概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

保型形式付き概均質ゼータ関数

鈴木 美裕（京都大学理学研究科）

概均質ゼータ関数の積分表示に保型形式をつけたものを考える．そのような積分表示で定まる関数のことを，ここでは保型形式付き概均質ゼータ積分と呼ぶことにする．保型形式付き概均質ゼータ積分は，[Sat94] において最初に導入された．[Hou19] と [SW21+] では，それぞれ 2 元 3 次形式の空間と 2 次正方行列の対の空間の保型形式付き概均質ゼータ積分に，篩法や Tauber 型定理を適用することで，保型形式に付随する何らかの量の等分布を示している．本稿では，これらの具体的な保型形式付き概均質ゼータ積分とその応用について解説する．

1　3 次体の shape

体 K を $\mathbb{Q}$ の n 次拡大とし，実素点の個数を r，複素素点の個数を s とする．このとき，$n = r + 2s$ が成り立つ．代数体 K の実埋め込みを $\sigma_1, \dots, \sigma_r : K \to \mathbb{R}$，複素埋め込みを $\tau_1, \dots, \tau_s : K \to \mathbb{C}$ とすると，埋め込み $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ が

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x), \operatorname{Re}\tau_1(x), \operatorname{Im}\tau_1(x), \dots, \operatorname{Re}\tau_s(x), \operatorname{Im}\tau_s(x))$$

で定義される．この埋め込みにより，整数環 $\mathcal{O}_K$ を $\mathbb{R}^n$ の格子とみなす．

また，$\mathcal{O}_K$ 上の 2 次形式 q を

$$q(x) = \sigma_1(x)^2 + \cdots + \sigma_r(x)^2 + 2|\tau_1(x)|^2 \cdots + \cdots + 2|\tau_s(x)|^2$$

で定義する． 基点となる $\mathbb{Z}$-格子を 1 つ固定すると，階数 $(n-1)$ の $\mathbb{Z}$-格子は $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ の点とみなすことができる． $\sigma(1)$ の直交補空間に $\mathcal{O}_K$ を射影して得られる階数 $(n-1)$ の $\mathbb{Z}$-格子に対応する $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ の点の

$$\mathcal{S}_{n-1} := \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})/\mathrm{GO}_{n-1}(\mathbb{R})$$

における像を Λ_K と表わし，K の **shape** という．商空間 $\mathcal{S}_{n-1}$ には $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ と

$\mathrm{GO}_{n-1}(\mathbb{R})$ の Haar 測度から定まる測度 μ を入れる．このとき, $\mu(\mathcal{S}_{n-1}) < \infty$ となることが知られている．

Bhargava と Harron は, 次の意味で $\{\Lambda_K\}_K$ が $\mathcal{S}_{n-1}$ 上 μ に関して等分布であることを示した．

定理 1.1（[BH16]） 自然数 $n \in \{3,4,5\}$ と $i \le n/2$, 正の実数 $X > 0$ に対して, 以下の条件を満たす代数体 K の集合の位数を $N_n^{(i)}(X)$ と表わす:

- $[K:\mathbb{Q}] = n$ かつ K の Galois 閉包の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群は S_n (このような代数体を S_n-体という);
- K の複素素点の個数は i;
- $|D_K| < X$, ただし D_K は K の判別式.

また, 境界が測度 0 の可測集合 $W \subset \mathcal{S}_{n-1}$ に対して, 上の 3 つの条件を満たし $\Lambda_K \in W$ となる代数体 K の個数を $N_n^{(i)}(X,W)$ と表わす．このとき,

$$\lim_{X\to\infty} \frac{N_n^{(i)}(X,W)}{N_n^{(i)}(X)} = \frac{\mu(W)}{\mu(\mathcal{S}_{n-1})}.$$

自然な全射 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \mathcal{S}_{n-1}$ による Λ_K の逆像の点を 1 つとり, これを再び Λ_K と表わすことにすると, 関数 $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ に対して $\phi(\Lambda_K)$ が考えられる．Hough は, Λ_K での尖点的 Maass 形式 (後述) の値の分布に関して次を示した．

定理 1.2（[Hou19]） 関数 $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ を, 重さ $2k$ の尖点的 Hecke 固有 Maass 形式とする．このとき, 任意の $F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ と $\epsilon > 0$, $X \to \infty$ に対して

$$N_{3,\pm}(\phi, F, X) := \sum_{[K:\mathbb{Q}]=3} \phi(\Lambda_K) F\left(\frac{\pm D_K}{X}\right) \ll_{\phi,\epsilon} X^{\frac{2}{3}+\epsilon}.$$

注意 1.3 [Hou17+] では 4 次体の場合として次の主張が示されている: ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ の尖点的 Hecke 固有 Maass 形式とする．このとき, 任意の $F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ と $\epsilon > 0$, $i \in \{0,1,2\}$, $X \to \infty$ に対して

$$\sum_{\substack{K:S_4\text{-体} \\ s=i}} \phi_3(\Lambda_K)\phi_2(\Lambda'_K) F\left(\frac{\pm D_K}{X}\right) \ll_{\phi_2,\phi_3,\epsilon} X^{\frac{23}{24}+\epsilon}.$$

ただし, Λ'_K は整数環 $\mathcal{O}_K$ のレゾルヴェント環 (3 次環) の shape とする．

この定理の証明には, 2 元 3 次形式の空間のゼータ積分に Maass 形式をつけたものを使う. 本稿の前半では, この Maass 形式つきゼータ積分の基本性質を紹介する.

1.1 Maass 形式

Maass 形式についての必要事項をまとめておく. 例えば [Bum98, §1.9, §2.1] を参照. 以下の記号を使う:

- $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \quad G^1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$,
- $G^+ = \{g \in G_{\mathbb{R}} \mid \det(g) > 0\}$,
- $G_{\mathbb{Z}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \quad \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,
- $K = \mathrm{SO}(2) = \left\{ \kappa_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

整数 k に対して, 上半平面上の C^∞ 関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ であって

$$f(z) = \left(\frac{cz+d}{|cz+d|} \right)^{-k} f(\gamma(z)), \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

を満たすものを考える. ここで, $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ は 1 次分数変換とする. 上式の右辺を $(f|_k\gamma)(z)$ と表わす. **重さ k の Laplacian** を

$$\Delta_k = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \sqrt{-1} k y \frac{\partial}{\partial x}$$

で定義する. 関数 $f \in C^\infty(\mathbb{H})$ が 3 つの条件

- 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $f = f|_k\gamma$,
- f は Δ_k の固有関数,
- ある $N > 0$ に対して $f(x + \sqrt{-1}y) = O(y^N)$, $y \to \infty$

を満たすとき, **重さ k の Maass 形式**という. さらに, 任意の $z \in \mathbb{H}$ に対して $\int_0^1 f(z+t)\mathrm{d}t = 0$ を満たすとき, Maass 形式 f は**尖点的 (cuspidal)** であるという.

正の整数 n に対して, Maass 形式の空間上の線型作用素 T_n で **Hecke 作用素**と呼ばれるものがある (定義は省略). すべての Hecke 作用素の同時固有関数である Maass 形式のことを **Hecke 固有形式**という.

コンパクト群 K の指標 χ_k を, $\chi_k(\kappa_\theta) = e^{2\pi\sqrt{-1}k\theta}$ で定義する. 重さ k の Maass

形式 f に対して $\phi \in C^\infty(G^1)$ を $\phi(g) = (f|_k g)(\sqrt{-1})$ で定めると, ϕ は

$$\phi(\gamma g \kappa) = \chi_k(\kappa)\phi(g), \qquad \gamma \in \Gamma, g \in G^1, \kappa \in K$$

を満たす. このようにして得られる $\Gamma\backslash G^1$ の関数を ([Hou19] に倣って) K-type k の Maass 形式とよぶ. 群 G^1 上の Maass 形式 ϕ を, $g \mapsto \phi(\det(g)^{-\frac{1}{2}}g)$ のようにして G^+ 上の関数に拡張する.

