real topology での連結成分とする。$g \in M^+$ に対して

$$\sum_{x \in L} f^*(\rho(g)x, \lambda) = vol(L^*)(2\pi)^{r\lambda}\Gamma_\Omega(\lambda)^{-1}\chi(g)^{-n/r} \sum_{x \in L^* \cap \Omega} f({}^t\rho(g)^{-1}, \lambda)$$

となる。適当な s と λ の範囲で、

$$\Phi(f, s) = \int_\Omega f(x, \lambda)|\det(x)|^s dx = (2\pi)^{-r(s+\lambda)}\Gamma_\Omega(s+\lambda),$$

V 上の関数 h に対して

$$Z(h, s, L) = \int_{M_+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{x \in L - S} h(gx)dg$$

とおけば、適当な収束条件の下で

$$Z(h, s, L) = \sum_i \xi_i(s, L)\Phi_i(h, s - \frac{n}{r})$$

ただし、

$$\xi_i(s, L) := \sum_{x \in L \cap V_i/\Gamma} \frac{\mu(x)}{\Delta(x)^s}.$$

肝心なのは次の関数等式である。

$$Z(f_r^*(x, \lambda), L, \frac{n}{r} - s) = vol(L^*)^{-1}(2\pi)^{r\lambda}\Gamma_\Omega(\lambda)Z(f_r(x, \lambda), L, s).$$

問題は Z の定義には $x \in L - S$ (つまり rank が一杯）のものしか出ていないのに、ポアソン公式には L の元がすべて出ていることである。ここを処理するには、

$$
\begin{aligned}
&Z(f_r^*(x,\lambda), L, s) = Z_+(f_r^*(x,\lambda), L, s) \\
&+ vol(L^*)(2\pi)^{r\lambda}\Gamma_\Omega(\lambda)^{-1} Z_+(\frac{n}{r} - s, f_r(x,\lambda), L^*) \\
&- \sum_l \frac{1}{s - dl/2} \sum_{i=1}^{u_\ell} c_{\ell,i}(\Gamma) Z(f_l^*(x,\lambda), \rho(h_i)^{-1} L(l) \cap V(l), \frac{dr}{2})
\end{aligned}
$$

と書き換えて処理する。（ただし $V = Sym(\mathbb{Q})$ のときは新谷の収束の議論が必要。また $V(l)$ は V のなかの rank l のジョルダン部分代数、Z_+ は $\chi(g) \geq 1$ での積分）

6. 専門家の言うことを信じてはいけないという話

対称行列のゼータ関数の結果があまりに意外な単純なものだったので、私は世の中で難しいといわれているものを信じてはいけないのだと思い始めた。大野泰生君は、当時、私の大学院生だった。彼に最初あげた問題は、彼が体調不良で休んでいるうちに、他大学の人に解かれてしまったので、何か違う問題ということで私が提案したのが、binary cubic zeta についての問題であった。私の提示したのは次のようなことだった。

「世間では binary cubic は難しい対象だと言われている。しかし、難しいといっている人たちは、誰も binary cubic zeta の Dirichlet 級数としての小さい部分の数字を書いてみたことがあるとは思えない。計算もしていないのに難しいかどうかなどはわからない。まず、とにかくこれを具体的に計算してみなさい。計算法は Davenport にでているはずだ。計算結果を眺めて、それから何か面白そうなことがないか、宝探しをしてみてごらん。」

というわけで、彼は見事それまでだれも気が付かなかった面白いこと（４つあるゼータ関数のうち、二つずつが本質的に等しいという事実）を数値的に見つけて、予想をのべた。（Amer. J. Math. の匿名のレフェリーは、自分も同じデータを見ていたはずなのに、自分には気が付けなかったと絶賛していた。）この予想は結局、中川仁君が証明することになったのだが、これについての解説は本報告集の [105] にあるので、ここでは省略する。

また別の問題として、世間では b 関数の計算は難しいのだと言われているが、定義と計算法がはっきりしている対象なのだから、そういうことを信じないで Mathematica を使えば計算できるのではないか、と述べたところ、割とそういうことが可能だというのを示したという他の人の結果もあった。（もちろんちゃんとやるにはいろいろ工夫が必要なのだが。）

あとでのべる Eisenstein 級数の Koecher Maass 級数が単純になるという結果も、最初、専門家は、そんなに簡単になるとはとても思えな

い、と言っていたことを思えば、思い込みから自由になるというのは、なかなか難しいことだと思わせられる。

7. Koecher-Maass series

7.1. Koecher version for theta series. S を m 次の正定値対称行列とする。X を $m\times n$ 次の整数行列とし、$X_2 = X_1U$ $(U \in GL_n(\mathbb{Z}))$ のとき、X_1 と X_2 は同値とみなし、$X_1 \sim X_2$ と書こう。

$$\zeta(s,S) = \sum_{X\in M_{m,n}(\mathbb{Z})/GL_n(\mathbb{Z});rank(X)=n} \frac{1}{\det({}^tXSX)^s}$$

とおく。これは関数等式を持つ (Koecher [47], [48])。

7.2. Maass version for Siegel modular forms. $\Gamma = Sp(n,\mathbb{Z})$ とし、$F \in A_k(Sp(n,\mathbb{Z}))$ をウェイト k のスカラー値ジーゲル保型形式とする。

$$F(Z) = \sum_{T\in L_n^*} a(T)e(Tr(TZ)) \qquad Z \in H_n, \quad e(x) = e^{2\pi ix}$$

とする。k は偶数と仮定しておく。

$$L(s,F) = \sum_{GL_n(\mathbb{Z})\backslash L_n^{*,+}} \frac{a(T)}{\det(T)^s|O(T,\mathbb{Z})|}$$

とおく。ここで $T_1 \sim T_2$ は $UT_2\,{}^tU = T_1$ for some $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ ということ。また $Aut(T) = \{U \in GL_n(\mathbb{Z}) : UT\,{}^tU = T\}$ とおいた。ここで $a(UT\,{}^tU) = \det(U)^k a(T)$ だが、k を偶数と仮定したから、$a(UT\,{}^tU) = a(T)$ である。$GL_n(\mathbb{Z})$ 同値を $SL_n(\mathbb{Z})$ 同値に変えれば k 奇数でも一見うまく定義できるように見えるが、この場合は、$L(s,F) = 0$ になるので、意味は無い。よって k が偶数という仮定は避けることができない。

以上で定義した L 関数は関数等式をもつ ([56]). 実際

$$\xi(s,F) = (2\pi)^{-ns}\prod_{i=0}^{n-1}\Gamma(s-\frac{i}{2})L(s,F)$$

とおくとき、

$$\xi(k-s,F) = (-1)^{nk/2}\xi(s,F)$$

となる ([56])。実際には Maass の定義した級数はこれよりも一般的な、Maass の言う量指標付きの級数について、関数等式を証明している。量指標の意味は後で説明する。

ちなみに、これは講演のあとに佐藤文広君に指摘されたのだが、Maass は [56] 以前に次数 2 で [54] で量指標付きの Koecher Maass 級数にあたるものに対して関数等式を証明している。これはヘッケの量指標の L 関数の関数等式の証明を拡張しようという試みでそれから自然に量指標という名前がつけられたのだろうと言うことだ。その後、1950 年代は Selberg 理論や、Harish Chandra とかが登場して、帯球関数の理

論が発展した時期でもあり、互いの貢献はごちゃごちゃしていてあまりよくわからないのではないか、とのことだった。

7.3. 対称管状領域上の保型形式に対する、量指標付き Koecher Maass 級数の関数等式.

この節の内容については [25] にすべて書いてあるので、詳しくはそちらを参照されたい。ちなみにこの結果も私の怠慢により英語の論文にはしていない。時間ができたらどこかに書いておきたいのだが。

まず tube domain についてざっと説明して、それから量指標の定義をのべ、次に関数等式について説明する。これが佐藤文広君の講演とどう関係するのかはよく理解していない。

さて、symmetric tube domain の定義を述べる。もっともよい参考書は [12] であると思う。

今 V を $\mathbb{R}$ 上の形式的実ジョルダン代数とする。これは $\mathbb{R}$ 上の有限次ベクトル空間で、非結合的な積 $x \circ y$ が定義されており、(i) $x \circ y = y \circ x$, (ii) $x^2 \circ (x \circ y) = x \circ (x^2 \circ y)$, (iii) $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x = y = 0$ の 3 つの条件を満たすもののことを言う。任意の形式的実ジョルダン代数は単純なものの直和であり、単純な形式的実ジョルダン代数は 5 種類に分類されている。これらはよく知られた対象で、みな非常に具体的にかける。たとえば I 型は n 次対称行列の集合で、$x \circ y = (xy + yx)/2$ で定義されている。単純な V では symmetric cone Ω とよばれる部分集合が, $\Omega = \{x^2; x \in V^\times\}$ で定義されている。直積 $V^m = V \times \cdots \times V$ では Ω^m を考えることになる。V を単純形式的実ジョルダン代数として、対応する対称管状領域（symmetric tube domain) は

$$\mathscr{T} = (V + \sqrt{-1}\Omega)^m$$

で定義される。これは第一種ジーゲル領域とも呼ばれている。

さて、Maass [56] がジーゲル上半空間の時に定義した量指標を一般の symmetric tube domain で定義しよう。

$$G_0 = \{g \in GL(V); g\Omega = \Omega\}$$

とおき、$(G_0 \cap SL(V))^m$ の離散部分群 Γ_0 で、割って体積有限のものを一つ指定する。記号 $\mathbb{D}(\Omega^m)$ で Ω^m の各成分についての不変微分作用素で生成される環とする。ここで、不変の意味は、Ω 上の C^∞ 関数 f と $g \in G_0$ について $(\tau(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ とするとき、微分作用素 $\mathbb{D}$ が $\tau(g)D = D\tau(g)$ を満たすという意味である。(ρ, W) を G^m の有理表現とする。Ω^m 上の W 値の C^∞ 関数 $u(Y_1, \ldots, Y_m)$ が次の 4 つの条件を満たすとき、Γ に関する量指標と呼ぶ。

(1) $u(\gamma(Y_1, \ldots, Y_m)) = \rho(\gamma)u(Y_1, \ldots, Y_m) \quad \gamma \in \Gamma_0$
(2) $Du = \lambda(D)u$ for some constant $\lambda(D)$,
(3) $u(cY_1, \ldots, cY_m) = u(Y_1, \ldots, Y_m)$ for any constant c
(4) $||u(Y_1, \ldots, Y_m)||$ は適当な増大度条件をみたす。
(詳しくは [25] p. 14)

(あとで ρ は trivial にする。）これがいったい何なのか、ということは Maass にはあまり説明がないが、たとえば、正定値対称行列で Mellin 変換を考えるとすると、$\det(Y)^s$ を $\det(Y) = t$ として $t = 0 \sim \infty$ でメ

