概均質ベクトル空間論の発展（第30回整数論サマースクール報告集、写真なし）

谷口, 隆 ; 杉山, 和成 ; 石塚, 裕大 ; 佐藤, 文広 ; 都築, 正男 ; Thorne, Frank ; 鈴木, 雄太 ; 伊吹山, 知義 ; 鈴木, 美裕 ; 佐野, 薫 ; 山本, 修司

(Citation)
第30回整数論サマースクール報告集「概均質ベクトル空間論の発展」:1-421

(Issue Date)
2024-01-31

(Resource Type)
conference proceedings

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100486229

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100486229

大野・中川型鏡映定理と Poitou-Tate 双対性

山本 修司（慶應義塾大学理工学部）

概要

二元三次形式の類数に関する大野・中川の鏡映定理 (reflection theorem) について，最近，O'Dorney [6] が別証明を考案し，一般の代数体に拡張した．本稿ではこの新しい証明について，特に「Galois コホモロジー群の上で Poisson 和公式を使って局所的な等式から大域的な等式を導く」という部分に焦点を当てて解説する．

1 イントロダクション

標題の大野・中川型鏡映定理 (reflection theorem of Ohno-Nakagawa type) の原型は，大野 [8] により予想され，中川 [4] によって証明された，次の等式である[*1]：

$$h_3(-27D) = \begin{cases} 3h(D) & (D > 0), \\ h(D) & (D < 0). \end{cases} \tag{1.1}$$

記号の定義は以下の通りである．$D \in \mathbb{Z}$ に対し，判別式 D の整数係数二元三次形式の集合

$$\mathcal{V}^D(\mathbb{Z}) \coloneqq \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Disc}(x) = D\}$$

を考える（なお判別式 $\mathrm{Disc}(x)$ の明示式は

$$\mathrm{Disc}(x) = 18abcd + b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$$

である）．この集合には群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が左から

$$(gx)(u,v) \coloneqq x\bigl((u,v)g\bigr)$$

---

*1 鏡映定理もしくは鏡映原理 (reflection principle) という名称は，イデアル類群の p-rank に関する Scholz や Leopoldt の古典的な結果 ([10, §10.2], [2, II.5 b)]) に遡る．実際，等式 (1.1) から Scholz の定理の精密化を導くことができる ([4, Remark 0.9]).

と作用する．この作用に関する軌道を，固定部分群の位数の逆数で重みづけて数えた

$$h(D) \coloneqq \sum_{[x]\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathcal{V}^D(\mathbb{Z})} \frac{1}{\#\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_x}$$

を二元三次形式の「類数」と呼ぶ．これが (1.1) の右辺の量である．また左辺の h_3 は，$\mathcal{V}^D$ を

$$\mathcal{V}_3^D(\mathbb{Z}) \coloneqq \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \in \mathcal{V}^D(\mathbb{Z}) \mid b, c \in 3\mathbb{Z}\}$$

という部分集合に置き換えて，同様に

$$h_3(D) \coloneqq \sum_{[x]\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathcal{V}_3^D(\mathbb{Z})} \frac{1}{\#\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_x}$$

と定義する．

等式 (1.1) は，新谷ゼータ関数

$$\xi^{\pm}(s) \coloneqq \sum_{D\in\mathbb{Z},\, \pm D>0} \frac{h(D)}{|D|^s}, \qquad \xi_3^{\pm}(s) \coloneqq \sum_{D\in\mathbb{Z},\, \pm D>0} \frac{h_3(D)}{|D|^s}$$

の関係式として

$$\xi_3^{+}(s) = 3^{-3s}\xi^{-}(s), \qquad \xi_3^{-}(s) = 3^{1-3s}\xi^{+}(s) \tag{1.2}$$

と書くこともできる．この関係式も「大野・中川の鏡映定理」と呼ばれる．

本稿の目的は，O'Dorney [6] によって与えられた鏡映定理 (1.1) の新証明，および代数体への一般化を解説することである．ただし残念ながら筆者の力不足により，証明全体をくまなくフォローすることは断念せざるを得なかった．そこでここでは，O'Dorney の証明のなかでも特に，新しく，発展性があると思われるアイデアに焦点を当てる．それは一言でいえば「等式 (1.1) を Poisson 和公式から導く」というアイデアである．Poisson 和公式といえばゼータ関数の関数等式への応用が連想されるが，ここではゼータ関数の関係式 (1.2) ではなく，あくまでも個々の Dirichlet 係数の関係式 (1.1) を Poisson 和公式から示す，という点を強調しておきたい．