定義 1.4 関数空間

$$C_c^\infty(G^1/\!/K, \chi_k) := \{f \in C_c^\infty(G^1) \mid f(\kappa_1 g \kappa_2) = \chi_k(\kappa_1\kappa_1)f(g)\}$$

に畳み込みで積を定義し, $\mathbb{C}$-代数の構造を入れる:

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_{G^1} f_1(gx)f_2(x^{-1})\mathrm{d}x, \qquad f_1, f_2 \in C_c^\infty(G^1/\!/K, \chi_k).$$

この $\mathbb{C}$-代数は可換であることが知られている ([Bum98, Proposition 2.2.8]). また, K-type k の Maass 形式の空間に畳み込みで作用する:

$$(f * \phi)(g) = \int_{G^1} f(xg)\phi(x^{-1})\mathrm{d}x.$$

重複度 1 定理から次が成り立つ.

補題 1.5 K-type k の尖点的 Hecke 固有 Maass 形式 ϕ と $f \in C_c^\infty(G^1/\!/K, \chi_k)$ に対して, 定数 $\Lambda_{f,\phi} \in \mathbb{C}$ であって

$$f * \phi = \Lambda_{f,\phi}\phi$$

となるものが存在する.

1.2 2 元 3 次形式の空間

本報告集の他の項ですでに説明されたことの繰り返しになるが, 2 元 3 次形式の空間について基本事項を復習する. 詳細は, [石塚 23, §2] と [Tho23] を参照.

2 元 3 次形式の空間

$$V_{\mathbb{R}} := \{f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

への群 $G_{\mathbb{R}}$ の作用を $g \cdot f(x,y) = f((x,y)g)$ で定義する．2 元 3 次形式の判別式 $D(f) = b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$ は, $G_{\mathbb{R}}$ の指標 $\chi(g) = \det(g)^6$ に関して $D(g \cdot f) = \chi(g)D(f)$ を満たす, $V_{\mathbb{R}}$ の相対不変式である．

non-singular な 2 元 3 次形式の集合を, $D(f)$ の正負によって V_+ と V_- の 2 つに分割すると, $V_\pm$ はいずれも G^+-軌道である．それぞれの軌道の代表元

$$x_+ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad x_- = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

をとり, G^+ における固定化群を $I_{x_\pm}$ と表わす．このとき, $|I_{x_+}| = 3$, $|I_{x_-}| = 1$ となることが知られている．

整数係数 2 元 3 次形式のなす格子を $V_{\mathbb{Z}}$ とする:

$$V_{\mathbb{Z}} = \{f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}.$$

ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}}$ への $G_{\mathbb{R}}$ の作用の制限により, この格子には $G_{\mathbb{Z}}$ が作用する．

定理 1.6（Delone-Fadeev 対応） 2 元 3 次形式 $f(x,y) = ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3 \in V_{\mathbb{Z}}$ に対して, 3 次環 $R(f) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\theta$ であって環構造が

$$\begin{aligned} \omega\theta &= -ad \\ \omega^2 &= -ac + b\omega - a\theta \\ \theta^2 &= -bd + d\omega - c\theta \end{aligned}$$

で与えられるものを対応させることで, 自然な全単射 $G_{\mathbb{Z}} \backslash V_{\mathbb{Z}} \to \{3 \text{ 次環 }\}_{/\cong}$ が得られる．

定義 1.7 素数 p に対して 3 次環 R が p で極大であるとは, $R \otimes \mathbb{Z}_p$ が $\mathbb{Z}_p$ 上の極大な 3 次環であることをいう．

[TT13, Lemma 5.8, Proposition 5.9] より, p で極大な 3 次環に対応する $V_{\mathbb{Z}}$ の点の集合は, $V_{p^2} := V_{\mathbb{Z}}/p^2V_{\mathbb{Z}}$ の部分集合を定める．この部分集合の特性関数を Φ_p と表わす．また, 平方因子をもたない正の整数 q に対して, $\Phi_q = \prod_{p|q} \Phi_p$ とおく．ここで, p は q の素因数全体をわたる．

整数 m に対して $V_{\mathbb{Z},m} = \{f \in V_{\mathbb{Z}} \mid D(f) = m\}$ とおく．これは Γ-安定な $V_{\mathbb{Z}}$ の部分集合．$V_{\mathbb{Z},m}$ の Γ-軌道の個数を $h(m)$ と表わし, 代表系 $\{x_{i,m}\}_{i=1}^{h(m)} \subset V_{\mathrm{sgn}(m)}$ を 1 つ固定する．固定化群を $\Gamma(i,m) = \mathrm{Stab}_\Gamma(x_{i,m})$ とおく．また, $g_{i,m} \cdot x_{\mathrm{sgn}(m)} = x_{i,m}$

となる $g_{i,m} \in G^+$ をとる．3 次体 K に対して $\mathcal{O}_K$ に対応する $V_{\mathbb{Z}}$ の点が $x_{i,m}$ の軌道に属するとき, $\Lambda_K := g_{i,m} \in \Gamma \backslash G^+$ とする．

ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$ 上の交代形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle x, y \rangle = x_4 y_1 - \frac{1}{3} x_3 y_2 + \frac{1}{3} x_2 y_3 - x_1 y_4$$

で定義する．この交代形式に関する $V_{\mathbb{Z}}$ の双対格子は

$$\hat{V}_{\mathbb{Z}} = \{ f(x,y) = ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + dy^3 \mid a, d \in \mathbb{Z}, b, c \in 3\mathbb{Z} \}.$$

また, $f \in L^1(V_{\mathbb{R}})$ に対して Fourier 変換を

$$\hat{f}(x) = \int_{V_{\mathbb{R}}} f(y) \exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle x, y \rangle) \mathrm{d}y$$

で定める．このとき, $\hat{f} \in L^1(V_{\mathbb{R}})$ ならば Fourier 逆変換 $\hat{\hat{f}}(-x) = 9f(x)$ が成り立つ．

1.3 Maass 形式つきゼータ積分

平方因子をもたない正整数 q を 1 つとる．本稿の前半で説明する Maass 形式つきゼータ積分は, 次のように定義される．

定義 1.8 試験関数 $f \in C_c^\infty(V_{\mathbb{R}})$ を, サポートが G^+-軌道 V_+ または V_- に含まれるものとする．このとき, **Maass 形式つきゼータ積分**を

$$Z_q^{\pm}(f, \phi, V_{\mathbb{Z}}; s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^s \phi(g^{-1}) \sum_{x \in V_{\mathbb{Z}}} \Phi_q(x) f(g \cdot x) \mathrm{d}g$$

で定義する．

試験関数を適切にとると, Maass 形式つきゼータ積分は保型形式付き新谷ゼータ関数の積分表示である．

定義 1.9 $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して, **保型形式付き新谷ゼータ関数** $\mathcal{L}_q^{\pm}(\phi, s)$ を

$$\mathcal{L}_q^{+}(\phi, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{g_0 \in I_+} \sum_{i=1}^{h(m)} \Phi_q(x_{i,m}) \frac{\phi(g_{i,m} g_0)}{|\Gamma(i,m)|},$$

$$\mathcal{L}_q^{-}(\phi, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{i=1}^{h(-m)} \Phi_q(x_{i,-m}) \phi(g_{i,-m})$$

で定義する.

通常の新谷ゼータ関数の収束性から, 右辺は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束することがわかる.

以下, 試験関数 f は $f_G \in C_c^\infty(G^1//K, \chi_{2k})$ と $f_D \in C_c^\infty(\mathbb{R}^\times)$ で

$$f(x) = f_D(|D(x)|) \sum_{\substack{g \in G^+ \\ g \cdot x_\pm = x}} f_G(g)$$

と表わせると仮定する. ここで, f_G は $f_G(zg) = f_G(g)$, $z \in \mathbb{R}^\times$, $g \in G^1$ で G^+ 上の関数に拡張している.

補題 1.10 $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して,

$$Z_q^\pm(f, \phi, L; s) = \frac{\Lambda_{f_G,\phi}}{12} \mathcal{L}_q^\pm(\phi, s) \tilde{f}_D(s).$$

ただし, $\tilde{f}_D(s) = \int_0^\infty f_D(x) x^{s-1} \mathrm{d}x$ は Mellin 変換.