リン変換を考えることになる (Robert Hjarmar Mellin はフィンランド人)。しかし、このような変換の像の性質からもとの関数の保型性が決まるかどうかという逆定理を考えたいとすると、この t に関する一変数の積分では $\det(Y)=1$ のところが変数として残ってしまう。そのため、ディリクレ級数から関数自身を思い出すためには $\det(Y)=1$ 上での関数をスペクトル分解できるような十分多くの関数を用意しておかないといけないのである。これが量指標である。(もちろん実解析的保形形式の一種である。) これがたとえば、 [35], [95] の逆定理に登場する量指標であって、このような関数は避けることができない。実際には連続スペクトルの部分も追加しないといけないが。(ちなみに、メリン変換による逆定理のこういう側面について、きちんと解説したものは見たことがない。たとえば Bump [5] は Hilbert modular のときに、逆定理を述べているが、上記のような説明はないので、本質がわかりにくくなっている。)

さて、われわれは $\mathscr{T}$ 上の保型形式のメリン変換できまる、Koecher Maass 級数という、関数等式を持つディリクレ級数を定義したい。一般に、$Aut(\mathscr{T})$ は実リー群 $G(\mathbb{R})$ の単位元の連結成分 $G(\mathbb{R})^0$ を中心で割ったものである。ここで $G(\mathbb{R})$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数群 G の $\mathbb{R}$ valued points としておく。簡単のために G に次の仮定を置く。

仮定: $G/\mathbb{Q}$ の極大 $\mathbb{Q}$ 放物部分群 P で 0 次元カスプに対応するものが存在する。

また G の covolume finite な離散群 Γ を固定し、Γ は次のような変換を含んでいると仮定する。

$$(Z_1,\ldots,Z_m)\to(-Z_1^{-1},\ldots,-Z_m^{-1}).$$

この条件は関数等式の証明に必要である。

さて、$\mathscr{T}$ の Γ に関するウェイト k の保形形式 $f(Z)$ と言うのはジーゲル保型形式の時と同様に定義されてフーリエ展開をもつ。0 次元カスプに対応する極大放物部分群の unipotent radical U は abelian であり、$U\cap\Gamma=L$ とおくとこれは U 内の格子である。(そもそも $U(\mathbb{R})$ はジョルダン代数 V^m である。) ここで、さらに Γ が $Z\to Z+u$ $(u\in L)$ なる変換を含んでいれば、

$$f(Z)=\sum_{T\in L}a(T)e^{2\pi i(T,Z)}$$

と自然にフーリエ展開される。ここで $(T,Z)=tr(TZ)$ は形式的実ジョルダン代数としての T と Z の自然な内積である. $G(\mathbb{R})$ の実ランクが 2 以上ならば、Koecher 原理により、$T\notin\overline{\Omega}^m$ ($\overline{\Omega}$ は Ω の閉包) ならば、$a(T)=0$ である。P の Levi 分解により、半単純部分が Ω^m を保つように作用する。Γ とこの群の共通部分を Γ_0 とかく。$u(Y)$ を $W=\mathbb{C}$, $\rho=det^k$ となる Γ_0 に対する量指標とする。

定義 7.1.

$$D(s,F,u)=\sum_{T\in\Gamma_0\backslash L\cap\Omega^m}\frac{a(T)u(T)}{|O(T,Z)|\det(T)^s}$$

と定義し、これを量指標 u 付きの F の *Koecher Maass* 級数と呼ぶ。特に $u=1$ のときは単に *Koecher Maass* 級数と呼ぶことにしよう。

このようなディリクレ級数 $D(s,F,u)$ はオイラー積は持たないが、関数等式は持つ。このような級数を Koecher-Maass 級数と呼ぶようになったのは私が命名したからである。（論文上では Kohnen のものが最初かもしれないが、その前に私は彼といろいろ議論して、この名称を試用したいということは口頭では既に彼に伝えていた。）なぜ、Koecher Maass 級数と呼んだかというと、名前はアルファベット順にした。文献的には、この級数は [54], [47], [48], [56] などに登場しているが、佐藤文広氏によると、歴史は複雑らしい。ちなみに Siegel 保型形式についてとりあつかった [56] には、Selberg からは「このような関数等式は前から知っていた」と言われた、という記述がある。しかし Selberg は未発表のようである。関数等式は Selberg 理論の応用として証明できるので、あるいは Selberg は tube domain 上の一般論も知っていたのかもしれないが、書いていないものはわからない。

定理を述べるために、少し記号を準備する。r を V のランク（V の直交べき等元の最大個数）とする。($x\in V$ の最小多項式の最大次数といってもよい。）また d を、直交べき等元 $e_i\neq e_j$ に対して、固有値 $1/2$ の固有空間を $V(e_i,1/2)$ などとおき、$V_{ij}=V(e_i,1/2)\cap V(e_j.1/2)$ とおくと、$\dim V_{ij}$ は一定で、これを d と書く。また $\hat{u}(Y)=u(Y^{-1})$ と書く。Ω の不変微分作用素の生成元は [12] Prop XIV.1.4 にある。これは

$$(D_sf)(x)=\det(x)^{s+1}\det(\frac{\partial}{\partial x})\det(x)^{-s}f(x)$$

と置くとき、$D_{jd/2}$ $(j=0,\dots,r-1)$ が $D(\Omega)$ の生成元である。$\hat{D}_s(Y_i)=(-1)^rD_{d(r-1)/2-s}(Y_i)$ と定義する。このとき

$$(\prod_{i=1}^m\hat{D}_s(Y_i)\hat{u})(Y)=(-1)^{rm}\prod_{i=1}^{rm}\Gamma(s-\alpha_j)\hat{u}(Y)$$

であったと仮定する。

Theorem 7.2 ([25]). 上のような量指標 u と保型形式 F に対して、

$$\xi(s,F,u)=(2\pi)^{rms}\left(\prod_{j=1}^{rm}\Gamma(s-\alpha_j)\right)D(s,F,u)$$

と定義すると

$$\xi(k-s,F,u)=(-1)^{rmk/2}\xi(s,\hat{u})$$

である。ここで $D(s,u)$ は高々 $s=\alpha_j+k-d(r-1)/2$ で極を持ち、その他では正則である。

証明のキーポイントは次の積分公式にある。

Lemma 7.3. dv を不変測度として、

$$\int_{\Omega^m}u(Y)e^{-tr(TY)}\det(Y)^sdv$$

$$= (2\pi)^{(n-r)m/2} \det(T)^{-s} u(T_1^{-1}, \ldots, T_m^{-1}) \prod_{i=1}^{rm} \Gamma(s - \alpha_i).$$

この証明には Selberg の、「不変微分作用素の同時固有空間は任意の不変作用素の固有空間でもあり、またその固有値は不変微分作用素の固有値のみによる」という大変きれいな結果と Faraut and Koranyi [12] で形式的実ジョルダン代数の帯球関数、および、その微分作用素での固有値がすべて決定されていることによる。なお、私の当初の証明は [56] を徹底的に真似したものであったが、白馬で講演した折に、Selberg が使えるのではないかとの示唆を佐藤文広氏より受けた。それで白馬の報告集では、Maass 流と Selberg 流の両方の証明をつけている。詳しくは [25] を参照されたい。なお、一言付け加えると、Koecher-Maass 級数が十分大きい $Re(s)$ で収束するということは全然自明ではない。この部分の評価も [25] にきちんと書いておいた。

7.4. $Sp(n, \mathbb{Z})$ **の Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数.** $k > n+1$ を偶数とする。次の級数を $Sp(n, \mathbb{Z})$ のジーゲルアイゼンシュタイン級数という。

$$E_n^{(k)}(\mathbb{Z}) = \sum_{g \in \Gamma_\infty \backslash Sp(n,\mathbb{Z})} J(g, Z)^{-k}.$$

ここで

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}) \right\}$$

$$J(g, Z) = \det(CZ + D) \qquad \text{for } g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R}).$$

また

$$E_n^{(k)}(Z) = \sum_{T \in L_n^*} a(T) e(Tr(TZ))$$

とフーリエ展開しておく。$(e(x) := e^{2\pi i x}.)$

$$H_k = \begin{pmatrix} 0_k & 1_k \\ 1_k & 0_k \end{pmatrix}$$

とおく。$m = 2k$, $T \in L_n^*$, $rank(T) = r$ $(0 < r \leq n)$ とすると半整数対称行列 T_1 で $\det(T_1) \neq 0$, $T = {}^t O T_1 O$ (O は原始的な (r, n) 整行列) となるものがある。

$$\rho_m := \prod_{j=1}^{m} \frac{\pi^{j/2}}{\Gamma(j/2)}$$

とおく。

Lemma 7.4 (Siegel [91])**.**

$$a(T) = (-1)^{kr} 2 \frac{\rho_{2k}}{\rho_{2k-r}} \det(2T_1)^{(2k-r-1)/2} \prod_p \alpha_p(H_k, 2T_1)$$

ただし、$\alpha_p(H_k, 2T_1)$ はいわゆる *local density* で今の場合、

$$A_q(H_k, T_1) = \{K \in M_{2k,r}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z});\ {}^tKSK \equiv 2T_1 \bmod q\}$$

(q は p の巾) とおくとき、

$$\alpha_p(S, 2T_1) = \lim_{q\to\infty} q^{r(r+1)/2-2kr} A_q(S, 2T_1)$$

で定義される。(十分大きい q について右辺が一定になるのは前と同様である。)

Theorem 7.5 (伊吹山・桂田 [29], [21]). $n \geq 3$ が奇数とすると、

$$L(s, E_n^{(k)}) = (-1)^{nk/2} 2^{(n-1)s} \times \frac{\prod_{i=0}^{(n-1)/2}(k-i)}{((n-1)/2)!} \times \frac{\prod_{i=1}^{(n-1)/2}|B_{2i}|}{|B_k|\prod_{i=1}^{(n-1)/2}|B_{2k-2i}|}$$

$$\times \Bigg\{ \zeta(s)\zeta(s-k+1) \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \zeta(2s-2i)\zeta(2s-2k+2i+1)$$

$$+ (-1)^{(n^2-1)/8}(-1)^{n(n+1)/2}\zeta(s-\frac{n-1}{2})\zeta(s-k+\frac{n+1}{2})$$

$$\times \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \zeta(2s-2i+1)\zeta(2s-2k+2i) \Bigg\}$$

$n \geq 4$ が偶数とすると

$$L(s, E_n^{(k)}) = 2^{ns} \frac{\prod_{i=1}^{n/2-1}\zeta(1-2i)}{\zeta(1-k)\prod_{i=1}^{n/2}\zeta(1-2k+2i)}$$

$$\times \Bigg\{ D_n^*(s,1) \otimes D_{2k-n}^*(s,1) \prod_{i=1}^{n/2-1} \zeta(2s-2i)\zeta(2s-2k+2i+1)$$

$$+ \frac{1+(-1)^{n/2}}{2}(-1)^{n(n+2)/8}\frac{|B_{n/2}B_{k-n/2}|}{(n/2)(k-n/2)} \times \prod_{i=1}^{n/2}\zeta(2s-2i+1)\zeta(2s-2k+2i) \Bigg\}$$