さて Poisson 和公式とは次のような定理であった：局所コンパクト Abel 群 G とその離散かつ余コンパクトな部分群 H に対して，G の Pontryagin 双対を $\widehat{G}$，H の零化域を $H^{\perp} \subset \widehat{G}$ と書くとき，G 上の「良い」関数 f に対して

$$\sum_{\alpha\in H} f(\alpha) = c \sum_{\beta\in H^{\perp}} \widehat{f}(\beta) \tag{1.3}$$

が成り立つ（ただし $\widehat{f}$ は f の Fourier 変換を表し，c は Haar 測度のとり方から定まる，f に依らない定数である）．したがって (1.1) を Poisson 和公式から導くに際して，まず群 G, H の選択が問題になる．O'Dorney の証明では（アデール的）Galois コホモロジー群 $G = H^1(\mathbb{A}_K, M^D)$ を使う（M^D は判別式 D ごとに定義される有限 Galois 加群）．この場合の Pontryagin 双対は Galois コホモロジー同士のカップ積によって記述される（Poitou-Tate 双対性）．この記述を使って，大域的な量（類数）の間の等式 (1.1) を，局所的な量の間の等式（局所鏡映定理）から導くことができるのである．

Poisson 和公式を使って局所的な鏡映定理から大域的な鏡映定理を導くこの仕組みを，O'Dorney は "local-to-global reflection engine" と称し，その適用環境として "composed variety" というある一般的な枠組みを構築している．この枠組みは二元三次形式の空間だけでなく，二元二次形式 [6, §5] や n 元二次形式のペア ($n \geq 3$) [7] にも適用され，それぞれ鏡映定理への応用が論じられている．また三元二次形式のペアの考察に伴って二元四次形式の鏡映定理も得られる ([7, §1.3])．なお二元四次形式の空間や n 元二次形式のペアの空間（$n \geq 4$）は概均質ベクトル空間の範疇には含まれないことに注意しておく．

本稿では composed variety の一般論そのものを述べることはせず，二元三次形式の場合に限って（ただしできるだけ一般論に沿う形で）説明する．原論文 [6, 7] への導入として役に立てば幸いである．

1.1 記号

集合 X に群 G が左から作用しているとき，$x \in X$ の固定部分群を G_x で表す．また軌道 Gx をしばしば $[x]$ で表す．

体 K の分離閉包を $\overline{K}$，絶対 Galois 群を $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ で表す*2．連続 Γ_K 加群 M に対し，コホモロジー群 $H^i(\Gamma_K, M)$ を $H^i(K, M)$ と書く．

体 K における 1 の n 乗根全体，およびベキ根全体のなす群をそれぞれ $\mu_n(K)$, $\mu(K)$ で表す．特に $\mu_n(\overline{K})$, $\mu(\overline{K})$ は離散 Γ_K 加群となるが，これらをしばしば単に μ_n, μ で表す．

*2 原論文 [6, 7] では代数群を Γ，Galois 群を G で表しているが，概均質ベクトル空間を扱う文脈では代数群を G で表すことが多いようなので，本稿では代数群を G，Galois 群を Γ で表すことにした．他にもいくつか，原論文とは異なる記号を採用した部分がある．

2 Poitou-Tate 双対性

この節では，Galois コホモロジーの Poitou-Tate 双対性と Poisson 和公式についての準備を行う．重要な結果は主に Milne [3, Chap. I] からの引用であり，証明はほとんど行わない．

K を代数体，M を有限 Γ_K 加群とする．このとき M の Tate 双対 M' が

$$M' := \mathrm{Hom}(M, \mu) = \mathrm{Hom}(M, \mu(\overline{K}))$$

と定義される．これは再び有限 Γ_K 加群となる．

2.1 局所双対性

K の各素点 v に対し，分解群 $\Gamma_v \subset \Gamma_K$ を固定しておく（これらは共役を除いて定まることに注意）．また v が有限素点のとき，その惰性群を $I_v \subset \Gamma_v$ で表す．Galois 加群 M が v において不分岐である（すなわち I_v の M への作用が自明である）とき，単射準同型 ([9, Chap. VII, §6])

$$\mathrm{Inf}\colon H^1(\Gamma_v/I_v, M) \longrightarrow H^1(\Gamma_v, M) = H^1(K_v, M)$$

の像を $H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M)$ で表す．

K の有限素点 v に対して，カップ積

$$\cup\colon H^1(K_v, M) \times H^1(K_v, M') \longrightarrow H^2(K_v, \mu)$$

と invariant map ([9, Chap. XIII, §6])

$$\mathrm{inv}_v\colon H^2(K_v, \mu) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

および同型 $\exp(2\pi i\cdot)\colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mu(\mathbb{C})$ の合成を

$$\langle\ ,\ \rangle_v\colon H^1(K_v, M) \times H^1(K_v, M') \longrightarrow \mu(\mathbb{C})$$