証明 Z_q^+ のみ示す. Z_q^- も同様. 格子 $V_\mathbb{Z}$ 上の和を Γ-軌道ごとに分解すると,

$$Z_q^+(f, \phi, V_\mathbb{Z}; s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{m=1}^\infty \sum_{i=1}^{h(m)} \frac{\Phi_q(x_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|} \chi(g)^s \phi(g^{-1}) \sum_{\gamma \in \Gamma} f(g\gamma g_{i,m} \cdot x_+) \mathrm{d}g.$$

Γ 上の和を unfold すると,

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \int_{G^+} \sum_{m=1}^\infty \sum_{i=1}^{h(m)} \frac{\Phi_q(x_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|} \chi(g)^s \phi(g^{-1}) \sum_{g_0 \in I_{x_+}} f_G(g g_{i,m} g_0) f_D(\chi(g) m) \mathrm{d}g \\
&= \sum_{m=1}^\infty \sum_{i=1}^{h(m)} \frac{\Phi_q(x_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|} \sum_{g_0 \in I_{x_+}} \int_{G^1} \phi(g^{-1}) f_G(g g_{i,m} g_0) \mathrm{d}g \int_0^\infty \lambda^{12s} f_D(\lambda^{12} m) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \\
&= \sum_{m=1}^\infty \sum_{i=1}^{h(m)} \frac{\Phi_q(x_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|} \sum_{g_0 \in I_{x_+}} \Lambda_{f_G,\phi} \phi(g_{i,m} g_0) \cdot \frac{1}{12 m^s} \tilde{f}_D(s) \\
&= \frac{\Lambda_{f_G,\phi}}{12} \mathcal{L}_q^\pm(\phi, s) \tilde{f}_D(s).
\end{aligned}$$

積分と和の順序交換は, [Shi72, Proposition 2.13] と同様の議論で正当化される. □

定義 1.11　truncated ゼータ積分を

$$Z_q^{\pm,+}(f,\phi,V_{\mathbb{Z}};s)=\int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi(g)\geq 1}}\chi(g)^s\phi(g^{-1})\sum_{x\in V_{\mathbb{Z}}}\Phi_q(x)f(g\cdot x)\mathrm{d}g,$$

$$\hat{Z}_q^{\pm,+}(\hat{f},\phi,\hat{V}_{\mathbb{Z}};1-s)=\int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi(g)\geq 1}}\chi(g)^{1-s}\phi(g^{-1})\sum_{x\in\hat{V}_{\mathbb{Z}}\setminus\hat{V}_{\mathbb{Z},0}}\hat{\Phi}_q(x)\hat{f}\left(g^{\iota}\cdot\frac{x}{q^2}\right)\mathrm{d}g$$

で定義する．また, ゼータ積分の**特異部分**を

$$Z_q^{\pm,0}(\hat{f},\phi,\hat{V}_{\mathbb{Z}};s)=\int_{\substack{G^+/\Gamma\\ \chi(g)\leq 1}}\chi(g)^{s-1}\phi(g^{-1})\sum_{x\in\hat{V}_{\mathbb{Z},0}}\hat{\Phi}_q(x)\hat{f}\left(g^{\iota}\cdot\frac{x}{q^2}\right)\mathrm{d}g$$

で定める．

truncated ゼータ積分は複素平面全体で正則になる．Poisson 和公式から次がしたがう．

補題 1.12　$\mathrm{Re}(s)>1$ に対して,

$$Z_q^{\pm}(f,\phi,V_{\mathbb{Z}};s)=Z_q^{\pm,+}(f,\phi,V_{\mathbb{Z}};s)+\hat{Z}_q^{\pm,+}(\hat{f},\phi,\hat{V}_{\mathbb{Z}};1-s)+Z^{\pm,0}(\hat{f},\phi,\hat{V}_{\mathbb{Z}},s).$$

Maass 形式のフーリエ展開を使って計算すると, 特異部分は Bessel 関数を含む積分表示をもつことが示せる (詳細略)．この積分表示から次がしたがう．

補題 1.13　特異部分 $Z_q^{\pm,0}(\hat{f},\phi,\hat{V}_{\mathbb{Z}};s)$ は複素平面全体に正則に解析接続される．

最後に, 定理 1.2 の証明について, ごく簡単な方針だけ述べる．

証明の概略　関数 $F\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^+)$ と $X>0$ に対して

$$N'_{3,\pm}(\phi,F,X)=\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}F\left(\frac{\pm m}{X}\right)\sum_{i=1}^{h(m)}{}'\frac{\phi(g_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|}$$

とおく．ここで, Σ' は任意の素数 p において極大な 3 次環に対応する項のみの和を意味する．

Delone-Fadeev 対応によると, $N'_{3,\pm}(\phi,F,X)$ の和のうち S_3-体に対応する項は重さ 2 で, 3 次巡回体に対応する項は重さ $\frac{2}{3}$ でカウントされている．判別式が X 以下の 3 次巡回体の個数は $O(X^{\frac{1}{2}})$, 2 次以下の体の寄与は $O(\|\phi\|_{\infty})$ でなので,

$$N_{3,\pm}(\phi,F,X)=\frac{1}{2}N'_{3,\pm}(\phi,F,X)+O(\|\phi\|_{\infty}X^{\frac{1}{2}}).$$

以下, $N'_{3,+}(\phi, F, X)$ のみ考える．関数 F に対して $f \in C_c^\infty(V_\mathbb{R})$ を適当にとると, 右辺は次のように評価できる:

$$\begin{aligned} N'_{3,+}(\phi, F, X) &= \sum_q \mu(q) \sum_{m=1}^{\infty} F\left(\frac{m}{X}\right) \sum_{i=1}^{h(m)} \Phi_q(x_{i,m}) \frac{\phi(g_{i,m})}{|\Gamma(i,m)|} \\ &\ll \|\phi\|_\infty X^{\frac{3}{2}+\epsilon} + \frac{12}{\Lambda_{f_G,\phi}} \sum_{q \le X^{\frac{1}{3}}} \mu(q) \int_{\mathrm{Re}(s)=2} X^s Z_q^+(f, \phi, L; s) \frac{\mathrm{d}s}{s^2}. \end{aligned}$$

最初の等号は包除原理 ([谷口 23, 命題 3.2] の証明を参照) による．また, 最右辺の第 1 項と第 2 項は, それぞれ $q > X^{\frac{1}{3}}$ と $q \le X^{\frac{1}{3}}$ の寄与分である．最後の和は, 補題 1.13 の証明の過程で得られる $Z_q^+(f, \phi, L; s)$ の積分表示を使って評価する． □

2 トーラス周期

[SW20+] では, 2 次正方行列の対の空間の概均質ゼータ関数に保型形式をつけたものを考える．アデール群上の保型形式を扱いたいので, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の保型表現の導入的な説明をする．ただし, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ のアデール環とする．より正確で詳しい説明は, 例えば [Bum98, §3.3] を参照.

群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ のコンパクト開部分群 K_{fin} を $K_{\mathrm{fin}} = \prod_p \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ とする．強近似定理 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})K_{\mathrm{fin}}$ より[*1], 包含写像 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ から誘導される写像

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/K_{\mathrm{fin}}$$

が全単射であることがわかる． したがって, 前節で考えた重さ k の Maass 形式 $\phi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の関数とみなせる． このとき, ϕ は左 $\mathbb{A}^\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$-不変かつ右 K_{fin}-不変であり, $\mathrm{SO}(2)$ が右から指標 χ_k で作用する．

L^2-関数 $\phi \in L^2(\mathbb{A}^\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ であって, 任意の $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ に対して

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \mathrm{d}x = 0 \tag{2.1}$$

[*1] 一般の代数体 F の場合, 剰余類 $\mathrm{GL}_2(F)\mathrm{GL}_2(F \otimes \mathbb{R})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_{\mathrm{fin}}$ の位数は F の類数に等しい.

を満たすもののなす部分空間を $L_0^2(\mathbb{A}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ と表わす．この部分空間は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の右正則表現

$$(\rho(g)\phi)(x) = \phi(xg), \qquad g, x \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}),\ \phi \in L_0^2(\mathbb{A}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$$

で安定である． 等式 (2.1) を満たす L^2-関数を**尖点的保型形式**といい, $L_0^2(\mathbb{A}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ の部分表現として実現される $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約表現を**尖点的保型表現**という[*2].