ただし、κ を半整数 ($(1/2)\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$ の元) とするとき、

$$D_{2\kappa-1}^*(s,1) = \sum_{(-1)^{\kappa-1/2}d_K>0} |d_K|^{-s} L(\frac{3}{2}-\kappa, \chi_K)\frac{\zeta(2s)\zeta(2s-2\kappa+2)}{L(2s-\kappa+\frac{3}{2}, \chi_K)}$$

とおく。ここで d_K は種々の 2 次体 K ないしは $K = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ の基本判別式をわたる。(後者では $d_K = 1$ としている。) また χ_K は $\mathbb{Q}(\sqrt{d_K})$ に対応する 2 次指標、$\zeta(s)$, $L(s, \chi_K)$ はリーマンゼータとディリクレの L 関数である。$D_{2\kappa-1}^*(s,1)$ は重さ κ の、いわゆるプラス空間に属する正則アイゼンシュタイン級数 (Cohen Eisenstein series と呼ばれる) のメリン変換として得られる。ただし、κ が大きくないときは、実解析的なアイゼンシュタイン級数を考える必要があるが、これらは前の節 4.11 で述べた。([21], [20] II も見よ)。

記号 $\otimes$ は *convolution* であって、

$$D^*_{2\kappa_i-1}(s,1)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_i(m)}{m^s}$$

のとき、

$$D^*_{2\kappa_1-1}(s,1)\oplus D^*_{2\kappa_2-1}(s,1)=\zeta(2s-\kappa_1-\kappa_2+s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_1(m)a_2(m)}{m^s}$$

とおいている。

以上の証明の経緯は次のとおりである。まず $n=3$ のときは桂田君のフーリエ係数の公式 [41] というのがあった。私はこの公式を利用して、一晩徹夜して $n=3$ のときに完全に計算しきって、結果が単純になることを理解した。これを 2 次形式の専門家である北岡さんに話したら、彼は「それは次数が小さいから単純になる場合があるのであって、一般には無理だと思うよ」との意見だった。しかし、私は一般にも単純だと信じていたので、アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の専門家である桂田君に相談して、共同研究で一般の n の場合の計算を完成させた。結果は上に見る通り単純であった。

この式を見て、私は n が偶数の時には、一変数から n 次への**リフトがあるのではないかと予想**した。これは Duke-Imamoglu が standard L に関する予想を与えるより前に独立に考えたことで、その予想の理由は

(1) $D^*_{2k-n}(s,1)$ はウェイトが $k-(n-1)/2$ の 1 変数半整数保型形式であり、これはたぶんウェイトが $k-(n-1)/2$ のカスプ形式、つまり志村対応でウェイトが $2k-n$ のカスプ形式に拡張されそうなこと。

(2) $\zeta(s)\zeta(s-(2k-n)+1)$ はウェイト $2k-n$ のアイゼンシュタイン級数のゼータ関数であり、これは f をウェイト $2k-n$ のカスプ形式と思えば $L(s,f)$ に変えられること。またこのとき、n を偶数として

$$\prod_{i=1}^{n/2-1}\zeta(2s-2i)\zeta(2s-2k+2i+1)\to\prod_{i=1}^{n/2-1}L(2s-2i,f)$$

$$\prod_{i=1}^{n/2}\zeta(2s-2i+1)\zeta(2s-2k+2i)\to\prod_{i=1}^{n/2}L(2s-2i+1,f)$$

という読み替えが可能なこと。

以上は現在 Duke-Imamoglu-Ikeda lift と呼ばれているものの私の version の予想であった。私はこの予想を 1996 年頃だったかに、池田君を含む日本人の何人かが居た席で個人的に話したことがあったが、あまり関心を引かなかった。ちなみに、当時この Koecher-Maass 級数に関する結果は数理研以外では確か未発表であった。その後、1998 年に東京から白馬の第一回整数論オータムワークショップにゆく列車のなかで Kohnen にこの予想を話そうとすると、彼は私を押しとどめて、Duke と Imamoglu が standard zeta に関してリフトの予想を述べていることを話した。これは当然私の予想とは全く独立に考えられたものであっ

た。Koecher-Maass 級数がどう書けるかというような不可思議な予想より、標準ゼータがどう書けるかという方が、インパクトがあったのも確かだろう。実際、Kohnen に話したとき、彼は私が当然普通の L 関数の話をすると思っていたらしく、Koecher Maass 級数の形がどうなるかという話なのだというと、かなりぎょっとしていた。ちなみに当時、偶数次と奇数次のジーゲル保型形式が異なる性質を持っているという感想を 2 次形式の Mass formula や [20] I などから強く思っており、いまではそう考えている人は多いが当時はそう思っている人は居なかった。

以上のリフトは Ikeda lift として実現されたのは、よく知られているとおりである。

ちなみにその後、桂田氏と共著で、Klingen Eisenstein 級数、Ikeda lift の場合について、Koecher Maass 級数を計算したが、池田リフトについては上で述べたとおりになっていた。(伊吹山・桂田 [27], [28])

7.5. **証明のキーポイント.** アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の公式は $n=3$ のときは完全に closed な式が知られている（桂田 [41]). これを用いて直接計算することもできる。一般の次数の場合は 桂田 [42] などはあるものの、完全に closed なフーリエ係数の公式ではない。よって、Siegel による local density に帰着する公式を用いる。

今 $\det(T)\neq 0$ としているので、$T=T_1$ である。local density は $2T$ の属する種 (genus) $\mathfrak{L}$ にしかよらない。（つまり T_0 であって、任意の素点 v に対して、$T_0={}^t g(2T)g$ となる $g\in GL_n(\mathbb{Z}_v)$ が存在するもの全体が $2T$ で決まる genus $\mathfrak{L}$ である。以下、$2T$ のことを T と書く。

すべての $T\in\mathfrak{L}$ に対して $\det(T)$ は一定なので、これを $d(\mathfrak{L})$ と書こう。また $T\in\mathfrak{L}$ ならば、フーリエ係数 $a(T)$ は一定なので、

$$\sum_{T\in GL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{L}}\frac{1}{|O(T,\mathbb{Z})|}$$

をくくり出せる。よって、ジーゲル公式より

$$\xi(s,E_n^{(k)})=(-1)^{nk/2}2^{ns+1}\frac{\rho_{2k}}{\rho_n\rho_{2k-n}}\sum_{\mathfrak{L}}\prod_{p<\infty}\frac{\alpha_p(H_k,\mathfrak{L})}{\alpha_p(\mathfrak{L},\mathfrak{L})}d(\mathfrak{L})^{k-s}$$

となる。これが計算の出発点である。この計算は対称行列のゼータ関数の計算に似ている。詳しくは [21] ないしは [29] を参照されたい。

未解決問題 3. *(i) フーリエ展開係数 $a(T)$ が T の属する genus だけで決まっているような保型形式にはどのようなものがあるのか。*
(ii) Koecher-Maass 級数が易しくなるのは, genus だけで決まっていることが必須なのか？たとえば (genus だけでは決まっていないことがわかっている）池田・宮脇リフトでは無理なのか？
(iii) 任意のレベルに対するジーゲルアイゼンシュタイン級数の Koecher Maass 級数を具体的に書け。
(iv) すべての tube domain で「易しい保型形式」の Koecher- Maass 級数の具体形を求めよ。（これはいくつかは知られている。文献は自分ではあまりきちんと調べていないので、この文書には記載しない。）

8. Siegel 公式とアイゼンシュタイン級数

8.1. **正定値の場合.** まず簡単のために S が整数係数の m 次正定値対称行列の場合から説明する。T を整数係数の n 次正定値対称行列で $n < m$ としておこう。このとき $S[X] = {}^tXSX$ と書くことにして、

$$A(S,T) = \{X \in M_{m,n}(\mathbb{Z}) : S[X] = T\}$$

となるものの集合は有限集合である。ここで $A(S,T)$ の一般的な公式はなどはもちろん望めない。しかし、Siegel は次を 1930 年代に

Theorem 8.1 (Siegel [87]). *(1) S の種にわたる $A(S,T)$ の平均値は局所的な量 (local density) の積で記述される。*
(2) S によってきまるジーゲル上半空間 H_n 上のテータ級数

$$\theta_S(Z) = \sum_{X \in M_{mn}(Z)} e(Tr(S[X]Z)) \qquad e(*) = e^{2\pi i *}, Z \in H_n$$

の S の種に渉る平均値は、ジーゲルアイゼンシュタイン級数になる。

という非常に興味深い定理を証明した。これは実は Siegel 保型形式が定義される以前の話（ジーゲルが「入門」と称する論文を書く以前の話）なのである。ここで S の種というのは、整数係数の対称行列の集合 $\{S'\}$ で、すべての $\mathbb{Q}$ の素点 $v \leq \infty$ について、ある $g_v \in GL_m(\mathbb{Z}_v)$ があって、$S' = S[g_v]$ となるようなものである。ここで $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{R}, \mathbb{Z}_v = \mathbb{Z}_p$ ($v = p$ が素数）としている。S と S' が $GL_m(\mathbb{Z})$ の元 g につて $S' = S[g]$ となるときは S と S' は同値という。ひとつの種の中でのことなる同値類の個数を S の類数という。

この定理の (2) について、良く解説に登場するのは、E_8 の場合である。整数係数対称行列は対角成分がみな偶数の時、偶行列と呼ばれる。$\det = 1$ の偶行列全体は一つの種をなすことが知られている。特にこのような行列が存在するのは $m \equiv 0 \bmod 8$ の場合に限られ、また $m = 8$ ならば類数は 1 になる。この類の代表を E_8 と書く。この場合は一つの種の中で平均を取る必要がないので、たとえば $z \in H_1$ に対して

$$\theta_S(z) = E_4(z)$$

(ウェイト 4 のアイゼンシュタイン級数）となり、この係数が $A(S,t)$ を与え、それは $E_4(z)$ のメリン変換で記述される。$E_4(z)$ のメリン変換、すなわち $E_4(z)$ のゼータ関数は

$$\zeta(s)\zeta(s-3)$$

となる。

しかし、この解説は **非常にミスリーディングである。** 第一に、たとえ $n = 1$ でも、ジーゲル公式から得られるアイゼンシュタイン級数のゼータ関数は、一般に**オイラー積をもたない。** さらに、アイゼンシュタイン級数で書けると言っているが、アイゼンシュタイン級数というのは一般のレベルでは山ほど異なるものがあるわけで、いったいどの関数になっているのか正確に記述されていない。

正確にはどういうアイゼンシュタイン級数なのかというのは当然の疑問で、これを正確に書いたのは Lynne Walling [100] であろうと思う。

(実は今のところ詳しくは読んでいないので、ざっと見た推察に過ぎないのだが、多分推察は正しいであろう。)彼女はこの仕事を、ジーゲルがやり残した仕事を完成させたと、非常に誇りに思っていたようだ。このような仕事は、なんとなく哲学好きな傾向のある、理論的ではない具体的な計算を軽んじがちな日本人には受けない仕事のような気もするのだが、私は良い仕事だと思っている。彼女は残念ながら最近亡くなった。癌だったそうだ。初めて会ったのは 2000 年の 3 月で、コロラド大学の保型形式集会の主催者だった。このとき、彼女は Kohnen を呼び、Kohnen が Böcherer に声を掛け、彼らが私にも声を掛けて、私と広中由美子さんが出席した。これは Cris Poor, David Yuen と知り合うきっかけとなり、Cris が最近そのことで、我々は Walling に感謝しないといけないのだ、と言っていた。