で表す．

K の無限素点 v に対しても同様に，

$$\langle\ ,\ \rangle_v\colon H^1(K_v, M) \times H^1(K_v, M') \xrightarrow{\cup} H^2(K_v, \mu) \xrightarrow{\cong} \begin{cases} \{\pm 1\} & (K_v \cong \mathbb{R}), \\ \{1\} & (K_v \cong \mathbb{C}) \end{cases}$$

と定義する．

定理 2.1（**[3, Chap. I, §2]**） v を K の素点とする．

(1) $H^1(\Gamma_v, M)$, $H^1(\Gamma_v, M')$ は有限 Abel 群である．
(2) $\langle\ ,\ \rangle_v$ は完全ペアリングである．これにより $H^1(\Gamma_v, M)$ と $H^1(\Gamma_v, M')$ とは互いの Pontryagin 双対と同一視される．
(3) v が有限素点であり，M, M' が v において不分岐であるとき，

$$H^1_{\mathrm{ur}}(\Gamma_v, M) \subset H^1(\Gamma_v, M) \text{ と } H^1_{\mathrm{ur}}(\Gamma_v, M') \subset H^1(\Gamma_v, M')$$

はペアリング $\langle\ ,\ \rangle_v$ に関して互いの零化域である．

2.2 大域双対性

定義 2.2 アデール的 Galois コホモロジー群 $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ を

$$H^1(\mathbb{A}_K, M) = \prod_v{}' H^1(K_v, M)$$

で定義する．ただし v は K の素点全体をわたり，$\prod'$ は $H^1(K_v, M)$ の部分群

$$\begin{cases} H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M) & (v \text{ は有限素点かつ } M \text{ は } v \text{ で不分岐}), \\ H^1(K_v, M) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

に関する制限直積を表す．各因子 $H^1(K_v, M)$ において離散位相を考えることにより，制限直積 $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ は局所コンパクト Abel 群となる．

$\alpha = (\alpha_v) \in H^1(\mathbb{A}_K, M)$ と $\beta = (\beta_v) \in H^1(\mathbb{A}_K, M')$ に対して

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \prod_v \langle \alpha_v, \beta_v \rangle_v$$

と定義する（有限個を除くすべての v に対して $\alpha_v \in H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M)$ かつ $\beta_v \in H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M')$，したがって $\langle \alpha_v, \beta_v \rangle_v = 1$ (定理 2.1 (3)) となるから，この積は実質的に有限積である）．これにより，ペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle \colon H^1(\mathbb{A}_K, M) \times H^1(\mathbb{A}_K, M') \longrightarrow \mu(\mathbb{C})$$

が定まる．

定理 2.3（**[3, Chap. I, §4]**）　(1) ペアリング $\langle\ ,\ \rangle$ により, 局所コンパクト Abel 群 $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ と $H^1(\mathbb{A}_K, M')$ とは互いの Pontryagin 双対と同一視される.

(2) 制限写像 $H^1(K, M) \longrightarrow H^1(K_v, M)$ の積は $H^1(K, M) \to H^1(\mathbb{A}_K, M)$ を定める．またその核は有限，像は離散的，余核はコンパクトである．

(3) $H^1(K, M)$ の $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ における像と，$H^1(K, M')$ の $H^1(\mathbb{A}_K, M')$ における像とは，ペアリング $\langle\ ,\ \rangle$ に関して互いの零化域である．

2.3　Poisson 和公式

定理 2.3 から，アデール的 Galois コホモロジー群の上で次の形の Poisson 和公式が成り立つ．

定理 2.4　f を $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ 上の複素数値関数で，局所定数かつコンパクト台を持つものとし，その Fourier 変換を $\hat{f}$ で表す（これは $H^1(\mathbb{A}_K, M')$ 上の，同様の性質を持つ関数である）．このとき

$$\sum_{\alpha \in H^1(K,M)} f(\alpha) = c_M \sum_{\beta \in H^1(K,M')} \hat{f}(\beta) \tag{2.1}$$

が成り立つ．ただし $c_M > 0$ は f に依らない定数である．また $\alpha \in H^1(K, M)$ の $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ における像での f の値を $f(\alpha)$ と略記した．$\hat{f}(\beta)$ についても同様.