尖点的保型表現 π は, アデール群の制限直積への分解 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \prod_v' \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_v)$ に応じて, 制限テンソル積に分解する: $\pi = \otimes_v \pi_v$. ここで, 各 π_v は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_v)$ の既約表現である．有限素点 v に対して, π_v が 0 でない $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_v)$-不変ベクトルをもつとき, π_v は不分岐であるという．不分岐な表現は, 佐武パラーメータと呼ばれる複素数 $\alpha_v \in \mathbb{C}$ でパラメトライズされる．

尖点的保型表現 π と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の有限次元表現 r に対して, **保型 L 関数** $L(s, \pi, r)$ が定まる．また, 各素点 v に対して局所 L 因子 $L(s, \pi_v, r)$ が定義され, $L(s, \pi, r) = \prod_v L(s, \pi_v, r)$ が成り立つ．本稿で考えるのは, 以下の 2 つの場合のみである．

- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^2$ への通常の作用で定まる 2 次元表現を standard 表現という．表現 r が standard 表現のとき, $L(s, \pi, r)$ を標準 L 関数といい, 単に $L(s, \pi)$ と表わす．
- 3 次元空間 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) := \{X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ への $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の共役作用を随伴表現といい, Ad と表わす．付随する保型 L 関数 $L(s, \pi, \mathrm{Ad})$ を adjoint L-関数という．

次の定理は, ある保型形式付き概均質ゼータ関数の留数を計算することで得られる．

定理 2.1（[SW21+]） π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現とし, $L(\frac{1}{2}, \pi) \neq 0$ とする．S を素点の有限集合とし, $\infty \in S$ かつ任意の $v \notin S$ で π_v は不分岐とする[*3]．各 $v \in S$ に対して $\mathbb{Q}_v$ 上の étale 2 次代数 $\mathcal{E}_v$ をとる．$X(\mathcal{E}_S)$ を, 任意の $v \in S$ に対して

[*2] 通常, 保型形式は smooth K-finite, $\mathcal{Z}$-finite, moderate growth な $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の関数と定義される．また, 保型表現とは保型形式の空間の部分商として実現される $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \times (\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}), \mathrm{O}(2))$-加群のことをいう．また, ここでは中心指標が自明な表現のみを考えることにする．

[*3] 素点の有限集合 S は任意にとることができるが, 簡単のためこのような条件を課しておく．

$E_v \cong \mathcal{E}_v$ となる 2 次体 E の全体とする．このとき, 極限

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} L(\tfrac{1}{2}, \pi\eta_E)$$

が存在し,

$$\frac{2L(1,\pi,\mathrm{Ad})}{\zeta_{\mathbb{Q}}(2)} \prod_{v\in S} \frac{\zeta_{\mathbb{Q}_v}(2)L(\frac{1}{2},\pi_v\eta_{E_v})}{2\zeta_{\mathbb{Q}_v}(1)L(1,\pi_v,\mathrm{Ad})} \prod_{p\notin S} \left\{1-p^{-3}-\frac{p-1}{p+1}p^{-3}\lambda_p^2\right\}.$$

に等しい．ただし,

- $N(E,S) = \prod_{p\notin S} |D_E|_p^{-1}$,
  D_E は E の判別式, $|\cdot|_p$ は $|p|_p = p^{-1}$ を満たす p 進付値,
- $\eta_E = \prod_v \eta_{E_v} : \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \{\pm 1\}$: $E/\mathbb{Q}$ に対応する 2 次指標,
- $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \prod_v \zeta_{\mathbb{Q}_v}(s)$: 完備化された Riemann ゼータ関数,
- $\lambda_p := p^{\frac{1}{2}}(\alpha_p + \alpha_p^{-1})$, α_p は π_p の佐武パラメータ.

この定理は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ に限らず, 一般の代数体 F 上の四元数環 D の乗法群 $D_{\mathbb{A}_F}^\times$ の保型表現で成り立つ．ここでは簡単のため $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の場合だけを扱う[*4].

重さ k の正則尖点形式が生成する保型表現に対して上の定理を適用すると, 次のようになる:

定理 2.2 $f \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を重さ k の正則な Hecke 固有尖点形式とし, その Fourier 展開を $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ とする．また, $a_1 = 1$ となるように正規化されているとする．このとき, 極限

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{0<D_E<x} L(\tfrac{k}{2}, D_E, f)$$

が存在し,

$$\frac{3(4\pi)^k}{(k-1)!\pi}\langle f,f\rangle \prod_p \left\{1-p^{-3}-\frac{p-1}{p+1}p^{-3}p^{k-1}a_p^2\right\}$$

に等しい．ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は Petersson 内積とし, $L(s,D,f) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right)\frac{a_n}{n^s}$ とする.

[*4] 実際には, singular 軌道の数が少ない, 分裂トーラスをもたないなどの理由で, 四元数体の場合の方が概均質ゼータ関数の扱いは簡単になる.

2.1 周期積分

2 次体 E に対して, $E=\mathbb{Q}(\sqrt{\tau_E})$ となる $\tau_E\in\mathbb{Q}^\times$ をとる. 乗法群 $E^\times$ は

$$a+b\sqrt{\tau_E}\to\begin{pmatrix}a & b\tau_E\\ b & a\end{pmatrix}$$

により $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ に埋め込める. この埋め込みの像を $T_E(\mathbb{Q})$ とすると, T_E は代数群 GL_2 の部分トーラスを定める. 後の都合のため, 分裂 étale 代数 $E\cong\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ の場合も含めて考える. この場合, 対応するトーラス T_E は, 上の埋め込みで $\tau_E=1$ としたものとする.

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現 π と尖点的保型形式 $\phi\in\pi$ に対して,

$$\mathcal{P}_E(\phi)=\int_{\mathbb{A}^\times T_E(\mathbb{Q})\backslash T_E(\mathbb{A})}\phi(t)\mathrm{d}t$$

を ϕ の**トーラス周期**という.

定理 2.3([Wal85]) 上の記号の下で, ϕ が $\phi=\otimes_v\phi_v\in\pi$ と分解されるならば

$$|\mathcal{P}_E(\phi)|^2=\frac{\zeta_{\mathbb{Q}}(2)L(\frac{1}{2},\pi)L(\frac{1}{2},\pi\eta_E)}{L(1,\pi,\mathrm{Ad})L(1,\eta_E)^2}\prod_v\alpha^{\#}_{E_v}(\phi_v,\phi_v)$$

が成り立つ. ただし, $L(s,\eta_E)$ は Hecke L-関数, $\alpha^{\#}_{E_v}(\phi_{1,v},\phi_{2,v})$, $\phi_{1,v},\phi_{2,v}\in\pi_v$ は行列係数の積分

$$\alpha_{E_v}(\phi_{1,v},\phi_{2,v}):=\int_{\mathbb{Q}_v^\times\backslash E_v^\times}\langle\pi_v(h)\phi_{1,v},\phi_{2,v}\rangle_v\mathrm{d}h$$

を次のように正規化して得られる局所因子:

$$\alpha^{\#}_{E_v}(\phi_{1,v},\phi_{2,v}):=\frac{L(1,\pi_v,\mathrm{Ad})L(1,\eta_{E_v})^2}{\zeta_{\mathbb{Q}_v}(2)L(\frac{1}{2},\pi_v)L(\frac{1}{2},\pi\eta_{E_v})}\alpha_{E_v}(\phi_{1,v},\phi_{2,v}).$$

これは $\mathrm{Hom}_{E_v^\times\times E_v^\times}(\pi_v\boxtimes\bar{\pi}_v,\mathbb{C})$ の元 (π_v 上の $E_v^\times\times E_v^\times$-不変 Hermite 形式) を定める. 特に, ある $\phi\in\pi$ に対して $\mathcal{P}_E(\phi)\neq 0$ ならば $L(\frac{1}{2},\pi)L(\frac{1}{2},\pi\eta_E)\neq 0$ がしたがう.

この等式を使うと, 定理 2.1 はトーラス周期の平均値公式の形に書き直せる.

