



Explicit description of moduli spaces of parabolic connections

松本, 孝文

(Degree)

博士 (理学)

(Date of Degree)

2024-03-25

(Date of Publication)

2025-03-01

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲第8848号

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100490073>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



(別紙様式 3)

論 文 内 容 の 要 旨

氏 名 松本 孝文

専 攻 数学専攻

論文題目

Explicit description of moduli spaces of parabolic connections

(放物接続のモジュライ空間の明示的記述)

指導教員 吉岡康太

背景

本博士論文では、代数曲線上の放物接続のモジュライ空間の具体的な記述について論じる。

Painlevé 方程式とは動く特異点が高々極のみであるという性質をもった 2 階の非線形複素常微分方程式である。Painlevé 方程式の大きな特徴として線形微分方程式のモノドロミー保存変形により得られることがあげられる。例えば Painlevé 第 VI 方程式は 4 点で確定特異点をもつ 2 階線形微分方程式のモノドロミー保存変形により得られることが知られている。

Painlevé 方程式を得る別の方法として有理曲面による理論が挙げられる。Painlevé 方程式の初期値空間は岡本により導入された。坂井や齋藤・竹部・寺島らは初期値空間をあるクラスの有理射影代数曲面として特徴付け、それらの分類を affine ルート系を用いて行なった。分類された射影曲面は有効反標準因子をただ一つもち、各 Painlevé 方程式の初期値空間は対応する射影曲面から有効反標準因子を除いた曲面として得られる。さらに各曲面の族は対応する affine Weyl 群の作用をもつ。坂井の理論において、離散 Painlevé 方程式は曲面に対応する affine Weyl 群の平行移動の作用が与える離散力学系と理解され、Painlevé 方程式は平行移動の作用の極限として得られる。また、齋藤・竹部・寺島は曲面の複素構造の変形から Painlevé 方程式を導出している。

有理接続のモジュライ空間はモノドロミー保存変形と初期値空間を結びつける対象である。モノドロミー保存変形によって得られる微分方程式は Riemann-Hilbert 対応を介して有理接続のモジュライ空間上の代数的ベクトル場として理解される。言い換えれば、有理接続のモジュライ空間はモノドロミー保存変形によって得られる微分方程式の初期値空間とみなせる。実際、Arinkin・Lysenko は射影直線の 2 階 4 点確定特異接続のモジュライ空間が Painlevé 第 VI 方程式の初期値空間であることを、局所指数が generic な場合に証明している。また、稲場・岩崎・齋藤は 2 階 4 点確定特異接続のモジュライ空間の自然なコンパクト化である 2 階 4 点確定特異 ϕ -接続のモジュライ空間が坂井らの分類における Painlevé 第 VI 方程式の初期値空間に対応する射影曲面と同型であることを、任意の局所指数に対し証明している。この結果は Painlevé 方程式や離散 Painlevé 方程式の初期値空間に対応する射影曲面の全体がモジュライ理論的に導出された唯一の例である。

有理接続のモジュライ空間の詳細な記述を与えることはモノドロミー保存変形により得られる微分方程式を明示的記述や、その初期値空間の特徴付けを行う上で重要である。有理接続のモジュライ空間の記述は射影直線上の 2 階確定特異接続の場合に主になされている。本学位論文の目的はモジュライ空間の詳細な記述を接続の階数が 3 以上の場合や代数曲線の種数が一般の場合に与えることである。

主結果

(1) 射影直線上 3 階 3 点確定特異接続のモジュライ空間 $M_3^\alpha(t, \nu)$ の明示的記述を見かけの特異点とその双対座標を与えることで行なった。より正確には、射影直線上 3 階 3 点確定特異接続のモジュライ空間の自然なコンパクト化である 3 階 3 点確定特異 ϕ -接続のモジュライ空間 $\overline{M}_3^\alpha(t, \nu)$ の族が、坂井らの分類によって現れた $A_2^{(1)*}$ 型曲面の族と同型であることを証明した。これは上記の稲場・岩崎・齋藤の仕事に次ぐ、曲面の全体がモジュライ理論的に得られた例である。

(2) 代数曲線上の行列式直線束とその上の接続の組 (L, ∇_L) を固定した 2 階確定特異接続のモジュライ空間 $M^\alpha(\nu, (L, \nabla_L))$ の Darboux 座標を曲線の種数に関係なく与えた。具体的には、射影空間 $\mathbb{P}^N$ への見かけの特異点写像 App と、放物ベクトル束のモジュライ空間 $P^\alpha(L)$ への忘却写像 Bun の直積写像 $\text{App} \times \text{Bun}$ が双有理写像であることを証明した。さらに各有理写像がある開集合上で Lagrangian fibration であることを証明した。この結果は Loray・齋藤による射影直線上の結果を一般種数に拡張したものである。また、射影直線上 3 階 3 点確定特異接続の場合に $\text{App} \times \text{Bun}$ の generic なファイバーが 3 点からなることを証明した。このことから接続の階数が 3 以上の場合、 $\text{App} \times \text{Bun}$ は一般に双有理写像でないことが判明した。

構成

第2章では放物ベクトル束、放物接続に関する一般論を復習する。また高階の放物 ϕ -接続を導入する。さらに放物 ϕ -接続の初等変換について述べる。

第3章では安定放物 ϕ -接続のモジュライ空間を構成する。構成の方法は稲場・岩崎・齋藤における2階の安定放物 ϕ -接続のモジュライ空間の構成と同じである。すなわち、はじめに安定放物 $\Lambda^1_{\mathcal{D}}$ -triple のモジュライ空間を幾何学的不変式論を用いて構成し、安定放物 ϕ -接続のモジュライ空間をその閉部分 scheme として実現する。

第4章では主結果 (1) の証明を与える。はじめに射影直線上の異なる3点のなす空間 T_3 と局所指数の空間 $\mathcal{N}$ の直積 $T_3 \times \mathcal{N}$ 上に $A_2^{(1)*}$ 型曲面の族を構成する。次に α -安定な放物 ϕ -接続の下部ベクトル束が $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ であることを示す。この結果を用いて α -安定な放物 ϕ -接続に対し見かけの特異点を定義する。これは齋藤・Szabó によって定義された放物接続に対する見かけの特異点の拡張である。見かけの特異点は下部ベクトル束の部分局所自由層のフィルトレーションを用いて定義されるが、 ϕ の階数が1のとき、ある部分層が一意に定まらない。そこで放物 ϕ -接続と部分層の組のモジュライ空間 $\widehat{M}_3^\alpha(t, \nu)$ を考え、その上で見かけの特異点写像を定義する。次に射 $\varphi: \widehat{M}_3^\alpha(t, \nu) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(D))$ を見かけの特異点とその双対座標を用いて定義する。ここで、 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(D))$ は1次の Hirzebruch 曲面であることに注意する。その後見かけの特異点とその双対座標を用いて α -安定な放物 ϕ -接続の標準形を与える。この標準形を用いて $\overline{M}_3^\alpha(t, \nu)$ が非特異であること、 φ が9点 Blow-up であることを示す。最後に部分層を忘れる射 $\widehat{M}_3^\alpha(t, \nu) \rightarrow \overline{M}_3^\alpha(t, \nu)$ が $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(D))$ の無限遠切断の収縮であることを示すことで $\overline{M}_3^\alpha(t, \nu)$ が $A_2^{(1)*}$ 型曲面と同型であることを示す。

第5章では主結果 (2) の証明を与える。見かけの特異点と下部放物ベクトルの関係について接続の階数が2階と3階の場合に分けて考える。第1節では種数が1以上の代数曲線 C 上の行列式直線束とその上の接続の組 (L, ∇_L) を固定した2階確定特異接続のモジュライ空間 $M^\alpha(\nu, (L, \nabla_L))$ について調べる。はじめに行列式直線束 L を固定した α -安定な放物ベクトル束のモジュライ空間 $P^\alpha(L)$ の Zariski 開集合 V_0 を射影空間 $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1((L, l_*), (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \emptyset))$ の Zariski 開集合として実現する。すなわち、generic な α -安定放物ベクトル束が L の $\mathcal{O}_C$ による放物ベクトル束としての拡大で記述できることを示す。そのために重み α を放物ベクトル束が α -安定であることと下部ベクトル束が安定であることが同値になるように選ぶ。次に下部放物ベクトル束が V_0 の元である放物接続のモジュライ空間 $M^\alpha(\nu, (L, \nabla_L))^0$ 上で $\mathrm{App} \times \mathrm{Bun}$ が同型写像となることを示す。この証明は、接続の局所表示を有理1形式係数の行列により与え、貼り合わせ条件を行列の各成分に対して書き下し、条件を満たす有理1形式が一意に存在することを層のコホモロジーを用いることで行う。ところで、放物接続 $(E, \nabla, l_*) \in M^\alpha(\nu, (L, \nabla_L))^0$ の接空間はある層の複体 $\mathcal{E}^\bullet$ の1次ハイパーコホモロジー群 $H^1(\mathcal{E}^\bullet)$ と同型であることが変形理論によりわかる。 $H^1(\mathcal{E}^\bullet)$ および、その上のシンプレクティック形式は Čech コホモロジーの言葉で書くことができる。このことと (E, ∇, l_*) の局所表示を用いることで、 App および Bun が Lagrangian fibration であることを示す。

第2節では射影直線上の3点確定特異3階接続のモジュライ空間について見かけの特異点と下部放物ベクトル束の関係を調べる。簡単のため α -安定性の特殊な場合である w -安定性について考える。はじめに w -安定な放物ベクトル束を決定する。また分類の結果を用いて w の壁越え現象を記述する。次に下部放物ベクトル束が w -安定である放物接続のモジュライ空間 $M_3^w(t, \nu)^0$ の λ -接続を用いたコンパクト化 $\overline{M}_3^w(t, \nu)^0$ を決定する。具体的には generic な特性指数に対し $\overline{M}_3^w(t, \nu)^0$ は2次の Hirzebruch 曲面となり、特殊な特性指数に対しては $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ となることを証明する。このことを証明するにあたり、 w -安定な放物ベクトル束上の接続と Higgs 場を書き下す。この具体表示を用いて generic な w -安定放物ベクトル束上の λ -接続の空間（これは $\mathbb{P}^1$ と同型である）から $\mathbb{P}^1$ への見かけの特異点写像の generic なファイバーが3点からなることを証明する。

氏 名	松本 孝文		
論 文 題 目	Explicit description of moduli spaces of parabolic connections (放物接続のモジュライ空間の明示的記述)		
審 査 委 員	区 分	職 名	氏 名
	主 査	教 授	吉 岡 康 太
	副 査	准教授	佐 野 太 郎
	副 査	教 授	山 田 泰 彦
	副 査	教 授	齋 藤 政 彦
	副 査		印
要 旨			
岡本による Painlevé 微分方程式の初期値空間の分類に有理代数曲面が現れるが、このことに代表される Painlevé 微分方程式と代数幾何学との結びつきは、代数幾何学の立場からの Painlevé 微分方程式の研究を可能とする。たとえば Arinkin、Lysenko や稲場、岩崎、齋藤たちは代数曲線上の線形接続のモジュライ空間を使って Painlevé 微分方程式の研究をおこなった。とくに稲場、岩崎、齋藤らは確定特異点をもつ線形接続に対し安定性の概念を導入することにより、接続が既約でない場合も含めて、射影直線上階数 2 の線形接続のモジュライ空間（放物的接続のモジュライ空間という）とその射影的コンパクト化を幾何学的不変式論を使って構成し、Painlevé VI 方程式の幾何学的研究への道を開いた。稲場、岩崎、齋藤らはまた、放物的接続のモジュライ空間が正則 symplectic 構造をもつ代数幾何学的に重要な空間であることも示しており、これ以降放物的接続のモジュライ空間は重要かつ興味深い研究対象となった。 この学位論文において松本孝文氏は、(1) 射影直線上 3 点で特異点をもつ階数 3 の放物的接続のモジュライ空間と (2) 種数 2 以上の代数曲線上の階数 2 の放物的接続のモジュライ空間に関する成果を得た。 (1) 1 つ目の成果は、射影直線上 3 点で特異点をもつ階数 3 の放物的接続のモジュライ空間が $A_2^{(1)*}$-型曲面と呼ばれる有理代数曲面から反標準因子を除いた空間と同型であることを示したもので、第 3 章、第 4 章に記述されている。ここで $A_2^{(1)*}$-型曲面とは、坂井による離散 Painlevé 方程式の初期値空間の分類に現れる有理代数曲面とその反標準因子のことで、Arinkin、Borodin や Boalch による先行研究により射影直線上 3 点で特異点をもつ階数 3 の放物的接続と関連すること			

氏名	松本 孝文
が知られていた。松本氏は、稲場、岩崎、齋藤の方法を参考に成果を得た。まず、放物的 ϕ-接続とそのモジュライ空間を導入、構成し、放物的接続のモジュライ空間のコンパクト化となっていることを示す。次に放物的 ϕ-接続のモジュライ空間の blow-up から 1 次の Hirzebruch 曲面への射を見かけの特異点とその双対座標を用いて構成し、この射を用いて放物的 ϕ-接続のモジュライ空間が $A_2^{(1)*}$-型曲面であることを示している。 (2) 2 つ目の成果は、行列式直線束の接続を固定した放物的接続のモジュライ空間の Darboux 座標に関する成果であり、第 5 章に記述されている。 放物的接続に見かけの特異点を対応させることで、放物的接続のモジュライ空間から射影空間への有理写像 App が定義される。また放物的接続に対し、接続を忘れる忘却写像は、放物的接続のモジュライ空間から放物的ベクトル束のモジュライ空間への有理写像 Bun を定義する。Loray と齋藤は、射影直線の場合にこれらの有理写像が Lagrangian ファイバー構造をもち、また積写像 $\text{App} \times \text{Bun}$ が双有理写像になることを示した。その後、Loray と齋藤の結果は Fassarella、Loray、Muniz らにより楕円曲線の場合にも、行列式直線束の接続を固定した放物的接続のモジュライ空間を考えることで一般化された。松本氏は、これらの結果を種数 2 以上の代数曲線に一般化した。双有理性を示すには、逆対応を作れば良いが、放物的ベクトル束と接続の条件を局所座標を用いて記述し、チェックコホモロジーの計算に持ち込むもので、具体的で興味深い構成となっている。また 2 つの有理写像が Lagrangian ファイバー構造であることも、接空間とシンプレクティック形式がコホモロジーで記述できることから類似の計算で示される。 松本氏は射影直線上の 3 点で極をもつ放物的接続のモジュライの場合には積写像は双有理写像でないことも示している。 本研究は放物的接続のモジュライ空間に関する大変興味深い研究であり、可積分系や代数幾何学に関して重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者 松本 孝文は、博士 (理学) の学位を得る資格があると認める。	