定数 c_M は Haar 測度のとり方によって定まる．また $\mathrm{Ker}(H^1(K, M) \to H^1(\mathbb{A}_K, M))$ および $\mathrm{Ker}(H^1(K, M') \to H^1(\mathbb{A}_K, M'))$ の位数のぶんだけ通常の Poisson 和公式 (1.3) からのずれが生じるが，これも定数 c_M に吸収させている．以下，具体的に Haar 測度を決めて，c_M を計算しよう．

各素点 v に対し，有限 Abel 群 $H^1(K_v, M)$ 上の Haar 測度を，一点集合の測度が $1/\#H^0(K_v, M)$ となるように規格化する．したがって $H^1(K_v, M)$ 上の関数 f の Fourier 変換は

$$\hat{f}(\beta) = \frac{1}{\#H^0(K_v, M)} \sum_{\alpha \in H^1(K_v,M)} f(\alpha)\langle \alpha, \beta \rangle_v \qquad (\beta \in H^1(K_v, M'))$$

と定義される．制限直積 $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ の Haar 測度は，これらの測度の積として定める．$H^1(K_v, M')$ および $H^1(\mathbb{A}_K, M')$ においても同様に（M を M' に置き換えて）定義する．

命題 2.5　上の規格化のもとで，$c_M = \#H^0(K, M)/\#H^0(K, M')$ が成り立つ．

証明　$\mathcal{L} = (L_v)_v$ を，各素点 v に対する部分群 $L_v \subset H^1(K_v, M)$ の族で，有限個の v を除いて $L_v = H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M)$ が成り立つようなものとする．このような $\mathcal{L}$ に対して

$$H^1_{\mathcal{L}}(K, M) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K, M) \longrightarrow \bigoplus_v H^1(K_v, M)/L_v\right)$$

とおく（局所条件 $\mathcal{L}$ に伴う Selmer 群）．$H^1(K_v, M')$ における L_v の零化域を $L_v^{\perp}$ と書くと，族 $\mathcal{L}^{\perp} = (L_v^{\perp})_v$ は $H^1(K_v, M')$ において同様の条件を満たすので，同様に $H^1_{\mathcal{L}^{\perp}}(K, M')$ が定義される．このとき，次の等式が成り立つ ([1, Theorem 2.19])：

$$\frac{\#H^1_{\mathcal{L}}(K, M)}{\#H^1_{\mathcal{L}^{\perp}}(K, M')} = \frac{\#H^0(K, M)}{\#H^0(K, M')} \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(K_v, M)} \tag{2.2}$$

（なお，不分岐な v において完全系列

$$0 \longrightarrow H^0(K_v, M) \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{Frob}_v - 1} M \longrightarrow H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M) \longrightarrow 0$$

があるため，有限個の v を除いて $\#L_v = \#H^1_{\mathrm{ur}}(K_v, M) = \#H^0(K_v, M)$ となり，右辺の積は実質的に有限積である）．

いま，$L_v \subset H^1(K_v, M)$ および $L_v^{\perp} \subset H^1(K_v, M')$ の特性関数をそれぞれ f_v, g_v とすると，

$$\widehat{f_v}(\beta) = \frac{1}{\#H^0(K_v, M)} \sum_{\alpha \in L_v} \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\#L_v}{\#H^0(K_v, M)} g_v(\beta)$$

が成り立つ．よって $\prod_v L_v \subset H^1(\mathbb{A}_K, M)$ および $\prod_v L_v^{\perp} \subset H^1(\mathbb{A}_K, M')$ の特性関数をそれぞれ f, g とすれば，

$$\widehat{f}(\beta) = \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(K_v, M)} \cdot g(\beta)$$

となる．ここで f に Poisson 和公式 (2.1) を適用すると

$$\begin{aligned}\#H^1_{\mathcal{L}}(K, M) &= \sum_{\alpha \in H^1(K, M)} f(\alpha) = c_M \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(K_v, M)} \sum_{\beta \in H^1(K, M')} g(\beta) \\ &= c_M \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(K_v, M)} \#H^1_{\mathcal{L}^{\perp}}(K, M)\end{aligned}$$

となり，これを (2.2) と比較して主張の等式を得る．　□

3 大野・中川型鏡映定理

3.1 二元三次形式の軌道空間

K を代数体とする．$D \in K^{\times}$ に対して，判別式が D であるような二元三次形式全体の空間[*3]

$$V = V^D \coloneqq \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \mid \mathrm{Disc}(x) = D\}$$

を考え，K 上の代数多様体とみなす．V は K 上の代数群 $G = \mathrm{SL}_2$ による左作用

$$(gx)(u,v) = x\big((u,v)g\big)$$

を持ち，以下の条件を満たす：

- V は K 有理点を持つ：例えば $x_0(u,v) \coloneqq u^2v - \frac{D}{4}v^3 \in V(K)$ である．
- $\overline{K}$ 上では，作用は推移的である：$V(\overline{K}) = G(\overline{K}) \cdot x_0$．これは与えられた $x \in V(\overline{K})$ の三つの零点，すなわち $x(u_0,v_0) = 0$ を満たす $(u_0 : v_0) \in \mathbb{P}^1(\overline{K})$ を x_0 の零点
$$(\pm\sqrt{D}/2 : 1),\ (1:0) \in \mathbb{P}^1(\overline{K})$$
に移す一次分数変換を考えることで示される．
- 固定部分群 $M = M^D \coloneqq G(\overline{K})_{x_0}$ は有限 Abel 群である：具体的には
$$M^D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \pm\frac{1}{\sqrt{D}} \\ \mp\frac{3\sqrt{D}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} (\text{複号同順}) \right\}.$$
よって Abel 群としては $M^D \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，また Γ_K 集合としては $M^D \cong \{0, \sqrt{D}, -\sqrt{D}\}$ となる．

注意 3.1　これらの条件を満たす代数多様体 V と代数群 G および作用 $G \curvearrowright V$ の組を，一般に composed variety[*4]と呼ぶ ([6, Definition 4.1])．論文 [6, 7] で扱われている主な例は以下の通りである：

---

*3 判別式 D を固定しているので（概均質）ベクトル空間ではない．この V は vector space でなく variety の頭文字と思うべきであろう．

*4 いわゆる高次合成則 (higher composition law) にちなんで名付けられた由．なお今のところ適切な訳語がなく，本稿では英語のまま書くことにした．

V	G	M	文献
二元二次形式	$\left\{\left(\begin{smallmatrix} u & t \\ 0 & u^{-2} \end{smallmatrix}\right)\right\} \subset \mathrm{GL}_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	[6, §5]
二元三次形式	SL_2	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	[6, §6]
三元二次形式のペア	SL_3	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	[7, §2–3]
n 元二次形式のペア	SL_n	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$	[7, §4]

ただし正確には，多様体 V はそれぞれ適当な不変式（二元三次形式の場合でいえば判別式）の値を固定することで決定される．詳しくは各文献を参照されたい．

$M = M^D$ は有限 Γ_K 加群であり，M を係数とする Galois コホモロジー群に対して前節の議論が適用される．一方，1 次 Galois コホモロジー $H^1(K, M)$ は有理軌道の集合 $G(K)\backslash V(K)$ の解釈にも使うことができる：

命題 3.2　自然な全単射

$$\psi = \psi_{x_0} \colon G(K)\backslash V(K) \longrightarrow H^1(K, M)$$

がある．

証明（非可換群係数の）群コホモロジー論 ([12, 定理 1.11]) により，全単射

$$\psi_{x_0} \colon G(K)\backslash V(K) \longrightarrow \mathrm{Ker}\big(H^1(K, M) \to H^1(K, G)\big)$$

が構成される．ここで $G = \mathrm{SL}_2$ に対して $H^1(K, G) = \{1\}$ ([12, 例 1.9]) であるから主張の通りである． □

補題 3.3　任意の $x \in V(K)$ に対して $G(K)_x \cong G(K)_{x_0} = H^0(K, M)$ である．

証明 $x = gx_0$ なる $g \in G(\overline{K})$ をとると，$\overline{K}$ 上の固定部分群の同型

$$M \xrightarrow{\cong} G(\overline{K})_x;\ s \longmapsto gsg^{-1}$$

がある．いま任意の $\gamma \in \Gamma_K$ に対して

$$\gamma(gsg^{-1}) = g \cdot \big(g^{-1}\gamma(g)\big) \cdot \gamma(s) \cdot \big(g^{-1}\gamma(g)\big)^{-1} \cdot g^{-1}$$

であるが，$g^{-1}\gamma(g)$ と $\gamma(s)$ とは共に M に属するからこれらは可換であって，結局

$$\gamma(gsg^{-1}) = g\gamma(s)g^{-1}$$

を得る．したがって $s \in M = G(\overline{K})_{x_0}$ に対して

$$\begin{aligned} s \in H^0(K, M) &\iff s \text{ は } \Gamma_K \text{ 不変} \\ &\iff gsg^{-1} \text{ は } \Gamma_K \text{ 不変} \iff gsg^{-1} \in G(K)_x \end{aligned}$$

となる．すなわち上の同型 $M \xrightarrow{\cong} G(\overline{K})_x$ は同型 $H^0(K, M) \xrightarrow{\cong} G(K)_x$ を引き起こす． □

さて，鏡映定理 (1.1) の両辺には二つの判別式 D と $-27D$ とが現れている．次の同型から，これらが双対的な関係にあることが見てとれる．

補題 3.4 Γ_K 加群 M^D の Tate 双対について，

$$(M^D)' \cong M^{-3D} \cong M^{-27D}$$

が成り立つ．

証明 M^D の位数は 3 なので $(M^D)' = \mathrm{Hom}(M^D, \mu_3)$ であり，これからまず抽象群としての同型が分かる．Galois 作用が一致することは, 1 の原始 3 乗根が $(-1 \pm \sqrt{-3})/2$ と書けることから導かれる． □

3.2 整モデル

$\mathfrak{a}$ は K の分数イデアル，$\mathfrak{t}$ は 3 を割り切る整イデアルで，$D \in \mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{t}^3$ を満たすものとする．このとき，$V^D(K)$ の部分集合

$$\mathcal{V}^D_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(O_K) := \left\{ x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \in V^D(K) \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{t} \\ c \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{t},\ d \in \mathfrak{a}^{-2} \end{array} \right\}$$

は，$G(K)$ の部分群

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{a}}(O_K) := \mathrm{SL}(O_K \oplus \mathfrak{a}) = \left\{ g \in \begin{pmatrix} O_K & \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}^{-1} & O_K \end{pmatrix} \;\middle|\; \det(g) = 1 \right\}$$

の作用を持つ．以下，$\mathcal{V}^D_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}$ と $\mathcal{G}_{\mathfrak{a}}$ をそれぞれ $V = V^D$, G の O_K 上のモデルとみなし，必要のないときには添え字を省略して $\mathcal{V}$，$\mathcal{G}$ と表す．例えば K の素点 v に対して

$$\mathcal{G}(O_v) = \mathcal{G}_{\mathfrak{a}}(O_v) = \left\{ g \in \begin{pmatrix} O_v & \mathfrak{a}O_v \\ \mathfrak{a}^{-1}O_v & O_v \end{pmatrix} \;\middle|\; \det(g) = 1 \right\}$$

などとなる．ただし

$$O_v \coloneqq \begin{cases} K_v \text{ の整数環} & (v \text{ が有限素点のとき}), \\ K_v & (v \text{ が無限素点のとき}). \end{cases}$$

すると $\mathcal{V}(O_v)$ は $V(K_v)$ の部分集合，$\mathcal{G}(O_v)$ は $G(K_v)$ の部分群になり，$\mathcal{V}(O_v)$ は $\mathcal{G}(O_v)$ の作用を持つ．

定義 3.5　上の記号のもとで，二元三次形式の類数を

$$h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D) \coloneqq \sum_{[x]\in\mathcal{G}(O_K)\backslash\mathcal{V}(O_K)} \frac{1}{\#\mathcal{G}(O_K)_x} \tag{3.1}$$

と定める．

類数 $h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D)$ を Poisson 和公式 (2.1) が適用可能な形に書くのが次の公式である：

補題 3.6

$$h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D) = \frac{1}{\#H^0(K,M)} \sum_{\alpha\in H^1(K,M)} \prod_v f_v(\mathrm{res}_v(\alpha)). \tag{3.2}$$

ここで $M = M^D$ は §3.1 と同様，V の有理点における固定部分群 $M = G(\overline{K})_{x_0}$ を表す．また K の各素点 v に対し，$H^1(K_v, M)$ 上の関数 f_v は次のように定義される：$\psi_{x_0}([x_\alpha]) = \alpha$ を満たす $x_\alpha \in V(K_v)$ を一つとって

$$f_v(\alpha) \coloneqq \#\bigl\{[g] \in \mathcal{G}(O_v)\backslash G(K_v) \bigm| g\, x_\alpha \in \mathcal{V}(O_v)\bigr\} \tag{3.3}$$

とおく*5.

証明　$G = \mathrm{SL}_2$ の強近似定理により，対角埋め込み

$$\mathcal{G}(O_K)\backslash G(K) \longrightarrow \bigoplus_v \mathcal{G}(O_v)\backslash G(K_v)$$

は全単射である．このことから，$\alpha \in H^1(K,M)$ および対応する $x_\alpha \in V(K)$ を固定

*5 Composed varieties の一般論 ([6, §4]) では，元の個数 (3.3) のかわりに適切に選ばれた $\mathcal{G}(O_K)\backslash\mathcal{V}(O_K)$ 上の重み関数 w_v の和 f_{v,w_v} を扱う．ここで考えている二元三次形式の場合には $w_v \equiv 1$ でよい．

したとき，

$$\begin{aligned}\prod_v f_v(\mathrm{res}_v(\alpha)) &= \#\left\{([g_v])_v \in \bigoplus_v \mathcal{G}(O_v)\backslash G(K_v) \;\middle|\; g_v x_\alpha \in \mathcal{V}(O_v)\right\} \\ &= \#\{[g] \in \mathcal{G}(O_K)\backslash G(K) \mid g x_\alpha \in \mathcal{V}(O_K)\}\end{aligned}$$

が分かる．右辺の集合は，写像

$$\mathcal{G}(O_K)\backslash G(K) \longrightarrow \mathcal{G}(O_K)\backslash V(K);\ [g] \longmapsto [g x_\alpha]$$

に関する $\mathcal{G}(O_K)\backslash\mathcal{V}(O_K)$ の逆像に他ならず，各点 $[x] \in \mathcal{G}(O_K)\backslash\mathcal{V}(O_K)$ の逆像の大きさは 0 または

$$\frac{\#G(K)_x}{\#\mathcal{G}(O_K)_x} = \frac{\#H^0(K,M)}{\#\mathcal{G}(O_K)_x}$$

に等しい（ここで補題 3.3 を使った）．以上を整理すると

$$\sum_{\substack{[x]\in\mathcal{G}(O_K)\backslash\mathcal{V}(O_K) \\ \mathcal{G}(O_K)x\subset G(K)x_\alpha}} \frac{1}{\#\mathcal{G}(O_K)_x} = \frac{1}{\#H^0(K,M)} \prod_v f_v(\mathrm{res}_v(\alpha))$$

が得られ，これを $\alpha \in H^1(K,M)$ にわたって加えれば (3.2) が示される． □

3.3 局所鏡映定理

$(D,\mathfrak{a},\mathfrak{t})$ を §3.2 と同様にとり，$M = M^D$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}^D_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\mathfrak{a}$ などの記号を引き続き用いる．ここで Γ_K 加群 $M = M^D$ の Tate 双対が M^{-27D} であったことを思い出そう（補題 3.4）．そこで，$(-27D, \mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3}, 3\mathfrak{t}^{-1})$ が $(D,\mathfrak{a},\mathfrak{t})$ と同じ条件を満たすことに注意して，$M' = M^{-27D}$, $\mathcal{V}' = \mathcal{V}^{-27D}_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3},3\mathfrak{t}^{-1}}$, $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3}}$ などと書く．

K の各素点 v に対して，$H^1(K_v,M)$ 上の関数 f_v が (3.3) によって定義されていた．同様にして定義される $H^1(K_v,M')$ 上の関数を f'_v で表す．$H^1(K_v,M)$ と $H^1(K_v,M')$ とは Pontryagin 双対をなし，f の Fourier 変換

$$\widehat{f_v}(\beta) = \frac{1}{\#H^0(K_v,M)} \sum_{\alpha\in H^1(K_v,M)} f_v(\alpha)\langle\alpha,\beta\rangle_v$$

は $H^1(K_v,M')$ 上の関数となるのだった．この $\widehat{f_v}$ と f'_v とを比較するのが次の「局所鏡映定理 (local reflection theorem)」である．

定理 3.7（O'Dorney [6, Theorem 6.2]）

$$f'_v = c_v \cdot \widehat{f}_v,$$

ただし

$$c_v = \begin{cases} 1/\#(O_v/\mathrm{t}O_v) & (v \text{ が有限素点}), \\ 1 & (v \text{ が実素点で } D < 0), \\ 3 & (v \text{ が複素素点，または実素点で } D > 0). \end{cases}$$

この定理は代数体上の二元三次形式における大野・中川型鏡映定理の核心部分といってもよいのだが，その証明はかなり長く複雑であって，ここでは割愛せざるを得ない．原論文 [6, §6] または [5, §11] を参照されたい（実は [6] の §2, §3 も大部分がこの証明のための準備である）．一応，証明の流れをごく大雑把に述べておく．

- 無限素点の場合は簡単である．実際，この場合 $H^1(K_v, M) = H^1(K_v, M') = 0$，$O_v = K_v$，$f_v = f'_v = 1$ であって，定理の係数に現れる 1 または 3 は $H^0(K_v, M)$ の位数（Haar 測度の規格化に用いた定数）である．
- 有限素点の場合は，高次合成則を使って問題を O_v 上の三次環の議論に帰着する（三次環の高次合成則については [11, 定理 2.8] も参考にされたい）．さらに $v \nmid 3$ のとき (tame case) と $v \mid 3$ のとき (wild case) に場合分けする．
- Tame case では，まず問題を 0 における等式 $f'_v(0) = \widehat{f}_v(0)$, $f_v(0) = \widehat{f}'_v(0)$ の証明に帰着する（この部分は巧妙だがおおよそ初等的な議論である）．次に

$$f_v(0) \stackrel{?}{=} \widehat{f}'_v(0) = \frac{1}{\#H^0(K_v, M')} \sum_{\beta \in H^1(K_v, M')} f'_v(\beta)$$

  を示すのだが（対称性によりこちらだけ示せばよい），これは高次合成則によって

$$\#\left\{ K_v \times K_v[\sqrt{D}] \text{ の判別式 } D \text{ の整環} \right\} \stackrel{?}{=} \frac{\#\left\{ \text{判別式 } -3D \text{ の三次整環の同型類} \right\}}{\#H^0(K_v, M')}$$

  と翻訳される．この等式は，右辺の集合から左辺の集合への全射を具体的に構成し，各元の逆像の大きさが $\#H^0(K_v, M')$ に等しいことを示すことによって証明される．

- Wild case については，[5, §11] において “computational proof” と “bijective proof” という二通りの証明が与えられており，[6] では後者が採用されている．いずれの証明も，$H^1(K_v, M)$ の元に対して “level” という数を定義し，それを使って $H^1(K_v, M)$ を細分することから出発している．

3.4 大域鏡映定理

定理 3.8（O’Dorney [6, Theorem 1.2]） K を代数体，$\mathfrak{a}$ をその分数イデアル，$\mathfrak{t}$ を 3 を割り切る整イデアルとし，判別式 $D \in \mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{t}^2$ の二元三次形式の類数を (3.1) で定義する．このとき

$$h_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3},3\mathfrak{t}^{-1}}(-27D) = \frac{3^{\#\{v|\infty,\, D\in(K_v^\times)^2\}}}{N(\mathfrak{t})} h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D)$$

が成り立つ[*6]．

証明 $H^1(\mathbb{A}_K, M)$ 上の関数 f を $f\big((\alpha_v)_v\big) = \prod_v f_v(\alpha_v)$ で定義すると，定理 3.7 により

$$\widehat{f}\big((\beta_v)_v\big) = \prod_v \widehat{f}_v(\beta_v) = \prod_v c_v^{-1} f'_v(\beta_v) = \frac{N(\mathfrak{t})}{3^{\#\{v|\infty,\, D\in(K_v^\times)^2\}}} f'\big((\beta_v)_v\big)$$

が成り立つ（f' は f と同様に定義した $H^1(\mathbb{A}_K, M')$ 上の関数）．したがってこの関数 f に対する Poisson 和公式 (2.1) は

$$\sum_{\alpha\in H^1(K,M)} f(\alpha) = c_M \frac{N(\mathfrak{t})}{3^{\#\{v|\infty,\, D\in(K_v^\times)^2\}}} \sum_{\beta\in H^1(K,M')} f'(\beta)$$

と書ける．補題 3.6 を使うと，これは

$$\#H^0(K, M)\cdot h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D) = c_M \frac{N(\mathfrak{t})}{3^{\#\{v|\infty,\, D\in(K_v^\times)^2\}}} \cdot \#H^0(K, M')\cdot h_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3},3\mathfrak{t}^{-1}}(-27D)$$

と書き直せる．最後に命題 2.5 で計算した値 $c_M = \#H^0(K, M)/\#H^0(K, M')$ を代入して整理すれば主張の等式を得る． □

---

*6 [6, Theorem 1.2] の式は両辺の $h_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}^{-3},3\mathfrak{t}^{-1}}(-27D)$ と $h_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}(D)$ が逆に書かれてしまっている．実際，$K = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{t} = \mathbb{Z}$ としたときに等式 (1.1) を復元するのはここに書いた等式である．

参考文献

[1] H. Darmon, F. Diamond, R. Taylor, Fermat's Last Theorem, *Current Developments in Mathematics* **1**, 1995, International Press, 1–154. `https://dx.doi.org/10.4310/CDM.1995.v1995.n1.a1`

[2] G. Gras, *Class Field Theory: From Theory to Practice*, Springer-Verlag, 2003.

[3] J. S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems, Second Edition*, BookSurge Publishing, 2006. `https://www.jmilne.org/math/Books/`

[4] J. Nakagawa, On the relations among the class numbers of binary cubic forms, *Invent. Math.* **134** (1998), 101–138.

[5] E. M. O'Dorney, Reflection theorems for number rings, Princeton University Doctoral Dissertation, 2021. `http://arks.princeton.edu/ark:/88435/dsp01r207ts47r`

[6] E. M. O'Dorney, Reflection theorems for number rings generalizing the Ohno-Nakagawa identity, preprint, arXiv:2111.09784.

[7] E. M. O'Dorney, Reflection theorems of Ohno-Nakagawa type for quartic rings and pairs of n-ary quadratic forms, preprint, arXiv:2204.10924.

[8] Y. Ohno, A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms, *Amer. J. Math.* **119** (1997), 1083–1094.

[9] J.-P. Serre, *Local Fields*, Graduate Texts in Mathematics **67**, Springer-Verlag, 1979.

[10] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics **83**, Springer-Verlag, 1997.

[11] 石塚裕大，有理軌道，整軌道の解釈，本報告集，2023.

[12] 谷口隆，本論のための準備，本報告集，2023.