2.2　2 次正方行列の対の空間

正方行列の対の空間 $V = \mathrm{M}_2 \oplus \mathrm{M}_2$ への $G := \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ の右作用 ρ を

$$(x,y)\rho(g) = (g_1^{-1}xg_2, g_1^{-1}yg_2)g_3, \qquad (x,y) \in V,\ g = (g_1,g_2,g_3) \in G$$

で定義すると, (G,ρ,V) は概均質ベクトル空間である. このとき, V 上の多項式 $P(x,y) = -\det(x\iota(y) - y\iota(x))$ は, G の指標 $\chi(g) = \det(g_1^{-1}g_2g_3)^2$ に関して $P(z\rho(g)) = \chi(g)P(z)$ を満たす, V の相対不変式である. ただし, ι は余因子行列をとる M_2 の対合

$$\iota(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} {}^t x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

とする. $V' = \{(x,y) \in V \mid P(x,y) \neq 0\}$, $S = V \setminus V'$ とおく.

また, 作用の核 $\ker\rho$ は

$$\ker\rho = \{(aI_2, bI_2, ab^{-1}I_2) \mid a,b \in \mathbb{G}_m\} \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$$

となる. $H = \ker\rho\backslash G$ とおき, G の表現 ρ を H の表現とみなす.

V 上の双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = \mathrm{Tr}(x_1x_2) + \mathrm{Tr}(y_1y_2)$ で定める. この pairing に関する ρ の反傾表現を $\rho^\vee$ とすると,

$$(x_1,x_2)\rho^\vee(g) = (g_2^{-1}x_1g_1, g_2^{-1}x_2g_1){}^tg_3^{-1}$$

となる. この表現 $(G,\rho^\vee,V)$ も概均質ベクトル空間で, $P(z\rho^\vee(g)) = \chi^{-1}(g)P(z)$ が成り立つ.

補題 2.4　概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) の特異軌道は 6 つあり, それぞれの代表元とその固定化群は以下の通り:

- $x_0 := (0,0)$, $G_{x_0} = G$.
- $x_1 := \left(0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$,

$$G_{x_1} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) \in G \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{G}_m,\ a = bc \right\}.$$

- $x_2 := (0, I_2)$, $G_{x_2} = \left\{ \left(g, h, \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) \in G \;\middle|\; g,h \in \mathrm{GL}_2,\ c \in \mathbb{G}_m,\ g = ch \right\}$.

- $x_3 := \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$, $G_{x_3} \cong G_{x_2}$.
- $x_4 := \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$, $G_{x_4} \cong G_{x_2}$.
- $x_5 := \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, I_2\right)$,

$$G_{x_5} = \left\{ \left(\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ 0 & a_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ 0 & a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/c_3 & -c_2/c_1c_3\\ 0 & 1/c_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ 0 & c_3\end{pmatrix}\right) \in G \;\middle|\; a_1c_3 = a_3c_1 \right\}.$$

E を 2 次体または $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ とし, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{\tau_E})$ となる $\tau_E \in \mathbb{Q}^\times$ をとる．ただし, $E = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ のときは $\tau_E = 1$ とする．また, similitude 直交群 $\mathrm{GO}_{2,E}$ を次のように定める:

$$\mathrm{GO}_{2,E} = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2 \;\middle|\; {}^t g \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\tau_E\end{pmatrix} g = \mu(g)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\tau_E\end{pmatrix},\ \exists\mu(g) \in \mathbb{G}_m \right\}.$$

さらに, $\mathrm{GO}_{2,E}$ の単位元を含む連結成分を $\mathrm{GSO}_{2,E}$ と表わす:

$$\mathrm{GSO}_{2,E} = \{g \in \mathrm{GO}_{2,E} \mid \mu(g) = \det(g)\}.$$

補題 2.5　各 E に対して $x_E = \left(I_2, \begin{pmatrix}0 & \tau_E\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) \in V_0$ とおくと, $\{x_E\}_E$ は $V_\mathbb{Q}$ における正則有理軌道の代表系であり, x_E の軌道は

$$V_E(\mathbb{Q}) := \{z \in V_\mathbb{Q} \mid P(z) \in \tau_E(\mathbb{Q}^\times)^2\}.$$

また, G_{x_E} の単位元を含む連結成分を $G^\circ_{x_E}$ とすると χ は $G^\circ_{x_E}$ 上自明であり,

$$[G_{x_E} : G^\circ_{x_E}] = 2, \qquad G^\circ_{x_E} \cong \mathrm{GSO}_{2,E} \times \mathrm{GSO}_{2,E}.$$

さらに, $H^\circ_{x_E} \cong (\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m \times (\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$.

2.3　保型形式付きゼータ積分

定義 2.6　尖点的保型形式 $\phi \in \pi$ と Schwartz-Bruhat 関数 $\Phi \in \mathcal{S}(V_\mathbb{A})$ に対して,

$$Z(\Phi, \phi, s) = \int_{H_\mathbb{Q}\backslash H_\mathbb{A}} |\chi(g)|^s_\mathbb{A} \phi(g_1)\overline{\phi(g_2)} \sum_{z \in V'_\mathbb{Q}} \Phi(z\rho(g))\mathrm{d}g$$

とおく. ただし, $g=(g_1,g_2,g_3)\in H_{\mathbb{A}}$. また, 反傾表現 $(G,\rho^\vee,V)$ に付随するゼータ関数を $Z^\vee(\Phi,\phi,s)$ と表わす:

$$Z^\vee(\Phi,\phi,s)=\int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H_{\mathbb{A}}}|\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{-s}\phi(g_1)\overline{\phi(g_2)}\sum_{z\in V'_{\mathbb{Q}}}\Phi(z\rho^\vee(g))\mathrm{d}g.$$

注意 2.7 [Sat06] では, 概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) の群 G を $\mathrm{SL}_2\times\mathrm{SL}_2\times\mathrm{GL}_2$ に制限し, 保型形式として Maass 形式をとった場合の保型形式付き概均質ゼータ関数 (ゼータ積分から取り出される, 関数等式を満たす Dirichlet 級数) について詳しく調べられている. [Sat06] のゼータ関数と上で定義したゼータ積分の比較に関しては, 注意 2.13 で触れる.

また, 保型形式付き概均質ゼータ関数とその関数等式については, [佐藤 23, 5.3 節] を参照.

定理 2.8 tuncated ゼータ積分を

$$Z_+(\Phi,\phi,s)=\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A}),|\chi(h)|_{\mathbb{A}}\geq 1}|\chi(h)|^s\phi(g_1)\,\overline{\phi(g_2)}\sum_{z\in V'_{\mathbb{Q}}}\Phi(z\rho(h))\,\mathrm{d}h$$

$$Z_+^\vee(\Phi,\phi,s)=\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A}),|\chi^{-1}(h)|_{\mathbb{A}}\geq 1}|\chi^{-1}(h)|^s\phi(g_1)\,\overline{\phi(g_2)}\sum_{z\in V'_{\mathbb{Q}}}\Phi(z\rho^\vee(h))\,\mathrm{d}h$$

で定義する. また, **特異部分**を

$$I(\Phi,\phi,s)=\int_0^1 t^{2s}J(\Phi_t,\phi)\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

とおく. ただし, $\Phi_t(z):=\Phi(t^{\frac{1}{2}}z)$ かつ

$$\int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H^1_{\mathbb{A}}}\phi(g_1)\,\overline{\phi(g_2)}\left(\sum_{z\in V_{\mathbb{Q}}\backslash V'_{\mathbb{Q}}}\widehat{\Phi}(z\rho^\vee(h))-\sum_{z\in V_{\mathbb{Q}}\backslash V'_{\mathbb{Q}}}\Phi(z\rho(h))\right)\mathrm{d}h.$$

truncated ゼータ積分は正則関数であり, Poisson 和公式から

$$Z(\Phi,\phi,s)=Z_+(\Phi,\phi,s)+Z_+^\vee(\widehat{\Phi},\phi,2-s)+I(\Phi,\phi,s)$$

が得られる.