ところで、それではこの Walling の結果から $A(S,T)$ の平均値は一般的になんになるのか公式を書け、といわれると、たぶん Walling のままでは書けないであろう。この問題について、私は昔から興味があって、これはここに登場するアイゼンシュタイン級数それぞれの Koecher Maass 級数を計算することに相当するはずだと思うがこれは残された問題だと思う。難しいのか易しいのか、よく知らないが極端に難しくはないのではないかと思っている。私自身が研究する予定は今のところ無いけれど。ちなみに平均値は S から T を表す local density であり、これは [76], [104], [103] などに記述があるから、それを使うと、ジーゲル公式にあらわれるテータの平均値の Koecher Maass 級数は原理的には計算できるはずである。もちろん原理的に「計算できるはず」というのと実際に計算することは雲泥の差があるので、本当の結論はやってみないとわからない。一般の local density というのは、かなり複雑だったと認識している。

未解決問題 4. *Siegel* 公式にあらわれる正定値 2 次形式の表現数の平均値の公式を、任意の種に対して具体的に与えよ。*(Walling* の公式に現れる、すべてのレベルの *Eisenstein* 級数の *Koecher Maass* 級数の公式を具体的に書け。)もちろんこれは一種の *local density* の積の母関数である。前に述べたとおり、たとえば [76] などを用いてどの程度易しく計算できるのかは知らない。しかし計算が得意だと思う人は、やってみる価値はあるのではないか。

8.2. **不定符号の場合.** 前節の最後の問題について、不定符号の場合で $n=1$ については解答があるので、これについて書きたい。前と同様、S のサイズを m, target T のサイズを n としておく。なお、不定符号で $n>1$ の場合は Klingen [46] がテータ関数の変換公式について、仕事をしている。これは Siegel の結果の拡張である。S が不定符号の場合は、テータ関数はそのままでは $S[X]=T$ なる整数行列 X が無限個あるので、具合が悪い。それで S の majorant という正定値行列をもちいて、実解析的テータ関数を定義することになる。この平均値が $A(S,T)$ の平均値のかわりを務める。この Klingen の論文の mathscinet での reviewer は A. Weil である。

それはともかく、われわれの次元公式という観点からの興味で言えば、S が符号 $(1, n-1)$ の 2 次形式の時、前に述べたように S のゼータ関数 $\zeta(s,S)$ は $SO(n,2)$ に付随する IV 型領域の保型形式の次元公式に登場し、$\zeta(1-m,S)$ が具体的にどうなるかが問題である。このようなゼータは今では本質的には

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\prod_{v\leq\infty}\alpha_v(S,t)\right)t^{-s}$$

と書けるので local density についての公式が [76], [103], [104] などで知られていることを用いる証明もあるだろう。私の証明は Siegel の 実解析的テータ関数の平均値が実解析的アイゼンシュタイン級数になるというジーゲルの結果 [89] を用いる。

実は m が偶数、かつ $n=1$ の時は、この問題は非常に詳しく、[31] の第 7 章で取り扱っている。これは私が知る限り新結果であるが、英文論文にはしていない。なお、このような結果は [55] にも一部ある。これはここでは繰り返さない。

m が偶数の時は以上の通りだが、では m が奇数ならどうするのか、という疑問が当然生じる。この場合、普通に考えて、$\zeta(s,S)$ 自身が綺麗であるという保証はない。たとえば、正定値で考えても、サイズが奇数の S のテータ関数は半整数ウェイトなのだから、よく知られているように、そのメリン変換の公式は複雑である。一方で、特殊値だけについてなら、簡単な結果があるのは [31] p. 329 系 7.22 に述べてあるとおりである。しかし系 7.22 の証明は本では関数等式を使えとだけ書いてきちんと説明していないので、ここで解説する。

m が奇数ならば、S の符号が (p,q) で q が偶数の時、[88] II の定理より

$$\xi(s,S)=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s,S)$$

とすると

$$\xi(s,S)=(-1)^{m-n}\det(2S)^{-1/2}\xi(\frac{m}{2}-s,S^{-1})$$

となり、$s=1-r$ での値は、$\zeta(s,S)$ が $s=m/2$ いがいでは正則と言うことがわかっているので、$r\geq 2$ ならば、$\Gamma(1-r)^{-1}=0$ から、$\zeta(1-r,S)=0$ である。一方で $\zeta(0,S)$ の値は $\zeta(s,S)$ の $s=m/2$ の留数で書けるが、この留数は Siegel によりわかっているから、$\zeta(1-r,S)$ はいつでも有理数で具体的に書ける。

未解決問題 5. *Symmetric tube domain* の保型形式の次元公式を具体的な *torsion free* 離散群に対して具体的に与えよ。(特に若槻の、中心的巾単元以外が消えるという定理を一般の *tube domain* に拡張せよ。)

9. 指数和とベルヌーイ数

9.1. 未解決問題の宝庫. 次元公式は、指数和の公式に関する問題の宝庫である。次元公式ないしはヘッケ作用素の跡を Selberg の跡公式で計算すると、非半単純元の共役類の寄与はなんらかの概均質ベクトル空間の抽象的に定義されたゼータ関数の特殊値で与えられるはずであ

る。ただし、この特殊値を求めたいと思ったら、この抽象的なゼータ関数が実際のところ具体的に何であるのかを調べて、その具体的なゼータ関数の特殊値の知られた求め方に帰着するという方法以外は知られていない。

一方で、Riemann-Roch-Hirzebruch の定理、および Lefschetz fixed point theorem で計算すると、指数和（1の巾根に関する複雑な和）で与えられる。これは具体的な巾根の和であるが、これが一体何なのか(もっと単純な公式はあるのか)、たとえば有理数になるのか、ベルヌーイ数で書けるのか、類数などと関係するのか、などの疑問は、大抵の場合、すぐには答えられない。たぶん答のわかっていない問題が多数あるであろう。

幸運にもセルバーグ跡公式で具体的な回答が得られている場合は、それとの比較で指数和をゼータ関数の特殊値で書く公式が得られる。ゼータ関数の特殊値がわかりやすい算術的な量で書けている場合は、指数和の明示的公式ができるわけである。しかしその場合でも、その指数和の公式の初等的な証明は、と聞かれると、大抵は誰も知らない。ここには非常に面白い問題があると思う。たとえば、Hilbert modular 上での表現に関して、齋藤裕 [63] に出てくる指数和は、わかりやすい表示は知られていないし、そういう問題を初等的に示すのは難しいのだと思う、と齋藤さんは言っていた。　具体的にどういうことが問題になるのだったか、よく覚えていないが、この場合は吉田敬之 [106] の跡公式による計算と比較するというのが自然で、実際 $k \geq 4$ では、そのようにして、ある表示が相対類数の和になることが示される．果たしてこの公式の初等的な証明があるのかどうか私はよく知らない。$k = 2$ のときは跡公式の計算は適用範囲外なので、この場合がどうなっているのかよく知らない。(少なくとも [63] では予想になっている。しかし冷静に考えると、寄与が k に本質的に依らないというのは幾何的に証明可能であると考えるから、[30] と同様に考えれば、実際はできているような気もするのだが)、[63] は $k = 2$ で類数が 1 というようなあまり好ましくない条件がついていたりするので、なんとなく中途半端だし、実際のところ、何が何と等しくあるべきなのか、とかいうことが非常に明確には述べられていないように思う。今とは時代が違うので、現代の誰かが明快に解説できると面白いだろう。

未解決問題 6. 斎藤 [63] にでている指数和を直接計算して公式を作れ.

あるいは、対馬龍司 [99] の指数和は、伊吹山 [24], 荒川・伊吹山・金子 [4] 第 8 章などと深い関係がある。これらを使えば [98] で述べられている問題は皆解けると思った記憶があるのだが、昔のことで忘れてしまった。しかし、このあたりの数学の感覚については [4] の第 8 章の序文に思うところを詳しく書いてあるので、そちらを読んでいただければ幸いである。

また概均質ベクトル空間の立場から、いきなりうまい指数和を考えて、これが特殊値と関係しそうだ、というような予想ができれば、これは非常に面白い。しかし、一般にこのような理論は皆無であると思う。

未解決問題 7. 概均質ベクトル空間から、何らかの手段で「自然」に指数和を定義し、その公式を求めよ。

ベルヌーイ数とゼータ関数の本 [4] は私が共同執筆を提案して実現した本であるが、私の一つの目論見は Lee-Weintraub の指数和について、いろいろ考えていたときに得た sporadic な結果をまとめることであった。これをまとめた第 8 章は一部の外国人レフェリーには非常に評判が悪かったが（本に執筆するような内容ではない、とまで言われた）、近年 Brad Isaacson がその周辺を精力的に研究する動機のひとつになっているので、書いておいてよかった ([36], [37], [38], [39], [40] など)。こういう問題は単純だと誤解して見下している人もいるが、実は難しいのだということは自分でやってみればわかる。第 8 章の序文を参照されたい。（単純な主張でも内容は深いのが整数論の特徴だ、と時々言われるのだが、まあ大げさに言えばそれに類した側面はあるだろう。）

9.2. **Hecke の結果.** $SL_2(\mathbb{Z})$ の、レベルが素数 p の主合同部分群を $\Gamma(p)$ と書くことにする。このとき、$SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(p) \cong SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ により、$\Gamma(p)$ に関する、ウェイト k の一変数正則保型形式の空間 $A_k(\Gamma(p))$ には有限群 $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ が作用している。この作用素を既約分解する問題を、ヘッケは何故か Fundamentalproblem と呼んで、生涯にわたり追求していた。(p は奇素数とする。）$SL_2(\mathbb{F}_p)/\{\pm 1\}$ の既約表現の次数は

$$p, \quad p+1, \quad p-1, \quad (p+1)/2, \quad (p-1)/2$$

であり、指標の表は単位指標以外は

$degree$	G_q	$G^{(1)}_{(q+1)/2}$	$G^{(1)}_{(q+1)/2}$	$G^{(1)}_{(q-1)/2}$	$G^{(2)}_{(q-1)/2}$	$G^{(i)}_{q+1}$	$G^{(i)}_{q-1}$
$\chi(U)$	0	$\frac{1+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$-\frac{1+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	1	-1
$\chi(U^\nu)$	0	$\frac{1-\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{\epsilon q}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{\epsilon q}}{2}$	1	-1
$\chi(R^a)$	1	$(-1)^a$	$(-1)^a$	0	0	$\rho^{ia}+\rho^{-ia}$	0