定理 2.9 $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき,

$$Z(\Phi,\phi,s)=Z_+(\Phi,\phi,s)+Z_+^{\vee}(\widehat{\Phi},\phi,2-s)+\frac{Z^{\mathrm{GJ}}(\Phi_1,\bar{\phi},1)}{2s-3}-\frac{Z^{\mathrm{GJ}}(\Phi_2,\phi,1)}{2s-1}$$

が成り立つ. ただし, $\Phi_1,\Phi_2\in\mathcal{S}(\mathrm{M}_2(\mathbb{A}))$ は Φ から定まる Schwartz-Bruhat 関数であり, Z^{GJ} は Godement-Jacquet ゼータ積分を表わす. 特に, $Z(\Phi,\phi,s)$ は有理型に解析接続され, $s=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ に高々 1 位の極をもつ.

証明の概略 特異部分 $I(\Phi,\phi,s)$ を計算すればよい. 特異軌道分解 $S_{\mathbb{Q}}=\coprod_{j=0}^{5}x_j\rho(H_{\mathbb{Q}})$ に応じて, 分解 $J(\Phi,\phi)=\sum_{j=0}^{5}J_j(\Phi,\phi)$ が得られる. ただし,

$$J_j(\Phi,\phi):=\int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H_{\mathbb{A}}^1}\phi(g_1)\,\overline{\phi(g_2)}\left(\sum_{x\in x_j\rho(H_{\mathbb{Q}}))}\widehat{\Phi}(x\rho^{\vee}(h))-\sum_{x\in x_j\rho(H_{\mathbb{Q}})}\Phi(x\rho(h))\right)\mathrm{d}h.$$

まず, 尖点的保型形式 ϕ は定数関数と直交するので, $J_0(\Phi,\phi)=0$ がわかる. 他の軌道の寄与について,

- $J_1(\Phi,\phi)+J_2(\Phi,\phi)=Z^{\mathrm{GJ}}(\Phi_1,\bar{\phi},1)-Z^{\mathrm{GJ}}(\Phi_2,\phi,1)$,
- $J_3(\Phi,\phi)+J_4(\Phi,\phi)=J_5(\Phi,\phi)=0$

が示せる. □

試験関数 Φ_2 と尖点的保型形式 $\phi\in\pi$ を適当にとると, Godement-Jacquet ゼータ積分 $Z^{\mathrm{GJ}}(\Phi_2,\phi,s+\frac{1}{2})$ は標準 L 関数 $L(s,\pi)$ の定数倍に等しい. このことから, 次の系が得られる.

系 2.10 $L(\frac{1}{2},\pi)\neq 0$ と仮定する. このとき, $\Phi\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{A}})$ と尖点的保型形式 $\phi\in\pi$ であって, $Z(\Phi,\phi,s)$ が $s=\frac{1}{2}$ で極をもつようなものが存在する.

正則有理軌道ごとの和に分解すると, $Z(\Phi,\phi,s)=\sum_E Z_E(\Phi,\phi,s)$ と表わせる. ここで, E は 2 次体または $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ であり,

$$Z_E(\Phi,\phi,s):=\int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H_{\mathbb{A}}}|\chi(g)|_{\mathbb{A}}^{s}\phi(g_1)\overline{\phi(g_2)}\sum_{z\in V_E(\mathbb{Q})}\Phi(z\rho(g))\mathrm{d}g.$$

各 E に対して $Y_{x_E}=H_{x_E}^{\circ}\backslash H$ とおき, ν_{x_E} を自然な射影

$$Y_{x_E}=H_{x_E}^{\circ}\backslash H\to H_{x_E}\backslash H\cong V^0$$

とする. 齋藤 [Sai99] の議論を適用すると, x_E の軌道の寄与をトーラス周期の積分に書き直すことができる.

補題 2.11 各 E に対して

$$Z_E(\Phi,\phi,s)=\frac{1}{2}\int_{Y_{x_E}(\mathbb{A})}|P(\nu_{x_E}(y))|_{\mathbb{A}}^s\mathcal{P}_E(\pi(g_1)\phi)\overline{\mathcal{P}_E(\pi(g_2)\phi)}\Phi(\nu_{x_E}(y)))\mathrm{d}y$$

が成り立つ. ただし, $y=H^\circ_{x_E}(g_1,g_2,g_3)\in Y_{x_E}(\mathbb{A})$.

証明の概略 [Sai99] の計算から, 以下のことがわかる:

- ν_{x_E} は全射 $Y_{x_E}(\mathbb{Q})\twoheadrightarrow V_E(\mathbb{Q})$ を誘導し, そのファイバーの位数は $|H^\circ_{x_E}\backslash H_{x_E}(\mathbb{Q})|=2$.
- $Y_{x_E}(\mathbb{Q})H(\mathbb{A})=Y_{x_E}(\mathbb{A})$.

したがって, $y_0=H^\circ_{x_E}\in Y_{x_E}(\mathbb{Q})$ とすると

$$\begin{aligned}Z_E(\Phi,\phi,s)&=\frac{1}{2}\int_{H_\mathbb{Q}\backslash H_\mathbb{A}}|\chi(h)|^s\phi(g_1)\overline{\phi(g_2)}\sum_{\gamma\in H^0_{x_E}(\mathbb{Q})\backslash H_\mathbb{Q}}\Phi(\nu_{x_E}(y_0\gamma h))\mathrm{d}h\\&=\frac{1}{2}\int_{H^\circ_{x_E}(\mathbb{Q})\backslash H_\mathbb{A}}|\chi(h)|^s\phi(g_1)\overline{\phi(g_2)}\Phi(\nu_{x_E}(y_0h))\mathrm{d}h\\&=\frac{1}{2}\int_{H^\circ_{x_E}(\mathbb{A})\backslash H_\mathbb{A}}|\chi(h)|^s\mathcal{P}_E(\pi(g_1)\phi)\overline{\mathcal{P}_E(\pi(g_2)\phi)}\Phi(\nu_{x_E}(y_0h))\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi_E}.\end{aligned}$$

ただし, $\mathrm{d}\xi_E$ は $H^0_{x_E}(\mathbb{A})$ の Haar 測度. ここで, $y_0H_\mathbb{A}=Y_{x_E}(\mathbb{Q})H_\mathbb{A}=Y_{x_E}(\mathbb{A})$ なので, 最後の積分は $Y_{x_E}(\mathbb{A})$ 上の積分に書き直すことができ, 求める式が得られる. □

この補題から, ゼータ積分 $Z(\Phi,\phi,s)$ が関数として 0 でなければ, 少なくとも 1 つの E に対してトーラス周期 $\mathcal{P}_E$ は π 上の 0 でない線型形式であることがわかる. 系 2.10 より, 特に $L(\frac{1}{2},\pi)\neq 0$ ならこの仮定は満たされる.

Waldspurger の式 (定理 2.3) を使うと, $Z_E(\Phi,\phi,s)$ のオイラー積分解

$$Z_E(\Phi,\phi,s)=\frac{\zeta_\mathbb{Q}(2)L(\frac{1}{2},\pi)L(\frac{1}{2},\pi\eta_E)}{2\,L(1,\pi,\mathrm{Ad})}\prod_v Z^\#_{E_v}(\Phi_v,\phi_v,s).$$

が得られる. ただし, $Z^\#_{E_v}(\Phi_v,\phi_v,s)$ は $\alpha^\#_{E_v}(\pi_v(g_1)\phi_v,\pi_v(g_2)\phi_v)$ を含む積分

$$\int_{H^\circ_{x_E,v}\backslash H_v}\alpha^\#_{E_v}(\pi_v(g_1)\phi_v,\pi_v(g_2)\phi_v)|\chi(g)|_v^{s-2}\Phi_v(x_E\rho(g))\mathrm{d}g.$$

の定数倍で与えられる局所因子. 不分岐な素点に対して局所因子を計算すると, ゼータ積分 $Z(\Phi,\phi,s)$ を次のような Dirichlet 級数の形で表わすことができる.