である。ただし ν は平方非剰余、$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ で g は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ の生成元、$\epsilon = (-1)^{(p-1)/2}$. $\rho = e^{2\pi i/(\rho-1)}$. $G^{(i)}_{q-1}$ は $q+1$ 乗が 1 の元の上で character が i による。$G^{(i)}_{(q+1)/2}$, $G^{(i)}_{(q-1)/2}$ を第 2 種 (zweiter Art) という。また G_{q+1} は $(q-3)/2$ 個、G_{q-1} は $(q-1)/2$ 個ある。群の位数と既約表現の次数の平方和が等しいというよく知られた関係式は

$$\begin{aligned}\frac{q(q^2-1)}{2} &= 1 + q^2 + 2\left(\frac{1+q}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \\ &\quad + (q-1)^2\frac{q-1}{2} + (q+1)^2\frac{q-3}{2}\end{aligned}$$

で与えられる。(Hecke [15] 全集 p. 699.　あるいは近藤武 [51] 群論 III 定理 8.33)

$A_k(\Gamma(p))$ における $SL_2(\mathbb{F}_p)/\{\pm 1_2\}$ の $G^{(i)}_{(q+1)/2}$ の重複度を y_i, $G^{(i)}_{(q-1)/2}$ の重複度を w_i と書くと

Proposition 9.1 (Hecke, p.704, p.893)**.** *k even ならば $y_1 - y_2 = h(\sqrt{-p})$, k odd ならば $w_1 - w_2 = h(\sqrt{-p})$.* この差の空間は量指標のテータ関数で張られる。

9.3. **Hecke の結果の拡張 (Hilbert case and Siegel case).**

1970 年代に、ヘッケの論文に書いてある結果と似たことがないかを考えるのが流行した。（まだ Hecke の遺産で過ごしていた時代だった。それからジーゲルの遺産を考える時代に移行した。）

Hilbert modular の場合、つまり総実体 F について、 $SL_2(O_F)$ の保型形式に対する $SL_2(\mathbb{F}_q)$ の表現の重複度、および重複度の差の表示については、齋藤裕 [63] が代数幾何により、吉田敬之 [106] （プリンストンの博士論文）が跡公式により計算した。ちなみに私は [106] のコピーを持っていたのだが、長い間に行方不明になってしまった。東大の図書館にあるらしい。

Siegel modular の場合は Lee and Weintraub [53] 橋本喜一朗 [14]、対馬龍司 [98] 等が考えた。(山崎正のプレプリントというのもあったが、発表されなかった。対馬によれば、正しくないところがあったと言うことだった。）しかし指数和を具体的な数値で書こうと考えて大変な苦労の末に、自明でない L 関数の特殊値について、何らかの式を最初に与えたのは荒川恒男 [3] である。

B. Srinivasan [93] は $Sp(2,q)$ の既約表現の表を与えた。（ちなみに、このような結果は古典的に大昔からよく知られていたのだろうと思うかもしれないが、論文の年号をみてみればわかるように、1968 年にやっと出てきた結果であり、これは私が大学 2 年生の時だった。つまり、当時はこのような結果自身がかなりホットな話題だったのである。実際ここで残されていた、2 巾体の場合が、榎本彦衛氏の修士論文 [10] (1972) になっているのである。）[93] の記号では Symplectic 群の内積を

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

としているから、普通ので考えると、2 行と 3 行、2 列と 3 列を入れ替えるべきである。よって $J = \begin{pmatrix} 0_1 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix}$ で $Sp(2,p)$ を定義すると、やはりそこの記号で A_{ij} と書かれているものは、普通の意味では

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A'_{21} = -A_{21}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A'_{22} = -A_{22}$$

となる。ここで ν は $(\nu/p) = -1$ (quadratic non-residue) となる元である。$Sp(2,\mathbb{Q})$ の既約指標で、複素数が表れるものは 4 つ ψ_{12}, ψ_{22}, ψ_{31}, ψ_{32} でこれらは共役類 A_{21} と A_{22}, おおび A_{41} と A_{42} で共役な複素数をとる。

$g \in Sp(2,\mathbb{F}_p)$ として、

$$L(g) = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i Trace[g|H^{3-i,0}((H_3/\Gamma(p))^*, \mathbb{C})]$$

とおく。($*$ は Igusa compact 化)。

Proposition 9.2 (Lee and Weintraub [53])**.** 素数 p について $p \equiv 3 \bmod 4$ と仮定する。

$$Im(L(A_{21})) = \frac{p(p^2-1)}{8}\Bigg(\big(\frac{1}{8}h(-p) - \frac{1}{12}B_{3,\chi}\big)\sqrt{-p} + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-2}\frac{\chi(a)}{(1-\zeta^{-j})(1-\zeta^{j+1})(1-\zeta^{j(j+1)})}\Bigg).$$

$$L(A_{41}) = 0.$$

注意 : Srinivasan の表によれば、A_{21} では、A_{22} と値が異なるのは虚の部分だけで、この虚部は ψ_{21}, ψ_{31} で

$$p\tilde{\epsilon} = p\frac{-1+\sqrt{-p}}{2}$$

ψ_{22}, ψ_{32} で

$$p\tilde{\epsilon'} = p\frac{-1-\sqrt{-p}}{2}$$

の形をしている。

Proposition 9.3 (荒川 [3] Theorem 3.4)**.** 元 $\alpha \in Sp(2,\mathbb{Z})$ に対して、$\Gamma(p)\alpha$ の $S_k(\Gamma(p))$ への作用の跡を $Tr(\alpha)$ と書くことにする。A_{21}, A_{22} の代表するコセットを *Selberg* 跡公式で計算すると

$$Tr(A_{21}) - Tr(A_{22}) = -p^2(p^2-1)\sqrt{-p}L(0, L_2^*, \psi)$$

である。*(*橋本 [14], 対馬 [98] も参照*)*

特に *Lee-Weintraub* [53] とあわせれば

$$-p^2(p^2-1)\sqrt{-p}L(0,L_2^*,\psi) = \frac{p(p^2-1)}{4}\Bigg(\big(\frac{1}{8}h(-p) - \frac{1}{12}B_{3,\chi}\big)h(\sqrt{-p}) + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-2}\frac{\chi(a)}{(1-\zeta^{-j})(1-\zeta^{j+1})(1-\zeta^{j(j+1)})}\Bigg).$$

となる。

ここで $L(s, L_2^+, \phi)$ の定義は section 3.4 で述べたとおりである。また、χ を導手 f の原始的ディリクレ指標とするとき、一般ベルヌーイ数 $B_{n,\chi}$ は

$$\sum_{a=1}^{p} \frac{\chi(a)te^{at}}{e^{pt}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n,\chi}}{n!} t^n.$$

で定義する ([4])。特に

$$B_{1,\chi} = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)a$$

$$B_{3,\chi} = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)a^3 - \frac{3}{2} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)a^2 + \frac{f}{2} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)a$$

である。

ベルヌーイ多項式を

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} \qquad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

と定義する。もっと一般には

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

で定義する ([4])。$x \in \mathbb{R}$ に対して $\langle x \rangle$ を $x - \langle x \rangle \in \mathbb{Z}$, かつ $0 < \langle x \rangle \leq 1$ となる実数とする。（つまり x の小数部分、ただし、x が整数の時は 1 とする。）ここで次の複雑な記号を導入する。

$$\mathcal{A} = -\sum_{\alpha,\gamma}{}' B_1(\langle \frac{\alpha^2 - 2\alpha\gamma}{p} \rangle) B_1(\langle \frac{2\alpha\gamma}{p} \rangle) B_1(\langle \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{p} \rangle) + \frac{1}{12}(3 + \delta_{p,3}) B_{1,\psi}$$

ただし、α, γ は $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ かつ $\alpha^2 \not\equiv 2\alpha\gamma \bmod p$, $\alpha\gamma \not\equiv 0 \bmod p$, $\alpha^2 \not\equiv \gamma^2 \bmod p$ なるものを動く。

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{3} \sum_{\alpha,\gamma}{}'' B_2(\langle \frac{\alpha^2 - 2\alpha\gamma}{p} \rangle) B_2(\langle \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{p} \rangle)$$

ここで $(\alpha, \gamma) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ かつ $\alpha^2 \not\equiv \gamma^2 \bmod p$ を動く。

Theorem 9.4 (荒川 [3])**.** 以上の記号の下で、$p \equiv 1 \bmod 4$ ならば $L(0, L_2^*, \psi) = 0$. もし $p \equiv 3 \bmod 4$ ならば

$$L(0, L_2^*, \psi) = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \frac{11}{36p} B_{3,\psi} - \frac{1}{24p} B_{1,\psi}$$

である。

しかし、荒川の複雑な計算とは全く独立に、直接的に次がわかる。

Theorem 9.5 (伊吹山・齋藤 [18])**.** $p \equiv 3 \bmod 4$, $p > 3$ の仮定の下で

$$L(s, L_2^*, \psi) = -\frac{2^{2s-1}B_{1,\psi}}{p^s}\zeta(2s-1).$$

特に $s = 0$ として $\zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} = -1/24$ より

$$L(0, L_2^*, \psi) = \frac{1}{24}B_{1,\psi}.$$

m を 1 以上の整数とすると

$$L(1-m, L_2^*, \psi) = \frac{p^{m-1}}{2^{2m}m}B_{2m}B_{1.\psi}.$$

証明は ψ は2次形式と2次体の order のイデアル類の対応を考えると、いわゆる2次体の genus character （イデアル類群の位数2の指標）とみなせて、定義から直接的に示される。この結果は [4] の第 10 章でも日本語で解説している。

なお、この結果を出した経緯は次のとおりである。1991 年の 12 月はじめごろに数理研で、当時、一時的に九大の助手だった Pia Bauer というドイツ人女性研究者が2元2次形式のゼータについての講演を行って、これは2次体のゼータでもあるから、というような話をした。彼女の講演にはあまり感銘を受けなかったが、「ああそうだった、2元2次形式は2次体だったな」と始めて思いついて、これで $L(s, L_2^*, \psi)$ を書き換えたらどうなるかな、と思って、ついでに具体的な p について例を計算してみると、係数がどんどん消えるのである。これにはちょっとぎょっとして、きちんと理屈を考えてみたら、すぐ上の結果が出た。以前、私がまだ九大にいた 1990 年ごろに齋藤裕さんが九大に来た時に（私が阪大に移ったのは 1991 年)、私が彼に「こういう特殊値（指数和）に興味があって無手勝流で計算してみているのだがあまりうまくいかない」という話をしたことがあったのだが、そのことが念頭にあったので、結果を出したあと、京都に立ち寄った機会に、斎藤さんに結果を書いた文書を見せた。そしたら、彼が「それは私も知っていた」という説明をしたので、それで共著論文を私が書いた。だから、これはふたりが全く独立に得た結果であった。一般の次数の場合の、2次形式全体のなす概均質ベクトル空間のゼータ関数についての共同研究は、このときに私が提案して始まった。なお、上記の論文では $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変な格子（本質的に有限個）についての結果を追加してある。

これから直ちに

Proposition 9.6. $p \equiv 3 \bmod 4$, $p > 3$ として、y_{ij} を ψ_{ij} の $S_k(\Gamma(p))$ における $Sp(2,p)$ の既約表現の重複度とすると、

$$y_{21} - y_{22} - y_{31} + y_{32} = \frac{p(p^2-1)}{24}h(\sqrt{-p})$$

未解決問題 8. この重複度の差の空間は2次ジーゲルカスプ形式の空間 $S_k(\Gamma(p))$ の中でどのような保型形式で張られるのか。また類数が現れるのは何故か？*Hecke* の論文にあるような説明を与えよ。

以上の結果と [53] および補題9.3 を比較して次を得る。

Proposition 9.7 ([18])**.** p を $p \equiv 3 \bmod 4$ となる素数で、$p > 3$ とする。また ψ を *quadratic residue symbol* とする。このとき

$$\sum_{(a,b,c)\in S} \frac{\psi(abc)}{(1-\zeta^a)(1-\zeta^b)(1-\zeta^c)} = -\sqrt{-p}\left(\frac{p+1}{4}B_{1,\psi} + \frac{1}{6}B_{3,\psi}\right).$$

ただし $S = \{(a,b,c); 1 \le a,b,c \le p-1, ab+bc+ca \equiv - \bmod p\}$ とおいている。

注意：$p > 3$ で $p \equiv 3 \bmod 4$ ならば $B_{1,\psi} = -h(\sqrt{-p})$ である。
この補題 9.7 の初等的な証明は今に到るも知られていない。

ちなみに Pia Bauer Wigner はもともと訓練を受けた上手な歌手だったが（一度、九大にいたころに、サンサーンスの「サムソンとデリラ」の楽譜を私がプレゼントして、歌ってもらったことがある。ピアノ伴奏はザギエだった。）、その後、数学者をやめて、パリに出てコンセルバトワールに通っていると聞いていた。近況はよく知らないが、メゾソプラノ歌手としての活動をウェブで見ることができる。

9.4. **Arakawa identity and Tsukano conjecture.** 以後、$p \equiv 3 \bmod 4$ と仮定する。また整数 h に対して、次の集合を定義する。

$$S_h = \{(a,b,c); 1 \le a,b,c \le p-1, ab+bc+hca \equiv 0 \bmod p\}$$

また次の二つの量を定義する。

$$I(h,p) = \sum_{(a,b,c)\in S_h} \frac{\psi(abc)}{(1-\zeta^a)(1-\zeta^b)(1-\zeta^c)},$$
$$J(h,p) = \sum_{(a,b,c)\in S_h} \psi(abc)abc.$$

$I(1,p)$ の値は [18] でわかっていた。（つまり上の Proposition 9.7 である。）$\mathfrak{g}(\psi)$ を ψ に対するガウス和とする。つまり

$$\mathfrak{g}(\psi) := \sum_{a=1}^{p-1} \psi(a)e^{2\pi ia/p} = \sqrt{-p}$$

ちなみに ζ が 1 の原始 f 乗根のときには

$$\frac{1}{1-\zeta^a} = -\frac{1}{p}\sum_{c=1}^{f-1} \zeta^{ac}$$

であることは容易にわかるので（たとえば [4] の第 8 章）、$I(h,p)$ の式を指数和に書き換えることは容易である。ただし出てくる 2 次形式はもととはかなり変わった形になる。（いわば dual といってよい。）これは、この手の和に関する手ごろな演習問題であって、これを実行するといろいろ思うことも出てくるであろう。もちろん書き換えたからと行って全然容易になるわけではない。

以下に述べる予想は、阪大修士課程で、私の学生だった束野仁政（さとゆき）氏が、私の勧めで実験した修士論文の内容である。彼はもと

もと学部の時は埼玉大の佐藤孝和君の学生で、大学院から阪大に来た。修士終了後、直ちにベンチャー系に就職したが、現在は転職して、大学関係で量子計算機のプログラマなどの技術的な仕事をしている。活躍の様子はウェブでみることができる。

Conjecture 9.8 (東野 [96]). $\zeta = e^{2\pi i/p}$ とする。また $p \equiv 3 \bmod 4$ とする。このとき次が成り立つと予想される。

$$I(1,p)/g(\psi) = -\left(\frac{p+1}{4}B_{1.\psi} + \frac{1}{6}B_{3,\psi}\right), \tag{6}$$

$$I(p-1,p)/g(\psi) = -\left(\frac{p-3}{4}B_{1,\psi} + \frac{1}{6}B_{3,\psi}\right), \tag{7}$$

$$I(2,p)/g(\psi) = \begin{cases} -\frac{1}{6}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\left(\frac{p+1}{6}B_{1,\psi} + \frac{5}{18}B_{3,\psi}\right) & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{8}$$

$$I(\frac{p-1}{2},p)/g(\psi) = \begin{cases} \frac{p-4}{4}B_{1,\psi} + \frac{5}{24}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\left(\frac{p-5}{6}B_{1,\psi} + \frac{17}{72}B_{3,\psi}\right) & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{9}$$

$$I((p+1)/2,p)/g(\psi) = \begin{cases} \frac{p}{4}B_{1,\psi} + \frac{5}{24}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\left(\frac{p+1}{6}B_{1,\psi} + \frac{17}{72}B_{3,\psi}\right) & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{10}$$

$$I(p-2,p)/g(\psi) = \begin{cases} -\left(B_{1,\psi} + \frac{1}{6}B_{3,\psi}\right) & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\left(\frac{p-5}{6}B_{1,\psi} + \frac{5}{18}B_{3,\psi}\right) & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{11}$$

$$J(1,p)/p^2 = \frac{p+1}{2}B_{1,\psi} - \frac{1}{6}B_{3,\psi}, \tag{12}$$

$$J(2,p)/p^2 = \begin{cases} -\frac{1}{2}B_{1,\psi} + \frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ \frac{2(p+1)}{3}B_{1,\psi} - \frac{5}{36}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{13}$$

$$J(\frac{p-1}{2},p)/p^2 = \begin{cases} \frac{3p+1}{4}B_{1,\psi} + \frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\frac{p-3}{4}B_{1,\psi} - \frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases} \tag{14}$$

(15)

$$J(\frac{p+1}{2},p)/p^2 = \begin{cases} -\frac{p-1}{4}B_{1,\psi} + \frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ \frac{3(p+1)}{4}B_{1,\psi} - \frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases}$$

(16)

$$J(p-2,p)/p^2 = \begin{cases} \frac{2p-1}{2}B_{1,\psi} + \frac{1}{12}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 3 \bmod 8, \\ -\frac{p-2}{3}B_{1,\psi} - \frac{5}{36}B_{3,\psi} & \textit{if } p \equiv 7 \bmod 8, \end{cases}$$

(17)

$$J(p-1,p)/p^2 = -\frac{p-1}{2}B_{1,\psi} - \frac{1}{6}B_{3,\psi}.$$

上の予想は全部独立というわけではない。

Isaacson の発想: 以上の予想を英語に翻訳して、B. Isaacson に送ったところ、彼は自分が証明できると思うと言って、実際に彼はほどなく証明した。Brad Isaacson は Rutgers, Newark での Robert Sczech の弟子で、Sczech は Zagier の弟子である。Sczech は既に大学を退職している。退職の時に彼が数学教室に数学研究のために 50 万ドルを寄付したというのがウェブの記事になっている。

Isaacson は、対称行列のゼータ関数の明示的公式を与えることが自分の Jugentraum だった（伊吹山・齋藤の論文を見るまでは）と私に言ってきた。

Sczech はマックスプランク研究所で荒川君と同じ時期を過ごした。Isaacson に「夜の何時であろうと、荒川の部屋はいつも電気がついていて数学をやっていた」と語ったそうで、このことを聞いたのは、Arakawa の $L(0, L_2^*, \psi)$ についての仕事と同じくらい inspirational だった、と私宛のメールに書いてあった。

Isaacson の観点では、荒川氏の contour integral による $L(0, L_2^*, \psi)$ の $B_1(\{x\})$ の三重積での複雑な公式 Theorem 9.4 と伊吹山・齋藤の公式 Theorem 9.5 を組み合わせて、これを三重積に関する新しい公式と思うことにする。これを用いると、いろいろ新しい関係式が証明できるという発想である。確かに荒川プラス伊吹山・齋藤は、非常に摩訶不思議な公式を与えるが、こういうことが新しいことに利用できるとは私は思ってもみなかった。荒川君の仕事が意外な形で正当に評価されるのを嬉しく思う。

Proposition 9.9 (B.Isaacson [40])**.** 東野予想は正しい。

しかし、Isaacson の手法は相当 ad hoc であって、どうしてこの手法で、わからなかったときの計算がうまくできるのか、ということの本質的な理由が私にはよくわからない。そもそもこれは普通の意味での初等的な証明とは言いかねるであろう。

未解決問題 9. *(i)* 指数和の公式の初等的な証明を与えよ。少なくとも、もう少し哲学的な説明を与えよ。

(ii) なぜ上にあげた h だけうまくいっているのだろうか？あるいはうまくいく２次式とそうでない２次式はどういう違うがあるのだろうか？
(iii) 他の概均質ベクトル空間では、このような指数和の問題はないのか？たとえば、３行３列の対称行列からなる概均質ベクトル空間では、どうなるのか？$\det \equiv 0 \bmod p$ のところで和をとるとか？もっともらしい一般論を予想し、証明せよ。
(iv) Isaacson の証明から、荒川の公式を「消去」して、これを、より初等的な証明、ないしは本質的な記述に変形せよ。

10. 付録：ジョルダン分解の補足的解説

現在の日本ではあまり２次形式の整数論はポピュラーでなくなっているかもしれないので、[45] p. 71, [62], [31] より、局所的なジョルダン分解について少し引用しておく。

(V,Q) を $\mathbb{Q}_p$ 上の２次空間として、$B(x,y)=\frac{1}{2}(Q(x+y)-Q(x)-Q(y))$ とする。$B(x,x)=Q(x)$ である。L を V の $\mathbb{Z}_p$-lattice をする。$s(L)=B(L,L)$ とおいて scale という。また

$$n(L)=\{\sum_i a_iQ(x_i); a_i\in\mathbb{Z}_p, x_i\in L\}$$

とおく。$p\neq 2$ ならば、$n(L)=s(L)$ である。$p=2$ ならば $n(L)=2s(L)$ または $s(L)$ である。$\{v_i\}_{i=1}^n$ を L の $\mathbb{Z}_p$ 上の基底とする。行列 $A=(B(e_i,e_j))$ と $a\in\mathbb{Q}_p^\times$ について、$a^{-1}A\in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ のとき、L を (a) modular という。L が (a) modular ならば任意の $i.\ j$ に対して $B(v_i,v_j)\in a\mathbb{Z}_p$ であり、よって $s(L)\subset a\mathbb{Z}_p$ である。もし $a\mathbb{Z}_p\neq s(L)$ ならば、$B(v_i,v_j)$ はすべて $ap\mathbb{Z}_p$ の元と言うことになり、$a^{-1}A\in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ に反する。よって L が (a) modular ならば、

$$s(L)=a\mathbb{Z}_p$$

である。これは行列表示 A で言えば

$$A=p^tA_0 \qquad A_0\in GL_n(\mathbb{Z}_p)$$

と言うことである。特に $a\in\mathbb{Z}_p^\times$ に対して (a) modular なものを unimodular という。これは行列で言えば $\det(A)\in\mathbb{Z}_p^\times$ つまり $A\in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ というのを同じである。