定理 2.12 十分大きい $\mathrm{Re}(s)>0$ に対して,

$$Z(\Phi,\phi,s)=\sum_{\mathcal{E}_S}\left(\prod_{v\in S}Z_{\mathcal{E}_v}(\Phi_v,\phi_v,s)\right)\xi(s,\phi,\mathcal{E}_S)$$

が成り立つ. ただし, $\mathcal{E}_S=(\mathcal{E}_v)_{v\in S}$ は $\mathbb{Q}_v$ 上の étale 2 次代数の組全体を動き, $\xi(s,\phi,\mathcal{E}_S)$ は

$$\xi(s,\phi,\mathcal{E}_S):=\frac{\zeta_{\mathbb{Q}}^S(2s-1)\,L^S(2s-1,\pi,\mathrm{Ad})}{2\,\zeta_{\mathbb{Q}}^S(2)^3\,\alpha_{\mathcal{E}_S}(\phi,\phi)}\times\sum_{E\in X(\mathcal{E}_S)}\frac{L(1,\eta_E)^2\,\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)\,|\mathcal{P}_E(\phi)|^2\,\mathcal{D}_E^S(\pi,s)}{N(E,S)^{s-1}}$$

で与えられる Dirichlet 級数. ここで, $\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)$ は

$$\prod_{v\in S}\frac{\alpha_{\mathcal{E}_v}(\phi_v,\phi_v)}{\alpha_{E_v}(\phi_v,\phi_v)}$$

の定数倍であり, 関数 $\mathcal{D}_E^S(\pi,s)$ はオイラー積

$$\mathcal{D}_E^S(\pi,s)=\prod_{p\notin S}(1+\mathcal{R}_{E_p}(\pi_p,s)p^{-2s+1}),$$

$$\mathcal{R}_{E_p}(\pi_p,s):=\begin{cases}1+p^{-1}+p^{-2s}-2\eta_{E_p}(p)p^{-1}\lambda_p & E_p/F_p\text{ が不分岐のとき}\\ 1 & \text{それ以外}\end{cases}$$

で定める.

注意 2.13 注意 2.7 で述べたように, [Sat06, Theorem A] では $Z(\Phi,\phi,s)$ の類似にあたる保型形式付き概均質ゼータ関数を考察し, そのゼータ関数が, テータリフトで得られる重さ半整数の保型形式の Rankin-Selberg 積 Dirichlet 級数に等しいことを示している. 定理 2.12 で現われる Dirichlet 級数 $\xi(s,\phi,\mathcal{E}_S)$ に対しても, 次のように [Sat06, Theorem A] の類似が成り立つ: 各記号を定理 2.12 の通りとし, 関数 $\varphi_E^S(\pi,s):=L^S(2s-\frac{1}{2},\pi)L^S(2s,\eta_{E/F})^{-1}$ を

$$\varphi_E^S(\pi,s)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{A(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^{2s}}$$

のように Dirichlet 級数の形に表わす．ただし, $A(\mathfrak{a}) \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{a}$ は S と素なイデアルを動くとし, $N(\mathfrak{a})$ はそのノルムとする．このとき, 直接計算により

$$L^S(2s-1, \pi, \mathrm{Ad})\mathcal{D}_E^S(\pi, s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{A(\mathfrak{a})^2}{N(\mathfrak{a})^{2s}}$$

が確かめられる．この式の左辺は $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ の定義に出てきていることに注意する．

関数 $\mathcal{D}_E^S(\pi, s)$ を与えるオイラー積は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し, $s \to 1+0$ で

$$\lim_{s\to 1+0} \mathrm{Re}(\mathcal{D}_E^S(\pi, s)) = +\infty$$

を満たす．このことを使うと, 次のようなトーラス周期の非消滅定理が得られる．

定理 2.14 $L(\frac{1}{2}, \pi) \neq 0$ と仮定する．このとき, étale 2 次代数 $\mathcal{E}_v/\mathbb{Q}_v$ の組 $\mathcal{E}_S = (\mathcal{E}_v)_{v\in S}$ であって, 以下の条件を満たす 2 次体 $E/\mathbb{Q}$ が無数に存在するようなものが存在する:

- 任意の $v \in S$ に対して $E_v \cong \mathcal{E}_v$,
- $\mathcal{P}_E$ は π 上の 0 でない線型形式.

証明の概略 系 2.10 より $Z(\Phi, \phi, s)$ が関数として 0 でないような Φ, ϕ がとれる．特に $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ が関数として 0 でないような $\mathcal{E}_S$ が存在する．ゼータ関数 $Z(\Phi, \phi, s)$ は $s = 1$ で正則である一方で, $\lim_{s\to 1+0} \mathrm{Re}(\mathcal{D}_E^S(\pi, s)) = +\infty$ となるので, Dirichlet 級数 $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ は有限和ではない．したがって, 条件を満たす 2 次体 $E/\mathbb{Q}$ は無数に存在する． □

定理 2.1 は, この定理の精密化にあたる．定理 2.1 の証明では, Dirichlet 級数 $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ に Tauber 型の定理とフィルター化プロセスを適用する (フィルター化プロセスの詳しい説明については, [KY02] または [雪江 17] を参照).

定理 2.1 の証明の概略 素点の有限集合 T であって S を含むものに対して, 関数 $\mathscr{D}_S(s, \mathcal{E}_S, T)$ を次のように定める:

$$\mathscr{D}_S(s, \mathcal{E}_S, T) = \sum_{E\in X(\mathcal{E}_S)} \frac{L(1, \eta_E)^2 \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi) |\mathcal{P}_E(\phi)|^2 \mathcal{D}_E^T(\pi, s)}{N(E, S)^{s-1}}.$$

これは, ゼータ関数の級数表示である $\xi(s, \phi, \mathcal{E}_S)$ の定義において, $\mathcal{D}_E^S(\pi, s)$ の部分を $\mathcal{D}_E^T(\pi, s)$ に置き換えたものである．

Dirichlet 級数 $\mathscr{D}_S(s+\frac{1}{2},\mathcal{E}_S,T)$ の m 番目の係数を $a_m(T)$ と表わす:

$$\mathscr{D}_S(s+\tfrac{1}{2},\mathcal{E}_S,T)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m(T)}{m^s}.$$

以下, $L(\frac{1}{2},\pi)\neq 0$ と仮定し, T は 13 以下の素数をすべて含むとする. このとき, $\mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$ は $s=\frac{3}{2}$ に 1 位の極をもつことが示せる. これは, [BB11] より任意の $p\notin T$ に対して $|\lambda_p|\leq p^{\frac{1}{2}}(p^{\frac{7}{64}}+p^{-\frac{7}{64}})$ なので, $a_m(T)\geq 0$ となることからしたがう.

この Dirichlet 級数に, 次の形の Tauber 型定理を適用する ([Nar74, Apendix II] または [雪江 14, 第 4 章] を参照).

定理 2.15 非負実数列 a_m と正の実数 M が与えられたとする. Dirichlet 級数 $L(s):=\sum_{m=1}^{\infty}a_m m^{-s}$ が領域 $\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(s)>M\}$ 上で広義一様絶対収束し, $\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(s)\geq M\}$ に解析接続され, さらに $s=M$ に 1 位の極をもつとする. このとき, $s=M$ における $L(s)$ の留数を $A=\operatorname*{Res}_{s=M}L(s)$ とおくと,

$$\lim_{X\to\infty}X^{-M}\sum_{n<X}a_n=\frac{A}{M}$$

が成り立つ.

すると, 次の式が得られる:

$$\lim_{x\to\infty}x^{-1}\sum_{m<x}a_m(T)=\operatorname*{Res}_{s=1}\mathscr{D}_S(s+\tfrac{1}{2},\mathcal{E}_S,T). \tag{2.2}$$

ここで, $\mathscr{D}_S(s+\frac{1}{2},\mathcal{E}_S,T)$ の定義式を展開すると

$$a_m(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ nN(E,S)=m}}\frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2 b_n(E,T)}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}, \tag{2.3}$$

となることに注意する. ただし, $b_n(E,T)$ は Dirichlet 級数 $\mathcal{D}_E^T(\pi,s+\frac{1}{2})$ の n 番目の係数:

$$\mathcal{D}_E^T(\pi,s+\tfrac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(E,T)}{n^s}.$$

以降の議論の大まかなアイディアは以下のような内容である.

T を素点全体の集合に拡大する極限 $\lim_{T\to\infty}$ に関して $\lim_{T\to\infty} b_n(E,T) = 0$ かつ $b_1(E,T) = 1$ なので, (2.2) の両辺の極限 $\lim_{T\to\infty}$ をとると,

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2 \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{T\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$$

が得られる. あとは右辺に現われる留数 $\operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$ を計算すればよい.

このアイディアを正当化するには, 極限 $\lim_{T\to\infty}$ に関するある種の「一様性」を示す必要がある. この「一様性」を示す議論を, [KY02] では**フィルター化プロセス (filtering process)** と呼んでいる.

まず, 関数 $\mathcal{D}_E^T(\pi, s+\frac{1}{2})$ の定義

$$\mathcal{D}_E^T(\pi, s+\tfrac{1}{2}) = \prod_{p\notin T}(1 + \mathcal{R}_{E_p}(\pi_p, s)p^{-2s+1})$$

と [BB11] から, 任意の $n > 1$ に対して $b_n(E,T) \geq 0$ となることがわかる. また, 簡単な計算により $b_1(E,T) = 1$ が確かめられる. したがって, (2.3) で $n = 1$ の項のみとり出して $m < x$ に関して和をとると,

$$\sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2 \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}} \leq \sum_{m<x} a_m(T).$$

この式の両辺の極限 $\lim_{T\to\infty}$ をとると, 上からの評価が得られる:

$$\limsup_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2 \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}} \leq \lim_{T\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T).$$

次に, 下からの評価のために

$$C_p(s) := 1 + 2p^{-2s-1} + p^{-4s-3}, \qquad C^T(s) := \prod_{p\notin T} C_p(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(T)}{n^s}$$

とおく. [BB11] による $|\lambda_p|$ の評価から $b_1(E,T) = c_1(T) = 1$, $b_n(E,T) \leq c_n(T)$ が

わかるので,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m<x} a_m(T) - \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}\\
&= \sum_{\substack{n\geq 2\\ E\in X(\mathcal{E}_S)\\ nN(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2 b_n(E,T)}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}\\
&\leq \sum_{\substack{n\geq 2\\ E\in X(\mathcal{E}_S)\\ nN(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2 c_n(T)}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} c_n(T) \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x/n}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

先に得られた上極限の評価を用いると, 最後の式は

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n(T)\cdot \frac{x}{n} \lim_{T'\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=3/2} \mathscr{D}(s,\mathcal{E}_S,T') = x(C^T(1)-c_1(T)) \lim_{T'\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=3/2} \mathscr{D}(s,\mathcal{E}_S,T')$$

で上から抑えられる.

したがって,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}\\
&\geq \sum_{m<x} a_m(T) - x(C^T(1)-c_1(T)) \lim_{T'\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=3/2} \mathscr{D}(s,\mathcal{E}_S,T').
\end{aligned} \tag{2.4}$$

ここで, $\lim_{T\to\infty}(C^T(1)-c_1(T))=0$ なので

$$\begin{aligned}
&\liminf_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2\alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi)|\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}}\\
&\geq \lim_{T\to\infty}\left(\liminf_{x\to\infty} x^{-1}(\text{式 (2.4) の右辺})\right)\\
&= \lim_{T\to\infty}\left(\liminf_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{m<x} a_m(T)\right) = \lim_{T\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=3/2} \mathscr{D}(s,\mathcal{E}_S,T)
\end{aligned}$$

となる. ただし, 最後の等号は (2.2) による.

以上の $\limsup$ と $\liminf$ それぞれの評価を合わせると,

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{E\in X(\mathcal{E}_S)\\ N(E,S)<x}} \frac{L(1,\eta_E)^2 \alpha_E^{\mathcal{E}_S}(\phi) |\mathcal{P}_E(\phi)|^2}{N(E,S)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{T\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$$

が得られる.

あとは, 次の命題で与えられる留数 $\operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$ の値を代入して整理すると, 定理 2.1 が得られる.

命題 2.16 留数 $\operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$ は

$$\frac{L(\frac{1}{2},\pi)}{L^S(2,\pi,\mathrm{Ad})} \prod_{v\in S} \frac{L(1,\eta_{\mathcal{E}_v})}{2c_v\,|D_E|_v^{-\frac{1}{2}}\,L(\frac{1}{2},\pi_v)} \alpha_{\mathcal{E}_v}(\phi_v,\phi_v)$$
$$\times \prod_{p\in T\setminus S} L(2,\pi_p,\mathrm{Ad}) \left\{1-p^{-3}-\frac{p-1}{p+1}p^{-3}\lambda_p^2\right\}.$$

に等しい. ただし,

$$c_v := \begin{cases} 1 & v=\infty \text{ のとき}, \\ (1-p^{-1})^{-1} & v=p<\infty \text{ のとき}. \end{cases}$$

特に,

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname*{Res}_{s=\frac{3}{2}} \mathscr{D}_S(s,\mathcal{E}_S,T)$$
$$= L(\tfrac{1}{2},\pi) \prod_{v\in S} \frac{L(1,\eta_{\mathcal{E}_v})\alpha_{\mathcal{E}_v}(\phi_v,\phi_v)}{2c_v\,|D_E|_v^{-\frac{1}{2}}\,L(\frac{1}{2},\pi_v)} \prod_{p\notin S} \left\{1-p^{-3}-\frac{p-1}{p+1}p^{-3}\lambda_p^2\right\}.$$

□

謝辞

本稿は, 2023 年度 (第 30 回) 整数論サマースクール「概均質ベクトル空間論の発展」における筆者の講演内容に基づいています. サマースクールを企画・運営してくださった, 世話人の谷口隆先生, 杉山和成先生, 石塚裕大先生に感謝いたします.

参考文献

[BB11] V. Blomer, F. Brumley, *On the Ramanujan conjecture over number fields*, Ann. of Math. (2) **174**, no. 1, 581–605, (2011).

[BH16] M. Bhargava, P. Harron, *The equidistribution of lattice shapes of rings of integers in cubic, quartic, and quintic number fields*, Compositio Math. **152**, 1111–1120, (2016).

[Bum98] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge University Press, no. 55, (1998).

[Hou19] R. Hough, *The shape of cubic fields*, Res. Math. Sci. **6** (2019), no. 23, DOI:10.1007/s40687-019-0185-1, (electronic).

[Hou17+] R. Hough, *The shapfe of quartic fields*, arXiv preprint, (2017).

[KY02] A. Kable, A. Yukie, *The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields I*, Tohoku Math. J., **54**, 513–565, (2002).

[Nar74] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, Monogr. Mat., Tom 57, PWN–Polish Scientific Publishers, Warsaw, 630 pp. (1974)

[Sai99] H. Saito, *Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces*, Math. Ann., **315**, no. 4, 587–615, (1999).

[Sat94] F. Sato,*Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **104**, no. 1, 99–135, (1994).

[Sat06] F. Sato,*Zeta functions of* $(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{M}_2 \oplus \mathrm{M}_2)$ *associated with a pair of Maass cusp forms*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **55**, 77–95, (2006).

[Shi72] T. Shintani,*On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms*, J. Math. Soc. Japan **24**, no. 1, 132–188, (1972).

[SW20+] M. Suzuki, S. Wakatsuki,*Zeta functions and nonvanishing theorems for toric preiods on* GL(2), arXiv preprint, (2020).

[SW21+] M. Suzuki, S. Wakatsuki,*Explicit mean value theorems for toric periods and automorphic L-functions*, arXiv preprint, (2021).

[TT13] T. Taniguchi, F. Thorne,*Orbital L-functions for the space of binary cubic forms*, Canad. J. Math. **65**, no. 6, 1320–1383, (2013).

[Tho23] F. Thorne, Counting cubic fields using Shintani's zeta function, **本報告集**, (2023).

[Wal85] J.-L. Waldspurger, *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie*, Compositio Math., **54**, no. 2, 173–242, (1985).

[石塚 23] 石塚裕大, 有理軌道、整軌道の解釈, **本報告集**, (2023).

[佐藤 23] 佐藤文広, 概均質ゼータ関数の関数等式の一般化, **本報告集**, (2023).

[谷口 23] 谷口隆, 本論のための準備, **本報告集**, (2023).

[雪江 14] 雪江明彦, 整数論 3 解析的整数論への誘い, 日本評論社, (2014).

[雪江 17] 雪江明彦, 概均質ベクトル空間について (集中講義@九州大学原稿), (2017).