$\mathbb{Z}_p$ 上の格子 L に対して、

$$L=L_1\perp L_2\perp\cdots\perp L_m$$

でかつ L_i が $s(L_i)$ modular であり、$s(L_1)\supset s(L_2)\supset\cdots\supset s(L_m)$ かつ $s(L_i)\neq s(L_{i+1})$ となる直交分解がある。これは行列で言えば、ある $0\le t_1<t_2<\cdots<t_m$ があって、1

$$A\sim\begin{pmatrix} p^{t_1}A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{t_2}A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p^{t_m}A_m \end{pmatrix}$$

で、$\det(A_i) \in \mathbb{Z}_p^\times$ と言うことである。このような、格子または行列の直交分解をジョルダン分解という。

Theorem 10.1 (O'Meara [62], Kitaoka [45])**.** *格子 L の 2 つの Jordan 分解について、次の性質がなりたつ。*

$$L = L_1 \perp \cdots \perp L_t = K_1 \perp \cdots \perp K_u$$

がともにジョルダン分解だとすると、
(1) $t = u$.
(2) $s(L_i) = s(K_i)$, $\mathrm{rank}(L_i) = rank(K_i)$ $(1 \le i \le t)$
(3) $n(L_i) = n(K_i)$ $(1 \le i \le t)$.
さらに $p \ne 2$ ならば、$L_i \cong K_i$ となる。つまり、この場合はジョルダン分解は一意的である。

p が奇数ならば、unimodular 行列 A は単純で、

$$\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

と同値である。([45] Theorem 5.2.4). p が奇数の時、2 つの n 次の unimodular 行列 A_1 と A_2 が $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 同値であるための必要十分条件は、$\det(A_1) = \det(A_2)(\mathbb{Z}_p^\times)^2$ であることである。実際、同値ならば、$UA_1\,{}^tU = A_2$ より $\det(A_1)\det(U)^2 = \det(A_2)$ である。また $\det(A_1) = \det(A_2)u^2$ $(u \in \mathbb{Z}_p^\times)$ ならば、$P = diag(1_{n-1}, u)$ で $(1_{n-1}, \det(A_1))$ と $(1_{n-1}, \det(A_2))$ は同値になる。だからより単純な言い方をすると次のようになる。

Theorem 10.2. *p を奇素数とするとき、$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ および $0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_r$ があって、*

$$A = \begin{pmatrix} p^{t_1}A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{t_2}A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p^{t_m}A_m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} p^{s_1}B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{s_2}A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p^{s_r}B_r \end{pmatrix}$$

で A_i は n_i 次、B_j は n'_j 次の行列で $\det(A_i)$, $\det(B_j) \in \mathbb{Z}_p^\times$ と仮定する。ここで A と B が $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 同値であるための必要十分条件は $m = r$, $n_i = n'_i$, $\det(A_i) \in \det(B_i)(\mathbb{Z}_p^\times)^2$ $(i = 1, \ldots, m)$ となることである。

以上により、p が奇数のときは、同型類は単純である。しかし、

$p = 2$ ならばジョルダン分解は全然一意的ではない。また $GL_n(\mathbb{Z}_2)$ 同値の代表元の記述は極めて複雑である。またユニモジュラー行列の構造も複雑である。たとえば、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

しかし、両者はジョルダン分解としての成分 1 と 3 などは同型ではない。

実は $p=2$ についても $GL_n(\mathbb{Z}_2)$ に関する同値類の記述は O'Meara [62] に定理として述べられている。これが複雑であることは前に述べた。この定理の記述が複雑なのは一般の局所体で述べてあることも一因だが、たとえ $\mathbb{Z}_2$ に限っても、本質的に面倒だと言う事実は変えられない。これはやむを得ないことである。これを避けたかったら何か新しい不変量を導入するしかない。(たとえば、池田・桂田の extended Gross-Keating invariant とか？)

11. 引用論文のタイプミス訂正

講演の準備の過程で気がついた、いくつかの自分の論文のタイプミスについてまとめておく。なお、十分検証したわけではないから、ほかにもあるものと思う。

(1) [20] I において、p.1100 第一節の l. 6 d_{ij} は dy_{ij}.
(2) p. 1108 l. 8 $S_n(R,d)$ は $S_n(\mathbb{Z}_p,d)$
l. 9, Hilfsatz 5 は Hilfssatz 5.
(3) p. 1110 下 l. 5, $1 \le i,j \le$ は $1 \le i,j \le m$.
(4) p. 1111 式 (3,4) は $p^{t_1}Xx_1' = 0$.
(5) p. 1225 Theorem (Körner) において、$\beta(n, \det x_i)^{-1}$ (マイナス一乗がぬけている。)
(6) [25] p. 21 l. 8 任意の不変作用素で $\to$ 任意の不変微分作用素で
(7) [25] の p. 24 の中ほど、$L_s f(X)$ は $(L_s f)(Y)$ の間違い。右辺の積分は、被積分関数に $f(Y)$ がはいる。
(8) [25] の p. 41 で $\eta(s,u)$ の最初の式は、右辺の積分の中に $a(T)$ がはいる。
(9) [25] の第 7 節 p. 38 において、h の定義がぬけているが、これは $h = P_k g$ が定義である。この記号は Maass [56] p. 210 にならっている。

参考文献

[1] 青木美穂、p 進ゼータ関数、久保田-レオポルドから岩沢理論へ、日本評論社、(2019), 284 pp+ii.

[2] T. Arakawa, The dimension of the space of cusp forms on the Siegel upper half plane of degree two related to a quaternion unitary group. J. Math. Soc. Japan **33** (1981), no. 1, 125–145.

[3] T. Arakawa, Special values of L-functions associated with the space of quadratic forms and the representation of $Sp(2n,\mathbb{F}_p)$ in the space of Siegel cusp forms, Adv. Stud. Pure Math.**15**, Academic Press, Inc., Boston, MA, (1989), 99–169.

[4] 荒川恒男、伊吹山知義、金子昌信、新装版ベルヌーイ数とゼータ関数、整数論の風景、共立出版 2022 年（旧版と比べて、細かい訂正以外に、２次形式の種の理論や Barnes の伝記等が追加されている。）

[5] D. Bump, Automorphic forms and representation, Cambridge Univ. Press (1997), xiv+574 pp.

[6] U. Christian, Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. Reine Angew. Math. **277** (1975), 130–154.
[7] U. Christian, Zur Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$, J. Reine Angew. Math. 296(1977), 108–118.
[8] H. Cohen, Sums involving at negative integers of L functions of quadratic characters, Math. Ann. **217**(1975), 271–285.
[9] W. Duke, Ő. Imamoḡlu, and Á, Tóth, On a method of Hurwitz and its application, Preprint 2023, 17 pp. `http:https://www.math.ucla.edu/~wdduke/`
[10] H. Enomoto, The characters of the finite symplectic group $Sp(4, q)$, $q = 2^f$. Osaka Math. J. **9** (1972), 75–94.
[11] R. Godement, Série de Poincaré et Spitzenformen, Séminaire Cartan 1957/58 Expose 10.
[12] J. Faraut and A. Korányí, Analysis on symmetric cones, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994. xii+382 pp.
[13] K. Hashimoto, Class numbers of positive definite ternary quaternion Hermitian forms. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **59** (1983), no. 10, 490–493.
[14] K. Hashimoto, Representations of the finite symplectic group $Sp(4, \mathbb{F}_p)$ in the space of Siegel modular forms, Contemp. Math. **53** (1986), 253–276.
[15] E. Hecke, Mathematische Werke, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht (1970),
[16] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices and an explicit conjecture on dimensions of Siegel modular forms of general degree, Internat. Math. Res. Notices(1992), no. 8, 161–169.
[17] T. Ibukiyama, On some alternating sum of dimensions of Siegel cusp forms of general degree and cusp configurations. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **40** (1993), no. 2, 245–283.
[18] T. Ibukiyama and H. Saito, On L-functions of ternary zero forms and exponential sums of Lee and Weintraub, J. Number Theory **48**(1994), no.2, 252–257.
[19] T. Ibukiyama, On dimensions of automorphic forms and zeta functions of prehomogeneous vector space. (in English) Theory of prehomogeneous vector spaces(Kyoto, 1994). 京大数理解析研究所講究録 **924** (1995), 127–133.
[20] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices I. An explicit form of zeta functions. Amer. J. Math. **117**(1995), no.5, 1097–1155. II: Functional equations and special values, Hiroshi Saito Memorial Volume of Nagoya Math. J. Vol. **208**(2012), 263–315. III. An explicit form of L functions, Nagoya Math. J. **146**(1997), 149–183
[21] T. Ibukiyama and H. Katsurada, An explicit form of Koecher Maass Dirichlet series associated with Siegel Eisenstein series（日本語）代数群上の保型形式、数理解析研究所講究録 **965** (1996), 41–51.
[22] 伊吹山知義、A survey on the new proof of Saito-Kurokara lifting after Duke and Imamoglu (日本語）, 第 5 回整数論サマースクール報告集 (1997). 134–176. ウェブは
`http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/proceedings.html`
[23] 伊吹山知義、齋藤裕、「やさしいゼータ関数」、日本数学会「数学」 Vol. 50 No.1 (1998), 1–11. `https://doi.org/10.11429/sugaku1947.50.1`
英文は Sugaku Exposition: On easy zeta functions Vol. 14(2001) 191–204. AMS (翻訳は Don Zagier による。英文のデジタルファイルはない。）
[24] T. Ibukiyama, On some elementary character sums, Commentarii Math. Univ. St. Pauli **47**(1998), 7–13.

[25] 伊吹山知義、Koecher-Maass series on tube domains, 第 1 回整数論オータムワークショップ報告集　(1998), 46 pp. ウェブは
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/proceedings.html
[26] 伊吹山知義, Dimension of holomocphic automorphic forms of tube domains: The contribution of central unipotent elements and zeta functions of prehomogeneous vector spaces, 第 3 回整数論オータムワークショップ報告集　(2000), 27 pp. ウェブは
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/proceedings.html
[27] T. Ibukiyama and H. Katsurada, An explicit formula for Koecher Maass Dirichlet series for Eisenstein series of Klingen type, J. Number Theory **102**, (2003), 223–256.
[28] T. Ibukiyama and H. Katsurada, An explicit formula for the Koecher Maass Dirichlet series for the Ikeda lift, Abhand. Math. Semi. Univ. Hamburg **74**(2004), 101–121.
[29] T. Ibukiyama and H. Katsurada, Koecher-Maass series for real analytic Siegel Eisenstein series. *Automorphic forms and zeta functions* Proceedings of the Conference in Memory of Tsuneo Arakawa, (2006). 170–197, World Sci. Publ., Hackensack, NJ.
[30] T. Ibukiyama, Dimension formulas of Siegel modular forms of weight 3 and supersingular abelian varieties, *Proceedings of the 4-th Spring Conference on modular forms and related topics, "Siegel Modular Forms and Abelian Varieties" ed. by T. Ibukiyama* (2007), 39–60. 改訂版は：
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/pdf/2007weightthreeprocrevised2.pdf
[31] 伊吹山知義、保型形式特論、共立出版 2018 年、480 pp+x.
[32] T Ibukiyma, Some Poisson formula on tube domains, Comment. Math. Univ. St. Pauli **69** (2021), 43–50.
[33] T. Ibukiyama, Genus character L-functions of quadratic orders in an adelic way and maximal orders of matrix algebras, arXiv:2303.14983v1.
[34] J. Igusa, Some results on p-adic complex powers, Amer. J. Math. **106**(1984), 1013–1032.
[35] K. Imai (=K. Ota), Generalization of Hecke's correspondence to Siegel modular forms, Amer. J. Math **102** (1980), 903–936.
[36] B. Isaacson, On character sums of Lee-Weintraub, Arakawa, and Ibukiyama, and related sums, A dissertation submitted to the graduate school-Newark, Rutgers, (New Jersey), 2015. 218 pp.
[37] B. Isaacson, Character sums of Lee and Weintraub. J. Number Theory **191** (2018), 316–344.
[38] B. Isaacson, Special values of Ibukiyama-Saito L-functions. Kyushu J. Math. **72** (2018), no. 2, 343–373.
[39] B. Isaacson, On a generalization of a theorem of Ibukiyama. Comment. Math. Univ. St. Pauli **67** (2019), no. 1, 1–16.
[40] B. Isaacson, The Tsukano conjectures on exponential sums. Osaka J. Math. **57** (2020), no. 3, 543–561.
[41] H. Katsurada, An explicit formula for the Fourier coefficients of Siegel-Eisenstein series of degree 3, Nagoya Math. J. **146** (1997), 199–223.
[42] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.
[43] 木村達雄、小木曽岳義、ある正則概均質ベクトル空間に付随した adelic zeta distribution について、京大数理研講究録 **718**(1990)165–191.

[44] T. Kimura and T. Kogiso, On adelic zeta functins of prehomogeneous vector spaces with a finitely many adelic open orbits. Advanced Studies in Pure Math. **21** (1992), 21–31.
[45] Y. Kitaoka, Arithmetic of quadratic forms, Cambridge Tracts in Math. **106**, Cambridge Univ. Press, (1993), x+268 pp.
[46] H. Klingen, Zur Transformationstheorie von Thetareihen indefiniter quadratischer Formen. Math. Ann. **140** (1960), 76–86
[47] M. Koecher, Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, J. Reine Angew. Math. **192** (1953),1-23.
[48] M. Koecher, Über Thetareihen indefiniter quadratischer Formen. Math. Nachr. **9** (1953), 51–85.
[49] O. Körner, Die Masse der Geschlechter quadratischer Formen von Range ≤ 3 in quadratischen Zahlkörper, Math. Ann. **193**(1971), 279–314.
[50] W. Kohnen, Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. **248**(1980), 249–266.
[51] 近藤武、岩波講座基礎数学、群論 III, 岩波書店 1977.
[52] A. Kurihara, On the values at non-positive integers of Siegel's zeta functions of $\mathbb{Q}$-anisotropic quadratic forms with signature $(1, n-1)$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo SecIA. **28** (1982), 567–584.
[53] R. Lee and S. H. Weintraub, On a generalization of a theorem of Erich Hecke, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **79** (1982), 7955–7957.
[54] H. Maass, Modulformen zweiten Grades und Dirichletreihen. Math. Ann. **122** (1950), 90–108.
[55] H. Maass, Automorphe Funkitionen und indefinite quadratische Formen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenchaften (1949).
[56] H. Maass, Siegel's modular forms and Dirichlet series. Dedicated to the last great representative of a passing epoch. Carl Ludwig Siegel on the occasion of his seventy-fifth birthday. Lecture Notes in Mathematics, **216**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. v+328 pp.
[57] R. Matthes and Y. Mizuno, Koecher-Maass series associated to Hermitian modular forms of degree 2 and a characterization of cusp forms by the Hecke bound. J. Math. Anal. Appl. **509**, (2022), no. 1, Paper No. 125904, 26 pp.
[58] Y. Morita, An explicit formula for the dimension of spaces of Siegel modular forms of degree two. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **21** (1974), 167–248.
[59] J. Nakagawa, On the relations among the class numbers of binary cubic forms, Invent. math. **134** (1998), 101–138.
[60] S. Ogata, Special values of zeta functions associated to cusp singularities, Tohoku Math. J. **37** (1985), 367–384.
[61] 大野泰生、「２元３次形式のゼータ関数の考察」(1995 年大阪大学修士論文, あいにくこの論文のデジタルファイルは現在所有していない）同じ内容の英文論文は次に発表されている。A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms. Amer. J. Math. **119** (1997), 1083–1094.
[62] O. T. O'Meara, Introduction to quadratic forms. Second printing, corrected. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **117**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971. xi+342 pp.
[63] H. Saito, On the representation of $SL_2(\mathbb{F}_q)$ in the space of Hilbert modular forms. J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 101–128.
[64] H. Saito, A generalization of Gauss sums and its applications to Siegel modular forms and L-functions associated with the vector space of quadratic forms. J. Reine Angew. Math. **416** (1991), 91–142.

[65] H. Saito, On L-functions associated with the vector space of binary quadratic forms. Nagoya Math. J. **130** (1993), 149–176.
[66] H. Saito, Explicit formula of orbital p-adic zeta functions associated to symmetric and Hermitian matrices. Comment. Math. Univ. St. Paul. **46** (1997), no. 2, 175–216.
[67] H, Saito, Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces. Math. Ann. **315**(1999), no. 4, 587–615.
[68] H. Saito, Global zeta functions of Freudenthal quartics, Internat. J. Math. **13**(2002), no.8, 797–820.
[69] H. Saito, Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces. Nagoya Math. J. **170** (2003), 1–31.
[70] I. Satake, Special values of zeta functions associated with self-dual homogeneous cones, in *Manifolds and Lie groups*, Progress in Math. **14**, Birkhäuser, Basel-Bpston-Stuttgart, (1981), 359–384.
[71] 佐武一郎、数論的多様体の不変量について（$\mathbb{Q}$-階数 1 の場合）、雑誌「数学」３５巻 (1983), 210-220.
[72] I. Satake, On numerical invariants of arithmetic varieties of Q-rank one, Progr. Math. **46** *Automorphic forms of several variables*, Birkhäuser Boston, Inc. Boston, MA, 1984, 353–369.
[73] I. Satake and J. Faraut, The functional equation of zeta distributions associated with formally real Jordan algebras Satake, I.; Faraut, J. Tohoku Math. J. (2) **36** (1984), no. 3, 469482.
[74] I. Satake and S. Ogata, Zeta functions associated to cones and their special values Adv. Stud. Pure Math.**15** Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989, 1–27.
[75] F. Sato, On zeta functions of ternary zero forms J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1982), 585–604.
[76] F. Sato and Y. Hironaka, Local densities of representations of quadratic forms over p-adic integers (the non-dyadic case). J. Number Theory **83** (2000), 106–136.
[77] A. Schürmann, Computational geometry of positive definite quadratic forms, Polyhedral reduction theories, algorithms and applications, University Lecture Series **48**, AMS (2008), xv+162 pp.
[78] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. B. **20** (1956), 47–87. Also in Collected Papers I (1989). 423–463 (Springer Verlag).
[79] J. P. Serre, Cours d'arithmétique. Collection SUP: "Le Mathématicien" **2**, Presses Universitaires de France, Paris 1970 188 pp.
[80] 清水英男、保型関数 I, II, III, 岩波講座基礎数学（小平邦彦監修）(1977 頃).
[81] G. Shimura, Modular forms of half integral weight, in *Modular forms of one variable I*, Lecture Notes in Maath. **320** Springer, Berlin (1973), 57–74.
[82] G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. Math. **97** (1973), 440–481.
[83] G. Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **31** (1975), 79–98.
[84] 佐藤幹夫、新谷卓郎、概均質ベクトル空間「数学の歩み」佐藤記念号、1970.（残念ながらデジタルファイルはないと思う。）
[85] T. Shintani, On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **22** (1975), 25–65.

[86] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), 393–417. (新谷論文のデジタルファイルはいずれも見たことがない。)

[87] C. L. Siegel, Über die analytiche Theorie der quadratische Formen, Ann, Math, **36**(1935), 527–606.

[88] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen Indefiniter quadratische Formen I, Math. Zeit. **43** (1938), 682–708; II Math. Zeit **44** (1939). 398–426.

[89] C. L. Siegel, Indefinite quadratische Formen und Modulfunktionen, Courant Anniversary volume (1948). 395–406.

[90] C. L. Siegel, Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I, Math. Ann. **124**(1951), 17–54.

[91] C. L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten der Eisensteinschen Reihen. Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **34** (1964), no. 6, 20 pp.

[92] C. L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten von Eisensteinschen Reihen der Stufe T, Math. Z. **105** (1968), 257–266.

[93] B. Srinivasan, The characters of the finite symplectic group $Sp(4, q)$, Trans. Amer. Math. Soc. **131** (1968), 488–525.

[94] J. Sturm, Special values of zeta functions, and Eisenstein series of half integral weight, Amer. J. Math. **102**,(1980), 219-240.

[95] 菅野孝史、Weissauer's converse theorem, 第一回整数論オータムワークショップ報告集「Koecher-Maass 級数について」(1998), 81–98. ウェブは `http://http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/proceedings.html`

[96] 東野仁政、指数和と Bernoulli 数についての実験（1999 年度大阪大学修士論文）(デジタルファイルは、私は持っているがウェブには載せていない。)

[97] R. Tsushima, A formula for the dimension of spaces of Siegel cusp forms of degree three. Amer. J. Math. **102** (1980), no. 5, 937–977.

[98] R. Tsushima, The spaces of Siegel cusp forms of degree two and the representation of $Sp(2, \mathbb{F}_p)$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **60(6)** (1984), 209–211.

[99] R. Tsushima, Dimension formula for the spaces of Siegel cusp and a certain exponential sum, Mem. Inst. Sci. Tech. Meiji Univ. **36** (1997), 1–56.

[100] L. Walling, Explicitly realizing average Siegel theta series as linear combinations of Eisenstein series, Ramanujan J.**47** (2018), 475–499.

[101] S. Wakatsuki, The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree. Adv. Math. **340** (2018), 1012–1066.

[102] T. Yamazaki, On Siegel modular forms of degree two. Amer. J. Math. **98** (1976), no. 1, 39–53.

[103] T. Yang, An explicit formula for local densities of quadratic forms, J. Number Theory **72** (1998), 309–356

[104] T. Yang, Local densities of 2-adic quadratic forms. J. Number Theory **108** (2004), no. 2, 287–345.

[105] 山本修司、大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性、第３０回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」

[106] H. Yoshida, On the representations of the Galois groups obtained from Hilbert modular forms, Thesis, Princeton University(1973) (東大の数学図書館は所蔵しているものと思う。)

Department of Mathematics, Graduate School of Mathematics, Osaka University, Machikaneyama 1-1, Toyonaka,Osaka, 560-0043 Japan

E-mail address: `ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp`