Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-07-03

異方透水性地盤における浸透水の流れ

田中，勉
フェライト，アーノルド

(Issue Date)
2024-07-01
(Resource Type)
book
(Version)
Version of Record
(Rights)
Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100490325
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100490325

Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-05-20

異方透水性地盤における浸透水の流れ

田中，勉
フェライト，アーノルド

(Issue Date)
2024-07-01
(Resource Type)
book
(Version)
Version of Record
(Rights)
Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/0100490325
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100490325

異方透水性地盤における浸透水の流れ

田中　　勉・アーノルド フェライト

Seepage Flow through Anisotropic Porous Media
–Theory and Application–

TSUTOMU TANAKA, Emeritus Professor, Kobe University, Japan
ARNOLD VERRUIJT, Emeritus Professor, Delft University of Technology, The Netherlands

まえがき

異方透水性が問題となるケースについて考える。まず，地下水位の高い地点における掘削地盤のボイリング(浸透破壊)について考えてみよう。締切り矢板を用いて水替え掘削するとき，掘削底面のボイリングに対する安定性が検討される。ボイリングに対する設計安全率 F_s は，現象がよくわからなかった時代から現在のように浸透破壊理論がある程度明らかになってきたことに伴い低下し，1950 年頃には $F_s = 5$ あるいは 8～10 がとられていたものが[1]，現在では $F_s = 1.2$ や 1.5 がとられるようになってきた[2) 3) 4)]。設計において，地盤は通常均質かつ等方と仮定されるので，地盤が実際に均質かつ等方であれば問題はないが，異方透水性を有していたり，不均質(層状地盤を含む)であったりすると，浸透破壊に対する安定性が低下し，その地盤は浸透破壊に対して危険となる。場合によっては破壊を起こすことになる[5) 6) 7)]。すなわち，設計安全率が低く設定されるようになったため，実際には設計条件が限界ぎりぎりの状態になったり場合によっては限界を越えたりすることがある。浸透破壊に対して十分に配慮された場合においても，実質的な安全率はすぐに 1.0 を切ってしまうことになる。理論が進展した現在においても浸透破壊を起こす事例があることはこのような理由によるものと考えられる。

次に，フィルダム堤体内の浸透流について考えてみよう。これまでの経験から，「円筒形モールドによって丁寧に締め固められた土の室内透水試験から得られた鉛直方向の透水係数 k_v」を用いて堤体内浸透流量を計算した場合，実際のフィルダム堤体を流れる流量はその計算流量の約 10 倍程度の大きさになることが知られている。したがって，室内で得られる鉛直方向の透水係数 k_v を 10 倍した値 $10\,k_v$ が設計透水係数 k_{design} $(= 10\,k_v)$ としてとられることがある[8) 9)]。この理由として，土の異方透水性や土の不均質性が考えられる。

(1) 土の異方透水性

フィルダム堤体を築造するときのように，土を薄くまきだして締固め機械で何層にもわたって締め固めるような場合，地盤は水平方向の透水係数の方が鉛直方向の透水係数よりも大きくなること，すなわち，異方透水性が生じることが知られている。フィルダムの不透水性材料は，通常，容積 1000 cm^3 の円筒形締固め用モールドを用いて突き固められ，締固め理論に基づいて最適含水比と最大乾燥密度が求められる。そして，最大乾燥密度付近に締め固められた供試体の透水係数が実験室で求められる。この透水係数は，試料の鉛直方向の透水性を表すものであり，この値を用いて土を等方透水性と仮定して算出された計算流量は，フィルダム堤体のように水平方向の透水性が卓越するような場合には実際の流量よりも小さく算定されることになる。このように，フィルダム堤体の浸透流量算定計に室内実験による透水係数をそのまま用いることには問題がある。

(2) 土の不均質性

締固め用モールドのような小さな容器を用いて丁寧に締め固められた供試体は，現場の地盤よりも効率的に均質に締め固められ実際よりも小さな透水係数になると考えられる。また，現場では場所により締固め密度の異なる状況が生じ，場合によっては透水係数の大きな箇所が生じることになる。このような場合，水は透水係数の大きなところを集中的に流れることになり，実際の流量は，小さな透水係数を持つ均質な堤体として算出された計算流量よりも，大きなものとなる。

(1)，(2)のいずれの状況においても実際の浸透流量は計算流量よりも大きくなることになり現

実には前述したような操作($k_{\mathrm{design}} = 10\,k_v$)を加えなければならないことになる。

異方透水性は「地盤の安定性の低下」や「実際の浸透流量の増大」に影響を及ぼす大きな要因の一つであり詳しく調べる必要がある。ここでは，異方透水性に関して，まず，その大きさと発現メカニズム，異方透水性の影響あるいは効果について考察し，異方透水性地盤の浸透水の流れについて，理論的に論述するものである。

＜本書の読み方＞

本書はできる限り各章ごとに理解できるように工夫した。したがって，同じ内容の記述が繰り返されることがあるが，個別事象について必要な情報を得るためには該当する章だけを見ればよい。

第１章においては，まず土の異方透水性について，その大きさ，発現メカニズムについて述べる。また第１章で簡単に触れる座標変換の理論は浸透現象の理解に大変役に立つものであり，よく理解しておくとよい(第９章において実際にこの理論を用いて，変換断面における各種支配方程式を導いている)。そして，異方透水性が，地盤の浸透流特性や水利施設構造物の安定性に及ぼす効果(影響)について述べる。地盤の異方透水性は，その特性を詳しく知ることによって，水利施設構造物の設計において重要であることが理解できるであろう。

次に，第２章～第７章は，二次元異方透水性地盤における浸透水の流れに関する基本的事項をわかりやすく示したものであり，異方透水性地盤の浸透流理論の理解に欠かせない内容となっている。よく読んで自分のものにしておくのがよい。各章の内容は次のとおりである。

対称テンソルとしての透水係数（**第２章**）
点における透水係数テンソル（**第３章**）
透水係数テンソル成分の正方向（**第４章**）
透水係数のモール円（**第５章**）
流れの方向と一次元拘束流れ（**第６章**）
二次元異方透水性土の一次元透水試験（**第７章**）
浸透水の運動方程式（**第８章**）

次に，第９章～第 11 章は，おのおのその章だけでも読めるように，なるべく完結させた書き方としている。

第９章では，異方透水性地盤の浸透流に関する一連の支配方程式から，等方透水性地盤の浸透流に関する支配方程式を導けることを示し，完全流体(または，等方透水性地盤の浸透流)の支配方程式との関係を示す。そして，「(各層が均質でも)層状堆積地盤の浸透流問題においては，完全流体の関係式(または一般の書籍に示されている等方透水性地盤の浸透流の関係式)をそのまま利用できないこと」を示す。以上の理論的基礎知識をもとにして，

第 10 章では全水頭 h に関して，**第 11 章**では流れ関数 ψ に関して，支配方程式の有限要素近似化と数値解析の方法を示している。

このように，本書では，土の異方透水性に関して，まずその大きさや発現メカニズムなど基礎的知識を解き明かすことから始まり，透水係数テンソルの性質と取扱い方を示す。次に，新しい概念「構造上の透水性ととれと等価な透水係数テンソル」や「流れの方向と一次元拘束流れ」を提示するとともに，座標変換の理論を用いて基礎方程式を誘導する。そして，支配方程式の有限要素近似化及び数値計算手法の提示に至る道のりを体系的に示すものであり，「異方透水性地盤に

おける浸透水の流れ」の理解に役立つ内容となっている。ひいては，浸透流理論の進展に寄与するものと考える。

本書には至らぬ点が多々あるものと考える。忌憚なきご意見をお願いする次第である。

参考文献

1) 河上房義 (1956)：土質力学，森北出版, pp.168～170，初版.
2) 日本道路協会編 (1977)：道路土工 －擁壁・カルバート・仮設構造物工指針，日本道路協会, pp.205～207.
3) 日本道路協会編 (1987)：道路土工 －擁壁・カルバート・仮設構造物工指針，日本道路協会, pp.240～242.
4) 日本道路協会編 (1999)：道路土工 －仮設構造物工指針，日本道路協会, pp.76～82.
5) 三浦均也・今福　守・古川美典・長澤正明 (1999)：仮締切り内における浸透流による地盤のボイリング破壊，土と基礎, Vol.47, No.4（Ser.No.495）, pp.7-10.
6) 田中　勉，尾崎叡司 (1991)：水替え掘削時における橋台基礎地盤のパイピング発生事例，土と基礎，Vol.39，No.12（Ser.No.407），pp.23-28.
7) 田中　勉，尾崎叡司 (1993)：水替え掘削時に発生した橋台基礎地盤のパイピングに関する解析，土と基礎，Vol.41，No.6（Ser.No.425），pp.33～39.
8) 谷　　茂 (1998)：ため池堤体用土について，材料施工部会報，第 36 号, pp.31-50.
9) 大林由明 (2000)：下蚊屋ダムにおける遮水材の変更について，水と土，第 119 号, pp.55-63.

異方透水性地盤における浸透水の流れ

田中　　勉・アーノルド　フェライト

目　　次

ページ

まえがき

第 1 章　土の異方透水性　1

1.1　異方透水性の大きさ　2

1.1.1 自然地盤（Natural soil）　2

1.1.2 人工の締固め地盤（Compacted soil or man-made soil）　6

1.1.3 実験室のモデル地盤（実験室で作製された実験地盤）　6

1.2　異方透水性の発現メカニズム　8

1.2.1 ストークスの法則と運動方程式としてのダルシー則　8

1.2.2 層状地盤と等価透水係数　12

1.2.3 座標変換の理論（Theory of coordinate transformation）　15

1.2.4 平行平板間（クラック中）及び円管内の水の流れ　17

1.3　土の異方透水性の効果　19

1.3.1　浸透流問題における座標変換の理論を用いた理論的考察　19

1.3.2　異方透水性の効果　23

1.3.3　まとめ　27

＜二次元異方透水性地盤における浸透水の流れ＞

第 2 章　対称テンソルとしての透水係数　30

2.1　$x-z$ 平面内の管水路中の水流　30

2.2　$x-z$ 平面内の二次元浸透流　31

第 3 章　点における透水係数テンソル　35

第 4 章　透水係数テンソル成分の正方向　38

第 5 章　透水係数テンソルのモール円　40

5.1　モール円　40

5.2　モール円の極　40

5.3　透水係数テンソルの主値　41

5.4　透水係数テンソルの不変量　47

5.5　構造上の透水性とそれに等価な透水係数テンソル　47

第 6 章　流れの方向と一次元拘束流れ　53

6.1　流れの方向と動水勾配の方向　53

6.2　一次元拘束流れ（流線方向の流れ）　55

第 7 章　二次元異方透水性土の一次元透水試験　59

7.1　一次元透水試験から得られる透水係数テンソルの成分　59

7.2　一次元透水試験における供試体中の水の流れ　63
第 8 章　浸透水の運動方程式　68
8.1　浸透力と制動力　68
8.2　二次元浸透場における浸透水の運動方程式　70
8.3　一次元拘束流れの場における浸透水の運動方程式　72
第 9 章　座標変換の理論と異方及び等方透水性地盤の浸透流に関する支配方程式　76
9.1　序論　76
9.2　二次元異方透水性地盤中の浸透流に関する基礎方程式　76
9.3　浸透流の力学における座標変換の理論　80
9.3.1 座標軸の回転　80
9.3.2 座標軸の伸縮　89
9.4　二次元等方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式　96
9.5　流体力学における完全流体の流れに関する関係式（等方透水性地盤の浸透流に対比される）　98
9.6　等方透水性地盤の浸透流基礎式　101
9.7　結論　102
第 10 章　全水頭 h に関する有限要素近似　104
10.1　二次元異方透水性地盤の浸透流基礎式　104
10.1.1 全水頭（Total hydraulic head）　104
10.1.2 動水勾配（Hydraulic gradient）　104
10.1.3 浸透水の運動方程式（ダルシー則）　105
10.1.4 流量の連続式　107
10.1.5 浸透流を支配する方程式（全水頭，または，ポテンシャルに関する）　107
10.2　浸透流の支配方程式と有限要素近似における弱形式表現　108
10.2.1 浸透流の支配方程式　108
10.2.2 有限要素近似における弱形式表現　110
10.2.3 有限要素近似　111
10.2.4 三角形定ひずみ要素を用いた近似　113
10.2.5 四辺形アイソパラメトリック要素を用いた浸透流解析プログラム FEMSEE47C　119
10.2.6 CST 要素は Iso parametric element か？　119
10.3　結論　119
第 11 章　流れ関数 ψ に関する支配方程式と有限要素近似　121
11.1　浸透流基礎理論（まとめ）　121
11.1.1 全水頭　121
11.1.2 動水勾配　121
11.1.3 ダルシー則　122
11.1.4 運動方程式　122
11.1.5 浸透力　122
11.1.6 混合微分の等価性　123

11.1.7 流量の連続式と流れ関数 124
11.1.8 流線と等ポテンシャル線の関係 －流速の方向と動水勾配の方向の関係－ 125
11.1.9 浸透流の屈折現象 125
11.2 流れ関数に関する支配方程式と境界条件 126
11.2.1 流れ関数に関する支配方程式 126
11.2.2 境界条件（Fig.11.4 参照） 126
11.2.3 有限要素近似における弱形式表現 127
11.2.4 有限要素近似 128
11.2.5 三角形定ひずみ要素を用いた近似 131
11.2.6 CST 要素は Iso parametric element か？ 137
11.3 結論 137
まとめ 139

＜付録＞

付録１ Muskat の書籍における異方透水性の値 140
付録２ 重み付き算術平均，重み付き幾何平均及び重み付き調和平均とそれらの関係 144
付録３ 応力成分の正方向の定義 －第Ⅰ系列と第Ⅱ系列－ 146
付録４ 透水係数テンソルの主値の求め方（解析的方法） 151
A4.1 主透水係数の求め方 151
A4.2 非対角成分 k_{ns} の極値の求め方 152
付録５ ガウスの発散定理の証明 154
付録６ 四辺形８節点アイソパラメトリック要素を用いた近似 156
付録７ 四辺形９節点アイソパラメトリック要素を用いた近似 164
付録８ ガウス・ルジャンドルの数値積分 169
付録９ CST 要素は Iso parametric element か？ 170
A9.1 三角形定ひずみ要素を用いた有限要素近似化 170
A9.2 要素内における全水頭値 h の表し方 171
A9.3 CST 要素の形状関数は内挿関数と同一の式で表されるか？ 172
A9.4 CST 要素の内挿関数の本質的な意義（構造）について 173
A9.5 自然境界（線）上における内挿関数 174
付録 10 流速ベクトル **v** と動水勾配ベクトル **i** のなす角 176
A10.1 等ポテンシャル線の接線方向と動水勾配の方向 176
A10.2 流速ベクトル **v** と動水勾配ベクトル **i** のなす角 176
付録 11 等方透水性の成層地盤における浸透流の屈折現象 179
A11.1 屈折理論 179
A11.2 入射角と屈折角の関係 180
付録 12 流れ関数に関する有限要素法のノイマン境界における $\overline{u_n}/R_3$ の値について 182
A12.1 等方透水性地盤の場合 183
A12.1.1 等方透水性地盤の貯水境界において 183
A12.1.2 等方透水性地盤の浸出面（または浸潤面）において 185

A12.2　異方透水性地盤の場合　186
A12.2.1 異方透水性地盤の貯水境界において　186
A12.2.2 異方透水性地盤の浸出面（または浸潤面）において　187
A12.3　(A12.13)式の証明　189
A12.4　まとめ　190
A12.5　$\overline{u_n}/R_3$ の別表現と流れ関数の有限要素法におけるノイマン境界のフラックスベクトル $\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$　190
付録 13　有限要素法における境界条件　193
A13.1　浸透流と境界条件　193
A13.2　ポテンシャル関数に関する有限要素法の境界条件　194
A13.3　流れ関数に関する有限要素法の境界条件　195
A13.4　自然境界 $C_v^{e'}$ 及び $C_u^{e'}$ におけるフラックスベクトル $\mathbf{Q}^{e'}$ 及び $\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$　196
付録 14　三つの式＜Stokes の法則, 浸透力, Darcy 則＞の相互関係　197
付録 15　透水係数テンソルの非対角成分（誘導成分）k_{xz} (= k_{zx}) の正負について　199

第１章　土の異方透水性

＜土中の水の流れに対する抵抗力と土の異方透水性の関係＞

まず，土中の水の流れに対する抵抗力と土の異方透水性の関係についてみてみよう。飽和土壌中の単位体積の水のもつエネルギーEは，

（位置エネルギー）＋（圧力エネルギー）＋（速度エネルギー），すなわち，

$$E = \rho_w g z + p + \rho_w \frac{v^2}{2}$$

で表される。ここに，ρ_wは水の密度，gは重力の加速度，zは考える地点の高さ，pは水圧，vは浸透流速である。Eを水の単位体積重量$\rho_w g$で割ると次元が長さ［L］となり水の高さ（水頭）となるのでhで表すと，

$$h = z + \frac{p}{\rho_w g} + \frac{v^2}{2g}$$

となる。hは全水頭と呼ばれ単位体積の水が持つエネルギーを表す。通常，浸透流の流速は大変小さいので他の値に比べて無視できる（$v^2 \approx 0$）と考えられ，

$$h = z + \frac{p}{\rho_w g}$$

となる。hはピゾメーターの水面高さを表している。

土中に水があり，その水の持つエネルギーすなわち全水頭 h が場所によって異なるとき，水は全水頭の高い方から低い方へと流れていく。このとき，水は土粒子に力（浸透力）を及ぼし，逆に水は土粒子からそれと同じ大きさで反対向きの力（制動力）を受ける。流水はこの抵抗力に逆らって動くことによってエネルギーを消耗していくことになる。土粒子の配列（Orientation）のし方によってその力の大きさが決まり，方向によってその力の大きさが変化する。水はその力に逆らって土の中を移動するものであるから，水はおのずと制動力の小さな方向に流れやすくなる。このようにして土は方向によって流れやすさ，すなわち，透水性が異なることになる。土のこのような性質を異方性（Anisotropy）という。逆に方向によって性質が変わらない場合を等方性（Isotropy）という。

＜土の均質・不均質と等方性・異方性＞

次に，土の均質・不均質と等方性・異方性について考えてみよう。地盤や土構造物の透水係数は，一般的に不均質であり非等方性（すなわち異方性）である。透水係数が場所によって変化するのが不均質であり，変化しないのが均質である。一方，透水係数が方向によって変化するのが異方性であり，変化しないのが等方性である。このように，「均質と不均質」及び「等方性と異方性」はそれぞれ異なる概念である。実際の地盤は，透水係数に関して，不均質であり，異方性であると考えられる。一般的に，地盤の透水係数に関して，均質・不均質と等方性・異方性の組合せには，

均質・等方性
均質・異方性
不均質・等方性
不均質・異方性

の４通りの可能性がある。

土の透水性はこのような土の性質に大きく影響を受ける。これら 4 通りの浸透場における，これまでの取扱い方法について要点をまとめると次のようになる。

(1) 均質・等方性

最も基本的な浸透流問題である。均質・等方性地盤において，浸透流に関する基礎式(支配方程式)は，全水頭について，ラプラス方程式で表されポテンシャル理論に従うことが知られている。したがって，従来，均質・等方性地盤の浸透流問題は複素関数論などを用いて理論的に解かれてきた。

(2) 均質・異方性

均質・異方性地盤の浸透流は，座標変換(Coordinate transformation)の理論を用いて，理論的に，均質・等方性地盤の浸透流に置き換えることができる。そして，従来，均質・等方性地盤の浸透流問題に置き換えて解かれてきた[1)]。近年では，FEM などの数値解析法を用いて，支配方程式そのものを解析することが可能となった。

(3) 不均質・等方性

コンピューターや計算技術の進展もあり，不均質・等方性地盤の浸透流については，例えば地盤統計学の知識を用いて，確率統計学的に取り扱われるようになってきた。問題の領域について，いくつかの透水係数分布を作成し，それぞれについて解析を行い，確率統計論的にありうる状況を予想し議論される。しかし，実際問題において，地盤が等方性ではなく異方性を有していた場合，「不均質・等方性として取り扱うこと」によって，その影響が不均質のパラメーターの中に入ることになるので注意を払う必要がある。

(4) 不均質・異方性

不均質・異方性地盤の浸透流に関する研究は，未着手といってもよい。このような取り扱いを行うにあたり，今後解決すべき課題として次のものがあげられる。① 両者を分離して計測することができるような現場透水試験方法を開発する。② 現場において不均質と異方性の両者を分離して別々に評価する。③ 地盤の不均質，及び，異方性を別々の物理現象として，同時に取り扱うことができる理論を構築する。

ここでは，土の異方透水特性に関して，異方透水性の大きさ，異方透水性の発現メカニズム，浸透流問題における Coordinate transformation 理論を用いた理論的考察，異方透水性の効果について考える。

1.1 異方透水性の大きさ

ここでは，自然地盤，人工の締固め地盤，及び，実験室のモデル地盤に分けて，これらの地盤がどれほどの異方透水性を有しているかについて考える。

1.1.1 自然地盤(Natural soil)

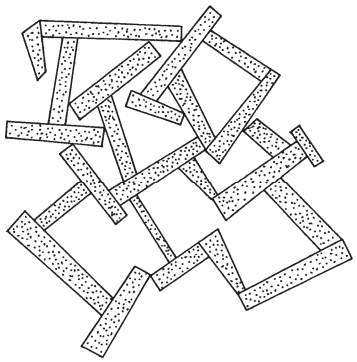
(1) 水成の堆積地盤

水中で堆積して圧密された土においては，一般的に水平方向の透水係数 k_h は鉛直方向の透水係数 k_v よりも大きいことが指摘され，経験的に異方透水性の値 $k_h/k_v = 3$ がよく使用されている[2)]。

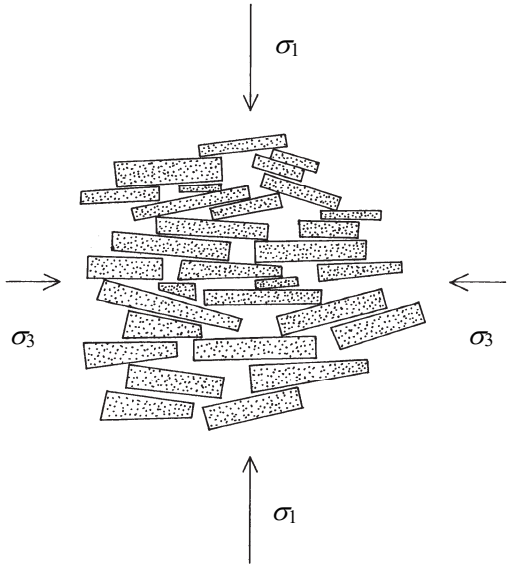
(2) 粘土地盤

粘土鉱物などの細土粒子は板状の構造を有している。このような土粒子は水中で緩く堆積すると，Fig.1.1(a)に示すように，電気的に ”Edge to edge”または ”Edge to face”の接触を通して土は綿毛構造(Flocculated structure)[3)]となる。この構造は土粒子の配列からみるとランダムな構造であり，透水係数は方向によってあまり差のない状態，すなわち，異方透水性の値は等方透水性 1.0 に近い

値を示すことになる。上載荷重の増加などにより圧密が進むにつれて，土粒子の長軸方向は最大主応力σ_1の作用する方向に対して垂直な方向をとるように回転することが知られている。このとき，個々の土粒子はしだいに Fig.1.1(b)に示すように“Face to face”の配列（Laminar or stratified structure）となり，長軸方向が最大主応力面の方向に卓越するような配列に変わってくる[3]。このような構造をもった土の中を水が流れると流水は長軸方向の抵抗力が小さくなりその方向に流れやすくなる。水成の自然堆積地盤の場合には，重力によって圧密が進むので鉛直方向が最大主応力の作用方向となり土粒子の長軸は水平方向に配列し水平方向の透水係数が鉛直方向よりも大きくなる。



(a) Flocculated structure



(b) Laminar structure

Fig.1.1 水成堆積地盤における土粒子の配列
（Lambe and Whitman[3] の図を参考に作成）

(3) Oil sand －Muskat の著書[4] における異方透水性の値－

オイルサンド（Oil sand, 油砂（ゆさ）），あるいは，タールサンド（Tar sands）とは，極めて粘性の高い鉱物油分を含む砂岩のことをいう。Muskat は Oil sand の透水係数について，その著書[4] の中で，同一地点で計測された k_h と k_v の値を示している（**付録 1** 参照）。

Muskat[4] は，その書籍に掲載の Table 8 の基になった論文[5] にもともと含まれていた，k_h, k_v に関する 65 対のデータについて，2/3 以上のデータ（46 対）が $k_h/k_v > 1$ であり，その値 k_h/k_v は 1～42 であったと述べている。**付録 1** には，Table 8 から，48 対のデータを抜粋新たものを示す（48 対のデータの内，k_h 及び k_v の両方が揃ったものは 46 対である）。

リストアップされたデータ（異方透水性の値）k_x/k_z は，全部で 46 対あり，最小値が 0.14，最大値が 42.19（諸平均は 4.02, 1.94, 1.11）である。異方透水性の値が 1.0 以上のデータについてみると，全部で 36 対あり，最小値が 1.02，最大値が 42.19（諸平均は 4.98, 2.87, 2.23）である。また，異方透水性の値が 1.0 以下のデータについてみると，全部で 10 対あり，最小値が 0.14，最大値が 0.96（諸平均は 0.53, 0.47, 0.38）である。Muskat における自然地盤の異方透水性の値 k_h/k_v として，1.0 以上のデータについては 36 データの諸平均 4.98, 2.87, 2.23 を，1.0 以下のデータについては 10 データの諸平均 0.53, 0.47, 0.38 を考えることができる。後者の値 0.53, 0.47, 0.38 を分数で表すと 1/2～1/3 である。ここに，諸平均の値は，左から算術平均，幾何平均，調和平均を表す。

(4) 砂地盤と砂礫地盤

a) 石狩川の砂地盤

第一新川橋橋梁建設地点近くの 2 地点（石狩浜及び生振）で試料が採取され，水平方向と鉛直方向の透水係数が計測された[6]。報告された試験結果によると，石狩浜については，水平及び鉛直方

向の透水係数はそれぞれ $k_h = 4.62 \times 10^{-3}$ cm/s 及び $k_v = 2.84 \times 10^{-3}$ cm/s であり，異方透水性の値 k_h/k_v は 1.63 である。ここに, k_h, k_v は水平及び鉛直方向の透水係数である。また，生振砂については，透水係数の異方性が見られなかったとされている。生振砂は石狩川の氾濫などによって構造が乱され配向が十分発達しなかったため，異方性が生じなかったものと結論づけられている [6]。

b) ダニューブ川の砂礫地盤

Hulla and Kadubcová [7]，または, Peter and Šebesta [8] によると，スロヴァキア領におけるダニューブ川周辺の地域は，礫，砂，シルトから成る第四紀沖積土で構成されており, Bratislava 付近で深さ約 10m, Gabíkovo 付近で約 400 m，そして Medveov 付近で約 100 m に及ぶとされている。砂質分の構成比が小さいのが特徴であり, 0.5～2.0 mm の粒子は完全に欠落している。したがって, 0.5 mm 以下の粒子は流水によって礫の間隙を容易に移動することができる。砂粒子はより深い層へ洗い流され，長い時間の間に地下水面の変化が透水性の高い層を作ってきた。そこでは地下水が最小の水頭損失で高速で流れることになる。堆積した砂粒子は薄くて，透水性の小さい層を作り，大変高い層状異方性を作っている。このように，河川堤防の下層地盤は主に礫土から成る。その透水係数は $k = 1.0\times10^{-4}$～1.0×10^{-1} m/s と幅広い範囲で分布している。また，異方透水性の値 k_h/k_v はおおよそ 10 となっている。

(5) 堆積面の傾斜

Bear and Verruijt [9] によると，地盤の異方透水性の発生とその傾きの生成について次のように説明がなされている。「重力の下で自重によって発生した応力によって，フラットな粒子は長い方の部分が沈降する面に平行になるように配列する。その後，その卓越した方向の水の流れ自体が，他の方向よりも堆積面に平行方向に水みちを形成することになる。その後, θ 度の地層の傾きが生じると, θ 方向に透水係数の大きな間隙材料ができあがる。」

(6) 風積土(Aeolian soil)

前述のように，一般に，均質な自然堆積土においては，透水係数は水平の方が鉛直よりも大きい。一つの例外として，レス(Loess)がある。レスなどの風積土地盤(Aeolian soil)においては，鉛直方向の透水係数が水平方向の透水係数より大きくなることが知られている [10]。この土は鉛直方向の構造をもつため，鉛直方向の透水係数の方が水平方向のものより大きい。

たとえば，火山灰堆積土の一つである関東ローム層では鉛直方向の透水係数が水平方向の透水係数の数倍になることが報告されている。このような異方性の成因に関して，次のように説明されている [11]。「i) 関東ロームは火山灰であるが水を含んで乾燥するときに縦方向の亀裂が生じる。または，ii) ローム層内を降雨が常に鉛直方向に浸透しているため鉛直方向の水みちが卓越して形成される。」いずれにしても，関東ロームでは鉛直方向の亀裂または水みちが発達して亀裂層と呼ばれる層を形成することが知られている [12]。この亀裂層によって鉛直方向の透水係数が水平方向より大きくなること，すなわち, $k_h/k_v < 1.0$ となることが十分予測される。このような異方透水性は不攪乱状態のときの性質であるため，ローム層は一度攪乱してその構造が破壊されると今まで持っていた異方透水性の特性がなくなる。堆積とその後の自然の営みによって形成される特徴的な異方透水性である。

安池・鈴木 [13] は，関東ローム層について，鉛直方向に発達した管状間隙が鉛直方向の透水係数 k_v を大きくしているとして，実際に，川崎市宮前区平において，水平及び鉛直方向の透水試験を行った。実験では，地表面から深さ 5.7 m の地点から上方に 1 m おきに 3 m の高さまでの 4 地点において，鉛直・水平方向の透水係数を求めている。異方透水性の値 k_h/k_v は 0.813, 0515, 0.221, 0.0917（平

均値は 0.294 (= 1/3.40)) である。(注意：原文では異方透水性の値の逆数で報告されている。)

(7) 砂丘砂(Dune sand)

砂丘における砂の堆積を考える。海岸線から陸の方向に風で運ばれてきた砂粒子は Dune と呼ばれる丘状の堆積物の背後に配列して堆積していく。そして，Dune の背後に堆積する砂粒子は風の影響が少ないので，砂地盤の表面の傾斜角度は 30° 前後(砂の安息角)となり，水平からほぼこの角度に傾いた方向に層(ラミナ)が形成されていく(Fig.1.2 参照)[14]。そして，その方向に透水性の主方向が形成されることが予想される。Fig.1.3 (赤木三郎先生のご厚意による)に鳥取古砂丘が掘削されたときに現れたラミナを示す。Figs.1.3(a)及び(b)では，水平からおおよそ 30°及び 25°に傾いた方向にラミナがきれいに形成されている様子がうかがわれる。

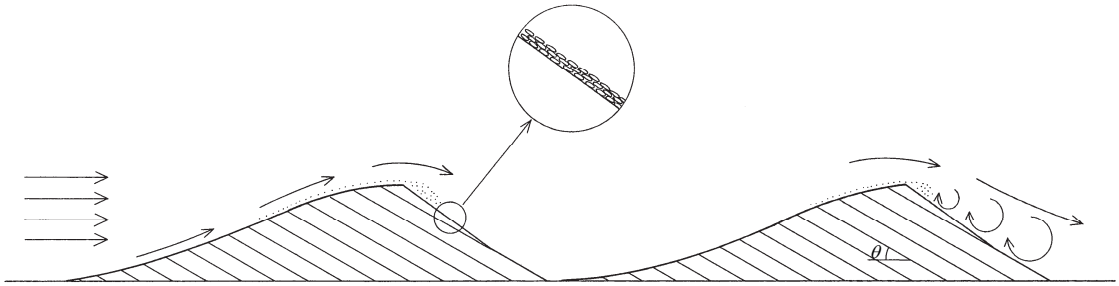
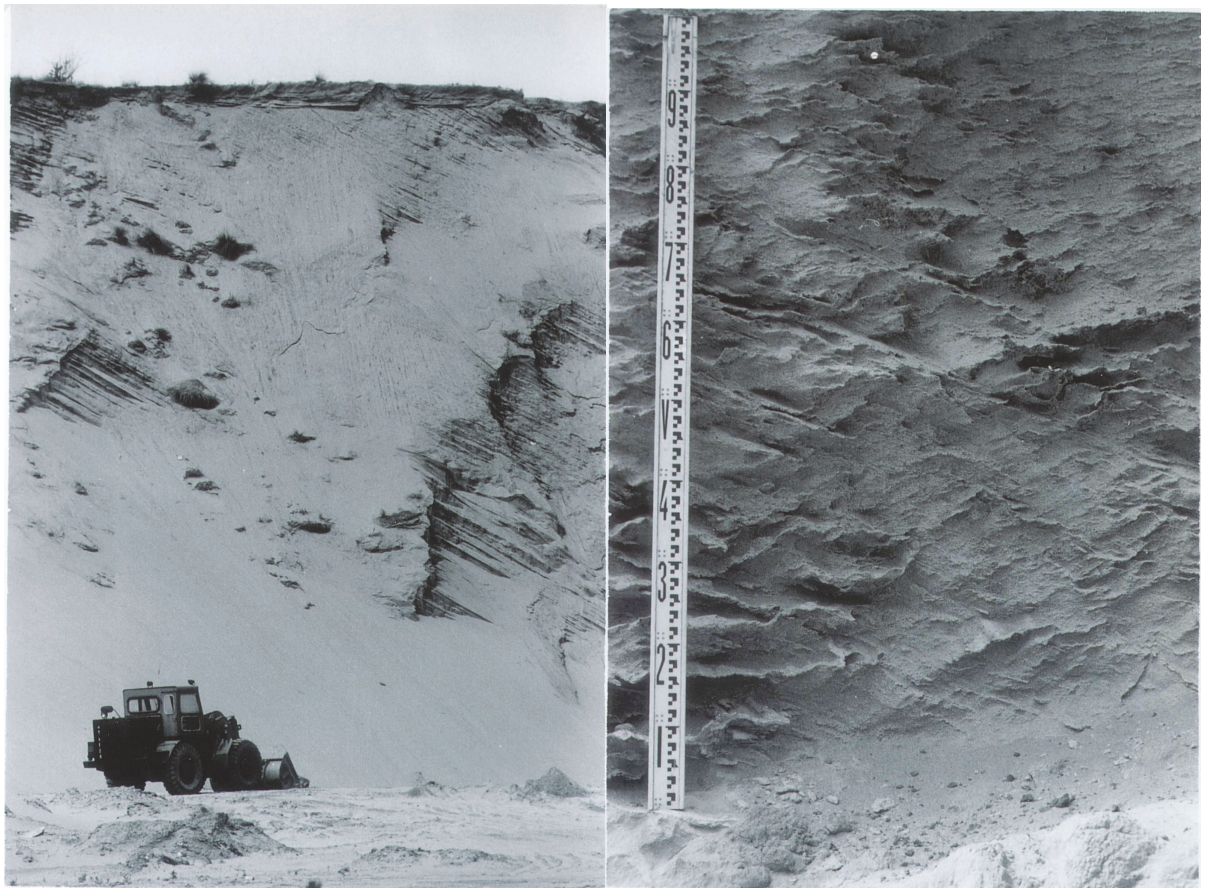


Fig.1.2　砂丘における砂粒子の堆積とラミナ構造
(片平[14] の図に基づいて作成)



(a) 水平からおおよそ 30°に形成されたラミナ　(b) 水平からおおよそ 25°に形成されたラミナ

Fig.1.3　鳥取古砂丘におけるラミナの形成(鳥取大学名誉教授 赤木三郎先生のご厚意による)

(8) ランダム・パッキング(Random packing)

土の異方透水性は土粒子が重力の作用下で堆積し圧密されることによって生じる性質であるため重力の存在する地球上の地盤には必ず異方性が存在することが予測される。逆に言うと無重力下で等方に "Packing" された場合にのみランダムな地盤（マクロにみて等方な地盤）の生成が可能であると考えられる[15]。

1.1.2 人工の締固め地盤(Compacted soil or man-made soil)

土を盛り立ててフィルダムや堤防などの水利施設構造物を造る場合には，土を薄い厚さでまきだしてその土がタイヤローラやタンピングローラなどの締固め機械で締め固められる[16]。タイヤローラや平滑胴ローラのように締固め機械の接地面が平滑な場合には明確な水平層が形成され，水平方向に卓越した層分離や水みちの形成がおこることになる。このような層の分離面が発生しないようにするためには次の層をまきだす前に層の上面を掻き乱す必要がある。このようにしても異方透水性の値は $k_h/k_v = 20$～30（平均 25）程度になるといわれている[17]。後述するように，このような大きな異方透水性があるとフィルダム堤体において，自由水面の上昇が生じたり，圧力が水平方向遠方まで及んだりすることになり危険となる(1.3.2 項参照)。そこで，フィルダムなどの水利施設構造物を築造するときには，締固め機械として胴にシープスフートやテーパーフートなどの突起物をつけたタンピングローラが使用される。土層は，タンピングローラによって締め固められると，突起物の貫入によって層が切られ水平方向の透水性の著しい上昇が抑えられる。この場合，異方性の値は減少して $k_h/k_v = 2$～10（平均 5）となると報告されている[17]。

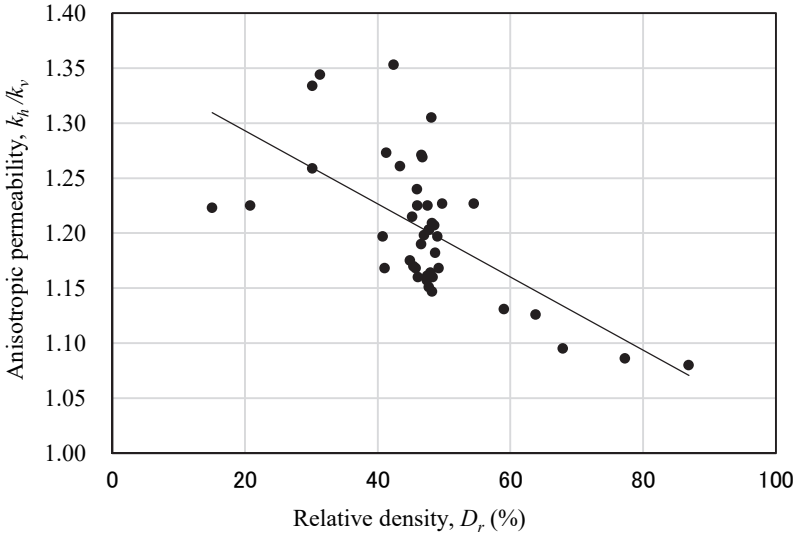


Fig.1.4　実験地盤(琵琶湖砂 2)の相対密度 D_r と異方透水性の値 k_h/k_v の関係(二次元浸透破壊実験)

1.1.3 実験室のモデル地盤(実験室で作製された実験地盤)

実験室で作製されたモデル地盤について，その透水係数の異方性が実測された例は少ない。田中ら[18) 19)]によって，矢板締切り地盤の二次元浸透破壊実験において，均一な細砂を用いて作製した地盤の異方透水性が測定されている。地盤は，水を張った水槽に予め水で飽和した砂試料を両側から 10～20 層に分けて順に注入し，直径 7 mm，質量 100 g のアルミ棒を約 10 cm の高さから所

定の回数だけ落下させることによって作製された。Fig.1.4 に砂の相対密度 D_r と異方透水性の大きさ k_h/k_v の関係を示している。異方性の値は緩詰め（D_r =20%）の場合 1.3 程度，中詰め（D_r = 50%）の場合 1.2 程度，密詰め（D_r = 80%）の場合 1.1 程度となっている。予想に反して，実験地盤は密なほど異方性の値が小さくなっていることがわかる。これは，地盤の作製方法，すなわち，水を張った実験水槽に試料を 10～20 層に分けて注入しアルミニウム棒の落下により締め固めて作る方法と関係すると考えられる。重力の下で水中落下し堆積した砂粒子は，元々ある程度の配向を示し，ある程度の異方透水性を有している。これを突固め棒で突くことによって配向が崩れ，突固め回数が多くなるにつれて（地盤が密になるにつれて），砂粒子の配向がよりランダムになっていくと考えられる。これに伴って（地盤の D_r が大きくなるにつれて），実験地盤の透水係数の異方性は小さくなっていくと考えられる。

このようにして，自然地盤，人工の締固め地盤，実験室のモデル地盤など，実際の地盤において，異方透水性の値 k_h/k_v は，平均的には，1.0 より小さいものについては 1/2～1/3 程度，1.0 より大きいものについては 3.0～25.0 程度の値をとることがわかる。

1.2　異方透水性の発現メカニズム

異方透水性の発現メカニズムを物理的観点から考察し，運動方程式としてのダルシー則を導く。次に，二次元平面内の管水路やクラック（平行平板間）内の水の流れを考え透水係数マトリックスの対称性を導く。そして，数学的に透水係数マトリックスが二階のテンソルであることを示す。これらの考察から，異方透水性の発現メカニズムが明らかとなる。

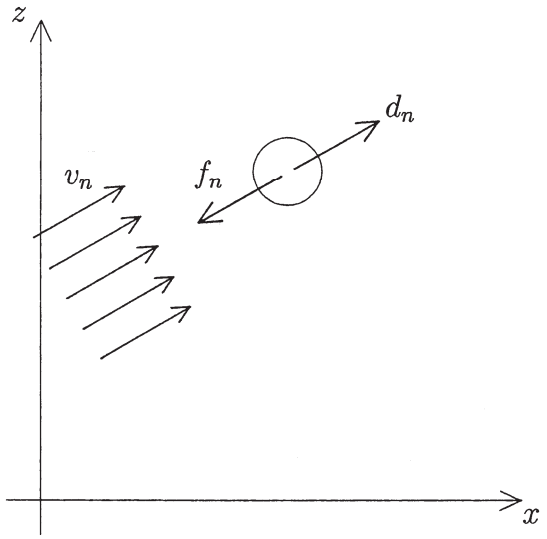


Fig.1.5 遅い水の流れの中におかれた球形粒子

1.2.1 ストークスの法則と運動方程式としてのダルシー則

球形粒子がある方向 n の遅い水の流れ（流速 v_n）の中におかれているものとする。ストークスの法則（Stokes' law）から，流水は粒子に n の方向に流速 v_n に比例した力（抵抗力, drag force）$d_n = \alpha v_n$ を及ぼすことが知られている（Fig.1.5 参照）[20]。ここに，α は水の流れによって粒子に作用する力を表す比例係数である。粒子が球形の場合，その力の大きさ（すなわち，α の大きさ）は流れの方向によって変わらない。そして，作用反作用の法則から，水は粒子から d_n と同じ大きさで反対方向の力（制動力）$f_n = -d_n$ を受ける。

次に，二次元平面問題について考え，楕円形状の土粒子が遅い水の流れの中におかれているものとする。水の流れの方向が長軸方向 n と一致する場合（Fig.1.6(a)），粒子は流水から n 方向に流速 v_n に比例した抵抗力 $d_n = \alpha_n v_n$ を受ける。また，水の流れの方向が短軸方向 s と一致する場合（Fig.1.6(b)），粒子は流水から s 方向に流速 v_s に比例した抵抗力 $d_s = \alpha_s v_s$ を受ける。ここに，α_n, α_s は長軸方向及び短軸方向の抵抗係数であり，流れの方向に対して大きさが異なり，ここで考えている例の場合，

$$\alpha_s > \alpha_n \tag{1.1}$$

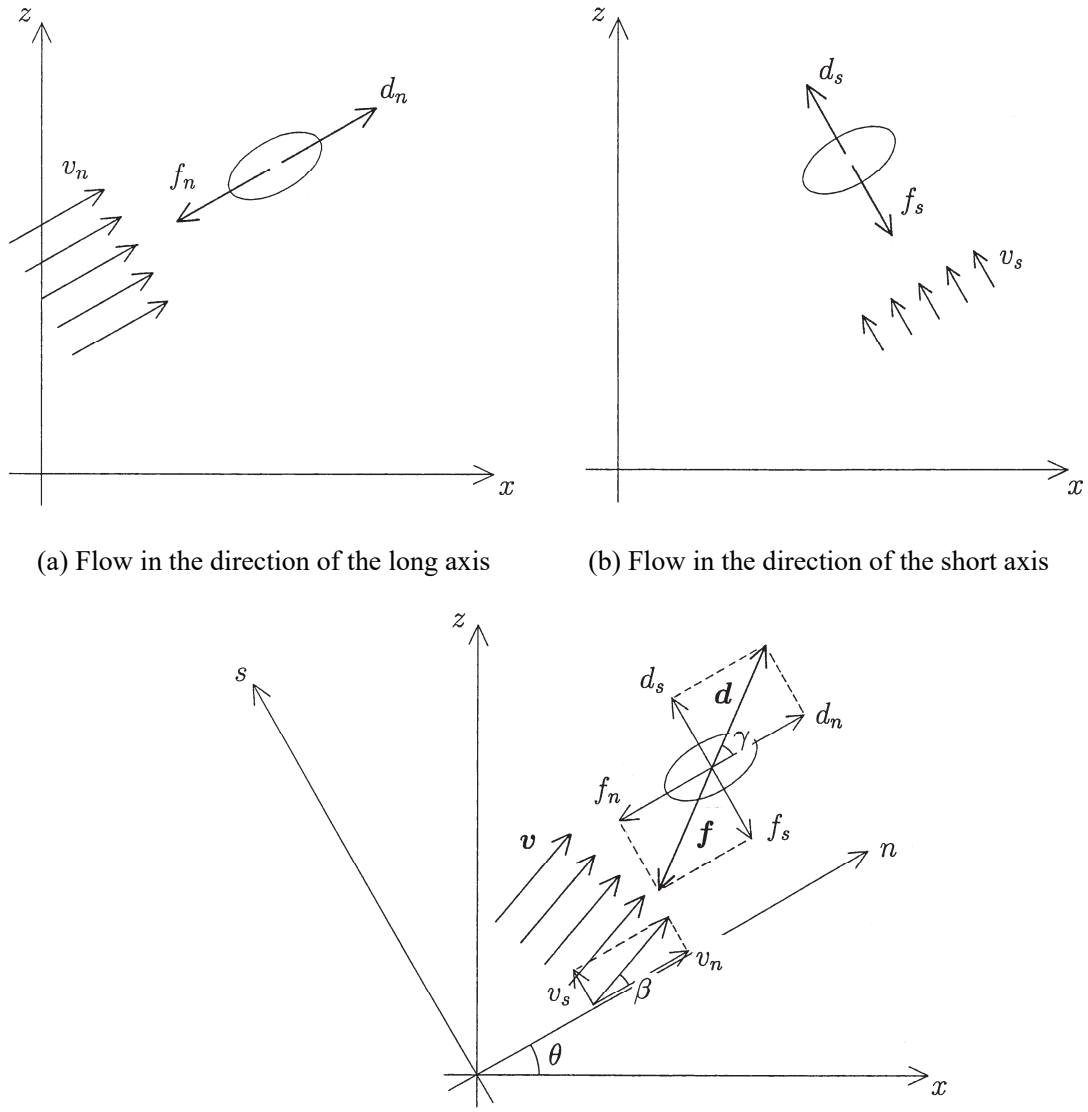
と表される [21]。

さて，水の流れの方向が長軸や短軸の方向と異なるとき，この粒子は長軸と短軸方向，流れの方向，及び，土粒子の形状に対応して力を受けることになる。比例係数の値は長軸方向と短軸方向において異なるので（Fig.1.6(a), (b)），その合力 $\boldsymbol{d}$ は一般的に Fig.1.6(c)に示すように流れの方向とは異なる。ここで，抵抗力の合力 $\boldsymbol{d}$ は浸透力と言い換えることができる。Fig.1.6(c)に示すように，長軸方向（n 方向）を x 軸から反時計回りに θ, 流れの方向を n 軸から反時計まわりに β とすると，浸透力の方向 γ（n 軸から反時計まわりにとる）は, $d_n = a_n v \cos\beta$, $d_s = a_s v \sin\beta$ であるので,

$$\begin{aligned}\gamma &= \tan^{-1}\frac{d_s}{d_n} \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{a_s}{a_n}\tan\beta\right)\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\therefore\ \gamma > \beta \quad \left(\because\ a_s/a_n > 1\right) \tag{1.3}$$

となる。すなわち，一般的に水の流れの方向 β と浸透力の方向 γ は異なることがわかる。



(a) Flow in the direction of the long axis　　(b) Flow in the direction of the short axis

(c) Flow in an arbitrary direction

Fig.1.6 二次元平面内の水の流れの中におかれた楕円形状粒子

土中(土粒子の集合体の中)における水の流れ(浸透流)に関しても同様であると考える。この場合，抵抗力(浸透力)及び制動力はともに体積力と考えられている[22]。ここで，x–z 直角座標系から，反時計回りにθだけ回転した直角座標系 n–s を考える。Fig.1.7 に示すように，楕円形粒子群が，長軸が n 方向と一致し，短軸が s 方向に一致するように並んでいるものとする。ここで，一個の粒子の場合と同様にして，抵抗力(浸透力)ベクトル$\{d_n,\ d_s\}^T$は，流速ベクトル$\{v_n,\ v_s\}^T$と直線関係にあるものとすると，

$$\begin{Bmatrix} d_n \\ d_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \alpha_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

となる。ここで，$\{d_n,\ d_s\}^T$, $\{v_n,\ v_s\}^T$はベクトルであるので，x–z, n–s 座標系において，次の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_n \\ d_s \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

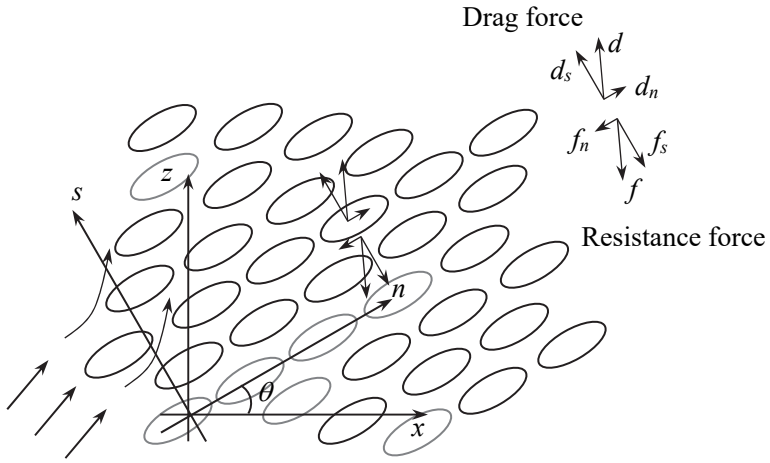


Fig.1.7 楕円形粒子群における浸透流

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

したがって, (1.5)式は, (1.4), (1.6)式を用いて，次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_n \\ d_s \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \alpha_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \alpha_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n \cos^2\theta + \alpha_s \sin^2\theta & (\alpha_n - \alpha_s)\sin\theta\cos\theta \\ (\alpha_n - \alpha_s)\sin\theta\cos\theta & \alpha_n \sin^2\theta + \alpha_s \cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

ここで,

$$\alpha_{xx} = \alpha_n \cos^2\theta + \alpha_s \sin^2\theta \tag{1.8a}$$

$$\alpha_{zz} = \alpha_n \sin^2\theta + \alpha_s \cos^2\theta \tag{1.8b}$$

$$\alpha_{xz} = \alpha_{zx} = (\alpha_n - \alpha_s)\sin\theta\cos\theta \tag{1.8c}$$

とおくと,

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

となる。ここに, α_{xx}, α_{xz} は x 方向の単位の流速によって浸透水から単位体積内の土粒子に x 方向及び z 方向に作用する力であり, α_{zx}, α_{zz} は z 方向の単位の流速によって浸透水から単位体積内の土粒子に x 方向及び z 方向に作用する力である。また, (1.8c)式から, $\{d_x, d_z\}^T$ と $\{v_x, v_z\}^T$ を関係づけるマトリックスは，対称（$\alpha_{xz} = \alpha_{zx}$）であることがわかる。

単位体積内の土粒子に働く抵抗力（浸透力）$\boldsymbol{d}$ に対して，それと反対方向に働く力 $\boldsymbol{f}$ が制動力である。x 方向の流速 v_x によって x 方向と z 方向に土粒子から水に作用する単位体積当たりの力 f_x', f_z' は,

$$f_x' = -\alpha_{xx} v_x \tag{1.10}$$

$$f_z' = -\alpha_{xz} v_x \tag{1.11}$$

と表される。同様にして z 方向の水の流れ v_z によって x 方向と z 方向に土粒子から水に働く単位体積当たりの力 f_x"と f_z"は,

$$f_x'' = -\alpha_{zx} v_z \tag{1.12}$$

$$f_z'' = -\alpha_{zz} v_z \tag{1.13}$$

と表すことができる。

このようにして, v_x と v_z によって, x 及び z 方向に, 土粒子から水に働く単位体積当たりの制動力ベクトル$\{f_x \;\; f_z\}^T$は, (1.10)～(1.13)式をそれぞれ足し合わせたものとして表され,

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x' + f_x'' \\ f_z' + f_z'' \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{1.14}$$

となる。(1.14)式を用いると $x-z$ 座標系における運動方程式は次のように表すことができる。

(1) x 方向の運動方程式

Fig.1.8 を参考にして, x 方向の運動方程式が次のように導かれる。

$$p\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dz + f_x dx\,dz = 0$$

(1.14)式より, $f_x = -(\alpha_{xx} v_x + \alpha_{zx} v_z)$ を用いて整理すると,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_{xx} v_x + \alpha_{zx} v_z\right) dx\,dz = 0$$

$$\therefore\; -\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha_{xx} v_x + \alpha_{zx} v_z$$

$$\therefore\; -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z\right)\gamma_w = \alpha_{xx} v_x + \alpha_{zx} v_z = -f_x$$

$$\left(\because\; -\frac{\partial z}{\partial x} = 0\right)$$

$$\therefore\; i_x \gamma_w = \alpha_{xx} v_x + \alpha_{zx} v_z = -f_x \tag{1.15}$$

$$\left(\because\; -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z\right) = -\frac{\partial h}{\partial x} = i_x\right)$$

$$\therefore\; i_x = \frac{\alpha_{xx}}{\gamma_w} v_x + \frac{\alpha_{zx}}{\gamma_w} v_z \tag{1.16}$$

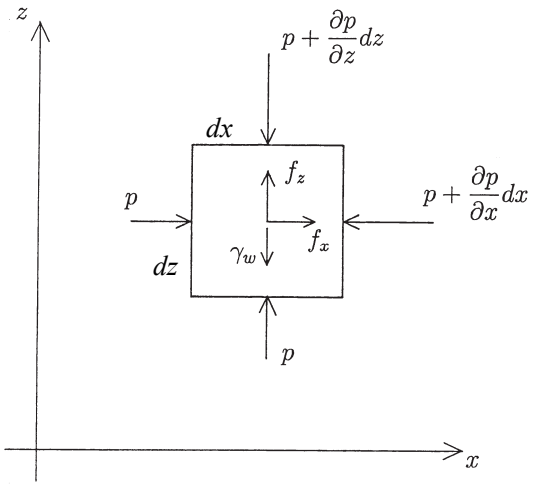


Fig.1.8 浸透水の運動方程式

(2) z 方向の運動方程式

(1) と同様にして, Fig.1.8 を参考にして, z 方向の運動方程式が次のように導かれる。

$$p\,dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx + f_z\,dx\,dz = 0$$

(1.14)式より, $f_z = -(\alpha_{xz} v_x + \alpha_{zz} v_z)$ を用いて整理すると,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \beta_{xz} v_x + \alpha_{zz} v_z + \gamma_w\right) dx\,dz = 0$$

$$\therefore\ -\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma_w=\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}\,v_z$$

$$\therefore\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma_w}+z\right)\gamma_w=\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}\,v_z=-f_z$$

$$\therefore\ i_z\,\gamma_w=\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}\,v_z=-f_z \tag{1.17}$$

$$\left(\because\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma_w}+z\right)=-\frac{\partial h}{\partial z}=i_z\right)$$

$$\therefore\ i_z=\frac{\alpha_{xz}}{\gamma_w}v_x+\frac{\alpha_{zz}}{\gamma_w}v_z \tag{1.18}$$

x, z 方向の運動方程式(1.16), (1.18)式から,

$$\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}=\frac{1}{\gamma_w}\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{1.19}$$

となるので, 拡張されたダルシー則が, (1.19)式から,

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix}=\gamma_w\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{1.20}$$

と導かれるのは明らかである。ここに,

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}=\gamma_w\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{\gamma_w}{\alpha_{xx}\alpha_{zz}-\alpha_{xz}\alpha_{zx}}\begin{bmatrix} \alpha_{zz} & -\alpha_{zx} \\ -\alpha_{xz} & \alpha_{xx} \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

である。このように, ダルシー則((1.20)式)は浸透水の運動方程式の表現形式の一つであると考えることができる。

土の中の水の流れを物理的にみると, 浸透水は土粒子に浸透力を及ぼし, 逆に作用反作用の法則から浸透水は土粒子から制動力を受ける。楕円形状の粒子からなる土の中の水の流れは異方透水性地盤中の水の流れに類似され, 運動方程式から拡張されたダルシー則が導かれる。そして, 流速と動水勾配を関係づける透水係数マトリックスは対称となる。また, (1.8c), (1.21)式からわかるように, 透水係数マトリックスの非対角成分 k_{xz} (= k_{zx})の値は, 楕円形状粒子の配向 θ の大きさ(粒子配列の方向)(Fig.1.7 参照)によって, 正になったり(0° < θ < 90°のとき), 負になったり(–90° < θ < 0°のとき)することに注意すべきである。楕円形状粒子が, Fig.1.7 に示すような配列(右上がりの配列)をとるとき, k_{xz} (= k_{zx})の値は正となることをイメージすると理解しやすい。

1.2.2 層状地盤と等価透水係数

ほとんどすべての土は，ある程度異方性をもっていると考えられる。というのは，水成の堆積土はしばしば薄い互層からなっており，異方透水性はこのような土層の状況から生じるからである。一般に，均質な自然堆積土においては，透水係数は水平の方が鉛直のものより大きい。ここでは，うすくて均質・等方な土の「層状地盤の層に平行及び垂直な方向の等価透水係数」を求め，その大きさについて考察を行う。

(1) 層に平行な方向の等価透水係数

Fig.1.9 に示すように, n 層(下から上に第 1, 2, ···, n 層)からなる地盤を考える。各層は均質・等

方であり，厚さは $d_1, d_2, \cdots, d_n$, 透水係数は $k_1, k_2, \cdots, k_n$ であるとする。

ここで，層に平行な方向（x 方向）の水の流れについて考える。このような流れでは各層において，例えば距離 L だけ離れた地点の水頭損失 h (=H) は等しいと考えることができる。したがって，厚さ D の地層を流れる x 方向の単位奥行き当りの流量 q_x は,

$$
\begin{aligned}
q_x &= q_1 + q_2 + \cdots\cdots + q_n \\
&= k_1 \frac{h}{L} d_1 + k_2 \frac{h}{L} d_2 + \cdots\cdots + k_n \frac{h}{L} d_n \\
&= \frac{h}{L} \sum_{m=1}^{n} k_m d_m \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

となる。ここに，h (=H) は水が長さ L の間を流れるときに消費される損失水頭である。また，地層全体としてみたときの x 方向の等価な透水係数を $k_{x\,\mathrm{eq.}}$ とすると,

$$q_x = k_{x\,\mathrm{eq.}} \frac{h}{L} D \qquad (1.23)$$

となる。(1.22), (1.23)式から,

$$k_{x\,\mathrm{eq.}} = \sum_{m=1}^{n} \frac{k_m d_m}{D} \qquad (1.24)$$

を得る。ここに,

$$D = d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_n$$

である。

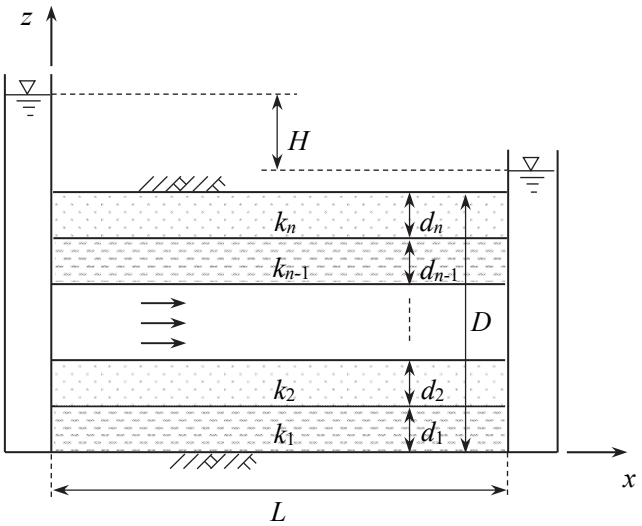


Fig.1.9　層に平行な方向の水の流れ

(2) 層に垂直な方向の等価透水係数

Fig.1.10 に示すように層に垂直な方向（z 方向）の水の流れについて考える。z 方向の一次元状態における浸透水の連続条件（$\partial v_z / \partial z = 0$）から明らかなように，全層における鉛直方向の流速 v_z は各層の流速と同一である。

$$v_z = k_{z\,\mathrm{eq.}}\, i = k_1 i_1 = k_2 i_2 = \cdots\cdots = k_n i_n \qquad (1.25)$$

ここに，$k_{z\,\mathrm{eq.}}$, i は層全体としてみたときの z 方向の等価な透水係数, 動水勾配である。また, $i_1, i_2, \cdots, d_n$ は各層における動水勾配である。ここで，全層における水頭損失 $i \cdot D$ は各層の水頭損失 $i_m\, d_m$ (m = 1, 2, …, n) の和 H に等しいので,

$$H = i \cdot D = i_1 d_1 + i_2 d_2 + \cdots\cdots + i_n d_n \qquad (1.26)$$

となる。(1.25), (1.26)式から，次式を得る。

$$\frac{v_z}{k_{z\,\mathrm{eq.}}} D = \frac{v_z}{k_1} d_1 + \frac{v_z}{k_2} d_2 + \cdots\cdots + \frac{v_z}{k_n} d_n = v_z \left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2} + \cdots\cdots + \frac{d_n}{k_n} \right) = v_z \sum_{m=1}^{n} \frac{d_m}{k_m}$$

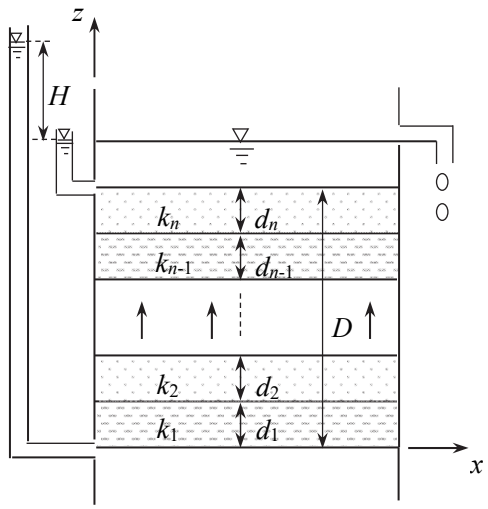


Fig.1.10　層に垂直な方向の水の流れ

$$\therefore \quad k_{z\ \mathrm{eq.}} = \frac{D}{\sum_{m=1}^{n} \frac{d_m}{k_m}} \tag{1.27}$$

(3) $k_{x\ \mathrm{eq.}}$と $k_{z\ \mathrm{eq.}}$の比較

(1.24), (1.27)式から，恒に,

$$k_{x\ \mathrm{eq.}} \geq k_{z\ \mathrm{eq.}} \tag{1.28}$$

の関係式が成立することが知られている。すなわち，層状土の透水係数は層に平行なものの方が垂直なものより恒に大きくなることがわかる。次に，不等式(1.28)の証明を考える。

まず, (1.28)式は，土質力学の教科書において，次のように証明されている[23) 24)]。

$$k_{x\ \mathrm{eq.}} - k_{z\ \mathrm{eq.}} = \sum_{m=1}^{n} \frac{k_m d_m}{D} - \frac{D}{\sum_{m=1}^{n} \frac{d_m}{k_m}}$$

$$= \left[\sum_{m=1}^{n} k_m d_m \sum_{m=1}^{n} \frac{d_m}{k_m} - \sum_{m=1}^{n} d_m \sum_{m=1}^{n} d_m \right] \Big/ \left[D \sum_{m=1}^{n} \frac{d_m}{k_m} \right]$$

$$= \left[\left(k_1 d_1 + k_2 d_2 + \cdots\cdots + k_n d_n \right) \left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2} + \cdots\cdots + \frac{d_n}{k_n} \right) - \left(d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_n \right) \left(d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_n \right) \right] \Big/ \left[D \sum_{m=1}^{n} \frac{d_m}{k_m} \right] \tag{1.29}$$

ここに，$D = \sum_{m=1}^{n} d_m$ の関係を用いている。ここで, (1.29)式の右辺の分子のみを考えると, d_m^2 の項は消えるので, $d_m d_j$ の項を考えればよい。$d_m d_j$ の係数は,

$$k_m / k_j + k_j / k_m - 2 = \left(k_m - k_j \right)^2 \Big/ \left(k_m k_j \right) \geq 0 \tag{1.30}$$

であるので,

$$k_{x\ \mathrm{eq.}} \geq k_{z\ \mathrm{eq.}} \quad \text{（等号は, } k_1 = k_2 = \cdots\cdots = k_n \text{ のときに成り立つ）} \tag{1.31}$$

を得る。

さて，各層の厚さ $d_1, d_2, \cdots, d_n$ を重みと考え，新しく，重み $w_m = d_m / D$ (m=1, 2, ····, n)を定義すると, (1.24)式は，重み付き算術平均（weighted arithmetic mean）

$$k_{wam} = \sum_{m=1}^{n} w_m k_m \tag{1.32}$$

であり, (1.27)式は，重み付き調和平均（weighted harmonic mean）

$$k_{whm} = \frac{1}{\sum_{m=1}^{n} \frac{w_m}{k_m}} \tag{1.33}$$

であることがわかる。さらに，重み付き幾何平均（weighted geometric mean）

$$k_{wgm} = k_1^{w_1} k_2^{w_2} \cdots\cdots k_n^{w_n} \tag{1.34}$$

が定義される。一般的に，**付録２**に示すように,

$$\text{（重み付き算術平均）} \geq \text{（重み付き幾何平均）} \geq \text{（重み付き調和平均）} \tag{1.35}$$

の関係があり, (1.28)式で表される,（重み付き算術平均）≥（重み付き調和平均）は数学的に恒等的に満たされていることがわかる。

1.2.3 座標変換の理論(Theory of coordinate transformation)

x - z 座標系二次元異方透水性地盤の浸透流の支配方程式は，運動方程式としてのダルシー則：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_z &= -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

及び，流量の連続式：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.37}$$

から，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = 0 \tag{1.38}$$

と得られる。透水性に関して均質・等方と仮定すると, $k_x = k_z = k$ となり，(1.38)式は,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \nabla^2 h = 0 \tag{1.39}$$

となり，ラプラス方程式となる(ここでは, x, z 方向が主方向である場合を考えている)。

地盤が，均質であるが，透水係数に関して異方性，すなわち, k_x = const., k_z = const. かつ $k_x \neq k_z$ であるとすると,

$$x^* = x\sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \tag{1.40}$$

と変数変換することにより, (1.38)式は,

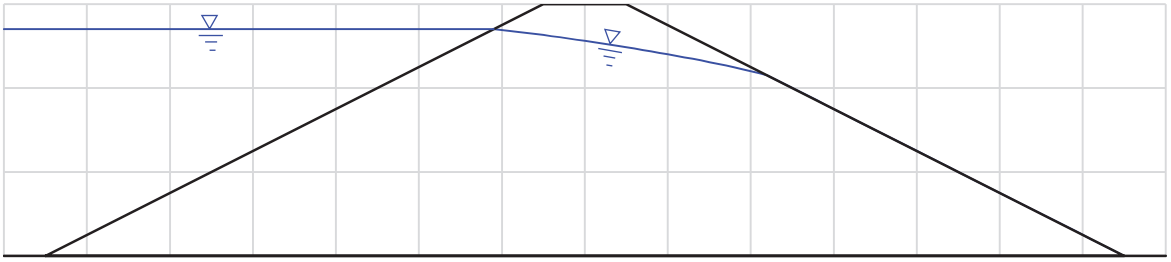
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \nabla^{*2} h = 0 \tag{1.41}$$

となる。ここに,

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

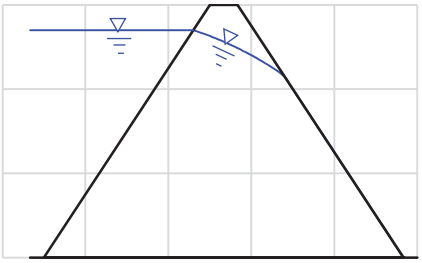
である。変換断面における等価透水係数 k^*は $k^* = \sqrt{k_x \cdot k_z}$ である [1)]。均質・異方性地盤の場合にも，変換断面(x^* − z 平面)においては浸透水の支配方程式は，(1.41)式に示すようにラプラス方程式(Laplace's equation)となる。したがって，理論的には，均質・異方性地盤の浸透流問題は，均質・等方性地盤の浸透流を解くことに帰着することがわかる。

さて，変換断面の考え方を用いて，均質・異方性地盤の浸透流に関して解く方法について考える。ここで，台形形状の堤体内の浸透流について考えよう。堤体は，水平方向に 9 倍の透水性($k_x = 9\,k_z$)を持っているものとする。Fig.1.11 に，台形断面内の浸透流における断面の変換方法を示す。また，Fig.1.11 には，一例として, FEM 解析による浸潤線を示している。このとき, x^*は $x^* = x\sqrt{k_z/k_x} = x/3$ となるので, Fig.1.11 に示すように, $x^* = x/3$, $z = z$ と座標変換することによって, Fig.1.11 (a) 実際断面の堤体を，Fig.1.11 (b) 変換断面の堤体とすることができる。そして，均質等方な変換断面堤体(Fig.1.11 (b))については，例えば, A. Casagrande の方法によって簡単に浸潤線を求めることができ，フローネット法によって流線網を求めることができる。また，座標変換式を逆に使って, $x = 3\,x^*$, $z = z$ として図形を元に戻すことによって，Fig.1.11 (a)に示すように実際断面の浸透流の状態を得ることができる。



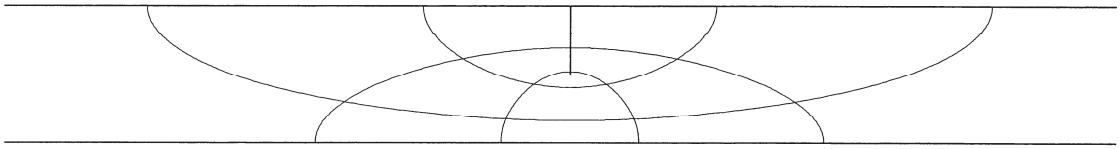
(a) Real section ($x-z$ plane) (Inhomogeneous and anisotropic soil)

Transformed ↓ ↑ Inverse



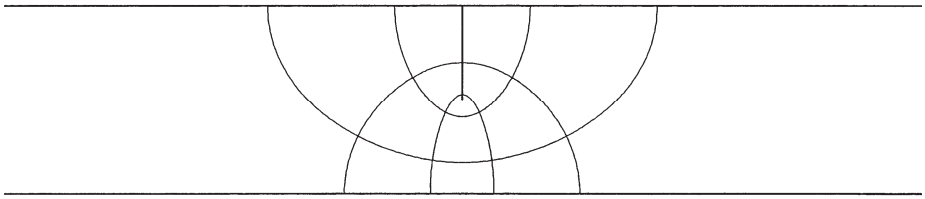
(b) Transformed section (x^*-z plane) (Homogeneous and isotropic soil)

Fig.1.11　台形断面内の浸透流（断面の変換 $x^*=x\sqrt{k_z/k_x}=x/3$）（FEM 解析による浸潤線）



(a) Real section ($x-z$ plane) (Inhomogeneous and anisotropic soil)

Transformed ↓ ↑ Inverse



(b) Transformed section (x^*-z plane) (Homogeneous and isotropic soil)

Fig.1.12　締切り矢板前後の浸透流（断面の変換 $x^*=x\sqrt{k_z/k_x}=x/3$）（FEM 解析による流線網）

また，Fig.1.12 には，同様にして，締切り矢板前後の浸透流に関して，基礎地盤が異方透水性の値（$k_x/k_z=9$）をもつ場合について，(a) 実際断面と，(b) 変換断面における浸透流況（フローネット）を示す。Fig.1.12 では，一例として，FEM 解析による流線網（矢板前後にかかる水頭差を 5 分割した

場合の正方形網）を示している。

これらの例に見るように，水平方向の透水性が大きな土について，台形形状の堤体モデルのように，水平方向に有限な大きさの浸透領域の場合には，座標変換によって領域が狭められ，（元に戻したときの）実際断面では，異方透水性の浸透領域（の大きさ）への影響が大きく表れることがわかる。一方，締切り矢板モデルのように，水平方向に無限の大きさ（を仮定した）浸透領域の場合には，座標変換によって変換断面における流況は変化しないものの，元に戻したときの実際断面では，異方透水性が大きくなるにつれてポテンシャルの影響が遠くまで及ぶことがわかる。

ここで，締切り矢板モデルの流量について考える。フローネット法によって正方形網が描かれたとすると，単位奥行き当たりの浸透流量 q は，

$$q = \frac{N_f}{N_d} k H \tag{1.42}$$

と表される。ここに，H は締切り矢板前後の水頭差，k は地盤の透水係数，N_f は流線の区分数（流路の数），N_d は等ポテンシャル線の区分数（ポテンシャルドロップの数）である。ここで，L を奥行き方向の長さとすると，「実断面の流量は $Q = qL = (N_f/N_d)\, k^* HL$」，「$k = k_z$ として堤体を均質・等方と仮定した断面の流量は $Q_{\mathrm{ISO}} = q_{\mathrm{ISO}} L = (N_f/N_d)\, k_z HL$」となる。$k_r = k_x/k_z$ とおくと，変換断面の等価透水係数 k^* は，$k^* = \sqrt{k_x \cdot k_z} = k_z \sqrt{k_r}$ となるので [1]，理論的に次の関係式が成り立つ。

$$Q/Q_{\mathrm{ISO}} = \sqrt{k_x/k_z} = \sqrt{k_r} \quad \text{（水平方向に無限領域の矢板締切り地盤の浸透流）} \tag{1.43}$$

1.2.4 平行平板間（クラック中）及び円管内の水の流れ

間隔 $2d$ の平行平板間，または，半径 R の円管内に，非圧縮粘性流体が定常的に流れる場合について考える [25]。l だけ離れた 2 つの地点に圧力差 P が作用したとき（すなわち，圧力勾配 $i = P/l$ が作用したとき），単位奥行き当たりの流量 q 及び円管内流量 Q は，d または R と次の関係にある [26]。

(1) 平行平板間の流れ（2 次元ポアズイユ流）

$$q = \gamma_w (2\pi d^3/3\mu)\, i \tag{1.44}$$

(2) 円管ポアズイユ流（Hagen Poiseuille の流れ）

$$Q = \gamma_w (\pi R^4/8\mu)\, i \tag{1.45}$$

いずれの場合にも流量は動水勾配に比例することがわかる。ここに，γ_w は水の単位体積重量，π は円周率，μ は流体の粘性係数である。

地盤内には土粒子間隙があり，これらの空隙がクラック（平行平板）や管などの水みちからできているものと考える。この水みちを流れる流量が動水勾配に比例すると考える。Fig.1.13 に示すように，クラック（平行平板）や管などの水みちが，ある方向に卓越して並んでおり，透水性の大きな方向が n 方向と一致し，透水性の小さな方向が s 方向（n と直交する方向）に一致するものとする。ここで，x–z 直角座標系から，反時計回りに θ だけ回転した直角座標系を n–s とする。

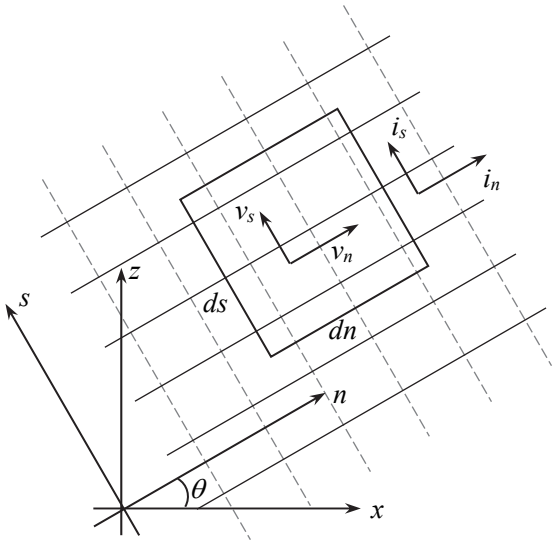


Fig.1.13　地盤内のクラック（平行平板）や管などの水みち中の水の流れ

ここでは，とくに(2)の場合について考える。ここで，(1.45)式の係数を $A = \gamma_w (\pi R^4/8\mu)$ とおくと，n 方向に流れる単位面積（及び単位奥行き）当たりの流量 Q_n/ds は，

$$v_n = Q_n/ds = A_n\, i_n \tag{1.46}$$

となり, s 方向に流れる単位面積(及び単位奥行き)当たりの流量 Q_s/dn は,

$$v_s = Q_s/dn = A_s\, i_s \tag{1.47}$$

となる。ここに, A_n, A_s は, それぞれ n, s 方向の流れに対する係数である。このようにして, 流速ベクトル $\{v_n, v_s\}^T$

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_n \\ i_s \end{Bmatrix} \tag{1.48}$$

と, 流速ベクトル及び動水勾配ベクトルの回転を関係づける式

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} \tag{1.49}$$

$$\begin{Bmatrix} i_n \\ i_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{1.50}$$

を用いて, (1.49)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_n \\ i_s \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{1.51}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n \cos^2\theta + A_s \sin^2\theta & (A_n - A_s)\sin\theta\cos\theta \\ (A_n - A_s)\sin\theta\cos\theta & A_n \sin^2\theta + A_s \cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{1.52}$$

ここで,

$$k_{xx} = A_n \cos^2\theta + A_s \sin^2\theta \tag{1.53a}$$

$$k_{zz} = A_n \sin^2\theta + A_s \cos^2\theta \tag{1.53b}$$

$$k_{xz} = k_{zx} = (A_n - A_s)\sin\theta\cos\theta \tag{1.53c}$$

とおくと,

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{1.54}$$

となる。$\{v_x, v_z\}^T$ と $\{i_x, i_z\}^T$ を関係づけるマトリックスは, 対称($k_{xz} = k_{zx}$)となる。(1)の場合についても同様の考察が可能である。より厳密な考察は**第２章**を参照のこと！

このように, **1.2.1 項**, 及び, **1.2.4 項**から次の事柄が言える。まず, 力学的観点から「流体の流速が遅く流水から土粒子に作用する抵抗力が速度に比例すると考えると運動方程式から」, また, 水理学的な観点から「間隙を流れる流量が 2 地点の圧力差(または動水勾配)に比例すると考えると流量と動水勾配の関係式から」, 拡張されたダルシー則((1.20)式, (1.54)式)が導かれる。次に, これらの式からわかるように, $x - z$ 座標系における二次元異方透水性地盤の浸透流を考えた場合, 一般的に, i_x により x 方向の流れ v_x のみならず z 方向の流れ v_z が生じる。i_z についても同様である。また, i_x によって z 方向に生じる透水係数 k_{xz} と i_z によって x 方向に生じる透水係数 k_{zx} の値は等しい。透水係数は応力と同じように二階の対称テンソルである。透水係数テンソルの非対角成分 k_{xz} ($= k_{zx}$)は, せん断応力のように物理的に存在するものではなく, 数学的に流れの成分として生じるものであることがわかる。

1.3 土の異方透水性の効果

土は一般的に浸透流に関して異方透水性を有している。異方透水性を有している土に関して，等方透水性と仮定して設計（計算）したとすると，実際にはその計算結果よりも，浸透流量が増大したり，地盤の浸透破壊に対する限界水頭差が低下したり，ダム堤体のすべりに対する安定性が低下することによって危険となることがある。浸透流に関わる地盤や土構造物の設計においては，土の異方透水性について調査し，それが水理学的・力学的性質にどのように影響するのかについて調べる必要がある。

ここでは，特徴的な形状の土構造物や各種条件の地盤を取り上げ，土が異方透水性を有するときに，浸透流況や水理学的･力学的安定性にどのような影響を及ぼすのかについて考察する。1.1 節で述べたように，自然地盤，人工締固め地盤，実験室モデル地盤などの実際の地盤において，異方透水性の値 k_h/k_v は，平均的には，1.0 より小さいものについては 1/2～1/3 程度，1.0 より大きいものについては 3.0～25.0 程度の値をとることがわかった。ここでは，異方透水性の値 k_h/k_v として 1/3, 1, 3, 9, 25 の場合を取り上げて考察する（1.1 節参照）。

異方透水性の値について，実際には 25 より大きな値が報告されたり，1/3 より小さな値が報告されており，さらに大きな影響が及ぼされる可能性があることにも留意する必要がある。

1.3.1　浸透流問題における座標変換の理論[1) 27)] を用いた理論的考察

二次元異方透水性地盤の浸透流の支配方程式は，x, z 座標系について，運動方程式としてのダルシー則:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_z &= -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

及び，流量の連続式:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.56}$$

から，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = 0 \tag{1.57}$$

と得られる。ここに，h は全水頭，v_x, v_z は x, z 方向の流量流速である。透水性に関して均質・等方と仮定すると，$k_x = k_z = k$ となり，(1.57)式は，

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \nabla^2 h = 0 \tag{1.58}$$

となり，ラプラス方程式となる。ここに，

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.59}$$

である。ここで，透水係数は，水平方向と鉛直方向に主方向[27)] があり，$k_x = k_h$, $k_z = k_v$ を考える。

地盤が，均質であるが，透水係数に関して異方性，すなわち $k_x = \text{const.}$, $k_z = \text{const.}$ かつ $k_x \neq k_z$ であるとすると，

$$x^* = x\sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \tag{1.60}$$

と変数変換することにより, (1.57)式は,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \nabla^{*2} h = 0 \tag{1.61}$$

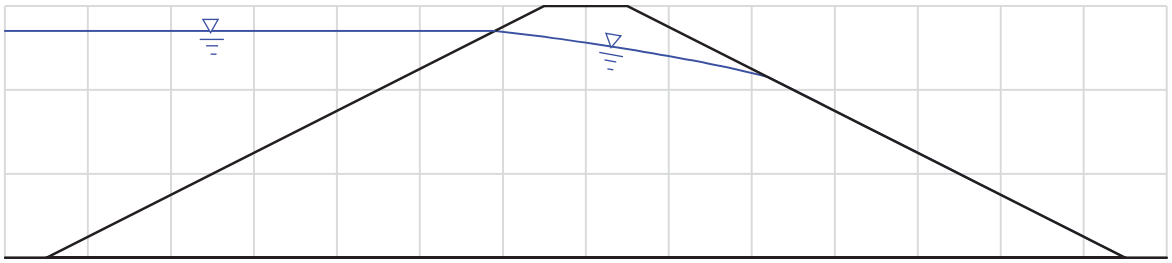
となる。ここに,

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.62}$$

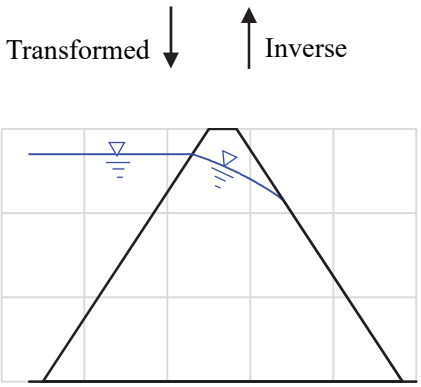
である。変換断面における等価透水係数 k^* は $k^* = \sqrt{k_x \cdot k_z}$ である[1)]。均質・異方性地盤の場合にも, 変換断面(x^* − z 平面)においては浸透水の支配方程式は, (1.61)式に示すようにラプラス方程式となる。したがって, 理論的には, 均質・異方性地盤の浸透流問題は, 均質・等方性地盤の浸透流問題に帰着することがわかる。

(1) 堤体の浸潤線

変換断面の考え方を用いて, 均質・異方性地盤の浸透流に関して解く方法について考える。ここで, 台形形状のフィルダム堤体内の浸透流について考えてみよう。堤体は, 水平方向に 9 倍の透水性($k_x = 9\,k_z$)をもっているものとする。Fig.1.14 に, 台形断面内の浸透流における断面の変換方法を示す。また, Fig.1.14 には, 一例として, FEM 浸透流解析による浸潤線の形状を示している。



(a) Real section ($x - z$ plane) (Inhomogeneous and anisotropic soil)



(b) Transformed section ($x^* - z$ plane) (Homogeneous and isotropic soil)

Fig.1.14　台形断面内の浸透流(断面の変換 $x^* = x\sqrt{k_x/k_z} = x/3$)(FEM 解析による浸潤線)[27)]

このとき, x^*は$x^* = x\sqrt{k_z/k_x} = x/3$となるので, Fig.1.14 に示すように, $x^* = x/3$, $z = z$ と座標変換することによって, (a) 実際断面の堤体は, (b) 変換断面の堤体に変換することができる。そして, 均質等方な変換断面の堤体(Fig.1.14 (b))については, 例えば, A. Casagrande の方法[17] によって簡単に浸潤線を求めることができ, フローネット法[1] によって流線網を求めることができる。また, 座標変換式を逆に使って, $x = 3x^*$, $z = z$ として図形を元に戻すことによって, Fig.1.14 (a)に示すように実際断面の浸透流の状態を得ることができる。ここに, 等価透水係数 $k^* = k_{eq} = \sqrt{k_x \cdot k_z}$ である。

Fig.1.14 から, 異方透水性の値 k_h/k_v が大きくなると, 実際断面において, 浸潤線の上昇, 間隙水圧の増加と力学的安定性の低下, Q の増大が予測される。その影響は, 特に浸透領域が限られているとき, また, その領域が狭ければ狭いほど大きくなると考えられる。ここに, $k_h/k_v = k_x/k_z$ である。

(2) 二次元矢板締切り地盤（左右両側に無限である場合）

Fig.1.15 には, (1) と同様にして, 締切り矢板前後の浸透流について, 地盤が左右両側に無限領域であり異方透水性の値($k_x/k_z = 9$)をもつ場合の, (a) 実際断面と, (b) 変換断面における浸透流況(フローネット)を示す。ここで, 変換断面(等方透水性地盤)では, 水頭差 H を 10 等分した等ポテンシャル線($\Delta h = H/10$)を示し, 流線は流線網が正方形網を形作るように, すなわち流路(Flow channel)中の流量 q が $k\Delta h$ となるように描写している。一方, 実断面では, 水頭差 H を 10 等分した等ポテンシャル線($\Delta h = H/10$)と, 流線は流路中の流量 q が $k_{eq}\Delta h$ となるように描写している。

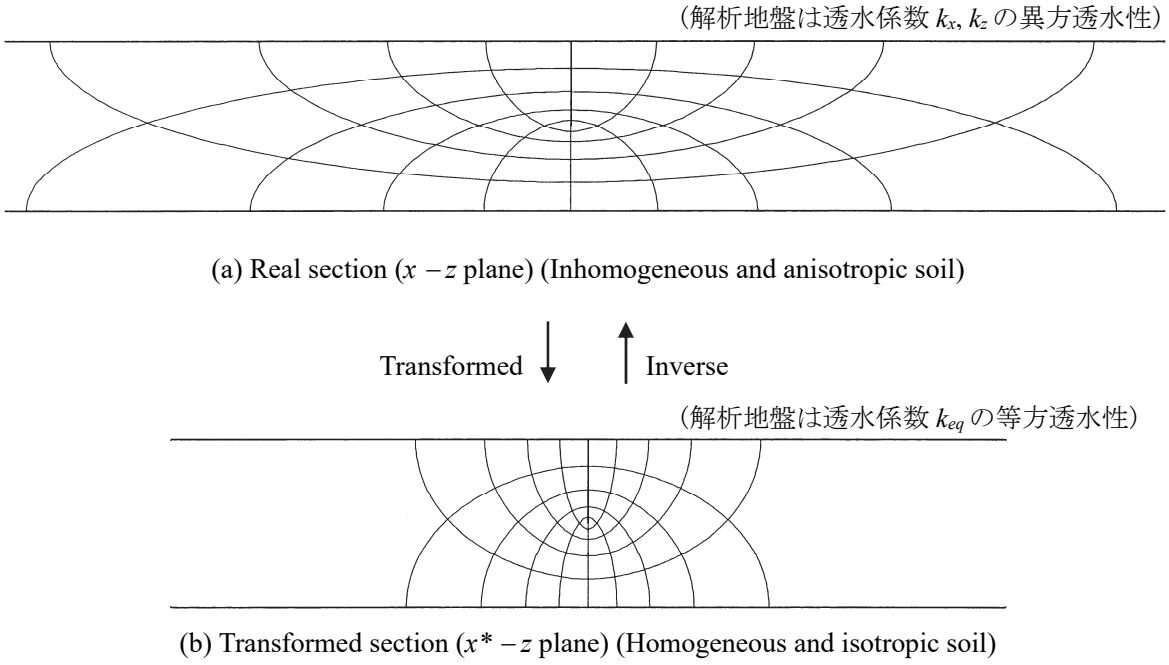


Fig.1.15　締切り矢板前後の浸透流(断面の変換 $x^* = x\sqrt{k_x/k_z} = x/3$)(FEM 解析による流線網: 水頭差を 10 分割)

＜実･仮定地盤流量比 Q/Q_{ISO}＞

ここで,「実流量 Q」と「透水係数 $k = k_v$ の均質等方透水性地盤と仮定したときの流量 Q_{ISO}」の比 Q/Q_{ISO} について考える(1.2.3 項参照)。ここでは, Q/Q_{ISO} を実･仮定地盤流量比と呼ぶことにする。まず, フローネット法によると, 単位奥行き当たりの浸透流量 q は,

$$q = \frac{N_f}{N_d} k H \tag{1.63}$$

と表される[17]。ここに, H は構造物前後の水頭差, k は地盤の透水係数, N_f は流線の区分数(流路の数), N_d は等ポテンシャル線の区分数(ポテンシャルドロップの数)である。左右両側に無限な二次元矢板締切り地盤について, 例えば, $D/T = 0.5$ の場合を考えると, 均質等方性地盤のオリジナル断面及び均質異方透水性地盤の変換断面における, 地盤形状及び浸透流況(流線網)は, Fig.1.15(b)に示すものとすべて同一となる。ここで, 実流量 Q と仮定断面流量 Q_{ISO} を流線網から求める方法について考える。

まず, $k = k_v$ の均質等方透水性地盤と仮定したときのオリジナル断面の流量 Q_{ISO} は, フローネット法から Fig.1.15(b)の流線網を用いて,

$$Q_{ISO} = q_{ISO} L = (N_f/H_d) k_v H L \tag{1.64}$$

と計算できる(仮定断面はオリジナル断面と同一形状である)。ここに q_{ISO} は $k = k_v$ の均質等方透水性地盤と仮定したときの(オリジナル断面の)単位奥行き当たりの流量, N_f は流路の数, H_d はポテンシャルドロップの数である。例えば, Fig.1.15(b)については, $N_f = 5$, $H_d = 10$ となる。

次に, 実際の $k_x = k_h$ 及び $k_z = k_v$ の均質異方透水性地盤の場合には, 変換断面の考え方を用いて次のように計算することができる。変換断面では地盤は仮想的に均質等方であると考えられるので, 実流量 Q は, 変換断面について求めた流線網(Fig.1.15(b)の正方形網)を用いて, $k = k_{eq}$ $(=\sqrt{k_h k_v})$ を等価透水係数として, 次のように求められる。

$$Q = q L = (N_f/H_d) k_{eq} H L \tag{1.65}$$

したがって, この場合, 実･仮定地盤流量比 Q/Q_{ISO} の値は, (1.64), (1.65)式から, 理論的に,

$$Q/Q_{ISO} = \sqrt{k_h/k_v} \tag{1.66}$$

と求まることになる。

ここで, k_h/k_v と Q/Q_{ISO} の理論的な関係について考えてみる。異方透水性の値 k_h/k_v と実･仮定地盤流量比 Q/Q_{ISO} の関係について, 理論的には, まず, 極限の直線として「実際に k_v だけによる流れの場合の理論直線 $Q/Q_{ISO} = 1$」及び「実際に k_h だけによる流れの場合の理論直線 $Q/Q_{ISO} = k_h/k_v$」を描くことができる。実際の土構造物や地盤の浸透流に関する k_h/k_v と Q/Q_{ISO} の関係は, Fig.1.16 に示すように, この 2 つの直線に挟まれた領域内にのみ存在することになる。その領域を式で示すと,

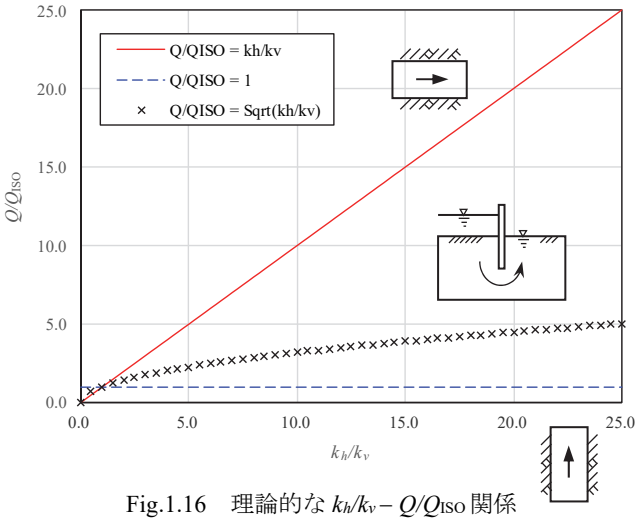


Fig.1.16　理論的な $k_h/k_v - Q/Q_{ISO}$ 関係

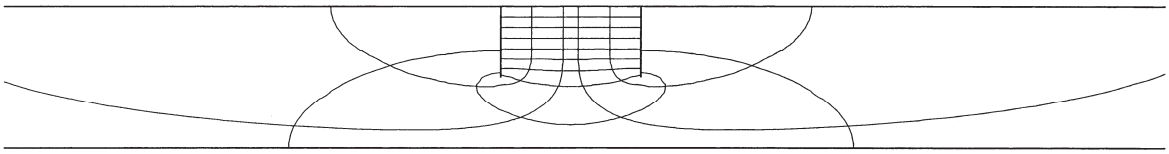
$$\left.\begin{array}{ll} k_h/k_v > 1 \text{ のとき：} & 1 < Q/Q_{ISO} < k_h/k_v \\ k_h/k_v = 1 \text{ のとき：} & Q/Q_{ISO} = k_h/k_v = 1 \\ k_h/k_v < 1 \text{ のとき：} & 1 > Q/Q_{ISO} > k_h/k_v \end{array}\right\} \tag{1.67}$$

となる。上述したように, 締切り矢板前後の地盤中の浸透流の場合には, 理論的に $Q/Q_{ISO} = \sqrt{k_h/k_v}$ の関係で表され, Fig.1.16 に示すように, (1.67)式で表される領域(2 つの直線の間)に存在する。

(3) 複列の締切り矢板内の浸透流(二次元集中流)

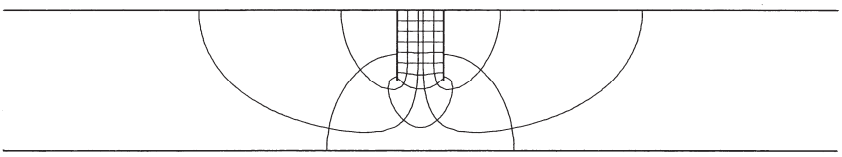
Fig.1.17 に，複列の締切り矢板によって囲まれた地盤内の浸透流(ここでは，二次元集中流と呼ぶ)について，(1)，(2)と同様にして，地盤が異方透水性の値($k_x/k_z = 9$)をもつ場合の，(a) 実際断面と，(b) 変換断面における浸透流況(フローネット)を示す。ここで，Fig.1.17 では，Fig.1.15 と同様に，変換断面(等方透水性地盤)では，水頭差 H を 10 等分した等ポテンシャル線($\Delta h = H/10$)を示し，流線は流線網が正方形網を形作るように，すなわち流路中の流量 q が $k\Delta h$ となるように描写している。一方，実断面では，水頭差 H を 10 等分した等ポテンシャル線($\Delta h = H/10$)と，流線は流路中の流量 q が $k_{eq}\Delta h$ となるように描写している。また，流線の描写は左右両側の矢板に沿ったものから始め，複列矢板中央における流線間の流量は $k\Delta h$ または $k_{eq}\Delta h$ の条件を満たしていない。Fig.1.17 に示すような複列矢板で限られた狭い領域に集中する浸透流の場合には，異方透水性の値が大きくなると，領域内で消費される損失水頭割合が大きくなることがわかる。

水平方向の透水性が鉛直方向よりも大きな土について，例えばここで取り上げた(1)，(3)の例にみるように，水平方向に有限な大きさの浸透領域の場合には，座標変換によって領域が狭められ，異方透水性の浸透領域(の大きさ)への影響が大きく表れることがわかる。一方，(2)の締切り矢板モデルのように，水平方向に両側に無限な大きさの浸透領域の場合には，座標変換によって，変換断面における地盤形状および浸透流況は変化しないものの，変換断面の状態を実際の状態(実際断面)に戻したときには，異方透水性の値が大きくなるにつれてポテンシャルの影響が遠くまで及ぶことがわかる。



(a) Real section ($x - z$ plane) (Inhomogeneous and anisotropic soil)

Transformed ↓ ↑ Inverse



(b) Transformed section ($x^* - z$ plane) (Homogeneous and isotropic soil)

Fig.1.17　複列矢板締切りにおける浸透流(断面の変換 $x^* = \sqrt{k_x/k_z} = 1/3$)(FEM 解析による流線網: 水頭差を 10 分割)

1.3.2　異方透水性の効果

ここでは，Fig.1.18 に示すような 11 種類のモデル地盤(矩形形状フィルダム (a)，4 種類の台形形状フィルダム (b)～(e)，2 種類の頭首工基礎地盤 (f)，(g)，4 種類の矢板締切り地盤 (h)～(k))について考える。すなわち，フィルダムに関しては，(a) 矩形形状，及び，台形形状で (b)ドレーンなし，(c) 立上がりドレーン，(d) 法先ドレーン，(e) 水平ドレーンの場合，頭首工基礎地盤に関しては，(f) 止

水壁なし, (g) 上流側止水壁ありの場合, 矢板締切り地盤に関しては, (h) 二次元流, (i) 二次元集中流, (j) 軸対称流, (k) 傾斜地盤の場合を考える。そして, 水平と鉛直方向の透水係数, すなわち k_x と k_z の比 k_x/k_z が 1/3, 1, 3, 9, 25 の場合(1.1 節参照)に対して, Figs.1.18 (a)～(k)の各種モデル地盤について浸透流解析, また一部のモデルについて安定解析を行い, 異方透水性の効果について考察する。

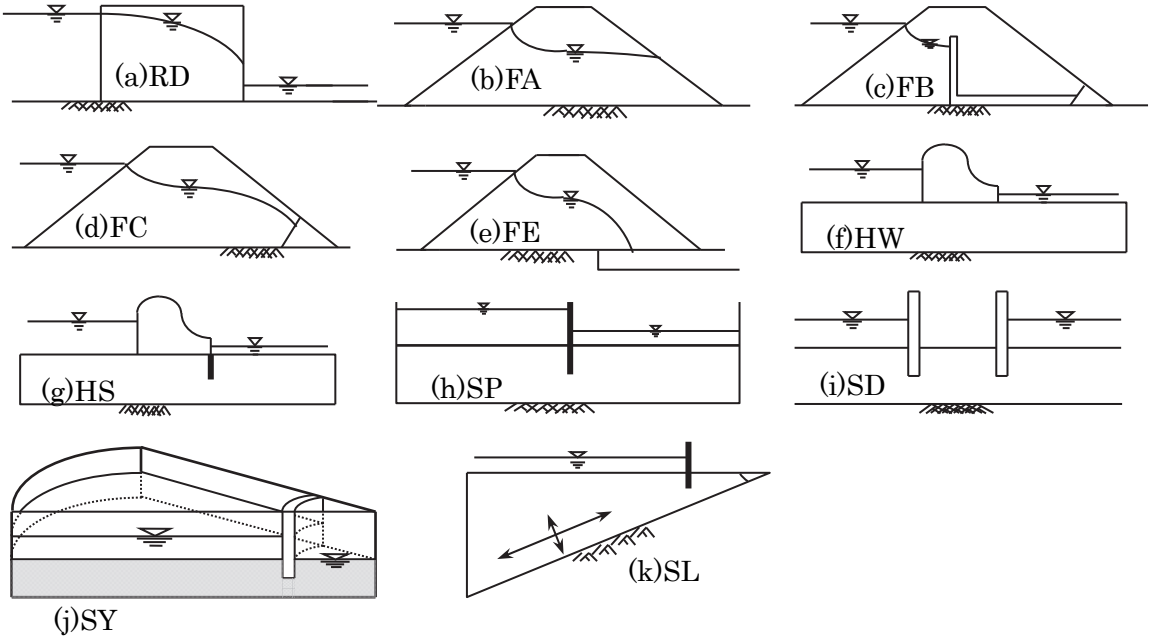


Fig.1.18　種々の解析浸透領域

(1) 流量の増大

異方透水性の値 k_h/k_v と実･仮定地盤流量比 Q/Q_{ISO} の関係を示すと Fig.1.19 となる。Fig.1.19 から, 前述したように, すべての k_h/k_v と Q/Q_{ISO} の関係は,「実際に k_v だけによる流れの場合の理論直線 $Q/Q_{ISO}=1$」及び「実際に k_h だけによる流れの場合の理論直線 $Q/Q_{ISO}=k_h/k_v$」の間に存在することがわかる((1.67)式参照)。

次に, Fig.1.18 (h) SP で示すような矢板前後の地盤中の浸透流の場合は, これら 2 つの直線の間に存在し, 1.2.3 項で述べた理論曲線 $Q/Q_{ISO}=\sqrt{k_h/k_v}$ の関係((1.67)式)と一致することがわかる。

また, Figs.1.18 (a) RD, (b) FA のようなフィルダムの場合には $Q \approx k_h/k_v \times Q_{ISO}$ となり, 実際に土の中を流れる流量 Q が異方性の値 k_h/k_v に比例して大きくなることがわかる。

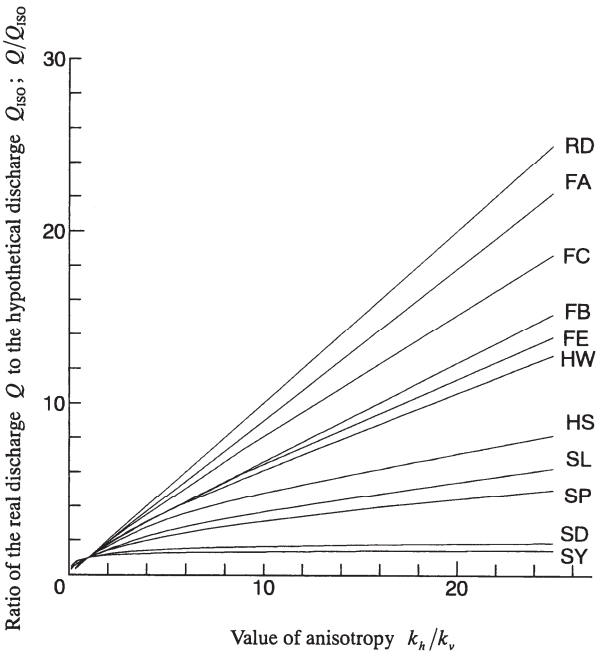


Fig.1.19　k_h/k_v ～ Q/Q_{ISO} 関係

ここで特に注目すべき事柄は，いくつかの形態のフィルダムでは，k_h/k_v～Q/Q_{ISO} 曲線が理論直線 $Q/Q_{ISO} = k_h/k_v$ に近づき，浸透水量が異方透水性の値 k_h/k_v の増加に比例して増加することである。したがって，このような形態のフィルダムでは，実際の浸透流量 Q は，平滑胴ローラを用いた場合（$k_h/k_v = 20$～30 であるので），$Q/Q_{ISO} \approx 20$～30 となり，タンピングローラを用いた場合（$k_h/k_v = 2$～10 であるので），$Q/Q_{ISO} \approx 2$～10 となることを意味する（1.1.2 参照）。

また，Figs.1.18 (i) SD, (j) SY のような締切り条件の場合には，$Q/Q_{ISO} = 1$ の関係に近くなり，浸透流が $k = k_v$ に支配されている，すなわち矢板囲い内の一次元上昇浸透流（鉛直上向きの流れ）の影響を強く受けていることが予想される。

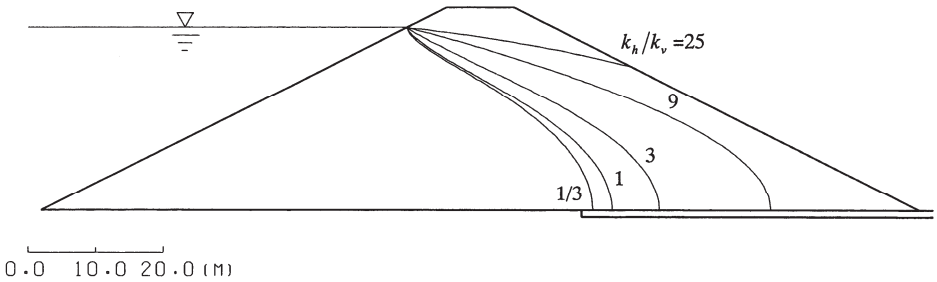


Fig.1.20　異方透水性の値 k_h/k_v による浸潤線の変化 (水平ドレーン)

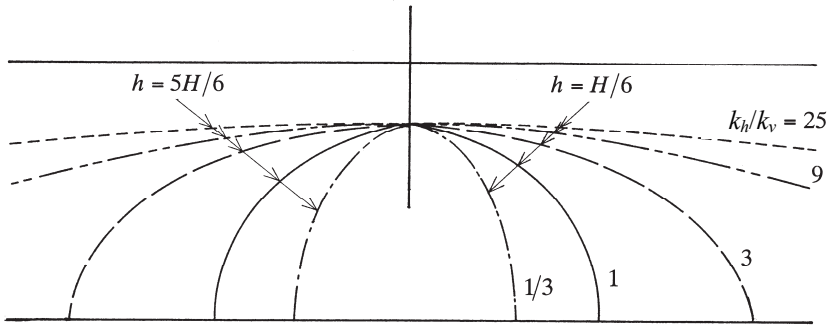


Fig.1.21　異方透水性の値 k_h/k_v と等ポテンシャル線の関係

(2) 浸潤線・浸出点の上昇及び間隙水圧の影響する範囲の拡大

水平ドレーンを有するフィルダム（Fig.1.18(e) FE）において，異方透水性の値 k_h/k_v による浸潤線の変化を示すと Fig.1.20 のようになる。k_h/k_v の値が大きくなるにつれて浸潤線や浸出点が上昇し，間隙水圧が水平方向により遠方まで及んでゆくことがわかる。また，この場合，k_h/k_v の値が 9 より小さいときには浸潤線が堤体内に収まっているものの，k_h/k_v の値が大きくなるにつれて浸潤線が下流側堤体斜面に近づき，25 になると下流側堤体斜面に出てしまい水平ドレーンの効果がなくなってしまうことがわかる。このことから，異方透水性の値が大きくなると下流側斜面の力学的安定性が低下することが予想される。

矢板前後の地盤中の浸透流（Fig.1.18(h) SP）において，異方透水性の値 k_h/k_v による等ポテンシャル線の変化を示すと Fig.1.21 となる。Fig.1.21 には，矢板前後にかかる水頭差 H を 6 分割した場合について，異方透水性の値 k_h/k_v が 1/3, 1, 3, 9, 25 と変化したときに，$h = 5H/6$（矢板の左側）及び $H/6$（矢板の右側）の 2 種類の等ポテンシャル線が変化する様子を示している。これらの等ポテンシ

ャル線は，k_h/k_v の値が大きくなるにつれて，矢板近傍における位置はほぼ同じであるが，矢板から離れるにつれて水平方向に広がり圧力が水平方向遠方まで及んでいる様子がわかる。このことから，異方透水性の値が大きくなると矢板下流側地盤の力学的安定性が低下することが予想される。

(3) 地盤の浸透破壊に対する安定性の低下

矢板背後地盤の浸透破壊に対する安定性について考える。矢板の根入れ比 D/T が 0.5 の場合について，流れの条件が二次元流（2Dflow, Fig.1.18(h)），二次元集中流（2DCflow, Fig.1.18(i)），軸対称流（AXSflow, Fig.1.18(j)）のときの浸透流及び浸透破壊安定解析を行った。Fig.1.22 に異方透水性の値 k_h/k_v～限界水頭差の無次元量 $H_c\gamma_w/T\gamma'$ の関係を示す[28]。ここに，H_c は限界水頭差，γ_w は水の単位体積重量，γ' は地盤の水中単位体積重量であり，地盤の層厚 T（= 20 m），矢板の根入れ深さ D（= 10 m），複列矢板の半幅 b（= 10 m），円筒壁の半径 R（= 10 m）について考えた。

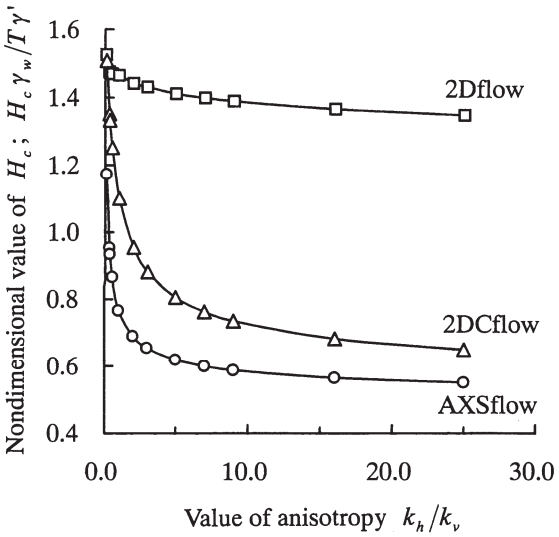


Fig.1.22　k_h/k_v～$H_c\gamma_w/T\gamma'$ の関係
（2D, 2DC, AXS-flows）

ここで，地盤の浸透破壊に対する限界水頭差は，Prismatic failure concept[29) 30)] を用いて求めた。

まず，Fig.1.22 から，いずれの流れの条件においても，異方透水性の値が大きくなると限界水頭差 H_c が小さくなり地盤の力学的安定性が低下することがわかる。二次元流の場合，その低下量は大変小さい。一方，二次元集中流と軸対称流の場合，異方透水性の値 k_h/k_v が大きくなるにつれて，k_h/k_v が小さなところで（k_h/k_v < 3.0），限界水頭差が急激に低下することが特徴的である。例えば，Fig.1.22 において，砂地盤の異方透水性の値 k_h/k_v が 1.0～2.0 に変化するとき，限界水頭差 H_c の無次元量 $H_c\gamma_w/T\gamma'$ は，二次元地盤の場合 $H_c\gamma_w/T\gamma'$ = 1.482～1.461（–1.4%），二次元集中流地盤の場合 $H_c\gamma_w/T\gamma'$ = 1.113～0.964（–13.4%），軸対称地盤の場合 $H_c\gamma_w/T\gamma'$ = 0.775～0.696（–10.2%）と変化する。また，k_h/k_v が大きくなると限界水頭差の値にほとんど影響を及ぼさないことがわかる。これは，「二次元流の場合には，もともと異方透水性の影響が小さいこと」，「二次元集中流と軸対称流の場合には，k_h/k_v が大きくなると，下流側地盤の浸透流が矢板壁によって拘束された形となり，一次元上昇浸透流の状態に近づくことによると考えられる。

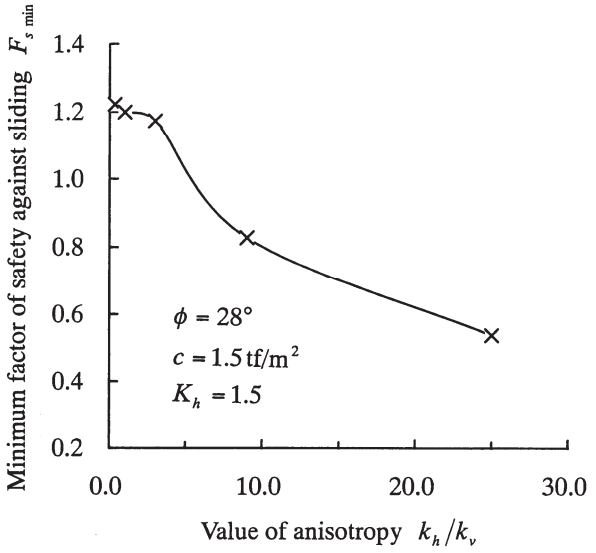


Fig.1.23　異方透水性の値 k_h/k_v とすべりに対する最小安全率の関係（水平ドレーン）

(4) フィルダムの円弧すべりに対する安定性の低下

台形形状のフィルダムについて下流側斜面の円弧すべりに対する安全率[31]を求めた。ここでは，水平ドレーンを有するフィルダム(Fig.1.18(e))の場合について考える。異方透水性の値 k_h/k_v とすべりに対する最小安全率 $F_{s\,\min}$ の関係を示すと Fig.1.23 となる。また, Figs.1.24 (a)～(e) に, k_h/k_v = 1/3, 1, 3, 9, 25 の場合の最小安全率を示すすべり円弧を表している。Fig.1.23 から，すべりに対する最小安全率は，異方透水性の値が小さいときにはあまり変化がないが，異方透水性の値が大きくなると著しく低下することがわかる。これは，Fig.1.24 に示すように，異方透水性の値が大きくなると，① 堤体下方にある水平ドレーンの効果が効かなくなり浸透水が下流側堤体斜面に浸出し，② すべり円弧が浸潤線の下方の部分を大きく横切るためであると考えられる。

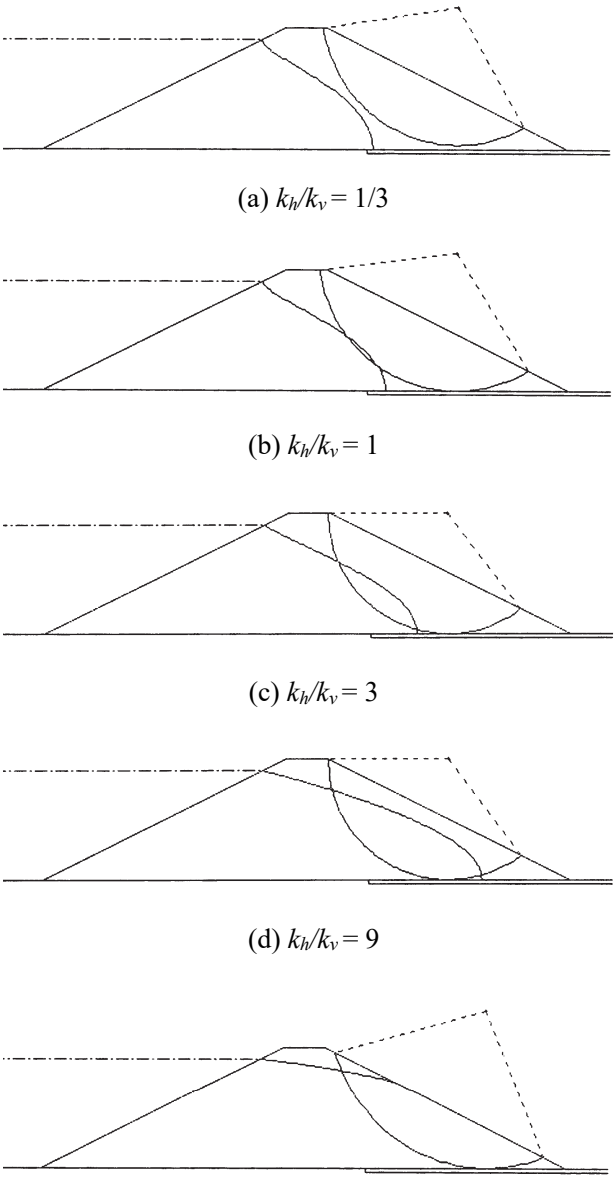


Fig.1.24　最小安全率を示すすべり円弧

1.3.3　まとめ

土の異方透水性とその値 k_h/k_v が浸透流特性と浸透破壊及びすべり安定性へ及ぼす影響について考察した。ここに，異方透水性の値を水平方向と鉛直方向の透水係数，すなわち k_h と k_v の比 k_h/k_v で表す。ここでは，まず，自然地盤，人工地盤，室内実験モデル地盤には，おおよそ，k_h/k_v = 1/3～25 の異方透水性があることを示した。次に，合計 11 種類のモデル地盤(矩形形状フィルダム, 4 種類の台形形状フィルダム, 2 種類の頭首工基礎地盤, 4 種類の矢板締切り地盤)について FEM 浸透流及び安定解析を行い，異方透水性の値 k_h/k_v が浸透流特性と浸透破壊及びすべりに対する安定性に及ぼす影響について考察した。そして，異方透水性の値 k_h/k_v が大きくなるにつれて，

(1) 流量の増大,
(2) 浸潤線の上昇,
(3) 浸出点の上昇,
(4) 間隙水圧の影響する範囲の拡大,
(5) 地盤の浸透破壊に対する安定性の低下，及び
(6) フィルダム下流側斜面のすべりに対する安全率の低下

が生じることを明らかにした。

このように，異方透水性の値が大きくなると，いろいろな望ましくない現象が起こり工学的に問題となることがわかる。

謝辞

1.1.3 項において，Muskat の書籍における水平及び鉛直方向の透水係数データ整理には，榛葉美友氏（平成 23 年 3 月卒業），長沼　瞳氏（平成 24 年 3 月卒業），柴田奈緒氏（平成 25 年 3 月卒業），今泉亜依子氏（平成 26 年 3 月卒業）に大変お世話になった。異方透水性の効果（1.3.2 項）の計算には，野々村圭造氏（平成 13 年 3 月修士修了），北爪理英氏（平成 10 年 3 月卒業），鵜野千佳子氏（平成 13 年 3 月卒業）に大変お世話になった。また，二次元浸透破壊実験地盤の透水係数逆解析では，プログラム開発者である山浦清孝氏（平成 6 年 3 月卒業），実際に解析を行った，南　浩平氏（平成 7 年 3 月卒業），日高　厚氏（平成 9 年 3 月卒業），正木よし子氏（平成 10 年 3 月卒業），宇野健一氏（平成 13 年 3 月卒業），田内憲一朗氏（平成 14 年 3 月卒業）に大変お世話になった。ここに，記して謝意を表する次第である。

また，本章は，平成 19～22 年度科学研究費補助金（基盤研究(B)(2)）（研究代表者：田中　勉）「地盤の浸透破壊に関する総合評価」，及び，平成 9～11 年度科学研究費補助金（萌芽研究）（研究代表者：田中　勉）「異方透水性の発現メカニズムと異方浸透流特性に関する研究」の援助の基に行われた研究成果の一部である。ここに記して謝意を表する次第である。

付録１　Muskat の書籍における異方透水性の値

付録２　重み付き算術平均，重み付き幾何平均及び重み付き調和平均とそれらの関係

参考文献

1) Harr, M. E. (1962): Groundwater and Seepage, McGraw Hill, pp.26-35.
2) Lane, E.W. (1935): Security from under-seepage masonry dams on earth foundations, Trans. of ASCE, No.100, pp.1235-1351.
3) Lambe, T.W. and Whitman, R.V. (1979): Soil Mechanics, SI Version, Wiley, New York, (1st ed. 1968), pp.57-58.
4) Muskat, M. (1937): The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media (McGraw-Hill, New York), pp.101-113.
5) Fancher, G. H., Lewis, J. A. and Barner, K. B. (1933): Min. Ind. Exp. Sta., Penn. State College Bull. 12.
6) 古河美典，井戸一友，三浦均也，今福　守 (1993)：砂質地盤の透水性の異方性についての室内実験，第 28 回土質工学研究発表会講演論文集, pp.2225-2228.
7) Hulla, J. and Z.Kadubcová, Z. (2000): Erosive filtration in the flood embankments subsoil, Proceedings of the 3rd. International Conference on Filters and Drainage in Geotechnical and Environmental Engineering, Wolski & Mlynarek eds., Balkema, Rotterdam, pp.305-312.
8) Peter, P. and Šebesta, Š.(1965): After katastrophy of the Danube embankments (in Slovak). Inenýrské stavby, 7: 1-8.
9) Bear and Verruijt (1987): Modeling Groundwater Flow and Pollution (Theory and Applications of

Transport in Porous Media No.2), Springer.
10) Bear, J. (1972): Dynamics of Fluids in Porous Media, Elsevier, p.123-125.
11) 西垣　誠 (1994): 講座「地盤の異方性」9.異方性と透水(1), 土と基礎, Vol.42, No.1(Ser. No. 432).
12) 日本の特殊土編集小委員会編 (1974): 土質基礎工学ライブラリー10, 日本の特殊土, 土質工学会, pp.50-51, 59-60, 77-80.
13) 安池慎治・鈴木裕一 (1986): 関東ローム層の透水性とその異方性について, 日本地下水学会誌, 第 28 巻, 第 4 号, pp.163-171.
14) 片平　孝 (1994): 砂漠の世界(科学のアルバム 87), あかね書房, p.35.
15) 阪口　秀 (1998): 元 神戸大学助手(現 (財)笹川平和財団海洋政策研究所 所長)との私信.
16) Craig, R.F. (1997): Soil Mechanics, Sixth edition, E & FN Spon, pp.28-36.
17) 農林水産省構造改善局編 (1981): 土地改良事業計画設計基準 設計・ダム, 農業土木学会, p.195.
18) 田中　勉, 山浦清孝, 日高　厚 (1997): 二次元浸透破壊実験における作製地盤の異方透水係数の逆解析, 地盤工学における逆解析の適用と施工管理に関するシンポジウム発表論文集, 地盤工学会, pp.115～122.
19) 田中　勉, 景山敏一, 永井　茂 (1995): 仮締切り矢板背後地盤の浸透破壊実験 －実験装置の試作と地盤内浸透流特性の把握－, 第 40 回地盤工学シンポジウム －新しい課題と新しい技術－ 平成 7 年度発表論文集, 地盤工学会, pp.323～330.
20) 高野　瞳 (1975): 流体力学, 岩波書店, pp.211-214.
21) 川村三郎 (1982): 土砂水理学 1, 森北出版, pp.17-39.
22) 大草重康訳 (1969): フローリンの土質力学, 第 1 巻, 森北出版, pp.183-193.
23) 石原研而 (1988): 土質力学, 丸善, pp.72-75.
24) 山口柏樹 (1987): 土質基礎シリーズ 土質解析法, 技報堂出版, pp.36-37.
25) 友近　晋 (1972): 流体力学(復刻版), 現代工学社, pp.307-311.
26) 高木隆司 (1988): 現代人の物理学２ 流れの物理学, 朝倉書店, pp.43-47.
27) 田中　勉 (2016): 地盤の異方透水性とその発現メカニズム, 神戸大学都市安全研究センター研究報告, 第 20 号, pp.246-268.
28) 田中　勉, 野々村圭造, 富樫理恵, 宇野千佳子 (2017): 土の異方透水性が浸透流特性と浸透破壊及びすべり安定性に及ぼす影響, 神戸大学都市安全研究センター研究報告, 第 21 号, pp.289-298.
29) 田中 勉 (1996): 上昇浸透流を受ける矢板背後地盤の浸透破壊 －Prismatic failure の概念と解析結果－, 農業土木学会論文集, 第 186 号(第 64 巻, 第 6 号), pp.969～979.
30) Tsutomu Tanaka, Katsuho Hayashi and Masatoshi Yamada (2000): Seepage failure of soil in an axisymmetric condition, Proceedings of the Geotech-Year 2000, Developments in Geotechnical Engineering, pp.665-674.
31) 井阪秀高 (1991): 実際に役立つ PC-8801, 9801 土木設計プログラムシリーズ③ 斜面の安定計算, 山海堂, 第 3 版.

第２章　対称テンソルとしての透水係数

2.1 $x-z$ 平面内の管水路中の水流

$x-z$ 平面内にある管水路中の水の流れを考える(Fig.2.1)。管水路中の粘性流は，Hagen - Poiseuille の式で表され，

$$
\begin{aligned}
Q_n &= \frac{\gamma_w}{8\mu}\pi R^4 \frac{\Delta h}{\Delta l} \\
&= \frac{\gamma_w}{8\mu}\pi R^4 i_n \qquad (2.1) \\
&= A i_n
\end{aligned}
$$

となる[1)]。ここに，

$A = \dfrac{\gamma_w}{8\mu}\pi R^4$ ：管路に固有の定数

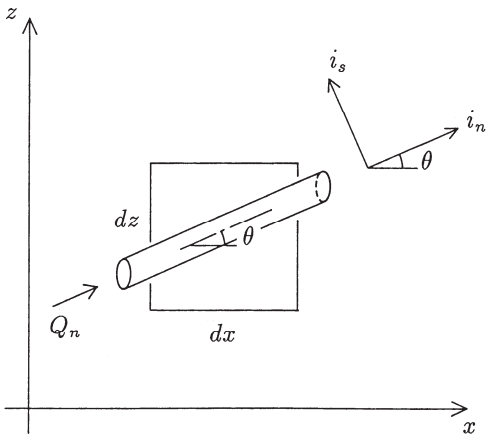


Fig.2.1　管水路中の水流

n：流れの方向(流れの方向に正をとる)

s：流れに垂直な方向(n と反時計回りに 90°の方向に正をとる)

Q_n：流量

γ_w：水の単位体積重量

μ：水の粘性係数

Δl：流れの方向に測った距離

Δh：Δl の間の水頭損失

R：管の半径

$i_n = \Delta h / \Delta l$：流れの方向の動水勾配

である。(2.1)式から，管水路中の粘性流に関しては，流量が動水勾配に比例することがわかる。

まず，x 及び z 方向の動水勾配 i_x 及び i_z が存在する場合について別々に考える。ここで，管の方向が, Fig.2.1 に示すように, x 軸と反時計まわりに θ の角度をなす場合について考える。

(1) i_x のみが存在する場合（$i_x \neq 0, i_z = 0$）

i_x のみが存在するときの管方向（θ 方向）の動水勾配 i_{n1} は，次のように表される。

$$i_{n1} = \cos\theta \cdot i_x$$

したがって, i_{n1} によって管方向に生じる流量 Q_{n1} は, (2.1)式を用いて,

$$Q_{n1} = A \cdot i_{n1} = A\cos\theta \cdot i_x \qquad (2.2)$$

となる。Q_{n1} は, x 方向と z 方向の成分に分けることができ,

$$\left.\begin{aligned} Q_{x1} &= Q_{n1}\cos\theta = A\cos^2\theta \cdot i_x \\ Q_{z1} &= Q_{n1}\sin\theta = A\cos\theta\sin\theta \cdot i_x \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

となる。

(2) i_z のみが存在する場合（$i_x = 0, i_z \neq 0$）

前述(1)と同様にして, i_z のみが存在するときの管方向の動水勾配 i_{n2} は,

$$i_{n2} = \sin\theta \cdot i_z$$

となり，これによって管方向に生じる流量 Q_{n2} は, (2.1)式を用いて,

$$Q_{n2} = A \cdot i_{n2} = A\sin\theta \cdot i_z \qquad (2.4)$$

となる。Q_{n2} の x 方向及び z 方向の成分 Q_{x2} 及び Q_{z2} は,

$$\left.\begin{aligned} Q_{x2} &= Q_{n2}\cos\theta = A\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot i_z \\ Q_{z2} &= Q_{n2}\sin\theta = A\sin^2\theta\cdot i_z \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

となる。

(2.3), (2.5)式からわかるように, i_x によって x 方向の流れのみならず z 方向の流れが生じ, i_z によって z 方向の流れのみならず x 方向の流れが生じる。注目すべき点は Q_{z1} と Q_{x2} の係数($A\sin\theta\cdot\cos\theta$)が等しいことである。

(3) i_x と i_z が同時に存在する場合 ($i_x \neq 0, i_z \neq 0$)

次に, i_x と i_z が同時に存在する場合について考える。x, z 方向の流量 Q_x , Q_z は, それぞれ, i_x, i_z による x 方向の流量 Q_{x1} と Q_{x2}, 及び, z 方向の流量 Q_{z1} と Q_{z2} を足し合わせることによって得られ, (2.3)式及び(2.5)式から,

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= Q_{x1} + Q_{x2} = A\cos^2\theta\cdot i_x + A\sin\theta\cos\theta\cdot i_z \\ Q_z &= Q_{z1} + Q_{z2} = A\sin\theta\cos\theta\cdot i_x + A\sin^2\theta\cdot i_z \end{aligned}\right\},$$

となり, マトリックス表示すると,

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A\cos^2\theta & A\sin\theta\cos\theta \\ A\sin\theta\cos\theta & A\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = [D'] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

となる。ここに,

$$[D'] = \begin{bmatrix} A\cos^2\theta & A\sin\theta\cos\theta \\ A\sin\theta\cos\theta & A\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

である。透水性を表すマトリックス[D']は対称となる。

2.2 $x-z$ 平面内の二次元浸透流

二次元地盤内に単位の微小要素 $dx \times dz$ (= 1 × 1)を考え, その中の水みちについて考える(Fig.2.2)。前節 2.1 の管水路中の水流と同じように, 粘性流の場合には, x 方向と θ_j の角度をなす方向の水みち中を流れる流量 dq_{nj} が水みち方向の動水勾配 i_{nj} に比例すると考えると,

$$dq_{nj} = A_j \cdot i_{nj} \tag{2.7}$$

となる。ここに, A_j は j 方向の水みちの透水性を表す係数(定数)である。2.1 節と同様にして, x, z 方向の動水勾配 i_x, i_z が存在する場合の, x, z 方向の流量 dq_{xj}, dq_{zj} は,

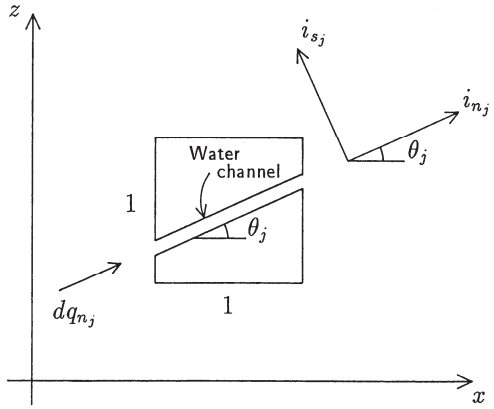


Fig.2.2　二次元地盤内の水みち中の水の流れ

$$\begin{Bmatrix} dq_{xj} \\ dq_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_j\cos^2\theta_j & A_j\sin\theta_j\cos\theta_j \\ A_j\sin\theta_j\cos\theta_j & A_j\sin^2\theta_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = [D_j''] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

となる。 x, z 方向の流量 q_x, q_z は要素内のすべての水みち $j = 1, 2, \cdots\cdots, N$ について考え足し合わせることによって得られ,

$$q_x = dq_{x1} + dq_{x2} + \cdots\cdots + dq_{xN} = \sum_{j=1}^{N} dq_{xj}$$

$$q_z = dq_{z1} + dq_{z2} + \cdots\cdots + dq_{zN} = \sum_{j=1}^{N} dq_{zj}$$

となる。ここでは，単位の微小要素 $dx \times dz$ $(= 1 \times 1)$ を考えているので，q_x, q_z は x，及び，z 方向の流量流速 v_x, v_z と等しくなり，

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{N} dq_{xj} \\ \sum_{j=1}^{N} dq_{zj} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{N} \left[D_j'' \right] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N} A_j \cos^2\theta_j & \sum_{j=1}^{N} A_j \sin\theta_j \cos\theta_j \\ \sum_{j=1}^{N} A_j \sin\theta_j \cos\theta_j & \sum_{j=1}^{N} A_j \sin^2\theta_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

となる。ここで，

$$\left.\begin{aligned} k_{xx} &= \sum_{j=1}^{N} A_j \cos^2\theta_j \\ k_{zx} &= k_{xz} = \sum_{j=1}^{N} A_j \sin\theta_j \cdot \cos\theta_j \\ k_{zz} &= \sum_{j=1}^{N} A_j \sin^2\theta_j \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

とおくと，

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \left[D \right] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

となる。ここに，

$$\left[D \right] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

である。このようにして，透水性を表すマトリックス$[D]$は対称となる。

実際には，水みちは単に直線ではなく曲線であったり，入り組んでいたりするものと考えられる。この場合も微小領域について考えると上述の考え方が成り立ちマトリックス$[D]$の対称性が成り立つものと考えられる。一般的に，透水係数テンソルは対称であると考えられている[2)]。著者らも k_{ij} を対称テンソルであると考え以下の議論を進める。

異方透水性地盤の浸透流において注意すべきことは，(2.11)式からわかるように，一般的に i_x の存在によって x 方向の浸透流のみならず z 方向の浸透流が生じ，i_z の存在によって z 方向の浸透流のみならず x 方向の浸透流が生じることである。ここで，たとえば i_x の存在によって z 方向の浸透流を生じさせる透水係数成分 k_{xz} を透水係数テンソルの誘導成分と呼ぶことにする。

(2.10)式で表される透水係数テンソルの成分は，水みちの配置，すなわち水みちの方向 θ_j と水みちの透水性を表す係数 A_j の特性によって次に示すような値をとる。

(1) ランダム配置の水みちがある場合

水みちがランダムに配置されているとき，すなわち水みちの方向 θ_j と水みちの透水性を表す係数 A_j がランダムであるとき，$\cos\theta_j$ と $\sin\theta_j$ が本質的に同じものであることを考慮すると，

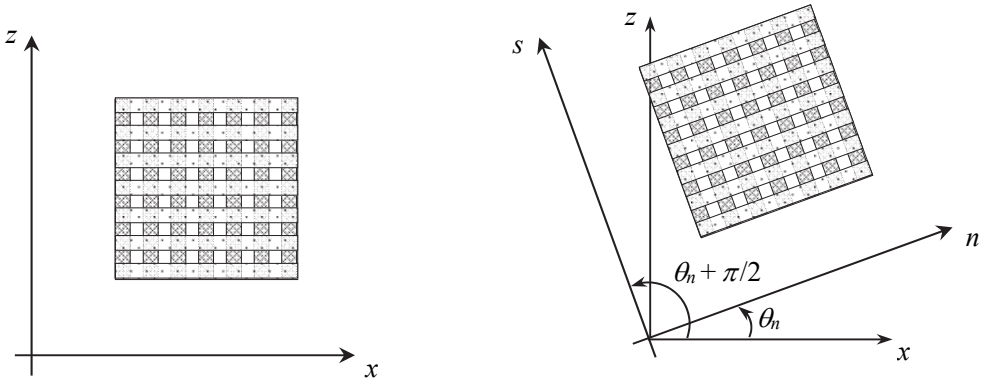
$$\sum_{j=1}^{N} A_j \sin\theta_j \cos\theta_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} A_j \cos^2\theta_j = \sum_{j=1}^{N} A_j \cos^2\theta_j = k$$

となる。このとき，透水係数テンソル[D]は,

$$[D] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

と表される。



(a) 特性の異なる水みちが x, z 軸方向にある場合

(b) 特性の異なる水みちが x, z 軸方向から反時計回りに θ_n 傾いた方向にある場合

Fig.2.3　水みちの配置

(2) 特性の異なる 2 種類の水みちが直角座標系 x, z 軸方向にある場合

Fig.2.3(a)に示すように，特性の異なる 2 種類の水みちが直角座標系において x 軸と z 軸の方向に卓越して存在するとき，たとえば x 軸方向から反時計回りに $\theta_j = 0°$ 及び 90°の方向の水みちが存在し, A_j の値が x, z 方向で本質的に異なるとき,

$$\sum_{j=1}^{N} A_j \sin\theta_j \cos\theta_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} A_j \cos^2\theta_j = k_{xx}$$

$$\sum_{j=1}^{N} A_j \sin^2\theta_j = k_{zz}$$

となり，透水係数テンソル[D]は,

$$[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{zz} \end{bmatrix}$$

と表される。

(3) 特性の異なる 2 種類の水みちが直角座標系 x, z 軸から傾いた方向にある場合

Fig.2.3(b)に示すように，(2) で考えたと同様に，特性の異なる 2 種類の水みちが x, z 軸方向から反時計回りに θ_n だけ傾いた方向に卓越して存在するとき，すなわち x 軸方向から反時計回りに $\theta_j = \theta_n$ 及び $\theta_n + \pi/2$ の 2 方向の水みちが存在し, A_j の値がそれらの方向で本質的に異なるとき,

$$\sum_{j=1}^{N} A_j \sin\theta_j \cos\theta_j = k_{zx} = k_{xz}$$

$$\sum_{j=1}^{N} A_j \cos^2 \theta_j = k_{xx}$$

$$\sum_{j=1}^{N} A_j \sin^2 \theta_j = k_{zz}$$

となり，透水係数テンソル[D]は,

$$[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

と表される。

ここでの議論は，2.1 節から，① 基質の部分と一方向に卓越する水みちがあるだけでも，また，後述の5.5節から，② 特性の異なる2種類の水みちが直交していなくても，あてはまるといえる。さらに，ここでの議論は，流量が動水勾配に比例すれば(すなわち $Q(v) \propto i_n$ であれば)成り立つという点からみて，平行平板間(クラック中)の水の流れの場合にも成り立つことがわかる(1.2.4項参照)。

参考文献

1) Lamb, H.(1932): Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge University Press.

2) Bear, J.(1972): Dynamics of Fluids in Porous Media, Elsevier.

第３章　点における透水係数テンソル

異方透水性地盤の浸透流に関して，拡張されたダルシー則は $x-z$ 座標系において, (2.11)式のように表される [1)]。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \qquad (2.11)$$

ここで, $x-z$ 座標系を反時計まわりに θ だけ回転した座標系 $n-s$ を考える(Fig.3.1)。$x-z$ 座標系における流量流速$\{v_x,\ v_z\}^T$はベクトルであり $n-s$ 座標系に変換すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \qquad (3.1)$$

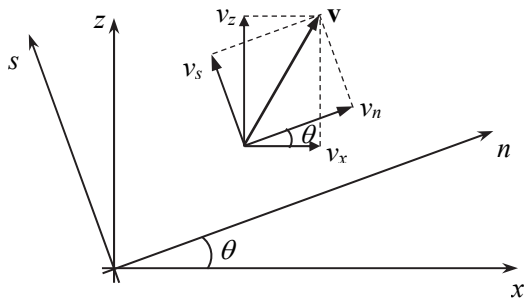


Fig.3.1 流量流速ベクトルの座標変換

同様にして, $x-z$ 座標系における動水勾配$\{i_x,\ i_z\}^T$もベクトルであり, $n-s$ 座標系における動水勾配ベクトル$\{i_n,\ i_s\}^T$と,

$$\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_n \\ i_s \end{Bmatrix} \qquad (3.2)$$

の関係にある。(2.11), (3.1), (3.2)式から,

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_n \\ i_s \end{Bmatrix} \qquad (3.3)$$

を得る。$n-s$ 座標系においても拡張されたダルシー則が成り立つものとすると, (2.11)式から類推して, $\{v_n, v_s\}^T$と$\{i_n, i_s\}^T$の間に次の関係が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & k_{sn} \\ k_{ns} & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_n \\ i_s \end{Bmatrix} \qquad (3.4)$$

したがって, (3.3), (3.4)式から，次の関係式

$$\begin{bmatrix} k_{nn} & k_{sn} \\ k_{ns} & k_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

すなわち,

$$\left.\begin{aligned} k_{nn} &= k_{xx}\cos^2\theta + (k_{xz}+k_{zx})\sin\theta\cos\theta + k_{zz}\sin^2\theta \\ k_{sn} &= k_{zx}\cos^2\theta - k_{xz}\sin^2\theta - (k_{xx}-k_{zz})\sin\theta\cos\theta \\ k_{ns} &= -k_{zx}\sin^2\theta + k_{xz}\cos^2\theta - (k_{xx}-k_{zz})\sin\theta\cos\theta \\ k_{ss} &= k_{xx}\sin^2\theta - (k_{xz}+k_{zx})\sin\theta\cos\theta + k_{zz}\cos^2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (3.6a)$$

を得る。(3.5)式の変換式の形から透水係数は二階のテンソルであることがわかる [2)]。透水係数が対称である場合, $k_{zx}=k_{xz}$ であるので, (3.6a)式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} k_{nn} &= k_{xx}\cos^2\theta + 2k_{xz}\sin\theta\cos\theta + k_{zz}\sin^2\theta \\ \left.\begin{matrix} k_{sn} \\ k_{ns} \end{matrix}\right\} &= k_{xz}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (k_{xx}-k_{zz})\sin\theta\cos\theta \\ k_{ss} &= k_{xx}\sin^2\theta - 2k_{xz}\sin\theta\cos\theta + k_{zz}\cos^2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (3.6b)$$

(3.6b)式からわかるように，ある方向において透水係数テンソルの誘導成分 $k_{ns}=k_{sn}$ が 0 となる。この方向をβとすると, β は(3.6b)式において,

$$k_{ns} = k_{sn} = k_{xz}(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - (k_{xx}-k_{zz})\sin\beta\cos\beta = 0$$

とおくことによって得られ,

$$\tan 2\beta = \frac{2k_{xz}}{k_{xx} - k_{zz}} \tag{3.7a}$$

または,

$$\beta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2k_{xz}}{k_{xx} - k_{zz}},\ \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2k_{xz}}{k_{xx} - k_{zz}} + \frac{\pi}{2} \tag{3.7b}$$

となる。(3.7a)または(3.7b)式から透水係数テンソルの誘導成分 $k_{ns} = k_{sn}$ が 0 となる方向は 2 つあり直交することがわかる。これらの方向を透水係数の主方向と呼び, その方向の透水係数を主透水係数と呼ぶ。2 つの主透水係数は大きい方のものを最大主透水係数, 小さい方のものを最小主透水係数と呼ぶ。最大及び最小主透水係数の大きさと方向は, **5. 3 節**に示す方法を用いて解析的に求めることができる。

いまここで, X, Z 方向が主方向である場合を考えると,

$$k_{XZ} = k_{ZX} = 0 \tag{3.8}$$

となり,

$$\begin{Bmatrix} v_X \\ v_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{XX} & 0 \\ 0 & k_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_X \\ i_Z \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

または,

$$\left.\begin{aligned} v_X &= k_{XX} i_X \\ v_Z &= k_{ZZ} i_Z \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

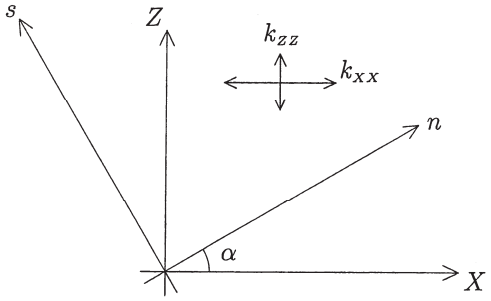
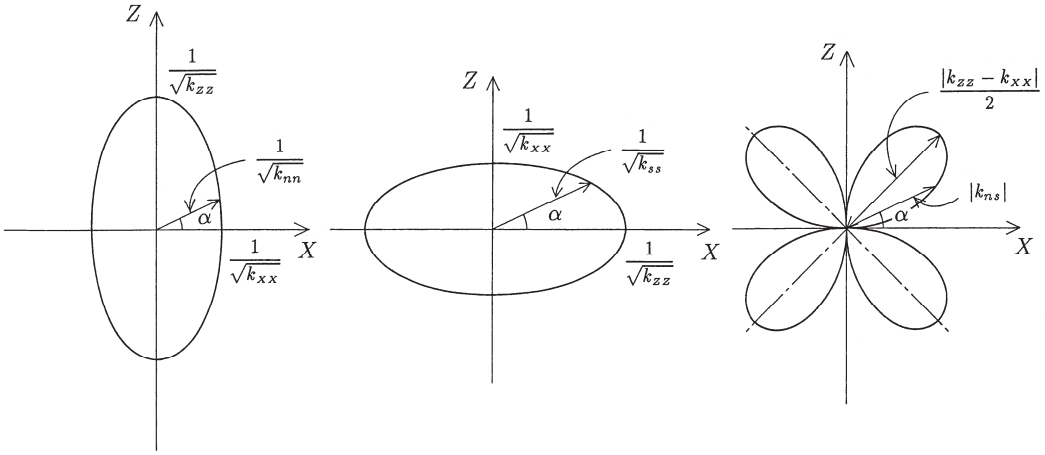


Fig.3.2　座標変換（X, Z が主方向）



(a) k_{nn} の値　　(b) k_{ss} の値　　(c) $|k_{ns}|$ の値

Fig.3.3　各方向に対応する k_{nn}, k_{ss}, 及び, $|k_{ns}|$ の値

となる。この場合, $X-Z$ 座標を反時計まわりに α だけ回転した $n-s$ 座標系(Fig.3.2)に関して, 透水係数テンソルの各成分は(3.6b)式から次のように表される。

$$\left.\begin{aligned} k_{nn} &= k_{XX}\cos^2\alpha + k_{ZZ}\sin^2\alpha \\ \left.\begin{matrix} k_{sn} \\ k_{ns} \end{matrix}\right\} &= -(k_{XX} - k_{ZZ})\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{k_{XX} - k_{ZZ}}{2}\sin 2\alpha \\ k_{ss} &= k_{XX}\sin^2\alpha + k_{ZZ}\cos^2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

k_{nn}, k_{ss}, $|k_{ns}|$の分布を $X-Z$ 面上で描くと Fig.3.3 のようになる。

Fig.3.3(a)においてα 方向の動径$1/\sqrt{k_{nn}}$は$n-s$座標系における k_{nn} の値(k_{nn} のα 方向の値)の平方根の逆数を表し, Fig.3.3(b)においてα 方向の動径$1/\sqrt{k_{ss}}$は$n-s$座標系における k_{ss} の値(k_{ss} の$\alpha+\pi/2$ 方向の値)の平方根の逆数を表している。k_{nn} と k_{ss} の値を同時に表すと(いずれも平方根の逆数で表すと), Fig.3.4 のようになる。

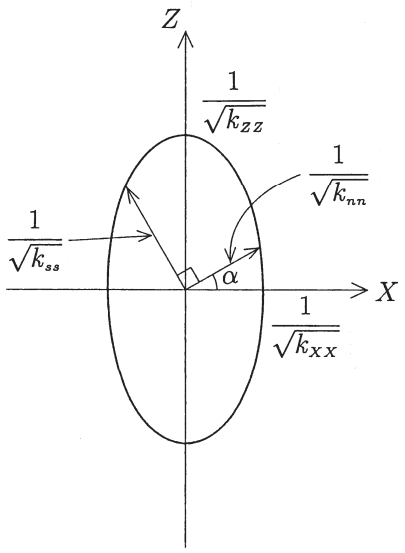


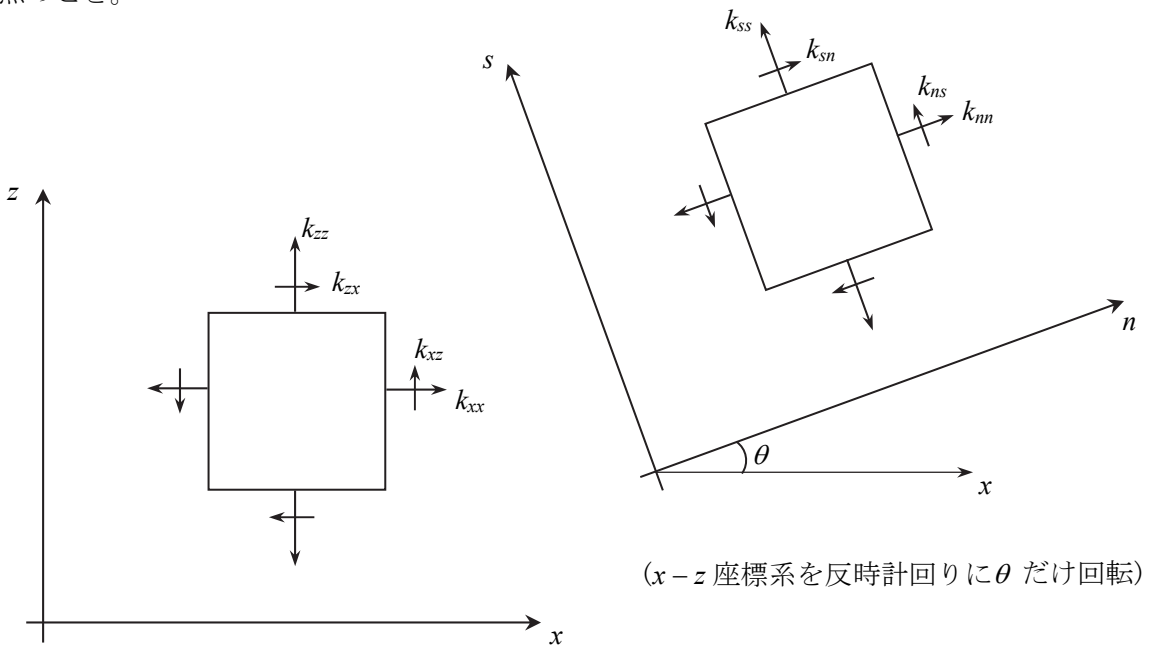
Fig.3.4　k_{nn} と k_{ss} を同時に示す場合

参考文献

1) Derski, W. et al. (1989): Rock and Soil Mechanics, Elsevier.
2) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (1970): Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill (1st ed. 1934).

第４章　透水係数テンソル成分の正方向

一般的に考えると，透水係数はテンソルであるが，各成分の正の方向を便宜上 Fig.4.1 のように表すことにする。透水係数の成分を k_{ij} $(i, j = x, z)$ としたとき，最初のサフィックス i は関係する面の法線方向（外向きを正とする）を表し，動水勾配が作用する方向を表すものとする。２番目のサフィックス j は流れの方向を表すものとする。例えば，対角成分 k_{xx} は（+ x）の面では外向きに立てた法線方向（+ x）に単位動水勾配が作用したときに（+ x）方向に生じる流量流速を表す。（– x）の面では外向きに立てた法線方向（– x）に単位動水勾配が作用したときに（– x）方向に生じる流量流速を表す。k_{zz} についても同様である。非対角成分 k_{xz} は，（+ x）の面では外向きに立てた法線方向（+ x）に単位動水勾配が作用したときに（+ z）方向に誘起されて生じる流速を表す。（– x）面では，外向きに立てた法線方向（– x）に単位動水勾配が作用したときに（– z）方向に誘起されて生じる流速を表す。k_{zx} についても同様である。ここで，＜x, z 座標系における透水係数テンソルの正方向（Fig.4.1(a)参照）に関する，方向と面（及び面の法線方向）の表し方＞については，本章末の**備考**を参照のこと。



(a) $x - z$ 座標系　　(b) $n - s$ 座標系

Fig.4.1 透水係数テンソル成分の正方向

Fig.4.1 は二次元地盤における透水係数テンソル成分の正方向を表している。上述の規則をまとめると次のように表すことができる。

関係する面の法線方向外向きに単位動水勾配が作用したときに，その方向が座標軸の正方向と一致するときには 座標軸の正方向に流れが生じる場合を透水係数テンソル成分の正方向とし，その方向が座標軸の負方向と一致するときには座標軸の負方向に流れが生じる場合を透水係数テンソル成分の正方向とする。この規則に従えば，Fig.4.1(a)のようにとった座標系において，矩形要素の右側及び上側の面に関係するすべての透水係数成分の正方向は座標軸の正方向と一致し，要素の左側及び下側の面に関係する透水係数成分の正方向はすべて逆転することになる。

この規則について，さらに詳しく説明すると次のようになる

連続体力学の分野では，応力成分の正方向の定義には 2 つの系列（第Ⅰ系列と第Ⅱ系列）が存在するが（**付録３**参照）[1) 2)]，浸透流理論における，透水係数テンソル（材料定数）に関しては，便宜上第Ⅰ系列（弾性体力学）の定義を用いる。すなわち，透水係数テンソルの場合，対角成分 k_{xx}, k_{zz} については正値のみとし，非対角成分 k_{xz}, k_{zx} については，弾性体力学のせん断応力成分と同じように表す[1)]。例えば, Fig.4.1(a)における微小要素の右側の面（$(+x)$ 面）について記述すると，単位の動水勾配 i_x が x 軸の正方向に作用したときに，誘導浸透流が z 方向の正の向きに生じる場合 k_{zx} は正の値となり，負の向きに生じる場合 k_{zx} は負の値となる。透水係数の非対角成分には，弾性体力学のせん断応力のような物理学的な意味はないが，作用する動水勾配の方向と発生する流れの方向に関する数学的な意味がある。

備考

＜x, z 座標系における透水係数テンソルの正方向（Fig.4.1(a)参照）に関する，方向と面（及び面の法線方向）の表し方＞

四角形要素の各辺において，例えば x 軸方向については，

$(+x)$ 方向 ・・・ x 軸の正方向

$(+x)$ 面 ・・・ 外向きに立てた法線方向が x 軸の正方向と一致する面

外向きに立てた法線方向 $(+x)$ ・・・ 外向きに立てた法線方向が x 軸の正方向と一致する方向を表す。また，$(-x)$ 方向，$(-x)$ 面，外向きに立てた法線方向 $(-x)$ についても同様である。同様に，z 軸方向についても定義される。

付録３　応力成分の正方向の定義　－第Ⅰ系列と第Ⅱ系列－

参考文献

1) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (1970): Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill (1st ed. 1934).

2) Atkinson, J.H. & Bransby, P.L. (1978): The Mechanics of Soils, McGraw-Hill, London.

第５章　透水係数テンソルのモール円

5.1 モール円

まず，透水係数テンソルのモール円について考える。(3.6b)式において k_{nn}, k_{ns} に関する式を整理し直すと次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} k_{nn} &= k_{xx}\frac{1+\cos 2\theta}{2} + k_{zz}\frac{1-\cos 2\theta}{2} + k_{xz}\sin 2\theta \\ k_{ns} &= k_{xz}\cos 2\theta + \frac{k_{zz}-k_{xx}}{2}\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

(5.1)式より θ を消去すると次の式が得られる。

$$\left(k_{nn} - \frac{k_{xx}+k_{zz}}{2}\right)^2 + k_{ns}{}^2 = \left(\frac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2 + k_{xz}{}^2 \tag{5.2}$$

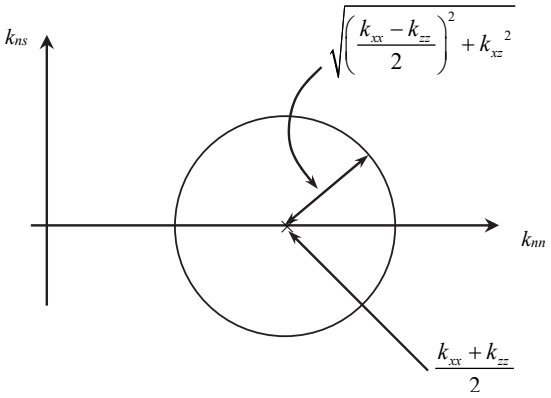


Fig.5.1　透水係数テンソルのモール円

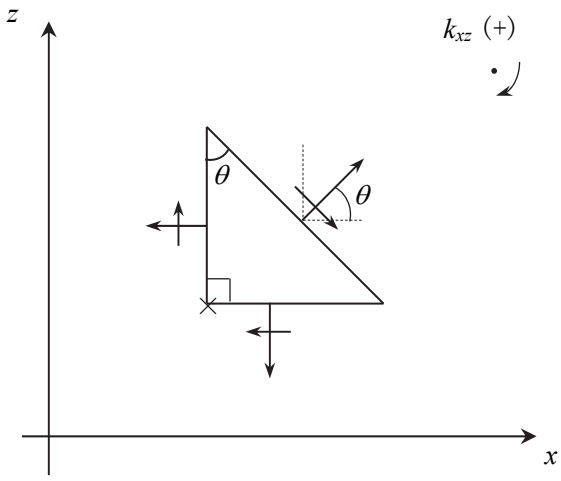


Fig.5.2　モール円における正方向

(5.2)式は円の方程式を表す。(5.2)式で表される円は，連続体力学におけるモールの応力円[1]に対応するものであり，透水係数テンソルのモール円（Mohr's circle of permeability tensor）と呼ばれる。図示すると Fig.5.1 のようになる。

$x-z$ 座標系のある点における透水係数マトリックスを，

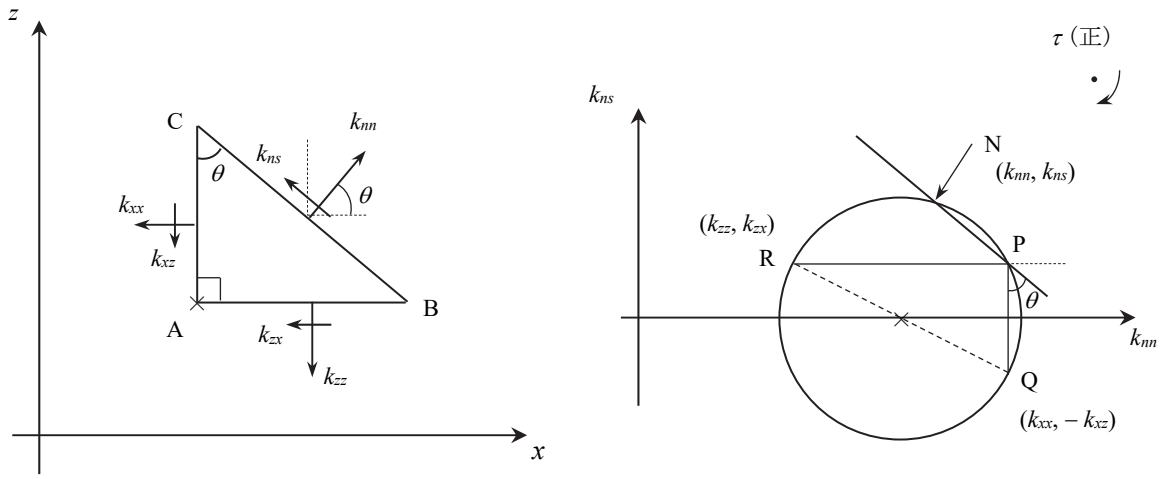
$$[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

としたとき，$x-z$ 座標系を反時計まわりに θ だけ回転した $n-s$ 座標系に関する透水係数の値（k_{nn}, k_{ns}）は Fig.5.1 の円上の点で表される。

透水係数のモール円を描く場合に限り，連続体力学においてモールの応力円を描く場合[1]と同じように，透水係数テンソルの非対角成分（または，誘導成分）k_{zx} 及び k_{xz} は時計回りの方向のものを正，反時計回りの方向のものを負とする（Fig.5.2）。

5.2 モール円の極

モール円からいろいろな座標系に関する透水係数成分を計算する方法について考える。その方法にはいくつかあるが，ここでは用極法（Pole method）[1)2)]を用いる。Fig.5.3(a)に示す透水係数成分について，AC 面に関する透水係数成分（k_{xx}, $-k_{xz}$）を，モール円上にプロットしこの点を Q とする



(a) 透水係数の成分　　(b) モール円

Fig.5.3　モール円の極

(Fig.5.3(b)参照)。ここでは, $k_{xx} > k_{zz}$ の場合を表している。点 Q をプロットする場合, 透水係数の非対角成分 k_{xz} (反時計回り)はモール円上で負となる。次に, 点 Q より AC 面に平行な直線を引き, この直線と円との交点を P とする(Fig.5.3(b))。この点をモール円の極(Pole)と呼ぶ。モール円の極は, 同様にして, AB 面に関する透水係数成分(k_{zz}, k_{zx})をモール円上にプロットし点 R としたとき, この点より AB 面に平行な直線を引き, この直線と円との交点 P として求めることもできる。点 R をプロットする場合, 透水係数の非対角成分 k_{zx} (時計回り)はモール円上で正となる。

極の性質は次のように表すことができる。

モール円上において, 極 P より任意の直線を引いたとき, その直線と交わる円上の点の座標は, その直線と平行な面に関係する透水係数の成分を表す。

例えば, Fig.5.3(b)において極 P から Fig.5.3(a)の BC に平行な直線を引き, モール円と交わる点を N とすると, 点 N の座標(k_{nn}, k_{ns})は BC 面に関する透水係数成分を表す。上述のようにして, 極は, 通常, その性質を逆に用いて, 求めることができる。

5.3 透水係数テンソルの主値

(1) 透水係数テンソルの主値の求め方（その１）

＜最大・最小主透水係数の求め方＞

ある点における透水係数テンソルの成分はモール円上の点で表される。例えば, Fig.5.4(b)は Fig.5.4(a)の透水係数テンソルのモール円を表す。モール円の形状(Fig.5.4(b))からわかるように, 非対角成分すなわち誘導成分($k_{ns} = k_{sn}$)が 0 となる点が 2 つ存在する。また, そのとき, 透水係数(対角成分)は最大値および最小値をとる。この 2 つの透水係数をそれぞれ最大, 最小主透水係数と呼ぶ。次に, この大きさとその方向を求める。

最大, 最小主透水係数の大きさ k_1, k_3 は, Fig.5.4(b)から容易に求められ, それぞれ,

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{k_{xx}+k_{zz}}{2} + \sqrt{\left(\frac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2 + k_{xz}^2} \\ k_3 &= \frac{k_{xx}+k_{zz}}{2} - \sqrt{\left(\frac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2 + k_{xz}^2} \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

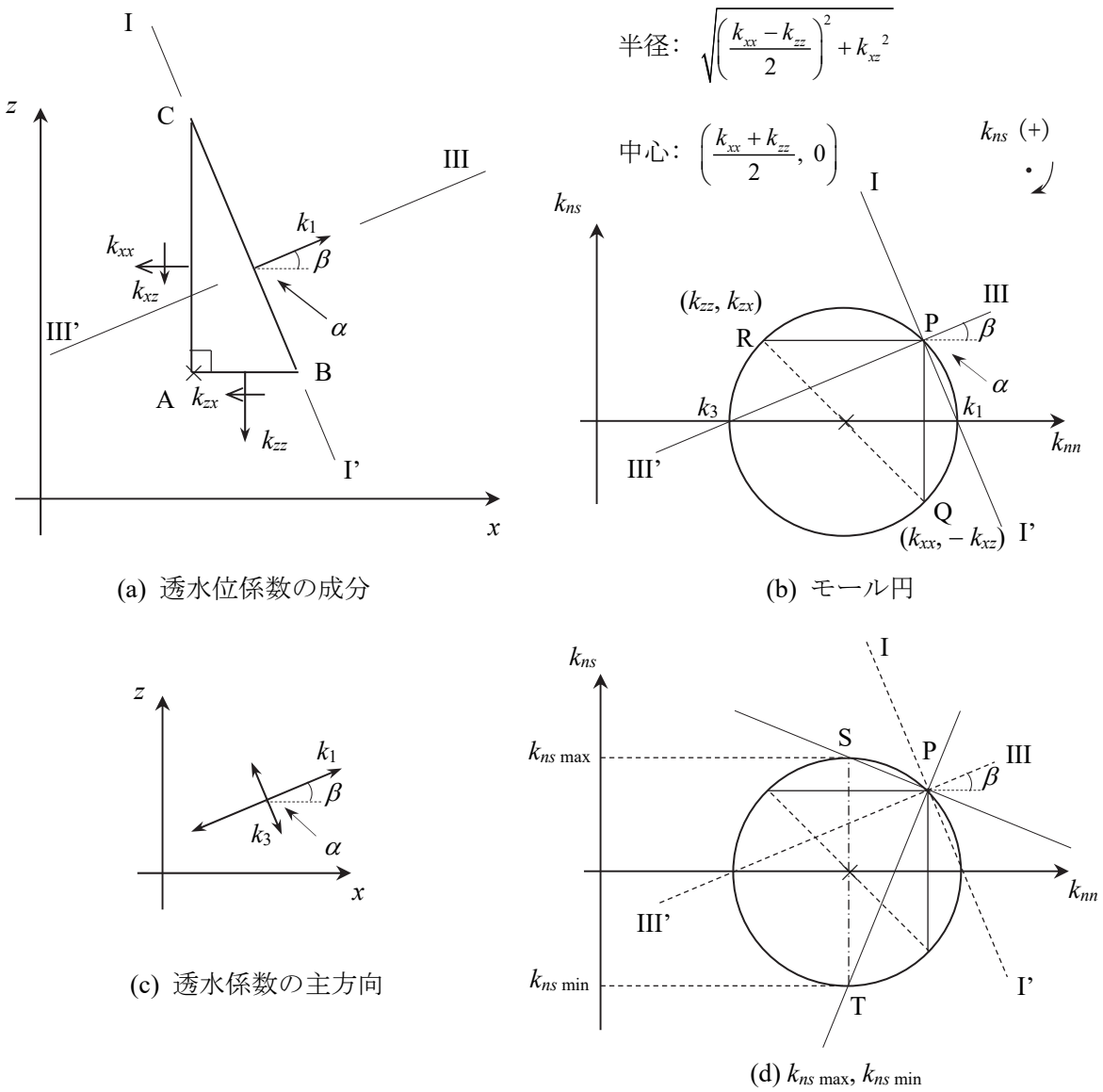


Fig.5.4 最大, 最小主透水係数の大きさと方向

となる。Fig.5.4(b)において, 極 P から極値 (k_1, 0) 及び (k_3, 0)に至る線 I-I' 及び III-III'を引く。Pole の定義から, I-I'及び III-III'線は k_1, k_3 が起こる面に対応している。最大・最小主透水係数の方向は, (それらが生じる面に垂直な方向であるので), それぞれの面に垂直な III-III' 及び I-I'の方向と一致する。このようにして, 最大・最小主透水係数の方向が, 水平線 AB となす角をそれぞれ β 及び α とすると, それらの値は Fig.5.4(b)から次のように求めることができる。

$$\tan\alpha = \frac{k_{xz}}{k_1 - k_{xx}} = \frac{k_{xz}}{k_{zz} - k_3} \tag{5.5}$$

$$\tan\beta = \frac{k_{xz}}{k_{xx} - k_3} = \frac{k_{xz}}{k_1 - k_{zz}} \tag{5.6}$$

主透水係数の方向が Fig.5.4(c)に示されている。最大主透水係数 k_1 は水平線より反時計回りにβ (鉛直線より時計回りに α)の角度の方向にあり, 最小主透水係数 k_3 はそれと直交する方向にある。または, 最小主透水係数は水平線より時計回りにα の角度の方向にあるということもできる。

＜誘導透水係数成分の最大・最小値の求め方＞

次に，Fig.5.4(d)において，極 P から透水係数テンソルの非対角成分の極値 $k_{ns\ \max}$ 及び $k_{ns\ \min}$ に対応する点 S と T に至る線 PS と PT を引く。Fig.5.4(d)からわかるように，誘導透水係数成分 k_{ns} (= k_{sn}) の最大，最小値は，主方向を表す面 I - I', III - III' と 45°の方向の面で生じ，その大きさ $k_{ns\max}$ 及び $k_{ns\min}$ は，

$$\left.\begin{aligned} k_{ns\max} &= \sqrt{\left(\frac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2 + k_{xz}{}^2} \\ k_{ns\min} &= -\sqrt{\left(\frac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2 + k_{xz}{}^2} \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

となる。

[例題 5.1]

< Problem >

$x-z$ 座標系においてある点の透水係数テンソルの成分を，

$$\begin{cases} k_{xx} = 4.0\times10^{-2}\ \text{cm/s} \\ k_{zz} = 2.0\times10^{-2}\ \text{cm/s} \\ k_{xz} = 1.0\times10^{-2}\ \text{cm/s} \end{cases}$$

とする。このとき，$x-z$ 座標系を反時計回りに 60°だけ回転した座標系 $n-s$ における透水係数テンソルの成分を求めなさい。また，主透水係数の大きさと方向を求めなさい。

< Answer >

(i) 計算による方法

$x-z$ 座標系から反時計回りに 60° 回転した $n-s$ 座標系に関する透水係数成分 k_{nn}, k_{ss}, k_{ns} は，(3.6b)式から次のように求められる。

$$\begin{aligned} k_{nn} &= 4\cos^2 60° + 2\times1\sin 60°\cos 60° + 2\sin^2 60°\ \ (\times10^{-2}\,\text{m/s}) \\ &= 3.366\ \ (\times10^{-4}\,\text{m/s}) \\ k_{ss} &= 4\sin^2 60° - 2\times1\sin 60°\cos 60° + 2\cos^2 60°\ \ (\times10^{-2}\,\text{m/s}) \\ &= 2.634\ \ (\times10^{-4}\,\text{m/s}) \\ k_{ns} &= 1\times(\cos^2 60° - \sin^2 60°) - (4-2)\times\sin 60°\cos 60°\ \ (\times10^{-2}\,\text{m/s}) \\ &= -1.366\ \ (\times10^{-2}\,\text{m/s}) \end{aligned}$$

また，最大，最小主透水係数の大きさ及び方向は(5.4)式及び(5.5), (5.6)式から，

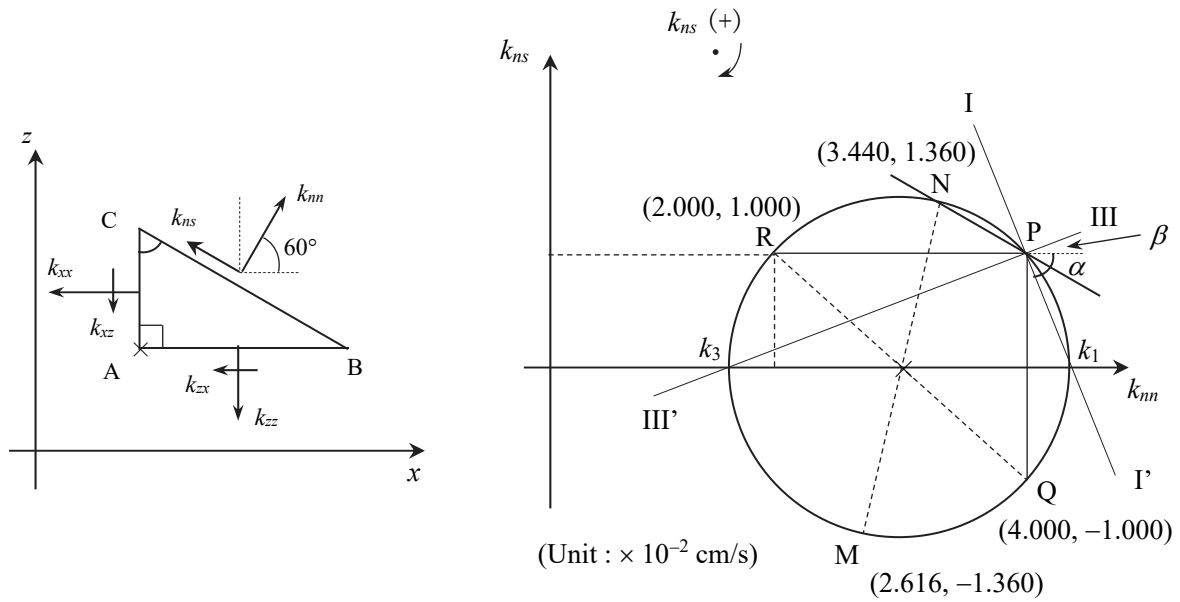
$$k_1, k_3 = \frac{4+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4-2}{2}\right)^2 + 1^2} = 3\pm\sqrt{2} = 4.4142, 1.5858\ \ (\times10^{-2}\,\text{m/s})$$

$$\tan\beta = \frac{1}{3+\sqrt{2}-2} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 0.41421$$

$\therefore\ \beta = 22.5°$

$\therefore\ \alpha = 90° - \beta = 67.5°$

と求めることができる。



(a) 与えられた透水係数のテンソル成分　　(b) モール円

Fig.Ex.5.1　透水係数のテンソル成分とモール円を用いた求め方

(ii) モール円による方法

与えられた透水係数テンソル成分 Fig.Ex.5.1(a)を実際に方眼紙上にプロットすると Fig.Ex5.1(b)のようになる。直交する面に関するプロット点はモール円上で直径を構成する（中心角が 180°である）という性質を利用して，対応するモール円を描くことができる。また, Pole（極）はその性質を逆に用いて求めることができる。例えば, Fig.Ex.5.1(b)において, AC 面に関する透水係数成分(k_{xx}, $-k_{xz}$) = (4.000, –1.000) ×10^{-2}cm/s を表す点 Q から AC 面に平行な直線を引きモール円と交わる点 P が極となる。点 Q をプロットする場合，透水係数の非対角成分 k_{xz}（反時計回り）はモール円上で負となる。モール円の極は，同様にして, AB 面に関する透水係数成分(k_{zz}, k_{zx}) = (2.000, 1.000) ×10^{-2}cm/s をモール円上にプロットし点 R としたとき，この点より AB 面に平行な直線を引きこの直線と円との交点として求めることもできる。**5.2 節**で述べたように，図上で，極 P から BC に平行な直線を引きモール円と交わる点の座標を求めることによって, $x-z$ 座標系を反時計回りに θ (= 60°)だけ回転した $n-s$ 座標系におけるテンソル成分 k_{nn}, k_{ns} を求めることができ, k_{ss} は N から中心に向けて直線（直径）を引きモール円と交わる点 M の座標から求めることができる。また，同様にして，主透水係数の大きさと方向を求めることができる。一連の作業を Fig.Ex.5.1(b)に示している。

(iii) 結果の比較と考察

Table Ex.5.1 に, (i) 計算と(ii) 実際に方眼紙上にモール円を描いて図式解法で得られた結果を同時に示している。Table Ex.5.1 からわかるように，モール円を用いた図式解法によって，回転した（異なる）座標系における透水係数テンソルの成分や最大・最小主透水係数の大きさ・方向が精度よく求められる。

Table Ex.5.1 の * について，モール円上では点 N の k_{ns} は 1.360（時計回り）で正と求まるが，透水係数テンソルの定義では k_{ns}（時計回り）が負と定義される。

Table Ex.5.1　計算とモール円による計算結果比較（テンソル成分は 10^{-2}cm/s を省略）

項目	計算	モール円	相対誤差(%)
k_{nn}	3.366	3.440	+ 2.20
k_{ss}	2.634	2.616	– 0.68
k_{ns}	– 1.366	– 1.360*	– 0.44
k_1	4.414	4.440	+ 0.60
k_3	1.586	1.576	– 0.63
β	22.5°	22.2°	– 1.33
α	67.5°	67.8°	+ 0.44

付録４には，透水係数テンソルの主値や誘導透水係数成分の最大・最小値を求めるもう一つの解析的方法が示されている。以下では，対称マトリックスの固有値問題に基づく方法[3]について述べる。この方法は三次元問題にも容易に適用され大変有用である。

(2) 透水係数テンソルの主値の求め方（その２）

透水係数テンソル$[D]$が与えられたとき，主方向は流速ベクトル$\mathbf{v}$の方向が動水勾配ベクトル$\mathbf{i}$の方向と一致するという物理的な条件から導かれる。この条件は，

$$\mathbf{v} = [D]\,\mathbf{i} \,//\, \mathbf{i} \tag{5.8}$$

と表すことができる。主透水係数の大きさをλとすると，(5.8)式は，

$$[D]\,\mathbf{i} = \lambda\,\mathbf{i} \tag{5.9}$$

と表すことができる。二次元の場合について考えると，(5.9)式は，

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \lambda\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} k_{xx}-\lambda & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz}-\lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

となる。(5.10)式において，動水勾配ベクトル$\{i_x \quad i_z\}^T$が 0 ベクトル$\{0 \quad 0\}^T$以外の意味のある解をもつためには，

$$\begin{vmatrix} k_{xx}-\lambda & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.11}$$

を満たさなければならない。ここに，$\{\cdots\}^T$は転置ベクトルを表す。(5.11)式はλに関する二次方程式となり，2 つの解λ_1, λ_3 ($\lambda_1 > \lambda_3$)が得られる。大きい方の値λ_1が最大主透水係数k_1となり，小さい方の値λ_3が最小主透水係数k_3となる。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \lambda_1 \\ k_3 &= \lambda_3 \qquad (\lambda_3 < \lambda_1) \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

となる。また，これらの値を(5.10)式に代入することにより，それぞれ，動水勾配ベクトル$\{i_{x1}, i_{z1}\}^T$, $\{i_{x3}, i_{z3}\}^T$が得られる。これらのベクトルを単位ベクトルに正規化したベクトル$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$：

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{{i_{x1}}^2 + {i_{z1}}^2}}\begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{\sqrt{{i_{x3}}^2 + {i_{z3}}^2}}\begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

の方向が最大・最小主透水係数の方向，すなわち透水係数の主方向を表す。

(5.10)式を透水係数テンソル$[D]$の固有方程式と呼びその根λ_1, λ_3を固有値と呼ぶ[0]。とくに，マトリックスの成分k_{ij}が実数値で対称($k_{ij} = k_{ji}$)ならば$[D]$の固有値は実数となる。

[例題 5.1（再）]

例題 5.1 について，5.3(2)で述べた方法を用いて主透水係数の大きさと方向を求める。問題の透水係数テンソル

$$[D] = \begin{bmatrix} 4.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \qquad (\times 10^{-2}\,\mathrm{cm/s})$$

を(5.11)式に代入すると,

$$\begin{vmatrix} 4.0-\lambda & 1.0 \\ 1.0 & 2.0-\lambda \end{vmatrix} = (4.0-\lambda)\,(2.0-\lambda)-1.0 = \lambda^2-6\lambda+7=0 \qquad (\times 10^{-2}\,\mathrm{cm/s})^2$$

$$\therefore\ \lambda = 3\pm\sqrt{2} \qquad (\times 10^{-2}\,\mathrm{cm/s})$$

となり,

$$k_1=\lambda_1=3+\sqrt{2}\quad(\times 10^{-2}\,\mathrm{cm/s})=4.4142\times 10^{-2}\,\mathrm{cm/s}$$

$$k_3=\lambda_3=3-\sqrt{2}\quad(\times 10^{-2}\,\mathrm{cm/s})=1.5858\times 10^{-2}\,\mathrm{cm/s}$$

と求めることができる。

(i) $k_1=\lambda_1=3+\sqrt{2}\quad(\times 10^{-2}\,\mathrm{cm/s})$のとき

(5.10)式から,

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1.0 \\ 1.0 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_{x1} \\ i_{z1} \end{Bmatrix}=0$$

$$\therefore \begin{cases} i_{x1}=1 \\ i_{z1}=\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

となり, 最大主透水係数の方向は,

$$\mathbf{e}_1=\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{Bmatrix},$$

$$\therefore\ \tan\beta=\frac{i_{z1}}{i_{x1}}=\sqrt{2}-1$$

$$\therefore\ \beta=22.5^\circ$$

となる。

(ii) $k_3=\lambda_3=3-\sqrt{2}\quad(\times 10^{-2}\,\mathrm{cm/s})$のとき,

(5.10)式から,

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1.0 \\ 1.0 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_{x3} \\ i_{z3} \end{Bmatrix}=0$$

$$\therefore \begin{cases} i_{x3}=1 \\ i_{z3}=-\left(\sqrt{2}+1\right) \end{cases}$$

となり, 最小主透水係数の方向は,

$$\mathbf{e}_3 = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ -\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{Bmatrix}$$

$$\therefore -\tan\alpha = \frac{i_{z3}}{i_{x3}} = -\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$\therefore \alpha = 67.5°$$

となる。これらの結果は，**例題 5.1**(i)の結果と一致する。

5.4 透水係数テンソルの不変量

(5.11)式が 2 つの解 k_1, k_3 をもつものとすると，恒等的な関係式

$$\begin{vmatrix} k_{xx}-\lambda & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = (k_1-\lambda)(k_3-\lambda) \tag{5.14}$$

が成り立つ。(5.14)式は書き直すと，

$$(k_{xx}-\lambda)(k_{zz}-\lambda) - k_{zx}k_{xz} = (k_1-\lambda)(k_3-\lambda)$$

$$\therefore \lambda^2 - (k_{xx}+k_{zz})\lambda + k_{xx}k_{zz} - k_{zx}k_{xz} = \lambda^2 - (k_1+k_3)\lambda + k_1k_3 \tag{5.15}$$

となる。(5.15)式はλに関する恒等式であるので，両辺の λ に関する係数，及び，定数項をそれぞれ等値して，

$$II_1 = k_{xx} + k_{zz} = k_1 + k_3 \tag{5.16}$$

$$II_3 = k_{xx}\,k_{zz} - k_{zx}\,k_{xz} = k_1\,k_3 \tag{5.17}$$

なる有用な関係式が得られる。(5.16), (5.17)式で表される II_1, II_3 は座標系の取り方に関係しない値であり，透水係数テンソルの不変量と呼ばれる [4)]。

5.5 構造上の透水性とそれに等価な透水係数テンソル

ここでは，構造上の透水性の方向が 2 つありそれらが直交していない場合，その地盤と数学的に等価な透水係数テンソルがどのようになるかについて考える。ここでは，Fig.5.5 に示すように，構造上の透水性の方向が 2 方向ありその方向を n, s' とし，n と s' が直交していない場合について考える。ここで，n と s' がなす角度をθ_0 とする。

(1) k_{nn} による流れ

第一番目の構造上の透水性 k_{nn} の方向に関係した新しい直角座標系 $n-s$ を考える。ここで，$n-s$ 座標系は $x-z$ 座標系を反時計回りに θ だけ回転した新しい座標系である。動水勾配$\{i_x, i_z\}^T$が作用したときに，k_{nn} によって引き起こされる流速$\{v_x,\ v_z\}^T$は，(3.4)式を参照して，ベクトルの座標変換式(3.1)を用いることによって，次のようにして求めることができる。

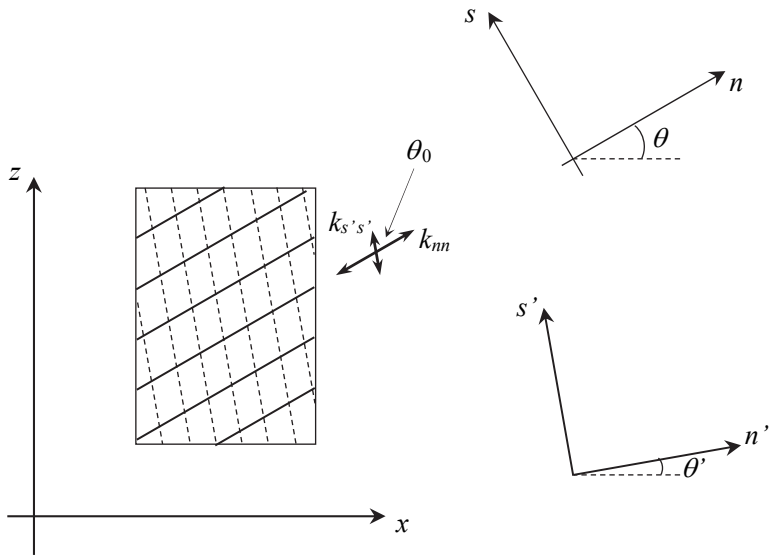
$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_n \\ i_s \end{Bmatrix} \tag{5.18}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k_{nn}\cos^2\theta & k_{nn}\sin\theta\cos\theta \\ k_{nn}\sin\theta\cos\theta & k_{nn}\sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{5.19}$$

(5.19)式は, (2.6)式と本質的に同じ形をしている。言い換えれば, (5.19)式は, 任意の$\{i_x, i_z\}^T$が作用したときに, n 方向の透水性 k_{nn} により, x, z 方向に生じる流速を表している。

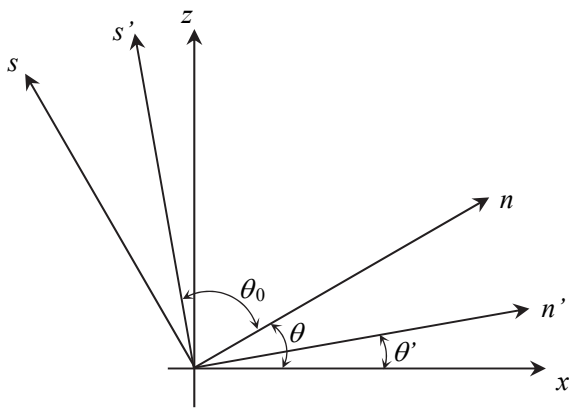


(a) 構造上の透水性 k_{nn} と $k_{s's'}$

Fig.5.5　構造上の透水性の方向が直交しない場合 (Continue)

(2) $k_{s's'}$ による流れ

もう一つの構造上の透水性 $k_{s's'}$ に関係した座標軸 s'から時計回りに 90°の方向に n' の座標をとり, 構造上の透水性の方向 s' に関係する直交座標系 $n'-s'$を考える(Fig.5.5(b)参照)。また, x 軸と n' 軸のなす角をθ' とする。ここで, $\theta'=\theta_0+\theta-\pi/2$ である。この場合, 動水勾配$\{i_x, i_z\}^T$が作用したときに, $k_{s's'}$ によって引き起こされる流速$\{v_x, v_z\}^T$ は, 前述の (1) と同様にして次のようにして求めることができる。



(b) 座標軸 $n-s$, $n'-s'$ と $x-z$ の関係

Fig.5.5　構造上の透水性の方向が直交しない場合 (Continued)

$$\begin{Bmatrix} v_{n'} \\ v_{s'} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{s's'} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_{n'} \\ i_{s'} \end{Bmatrix} \tag{5.20}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{s's'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{s's'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k_{s's'}\sin^2\theta' & -k_{s's'}\sin\theta'\cos\theta' \\ -k_{s's'}\sin\theta'\cos\theta' & k_{s's'}\cos^2\theta' \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{5.21}$$

(5.21)式は, (1) と同様に, 任意の$\{i_x, i_z\}^T$が作用したときに, s' 方向の透水性$k_{s's'}$により, x, z 方向に

生じる流速を表している。

(3) k_{nn} と $k_{s's'}$ による流れ

k_{nn} と $k_{s's'}$ による流れは(5.19), (5.21)式を重ね合わせることによって得られ次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn}\cos^2\theta + k_{s's'}\sin^2\theta' & k_{nn}\sin\theta\cos\theta - k_{s's'}\sin\theta'\cos\theta' \\ k_{nn}\sin\theta\cos\theta - k_{s's'}\sin\theta'\cos\theta' & k_{nn}\sin^2\theta + k_{s's'}\cos^2\theta' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{5.22}$$

(5.22)式からわかるように，構造上の透水性の方向が 2 方向ありそれらが直交していない場合も，それと数学的に等価な透水係数テンソルは対称となる。

(4) 数学的に等価な透水係数テンソルの主方向

k_{nn} と $k_{s's'}$ による流れと数学的に等価な地盤の透水係数テンソル k_{ij} $(i, j = x, z)$ は，(5.22)式から，$x-z$ 座標系において，

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn}\cos^2\theta + k_{s's'}\sin^2\theta' & k_{nn}\sin\theta\cos\theta - k_{s's'}\sin\theta'\cos\theta' \\ k_{nn}\sin\theta\cos\theta - k_{s's'}\sin\theta'\cos\theta' & k_{nn}\sin^2\theta + k_{s's'}\cos^2\theta' \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

と表すことができる。$\theta' = \theta_0 + \theta - \pi/2$ を(5.23)式に代入して整理すると，

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn}\cos^2\theta + k_{s's'}\cos^2(\theta_0+\theta) & k_{nn}\sin\theta\cos\theta + k_{s's'}\sin(\theta_0+\theta)\cos(\theta_0+\theta) \\ k_{nn}\sin\theta\cos\theta + k_{s's'}\sin(\theta_0+\theta)\cos(\theta_0+\theta) & k_{nn}\sin^2\theta + k_{s's'}\sin^2(\theta_0+\theta) \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

となる。(5.23)式または(5.24)式で表される透水係数テンソル（対称テンソル）の主方向β は，(3.7a)式を用いて，また，$\theta' = \theta_0 + \theta - \pi/2$ とおくことによって，

$$\tan 2\beta = \frac{2k_{xz}}{k_{xx} - k_{zz}}$$

$$= 2\frac{k_{nn}\sin\theta\cos\theta - k_{s's'}\sin\theta'\cos\theta'}{k_{nn}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + k_{s's'}(\sin^2\theta' - \cos^2\theta')} \tag{5.25a}$$

$$= \frac{k_{nn}\sin 2\theta - k_{s's'}\sin 2\theta'}{k_{nn}\cos 2\theta - k_{s's'}\cos 2\theta'} \tag{5.25b}$$

$$= \frac{k_{nn}\sin 2\theta + k_{s's'}\sin 2(\theta_0+\theta)}{k_{nn}\cos 2\theta + k_{s's'}\cos 2(\theta_0+\theta)} \tag{5.25c}$$

となる。(5.25a), (5.25b), (5.25c)式から，数学的に等価な透水係数テンソルの主方向 β は一般的に構造上の物理的な透水性の方向θ（n 方向）またはθ'（s' 方向）と一致しないことがわかる，すなわち，$\beta \neq \theta, \theta + \pi/2, \theta', \theta' + \pi/2$ である。

(5) $\theta' = \theta$ なる特殊なケース

次に，θ とθ' が等しくなるような特別な場合，すなわち構造上の透水性の2つの主方向が直交する場合について考える。このとき，$\theta' = \theta$ すなわち$\theta_0 = \pi/2$ であるので，$n' = n, s' = s$ $(s' \perp n)$ となる。したがって，(5.22)式は，

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn}\cos^2\theta + k_{ss}\sin^2\theta & (k_{nn} - k_{ss})\sin\theta\cos\theta \\ (k_{nn} - k_{ss})\sin\theta\cos\theta & k_{nn}\sin^2\theta + k_{ss}\cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{5.26}$$

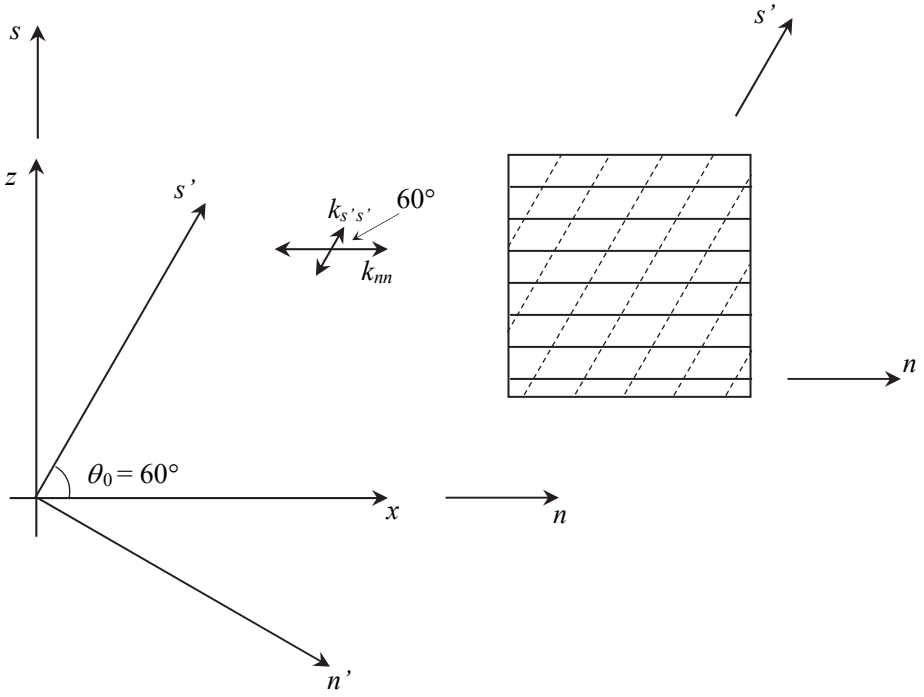
となり，x, z 軸方向に直交異方性を有する地盤に関する関係式（(3.11)式参照）と本質的に一致する。

また，このとき, (5.25a), (5.25b), (5.25c)式は,

$$\tan 2\beta = \frac{(k_{nn} - k_{ss})\sin 2\theta}{(k_{nn} - k_{ss})\cos 2\theta} = \tan 2\theta$$

$$\therefore \beta = \theta,\ \theta + \frac{\pi}{2} \tag{5.27}$$

となる。したがって，この場合,「構造上の透水性の方向」と「数学的に等価な透水係数テンソルの主方向」が一致する。また, $\theta' = \theta$ のときのみ「構造上の透水性の方向」と「数学的に等価な透水係数テンソルの主方向」が一致するといえる。



(a) 座標軸 $n' - s'$ と $x - z$ の関係

Fig.Ex.5.2　構造上の透水性とそれに数学的に等価な透水係数テンソル (Continue)

[例題 5.2]

< Problem >

θ = 0°, θ_0 = 60°の場合について考える。k_{nn} = 1.0 × 10^{-4} cm/s, $k_{s's'}$ = 0.5 × 10^{-4} cm/s とする(Fig.Ex5.2(a))。このとき,「k_{nn} と $k_{s's'}$ による流れ」に,「数学的に等価な透水係数テンソル」について，主透水係数の値と方向を求めなさい。

< Answer >

(5.24)式に与えられた条件を代入すると,

$$[D] = \begin{bmatrix} k_{nn} + k_{s's'}\cos^2\theta_0 & k_{s's'}\cos\theta_0\sin\theta_0 \\ k_{s's'}\cos\theta_0\sin\theta & k_{s's'}\sin^2\theta_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0 + 0.5\times\frac{1}{4} & 0.5\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0.5\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5\times\frac{3}{4} \end{bmatrix}\times 10^{-4}$$

$$=\begin{bmatrix} 1.125 & 0.21651 \\ 0.21651 & 0.375 \end{bmatrix}\times 10^{-4}$$

となり,

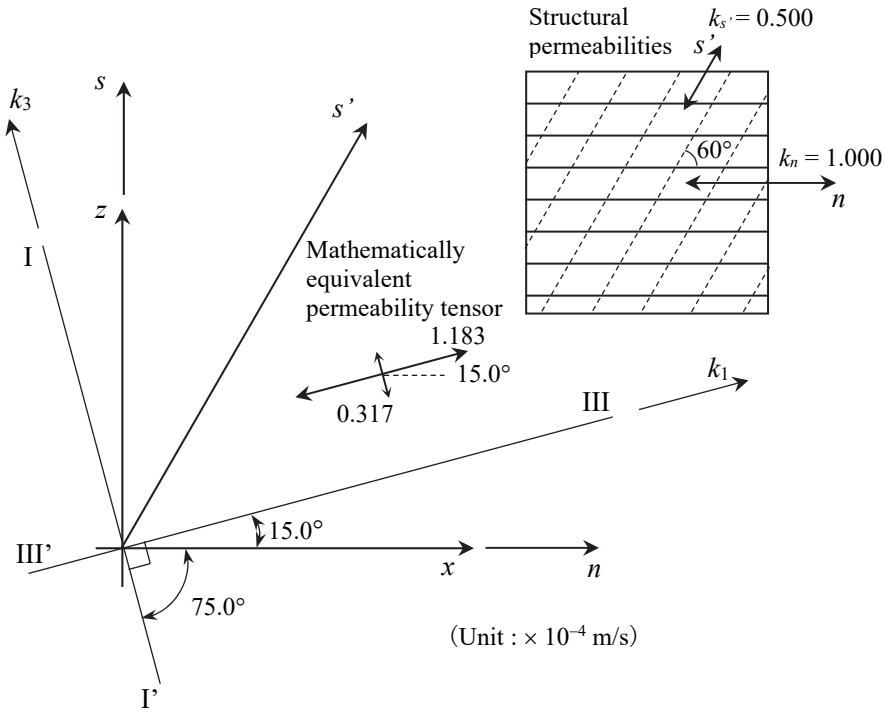
$$k_1=\frac{k_{xx}+k_{zz}}{2}+\sqrt{\left(\frac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2+k_{xz}{}^2}=1.18301\times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$$

$$k_3=\frac{k_{xx}+k_{zz}}{2}-\sqrt{\left(\frac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2+k_{xz}{}^2}=0.31699\times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$$

$$\tan\beta=\frac{k_{xz}}{k_{xx}-k_3};\quad \beta=15°$$

$$\tan\alpha=\frac{k_{xz}}{k_1-k_{xx}};\quad \alpha=75°$$

となる。したがって，問題の地盤と数学的に等価な透水係数テンソルについて，最大主透水係数の方向はx軸より反時計回りにβ (= 15°) (またはz軸より時計回りにα (= 75°)) となる (Fig.Ex.5.2(b))。すなわち，構造上の透水性の方向はθ = 0°と 60°であるのに対して，数学的に等価な透水係数テンソルの主方向は, x軸より反時計回りに, β = 15° (最大主透水係数の方向) とβ + 90° = 105° (最小主透水係数の方向) となる。このようにして，一般的に構造上の透水性 (物理的な透水性) の方向と数学的に等価な透水係数テンソルの主方向は一致しないこと，また，数学的に等価な透水係数テンソルは対称であり直交することが確かめられる。



(b) 構造上の透水性とそれに数学的に等価な透水係数テンソル－値と方向－

Fig.Ex.5.2　構造上の透水性とそれに数学的に等価な透水係数テンソル（Continued）

(6) 5.5 節まとめ

構造上の透水性の2つの方向 n, s' が直交しないとき（$n \not\perp s'$），この地盤について「構造上の透水性（k_{nn} と $k_{s's'}$）」と「数学的に等価な透水係数テンソル（(5.23)式または(5.24)式）」が定義できる。この数学的に等価な透水係数テンソルは，一般的に対称となり，**第３章**で述べたように，誘導成分（非対角成分）が 0 となる方向（主方向）が 2 つあり直交する。この透水係数の主方向は構造上の物理的な透水性の方向 n, s' とは一般的に一致しない（(5.25a)～(5.25c)式参照）。

付録４　透水係数テンソルの主値の求め方（解析的方法）

参考文献

1) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (1970): Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill (1st ed. 1934).
2) Atkinson, J.H. & Bransby, P.L. (1978): The Mechanics of Soils, McGraw-Hill, London.
3) 入江　克，入江美代子訳／ドナルド・A・マックォーリ著 (2009): 線形代数，マックォーリ 初歩から学ぶ数学大全 2, pp.120-129，講談社, 2009 年 7 月 20 日（第 1 刷発行）.
4) Bear, J. (1972): Dynamics of Fluids in Porous Media, Elsevier.

第６章　流れの方向と一次元拘束流れ

6.1 流れの方向と動水勾配の方向

$x-z$ 座標系を反時計回りに θ だけ回転した $n-s$ 座標系を考える(Fig.6.1)。$x-z$ 座標系における流速ベクトル $\{v_x, v_z\}^T$ を，反時計回りに θ だけ回転した $n-s$ 座標系に変換した流速ベクトル $\{v_n, v_s\}^T$ は，

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{6.1}$$

または，

$$\left.\begin{aligned} v_n &= v_x \cos\theta + v_z \sin\theta \\ v_s &= -v_x \sin\theta + v_z \cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

と表される。v_n は, Fig.6.2 に示すように，三角形プリズム ABC を考えたとき，断面 BC を垂直に流れ出る流水の流速である。ここで，浸透水の流れの方向と動水勾配の方向について考える。

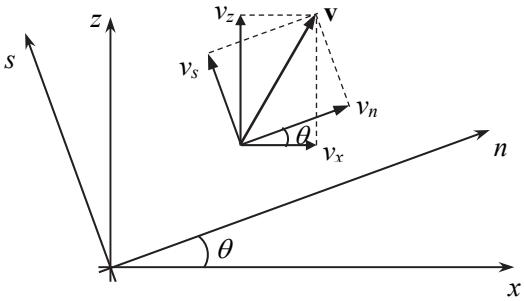


Fig.6.1 流量流速ベクトルの座標変換

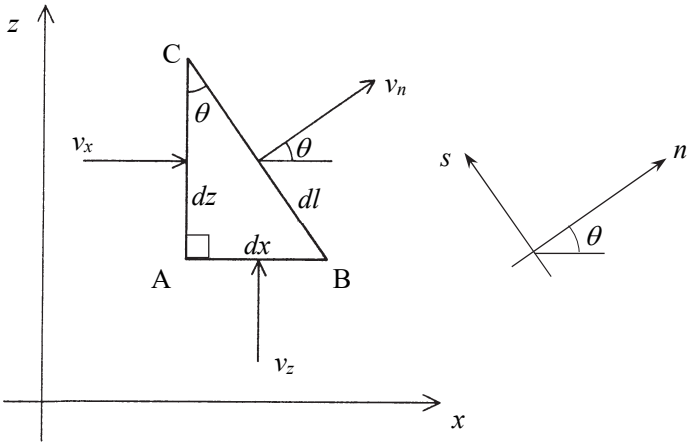


Fig.6.2 三角形プリズムへの浸透水の流入出

(1) 浸透水の流れの方向

浸透水の流れの方向 θ_1 を求めるには，v_n が最大となる方向を求めて，このときの θ の値を θ_1 とおけばよい。すなわち，(6.2)式から，

$$\frac{\partial v_n}{\partial \theta} = -v_x \sin\theta + v_z \cos\theta = 0 \quad \text{for} \quad \theta = \theta_0$$

となり, (2.11)式を用いて，

$$\tan\theta_1 = \frac{v_z}{v_x} = \frac{k_{xz}\, i_x + k_{zz}\, i_z}{k_{xx}\, i_x + k_{zx}\, i_z} \tag{6.3}$$

となる(Fig.6.3 参照)。このとき, v_s の値は, (6.2), (6.3)式から，

$$v_s = -v_x \sin\theta_1 + v_z \cos\theta_1 = -v_x \sin\theta_1 + v_x \tan\theta_1 \cos\theta_1 = 0 \tag{6.4}$$

となり, v_n に直交する流れはない。したがって, $\theta = \theta_1$ の方向($\partial v_n / \partial \theta = 0$ となる方向)が浸透流の方向である。言い換えれば，浸透流は, $\partial v_n / \partial \theta = 0$ の方向，すなわち, v_n が最大となる方向へ流れる。

Cf.
$v_n\, dl = v_x\, dz + v_z\, dx$
$\therefore\ v_n = v_x\, dx/dl + v_z\, dx/dl$
$= v_x \cos\theta + v_z \sin\theta$

(2) 動水勾配の方向

動水勾配の方向 i_n は，浸透流の流れ方向を求めたときと同様にして，

$$i_n = i_x \cos\theta + i_z \sin\theta \tag{6.5}$$

が最大となる方向として与えられ，この方向を θ_0 とすると，

$$\frac{\partial i_n}{\partial \theta} = -i_x \sin\theta + i_z \cos\theta = 0 \quad \text{for} \quad \theta = \theta_0$$

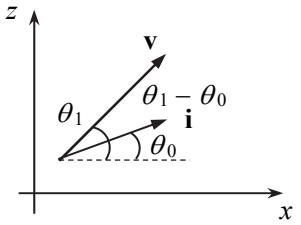
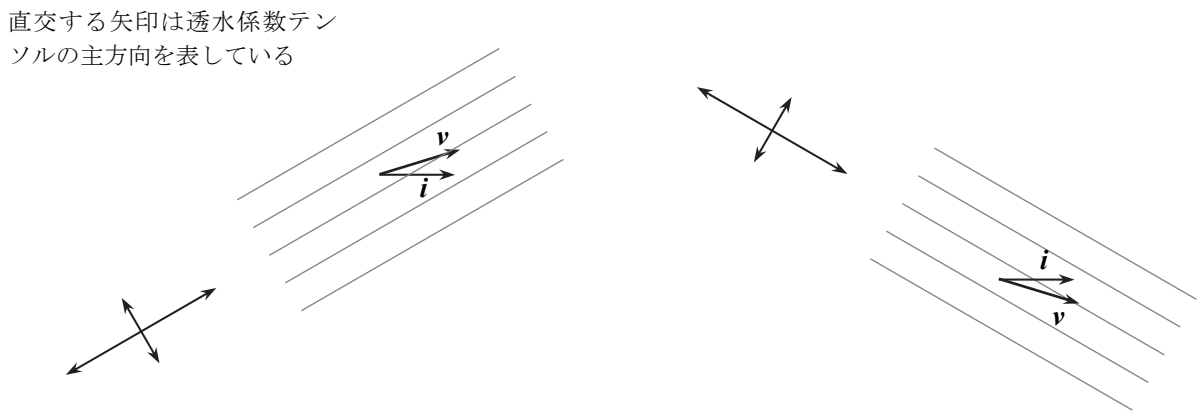
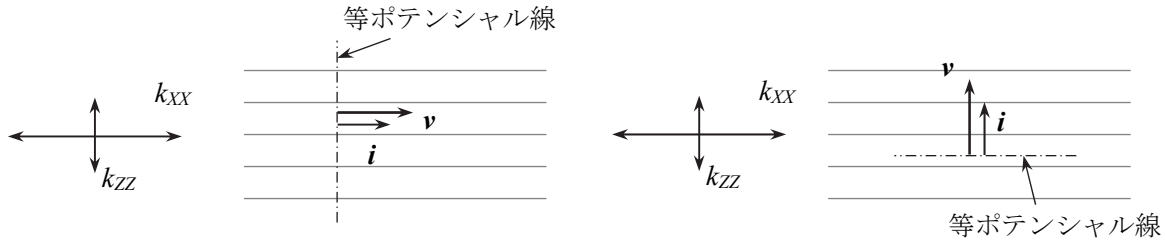


Fig.6.3 θ_1 と θ_0 及び $\theta_1 - \theta_0$ の定義



(a) $\theta_1 - \theta_0 > 0$　　(b) $\theta_1 - \theta_0 < 0$

Fig.6.4　$\theta_1 - \theta_0$ の大きさ



(a) 動水勾配が主方向（X 方向）と一致する場合　(b) 動水勾配が主方向（Z 方向）と一致する場合

Fig.6.5 動水勾配の方向が主方向と一致する場合

$$\therefore\ \tan\theta_0 = \frac{i_z}{i_x} \tag{6.6}$$

となる（Fig.6.3 参照）。(6.3), (6.6)式からわかるように，異方透水性地盤の場合，一般的に $\theta_1 \neq \theta_0$ となり浸透水の流れの方向と動水勾配の方向は一致しない。したがって，等ポテンシャル線（θ_0 に直交する）と流線（θ_1 の方向に一致する）は，一般的に直交しない。

(3) 動水勾配の方向と浸透水の流れの方向の関係

「浸透水の流れの方向 θ_1」と「動水勾配の方向 θ_0」がなす角 $\theta_1 - \theta_0$ の値は, (6.3), (6.6)式から,

$$\theta_1 - \theta_0 = \tan^{-1}\frac{(k_{zz} - k_{xx})i_x i_z + k_{xz}(i_x^2 - i_z^2)}{k_{xx}i_x^2 + 2k_{xz}i_x i_z + k_{zz}i_z^2} \tag{6.7a}$$

となる（Fig.6.3 参照）。ここに, $\theta_1 - \theta_0$ は，動水勾配ベクトル $\boldsymbol{i}$ の方向から流速ベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向に向けて反時計回りに測った角度である。水平方向の動水勾配 $\boldsymbol{i}$ に対して，$\theta_1 - \theta_0$ の値は Fig.6.4 のように定義される。流線と等ポテンシャル線の交差角 Θ は,

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \pm (\theta_1 - \theta_0) \tag{6.8}$$

で表される。

ここで, x, z 方向が主方向 X, Z と一致するとした場合（Fig.6.5 参照）,

$$\theta_1 - \theta_0 = \tan^{-1}\frac{(k_{ZZ} - k_{XX})i_X i_Z}{k_{XX}i_X^2 + k_{ZZ}i_Z^2} \tag{6.7b}$$

となる。動水勾配が存在する場合, (6.7b)式の分母は常に正であるので，異方透水性地盤（$k_{XX} \neq k_{ZZ}$）

において$\theta_1 = \theta_0$ ($\theta_1 - \theta_0 = 0$)となるのは, $i_X = 0$ のときか $i_Z = 0$ のときのみである。言い換えれば, $i_X = 0$ または $i_Z = 0$ の地点でのみ流線と等ポテンシャル線が直交することになる(Fig.6.5)。

ちなみに, 等方透水性地盤の場合($k_{xx} = k_{zz}$, $k_{xz} = k_{xz} = 0$)には, (6.3)式は,

$$\tan\theta_1 = \frac{v_z}{v_x} = \frac{i_z}{i_x} \tag{6.9}$$

となる。(6.6), (6.9)式から$\theta_0 = \theta_1$ となり, 動水勾配の方向と浸透水の流れの方向が一致することがわかる。等ポテンシャル線は動水勾配に直交するので, この場合, 等ポテンシャル線と流線が直交することになる。

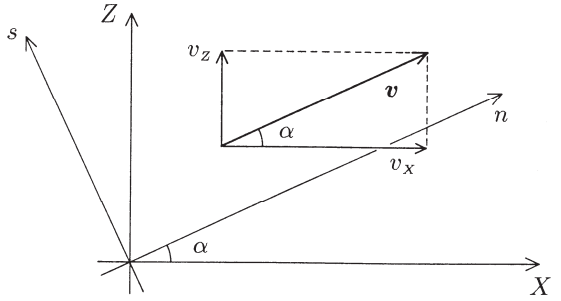


Fig.6.6 流線方向の流れ

6.2 一元元拘束流れ(流線方向の流れ)[1)]

(1) 流線方向の透水係数(X, Z 方向が主方向の場合)

X, Z 方向が主方向である場合を考えると, 流速ベクトル$\{v_X, v_Z\}^T$の方向α (Fig.6.5 参照)は, (6.3)式から,

$$\tan\alpha = \frac{v_Z}{v_X} = \frac{k_{ZZ}\, i_Z}{k_{XX}\, i_X} = \frac{k_{ZZ}}{k_{XX}} \cdot \frac{i_n \sin\alpha + i_s \cos\alpha}{i_n \cos\alpha - i_s \sin\alpha} \tag{6.10}$$

と表される。また, (6.4)式から, 流れの方向α と直交する方向の流れは 0 となる。流線方向の流れは一次元方向に拘束された流れであると考えることができる。ここでは, この流れを一次元拘束流れ(One-Dimensional Confined Flow : 以下 1DCF と略す)と呼ぶことにする。流線方向 n と直交する方向を s (Fig.6.6 参照)とすると, $v_s = 0$ であり, 一次元拘束流れに関する透水係数 $k_{n\,1\mathrm{DCF}}$(流線方向の透水係数)は, (3.4)式を用いて,

$$k_{n\,1\mathrm{DCF}} = \frac{v_n}{i_n} = \frac{k_{nn}\, i_n + k_{sn}\, i_s}{i_n} \tag{6.11}$$

と定義することができる。このとき, $k_{n\,1\mathrm{DCF}}$ は次のようにして求められる。

まず, 流れの方向α に関する式(6.10)から,

$$\sin\alpha\, k_{XX}(i_n \cos\alpha - i_s \sin\alpha) = \cos\alpha\, k_{ZZ}(i_n \sin\alpha + i_s \cos\alpha)$$

$$\therefore i_n(k_{XX} - k_{ZZ})\sin\alpha\cos\alpha = i_s(k_{XX}\sin^2\alpha + k_{ZZ}\cos^2\alpha) \tag{6.12}$$

となる。また, α 方向の流速 v_n, それと直交する方向の流速 v_s は, (3.4), (3.11)式から,

$$\left.\begin{aligned} v_n &= k_{nn} i_n + k_{sn} i_s = (k_{XX}\cos^2\alpha + k_{ZZ}\sin^2\alpha) i_n + (k_{ZZ} - k_{XX})\sin\alpha\cos\alpha\, i_s \\ v_s &= k_{ns} i_n + k_{ss} i_s = (k_{ZZ} - k_{XX})\sin\alpha\cos\alpha\, i_n + (k_{XX}\sin^2\alpha + k_{ZZ}\cos^2\alpha) i_s \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

となる。(6.11), (6.13), (6.12)式から,

$$k_{n\,1\mathrm{DCF}} = \frac{v_n}{i_n} = \frac{k_{XX} k_{ZZ}}{k_{XX}\sin^2\alpha + k_{ZZ}\cos^2\alpha} \tag{6.14}$$

を得る。(6.14)式は, 整理すると,

$$\frac{1}{k_{n\,1\mathrm{DCF}}} = \frac{\cos^2\alpha}{k_{XX}} + \frac{\sin^2\alpha}{k_{ZZ}} \tag{6.15}$$

となり，図示すると Fig.6.7 のようになる。Fig.6.7 に示される $k_{n\ 1DCF}$ は一次元拘束流れの流線方向の透水係数であり，Fig.3.3(a) に示した透水係数のテンソル成分 k_{nn} とは異なるものである。両者を混同しないようにしなければならない。$k_{n\ 1DCF}$ については，その存在が Scheidegger[2] によって実験的に確かめられている（7. 1 節の透水楕円を参照のこと）。

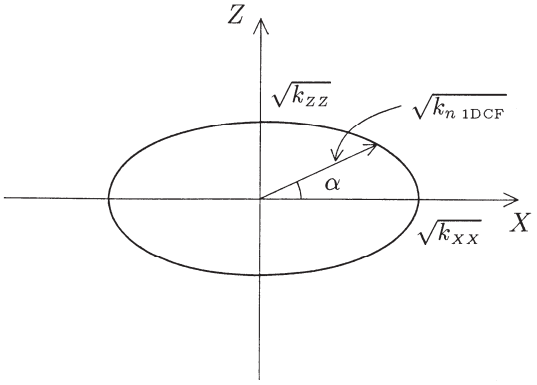


Fig.6.7　$k_{n\ 1DCF}$ の値

さて，浸透流に関する書籍[3] では，”Directional hydraulic conductivity”という用語が使われている。その中では, Directional flow に関する次の 2 つの異なった透水係数があるとされている：

(i) 流れの方向の”Directional hydraulic conductivity” K_q, 及び,

(ii) 動水勾配の方向の”Directional hydraulic conductivity” K_j

この用語法は透水係数を考える場合に混乱する可能性がある。したがって，ここではこれらの用語法は用いない。ここでは, k_{nn} は $n-s$ 座標系における透水係数テンソル成分の一つを表し, $k_{n\ 1DCF}$ は n 方向の一次元拘束流れの透水係数を表すものとする。結論的に言うと，書籍[3] における, K_q は $k_{n\ 1DCF}$ に対応し, K_j は k_{nn} に対応する。先述の通り, $k_{n\ 1DCF}$ は本質的に k_{nn} とは異なるので注意が必要である。

参考までに n と直交する方向 s の流れについて考える。s 方向の流速 v_s は, (6.13), (6.12)式から，常に,

$$\begin{aligned} v_s &= (k_{ZZ}-k_{XX})\sin\alpha\cos\alpha\ i_n + (k_{XX}\sin^2\alpha + k_{ZZ}\cos^2\alpha)i_s \\ &= (k_{ZZ}-k_{XX})\sin\alpha\cos\alpha\ i_n + (k_{XX}-k_{ZZ})\sin\alpha\cos\alpha\ i_n \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.16}$$

となる。したがって，流線方向 n と直交する方向，すなわち s 方向の流れはないことが確かめられる。

(2) $k_{n\ 1DCF}$ 算定の別法（x, z 方向が主方向でない場合）

ここでは, x, z 方向が主方向でない場合について考える。まず, x 軸と θ の角度をなす n 方向の流れについて考える。(3.4)式からわかるように, n 方向に動水勾配 i_n を作用させた場合, n 方向の流れ v_{n1} のほかに, n と直交する方向，すなわち s 方向の流れ v_{s1} が生じる（Fig.6.8(a)参照）。

$$v_{n1} = k_{nn}\, i_n \tag{6.17}$$

$$v_{s1} = k_{ns}\, i_n \tag{6.18}$$

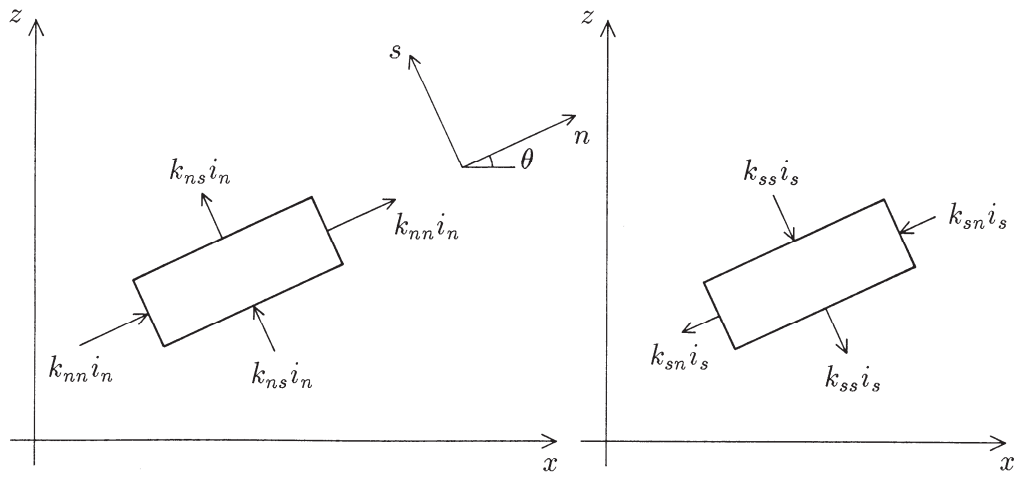
n 方向の一次元拘束流れとなるためには, (6.18)式と同じ大きさで方向が逆の流れを与えればよい。ここでは，s 方向に動水勾配 i_s を作用させてこのような条件を与えるものとする。i_s を作用させた場合の n 方向及び s 方向の流れ v_{n2}, v_{s2} は，上述と同様にして，(3.4)式から次のように表される（Fig.6.8(b)参照）。

$$v_{n2} = k_{sn}\, i_s \tag{6.19}$$

$$v_{s2} = k_{ss}\, i_s \tag{6.20}$$

s 方向の流れが生じないためには, (6.18), (6.20)式から,

$$v_s = v_{s1} + v_{s2} = k_{ns}\, i_n + k_{ss}\, i_s = 0$$



(a) Water flow due to i_n (b) Water flow due to i_s

Fig.6.8 流線方向の流れ(別法)

$$\therefore\ i_s = -\frac{k_{ns}}{k_{ss}} i_n \tag{6.21}$$

であればよい。このとき, n 方向の流れ v_n を考えると, (6.17), (6.19), (6.21)式から, 次のようになる。

$$\begin{aligned} v_n &= v_{n1} + v_{n2} = k_{nn}\, i_n + k_{sn}\, i_s \\ &= k_{nn}\, i_n - \frac{k_{sn}k_{ns}}{k_{ss}} i_n \end{aligned}$$

$$\therefore\ v_n = \frac{k_{nn}k_{ss} - k_{sn}k_{ns}}{k_{ss}} i_n \tag{6.22}$$

したがって, $k_{n\,1\mathrm{DCF}}$ (= v_n/i_n) は, (3.6a), (6.22)式から,

$$k_{n\,1\mathrm{DCF}} = \frac{v_n}{i_n} = \frac{k_{xx}k_{zz} - k_{zx}k_{xz}}{k_{xx}\sin^2\theta - (k_{zx} + k_{xz})\sin\theta\cos\theta + k_{zz}\cos^2\theta} \tag{6.23}$$

となる。流れの方向 n と直交する方向に生じる動水勾配 i_s ((6.21)式) は, 異方透水性地盤中の浸透流に特有のものであり, 水の流れを一次元方向に拘束するために誘導されて生じるものである。したがって, ここでは, i_s ((6.21)式) を $i_{s\,\mathrm{IND}}$ と表し, s 方向の誘導動水勾配と呼ぶことにする。

x, z 方向が主方向 (X, Z) と一致する場合, $k_{xz} = k_{zx} = k_{XZ} = k_{ZX} = 0$ となり, (6.23)式は(6.14)式と一致する。

(3) n と逆方向 ($-n$ の方向) の一次元拘束流れに関する透水係数

θ と逆方向 α (= $\theta + \pi$) の流れ, すなわち, n と逆方向 ($-n$ の方向) の流れについて考える。θ と逆方向 α (= $\theta + \pi$) の一次元拘束流れに関する透水係数を $k_{-n\,1\mathrm{DCF}}$ とすると, (6.23)式から,

$$\begin{aligned} k_{-n\,1\mathrm{DCF}} &= \frac{k_{xx}k_{zz} - k_{zx}k_{xz}}{k_{xx}\sin^2\alpha - (k_{zx} + k_{xz})\sin\alpha\cos\alpha + k_{zz}\cos^2\alpha} \\ &= \frac{k_{xx}k_{zz} - k_{zx}k_{xz}}{k_{xx}\sin^2(\theta+\pi) - (k_{zx} + k_{xz})\sin(\theta+\pi)\cos(\theta+\pi) + k_{zz}\cos^2(\theta+\pi)} \\ &= \frac{k_{xx}k_{zz} - k_{zx}k_{xz}}{k_{xx}\sin^2\theta - (k_{zx} + k_{xz})\sin\theta\cos\theta + k_{zz}\cos^2\theta} \\ &= k_{n\,1\mathrm{DCF}} \end{aligned} \tag{6.24}$$

となる。θ と逆方向α (= $\theta+\pi$) の一次元拘束流れの透水係数 $k_{-n\,1\mathrm{DCF}}$ は, θ 方向の一次元拘束流れの透水係数 $k_{n\,1\mathrm{DCF}}$ と等しい。

参考文献

1) 田中　勉, Arnold Verruijt (2019): 異方透水性地盤における一次元拘束流れと一次元透水試験, 神戸大学都市安全研究センター研究報告, 第 23 号, pp.264-285.
2) Scheidegger, A. E. (1957): The Physics of Flow through Porous Media, the Macmillan Company, New York.
3) Bear, J. (1972): Dynamics of Fluids in Porous Media, American Elsevier, New York, 764pp.

第７章 二次元異方透水性土の一次元透水試験[1)]

7.1 一次元透水試験から得られる透水係数テンソルの成分

ここでは，異方透水性土の透水試験を行うことにより透水係数テンソルの成分を求めることができるかどうかについて，また，その求め方について理論的に考察する。異方透水性地盤において x 軸と反時計回りに θ の角度を成す方向に切り出した供試体（Fig.7.1）について一次元透水試験を行った場合，(6.23)式で表される $k_{n\,1\mathrm{DCF}}$ が得られるものと考えられる。**第６章**の計算過程からわかるように，透水試験（一次元拘束流れ）においては，それと直交する方向に(6.21)式で表される誘導動水勾配が生じることがわかる。逆に言うと誘導動水勾配が発生することによって供試体中の水の流れが一次元方向に拘束されると考えることができる。

$k_{n\,1\mathrm{DCF}}$ は流線方向の透水係数，すなわち，一次元拘束流れの透水係数であり，その平方根は Fig.7.2 に示すように楕円形で表される。この楕円は透水楕円と呼ばれ Scheidegger によって実験的に確かめられている[2)]。実験によって，透水楕円が求められると，最大，最小主透水係数 k_1, k_3, 及び，主方向 β, α が決まり，透水係数テンソルが決定される（β, α については(5.5), (5.6)式参照）。

ここでは，x 方向と z 方向の透水試験を行った場合について考える。供試体は透水試験を行う方向に十分長いものとする。

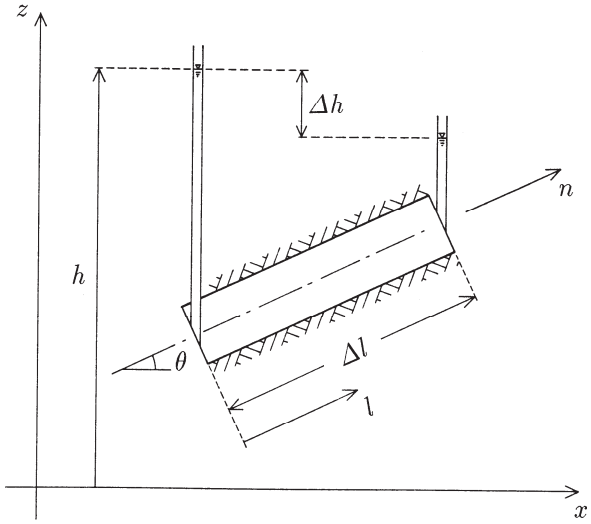


Fig.7.1　n 方向の一次元透水試験

(1) x 方向の透水試験

x 方向に切り出した供試体（Fig.7.3(a)）を用いて透水試験を行う。x 方向に動水勾配 i_x を与えると，次に示されるような x 方向と z 方向の流れ v_{x1}, v_{z1} が生じる。

$$v_{x1} = k_{xx}\, i_x \tag{7.1}$$

$$v_{z1} = k_{xz}\, i_x \tag{7.2}$$

ここで，x 方向の透水試験（x 方向の一次元拘束流れ）においては，x 方向に動水勾配 i_x を与えることによって，供試体内には z 方向に誘導動水勾配 $i_{z\,\mathrm{IND}}$ が生じるものと考える。そして，$i_{z\,\mathrm{IND}}$ が生じることによって，z 方向の流れが打ち消されるものと考える（Fig.7.3(a)参照）。$i_{z\,\mathrm{IND}}$ によって生じる x, z 方向の流れ v_{x2}, v_{z2} は，

$$v_{x2} = k_{zx}\, i_{z\,\mathrm{IND}} \tag{7.3}$$

$$v_{z2} = k_{zz}\, i_{z\,\mathrm{IND}} \tag{7.4}$$

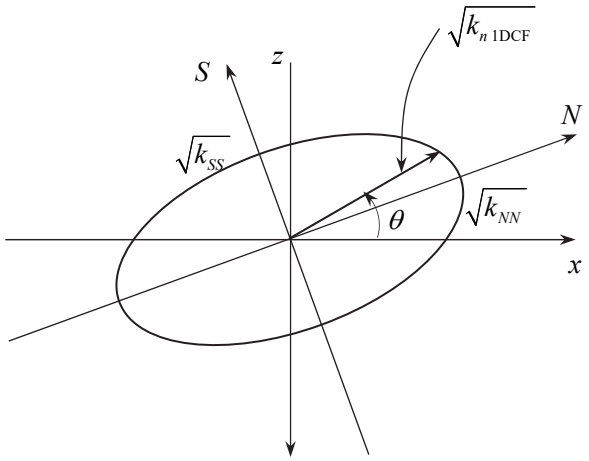
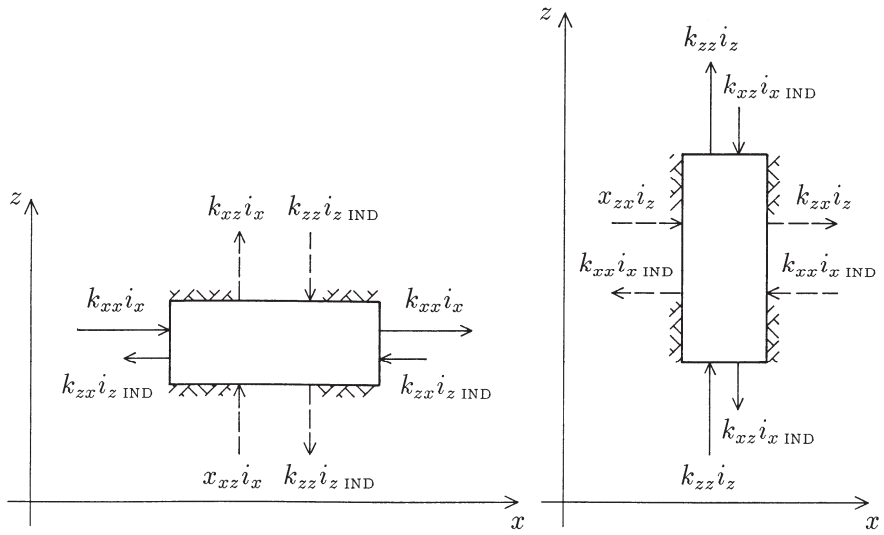


Fig.7.2 一般的な $k_{n1\mathrm{DCF}}$ の大きさ



(a) x 方向の透水試験　　(b) z 方向の透水試験

Fig.7.3 異方透水性地盤に関する x 及び z 方向の一次元透水試験

である。x 方向の一次元拘束流れにおいては z 方向の流れはないので,

$$v_z = v_{z1} + v_{z2} = k_{xz}\, i_x + k_{zz}\, i_{z\ \mathrm{IND}} = 0$$

$$\therefore\ \ i_{z\ \mathrm{IND}} = -\frac{k_{xz}}{k_{zz}}\, i_x \tag{7.5}$$

となる。x 方向の流れに関しては,

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x1} + v_{x2} = k_{xx}\, i_x + k_{zx}\, i_{z\ \mathrm{IND}} \\ &= \left(k_{xx} - \frac{k_{zx}\, k_{xz}}{k_{zz}} \right) i_x \\ &= k_{x\ \mathrm{1DCF}}\ i_x \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\therefore\ \ k_{x\ \mathrm{1DCF}} = \frac{v_x}{i_x} = k_{xx} + \frac{k_{zx}\, i_{z\ \mathrm{IND}}}{i_x} = k_{xx} - \frac{k_{zx}\, k_{xz}}{k_{zz}} \tag{7.7}$$

となる。$k_{x\ \mathrm{1DCF}}$ は x 方向の一次元拘束流れの透水係数である。

(2) z 方向の透水試験

z 方向に切り出した供試体(Fig.7.3(b))を用いて透水試験を行った場合にも, z 方向に動水勾配 i_z を与えることによって(1)と同様にして x 方向の誘導動水勾配 $i_{x\ \mathrm{IND}}$ が生じ, z 方向の一次元拘束流れの透水係数 $k_{z\ \mathrm{1DCF}}$ が得られる(Fig.7.3(b)参照)。z 方向の一次元拘束流れにおいては x 方向の流れがないことに留意して次のようになる。

＜x 方向の流れ＞

$$v_x = v_{x1} + v_{x2} = k_{xx}\, i_{x\ \mathrm{IND}} + k_{zx}\, i_z = 0$$

$$\therefore\ \ i_{x\ \mathrm{IND}} = -\frac{k_{zx}}{k_{xx}}\, i_z \tag{7.8}$$

＜z 方向の流れ＞

$$v_z = v_{z1} + v_{z2} = k_{zz}\, i_z + k_{xz}\, i_{x\,\mathrm{IND}}$$

$$= \left(k_{zz} - \frac{k_{xz}\, k_{zx}}{k_{xx}} \right) i_z \tag{7.9}$$

$$= k_{z\,1\mathrm{DCF}}\ i_z$$

$$\therefore\ k_{z\,1\mathrm{DCF}} = \frac{v_z}{i_z} = k_{zz} + \frac{k_{xz}\, i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} = k_{zz} - \frac{k_{xz}\, k_{zx}}{k_{xx}} \tag{7.10}$$

(3) 透水試験結果の整理法

x 方向の透水試験を行うことにより, i_x, v_x, $i_{z\,\mathrm{IND}}$ が測定され $k_{x\,1\mathrm{DCF}}$ $(= v_x / i_x)$ が計算によって求められる。また, z 方向の透水試験を行うことにより, i_z, v_z, $i_{x\,\mathrm{IND}}$ が測定され $k_{z\,1\mathrm{DCF}}$ $(= v_z / i_z)$ が求められる。これらの測定値を用いて, 透水係数テンソルの成分を次のようにして算定することができる。

まず, (7.8), (7.5)式から,

$$k_{zx} = -k_{xx} \frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \tag{7.11}$$

$$k_{xz} = -k_{zz} \frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} \tag{7.12}$$

が得られる。そして, (7.7), (7.11), (7.12)式から, 次のようにして k_{zx} を求めることができる。

$$\begin{aligned} k_{x\,1\mathrm{DCF}} \frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} &= k_{xx} \frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} - k_{zx} \frac{k_{xz}}{k_{zz}} \cdot \frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \\ &= -k_{zx} + k_{zx} \frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} \cdot \frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \\ &= k_{zx} \left\{ \left(\frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} \right) \left(\frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore\ k_{zx} &= k_{x\,1\mathrm{DCF}} \frac{\left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \right)}{\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} \right) \left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \right) - 1} \\ &= \frac{v_x}{i_x} \frac{\left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \right)}{\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} \right) \left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \right) - 1} \end{aligned} \right\} \tag{7.13}$$

また, (7.10), (7.11), (7.12)式から, k_{xz} が得られ次のようになる。

$$\begin{aligned} k_{z\,1\mathrm{DCF}} \frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} &= k_{zz} \frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} - k_{xz} \frac{k_{zx}}{k_{xx}} \cdot \frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} \\ &= -k_{xz} + k_{xz} \frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \cdot \frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} \\ &= k_{xz} \left\{ \left(\frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} \right) \left(\frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ k_{xz} &= k_{z\,\mathrm{1DCF}}\frac{\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x}\right)}{\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x}\right)\left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)-1}\\ &= \frac{v_z}{i_z}\frac{\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x}\right)}{\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x}\right)\left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)-1}\end{aligned}\right\}\tag{7.14}$$

したがって, k_{xx}, k_{zz} は, (7.11), (7.12), (7.13), (7.14)式から,

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ k_{xx} &= k_{x\,\mathrm{1DCF}}\frac{1}{1-\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x}\right)\left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)}\\ &= \frac{v_x}{i_x}\frac{1}{1-\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x}\right)\left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)}\end{aligned}\right\}\tag{7.15}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ k_{zz} &= k_{z\,\mathrm{1DCF}}\frac{1}{1-\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x}\right)\left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)}\\ &= \frac{v_z}{i_z}\frac{1}{1-\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x}\right)\left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)}\end{aligned}\right\}\tag{7.16}$$

と求められる。ここで, 例えば, 誘導動水勾配 $i_{z\,\mathrm{IND}}$ は x 方向に動水勾配 i_x を与えたとき z 方向に誘起されるという意味で, 割合として, ($i_{z\,\mathrm{IND}}/i_x$) とまとめた形で表している。このようにして, 直交する 2 方向の透水試験を行うことにより, 異方透水性地盤の透水係数のテンソル成分を求めることができる。

ここで, その他の有用な関係式を導いておく。まず, (7.15), (7.16)式から,

$$\frac{k_{zz}}{k_{xx}} = \frac{k_{z\,\mathrm{1DCF}}}{\mathrm{k}_{x\,\mathrm{1DCF}}} = \frac{\left(\dfrac{v_z}{i_z}\right)}{\left(\dfrac{v_x}{i_x}\right)}\tag{7.17}$$

の関係式が成り立ち, (7.13), (7.14)式から,

$$\frac{k_{xz}}{k_{zx}} = \frac{k_{z\,\mathrm{1DCF}}\left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x}\right)}{k_{x\,\mathrm{1DCF}}\left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)}\tag{7.18}$$

の関係が成り立つ。

また, $k_{zx} = k_{xz}$ の場合には, (7.17), (7.18)式から,

$$\left(\frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x}\right)=\frac{k_{x\,1\mathrm{DCF}}}{k_{z\,1\mathrm{DCF}}}\left(\frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)=\frac{k_{xx}}{k_{zz}}\left(\frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)=\frac{\left(\frac{v_x}{i_x}\right)}{\left(\frac{v_z}{i_z}\right)}\left(\frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right) \tag{7.19}$$

が成立し, (7.19)式から,

$$i_{z\,\mathrm{IND}}=\frac{v_x}{v_z}\,i_{x\,\mathrm{IND}} \tag{7.20}$$

が得られる。

(4) 透水試験における流れの方向と透水係数テンソルの主方向が一致する場合

ここでは, 透水試験における流れの方向と透水係数テンソルの主方向が一致した特殊な場合について考える。たとえば, x 軸方向が透水係数の主方向と一致する場合について考える。x 方向の透水試験($i_x \neq 0$)を行うと $i_{z\,\mathrm{IND}}=0$ となる。また, 透水係数テンソルのもう一つの主方向は x 軸と直交する方向すなわち z 軸方向となるので, z 軸方向の透水試験($i_z \neq 0$)を行うと $i_{x\,\mathrm{IND}}=0$ が得られる。

このようにして, 透水試験における流れの方向と透水係数テンソルの主方向が一致した特殊な場合, $i_{x\,\mathrm{IND}}=0$ と (7.11)式から,

$$k_{zx}=0 \tag{7.21}$$

となり, $i_{z\,\mathrm{IND}}=0$ と(7.12)式から,

$$k_{xz}=0 \tag{7.22}$$

となる。したがって, (7.6), (7.7), (7.22)式から,

$$\begin{aligned} v_x &= k_{xx}\,i_x \\ &= k_{x\,1\mathrm{DCF}}\;i_x \end{aligned} \tag{7.23}$$

$$\therefore\quad k_{xx}=k_{x\,1\mathrm{DCF}}=\frac{v_x}{i_x} \tag{7.24}$$

を得る。また, (7.9), (7.10), (7.21)式から,

$$\begin{aligned} v_z &= k_{zz}\,i_z \\ &= k_{z\,1\mathrm{DCF}}\;i_z \end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\therefore\quad k_{zz}=k_{z\,1\mathrm{DCF}}=\frac{v_z}{i_z} \tag{7.26}$$

を得る。地盤の透水係数の主方向がわかっていれば 2 つの主方向について透水試験を行うことによって透水係数テンソルの成分が決まることがわかる。このような特殊な場合についても, 7.1(3)で得られた関係式(7.13)～(7.16)式に含まれることがわかる。

7.2 一次元透水試験における供試体中の水の流れ

第６章及び 7.1 節で述べた一次元拘束流れの考え方が, 一次元透水試験において実際に適用できるかどうかについて, 有限要素法によって数値解析的に考察する。ここでは, x 方向に切り出した供試体について一次元透水試験を行った場合について考える。7.1 節で述べたように, x 方向に動水勾配を与えると, z 方向に誘導動水勾配 $i_{z\,\mathrm{IND}}$ が生じる。これが生じることによって z 方向の流れが発生しないものと考えられる。$i_{z\,\mathrm{IND}}$, 及び, x 方向の一次元拘束流れの透水係数 $k_{x\,1\mathrm{DCF}}$ は,

$$i_{z\,\mathrm{IND}} = -\frac{k_{xz}}{k_{zz}}\, i_x \tag{7.5}$$

$$k_{x\,1\mathrm{DCF}} = \frac{v_x}{i_x} = k_{xx} - \frac{k_{zx}k_{xz}}{k_{zz}} \tag{7.7}$$

と表される。ここでは，一次元透水試験において, (7.5), (7.7)式が実際に得られるかどうか有限要素法を用いて数値解析的に調べる。ここでは，特に, x 方向と反時計まわりに 30°をなす方向に最大主透水係数の方向(n)があり (Fig.7.4),

$k_{nn} = 1.0\times10^{-4}$ m/s, $k_{ss} = 0.5\times10^{-4}$ m/s, 及び, $k_{ns} = 0$

の場合について考える。ここに, s は n をさらに反時計まわりに 90°回転した方向($s \perp n$)を表す。このとき,

$k_{xx} = 0.875\times10^{-4}$ m/s

$k_{zz} = 0.625\times10^{-4}$ m/s

$k_{xz} = 0.21651\times10^{-4}$ m/s

$\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} = -0.34641$

$k_{x\,1\mathrm{DCF}} = 0.800\times10^{-4}$ m/s

となる。

ここでは，供試体の長さ B と高さ D の比 B/D が 0.1～10.0 の値をとる場合の解析結果について述べる。また，単位奥行きあたりの二次元浸透流について考える。

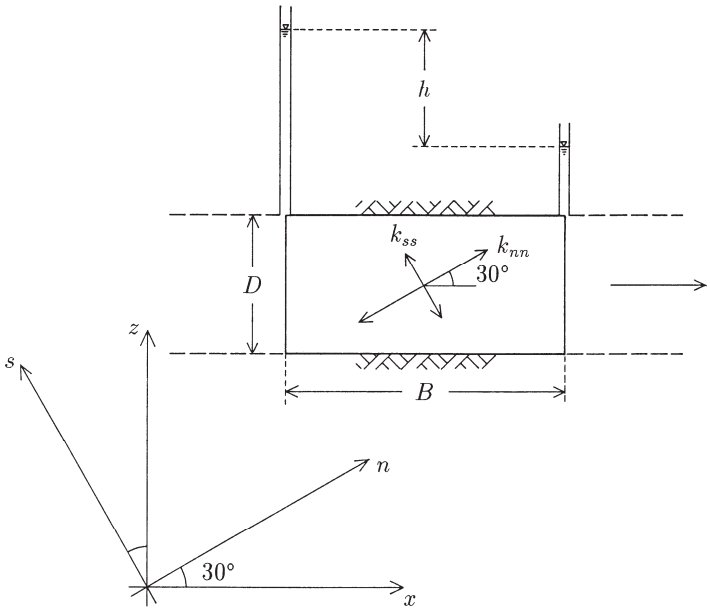


Fig.7.4 異方透水性地盤の透水試験

解析結果は供試体へ水を流す条件，すなわち,

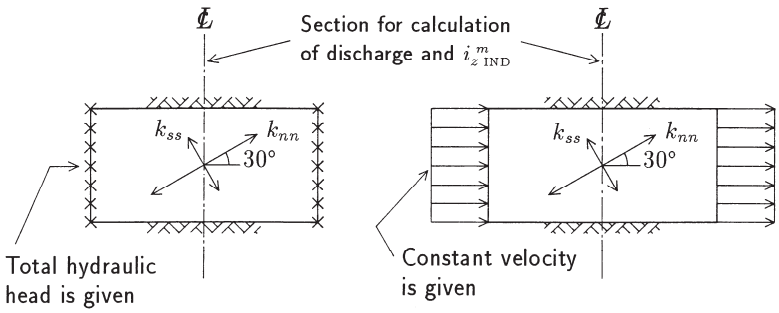
(1) 圧力型，及び, (2) 一様流型

によって全く異なる様相を呈する。これらは，境界条件として,

(1) 圧力型：試料の両端において一定の水頭値を既定する場合(Fig.7.5(a))，及び,

(2) 一様流型：試料の両端おいて一様な流入及び流出流速を既定する場合(Fig.7.5(b))

と定義することができる。x 方向に供試体中を流れる単位奥行き当たりの流量 $q^{(m)}_{x\,1DCF}$ 及び, z 方向の



(a) 圧力型　　(b) 一様流型

Fig.7.5 試料へ水を流す境界条件

誘導動水勾配 $i_{z\,\mathrm{IND}}^{(m)}$ は供試体中央断面で算定し, x 方向の動水勾配 $i_x^{(m)}$ は供試体上部両端における水頭差 h を用いて計算する(Fig.7.5 参照)。

$$q_{x\,\mathrm{1DCF}}^{(m)} = \int_0^D v_x \Big|_{x=\frac{B}{2}} dz \tag{7.27}$$

$$i_x^{(m)} = \frac{h}{B} \tag{7.28}$$

ここに, 右肩の添え字 $^{(m)}$ は計測値(ここでは解析計算値)であることを表す。また, x 方向の一次元拘束流れの透水係数 $k_{x\,\mathrm{1DCF}}^{(m)}$ は,

$$k_{x\,\mathrm{1DCF}}^{(m)} = \frac{q_{x\,\mathrm{1DCF}}^{(m)}}{i_x^{(m)} D} \tag{7.29}$$

として算定される。

このようにして得られた B/D と $k_{x\,\mathrm{1DCF}}^{(m)}$ の関係を Fig.7.6 に, B/D と $i_{z\,\mathrm{IND}}^{(m)} / i_x^{(m)}$ の関係を Fig.7.7 に示す。また, 一例として, B/D = 0.2, 1.0, 5.0 の場合の流線網を示すと Fig.7.8 となる。Figs.7.6～7.8 には, 圧力型と一様流型の結果を同時に示しているが, これらの図から次のような興味ある結論が得られる。

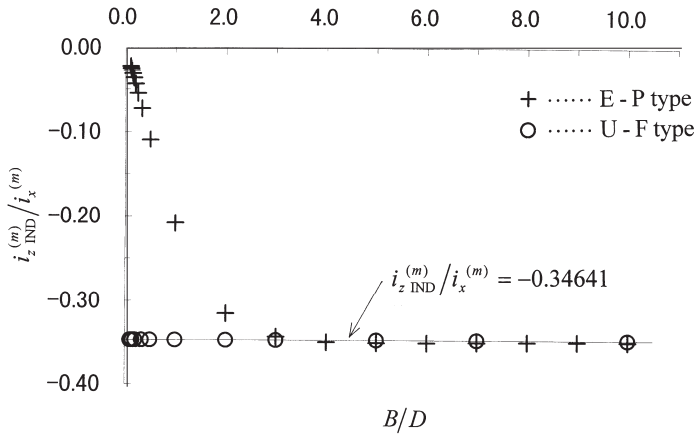


Fig.7.6　B/D と $i_{z\,\mathrm{IND}}^{(m)} / i_x^{(m)}$ の関係

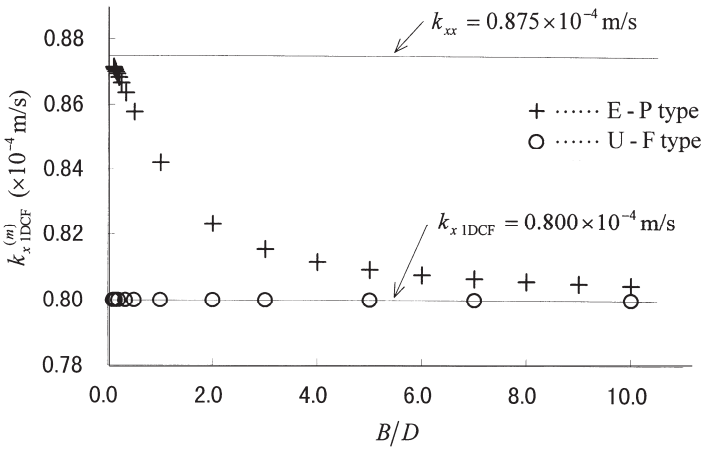


Fig.7.7　B/D と $k_{x\,\mathrm{1DCF}}^{(m)}$ の関係

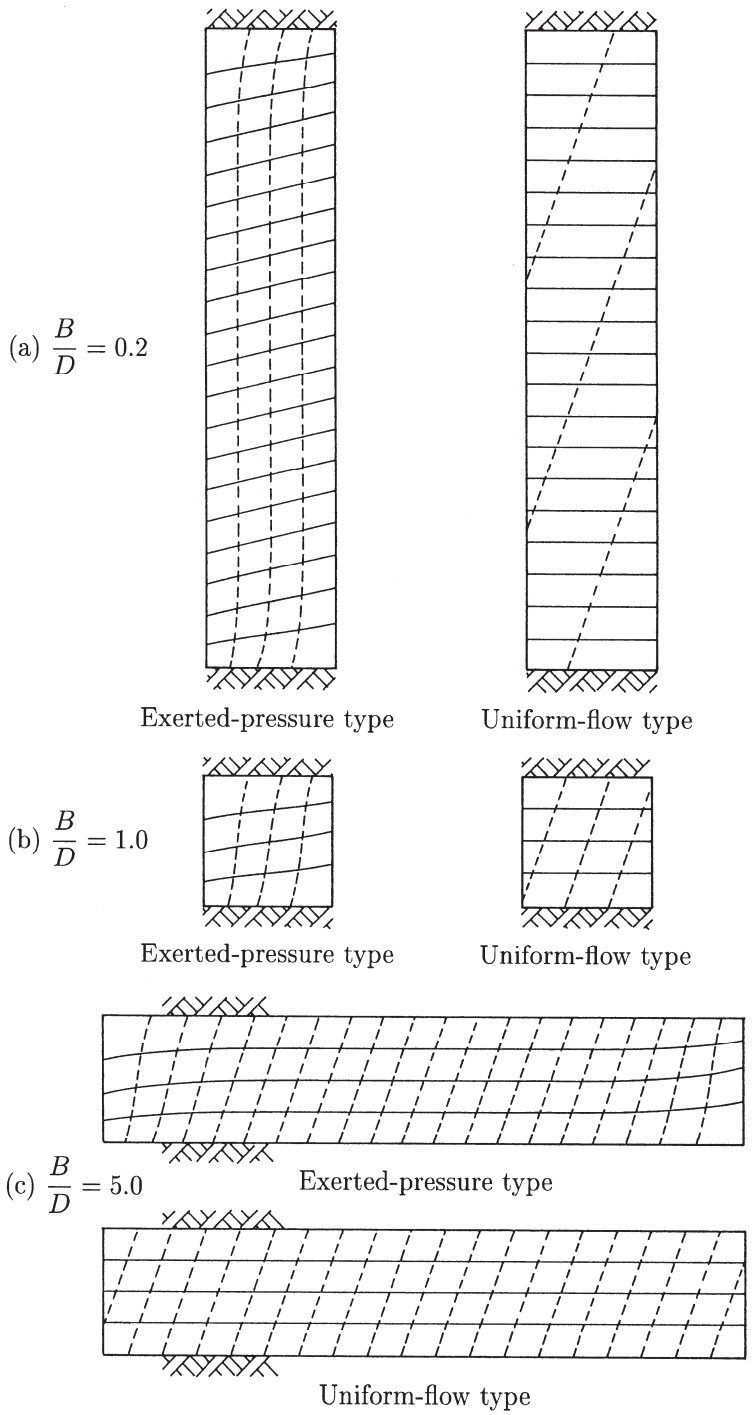


Fig.7.8　流線網

Table 7.1 Flow through permeability test specimen and one-dimensional confined flow in 2D anisotropic permeable soil

(1) Exerted-pressure type Flow through a test specimen is not consistent with one-dimensional confined flow, and becomes: (i) if *B/D* is small, the state of one-dimensional hydraulic gradient ($i_z = 0$, $i_x \neq 0$), (ii) if *B/D* is large, the state of one-dimensional confined flow ($v_z = 0$, $v_x \neq 0$).
(2) Uniform-flow type Flow through a test specimen is consistent with one-dimensional confined flow irrespective of the *B/D* value.

(1) 圧力型の場合

圧力型の場合, (7.5), (7.7)式で与えられた関係は成り立たず, 一般的に次の事柄が言える。

(i) B/D が小さいとき : B/D が小さくなるにつれて, $i_{z\,\mathrm{IND}}^{(m)} \to 0$ となり (Fig.7.6), $k_{z\,\mathrm{1DCF}}^{(m)} \to k_{xx}$ となる (Fig.7.7)。また, $B/D < 0.25$ のとき, $k_{x\,\mathrm{1DCF}}^{(m)}$ は k_{xx} を約 1%以内の誤差で近似することができる。

(ii) B/D が大きいとき : B/D が大きくなるにつれて, $i_{z\,\mathrm{IND}}^{(m)} \to i_{z\,\mathrm{IND}}$ となり (Fig.7.6), $k_{z\,\mathrm{1DCF}}^{(m)} \to k_{x\,\mathrm{1DCF}}$ となる (Fig.7.7)。また, $B/D > 3.2$ のとき, $i_{z\,\mathrm{IND}}^{(m)}$ は $i_{z\,\mathrm{IND}}$ を約 1%以内の誤差で近似することができ, $B/D > 6.5$ のとき, $k_{x\,\mathrm{1DCF}}^{(m)}$ は $k_{x\,\mathrm{1DCF}}$ を約 1%以内の誤差で近似することができる。

上述の(i), (ii)と Fig.7.8 からわかるように, 圧力型の条件の場合, 供試体を全体としてみたとき, 水の流れは B/D が小さくなるにつれて z 軸方向の誘導動水勾配はなくなり x 軸方向が動水勾配の方向に近づく。このとき, 特に供試体の高さ方向の中央付近において, 流れの方向は$\theta = \tan^{-1} v_z/v_x = \tan^{-1} k_{xz}/k_{xx} = 35.5°$に近づき, x 軸方向は流れの方向とはならない。また, B/D が大きくなるにつれて流れは x 軸方向により拘束され一次元拘束流れに近づく。このことから, 上述の(i), (ii)の場合を, それぞれ,

(i) 一次元動水勾配問題（$i_z = 0, i_x \neq 0$）

(ii) 一次元拘束流問題（$v_z = 0, v_x \neq 0$）

と名づけることができる。

(2) 一様流型の場合

一様流型の場合, B/D の大きさに関わらず, 常に(7.5), (7.7)式で与えられる関係が成り立つ。

上述した事柄を Table 7.1 にまとめている。このようにして, (7.5), (7.7)式で与えられる関係は一様流型の条件に対して成立するものであり, 一様流型の実験を行えば問題がないことがわかる。しかしながら, 一様流型の実験を行うのは非常に困難であり, 実験は一般的に圧力型の条件となると考えられる。圧力型の実験においては, 前述したように, 水の流れが一次元拘束流れの状態からずれる。一次元拘束流れの状態をより正確に作り出すためには,

(i) B/D を大きくする：本例の場合には, B/D を 6.5 程度以上にする,

(ii) 試料の長さ方向の中央部分, 例えば 80%とか 60%の部分を考える, または,

(iii) 試料の両側に一様流の条件を与えるフィルターを設置する

ことなどが必要であると考えられる。

参考文献

1) 田中　勉, Arnold Verruijt (2019): 異方透水性地盤における一次元拘束流れと一次元透水試験, 神戸大学都市安全研究センター研究報告, 第 23 号, pp.264-285.

2) Scheidegger, A. E. (1957): The Physics of Flow through Porous Media, the Macmillan Company, New York.

第８章　浸透水の運動方程式

8.1 浸透力と制動力

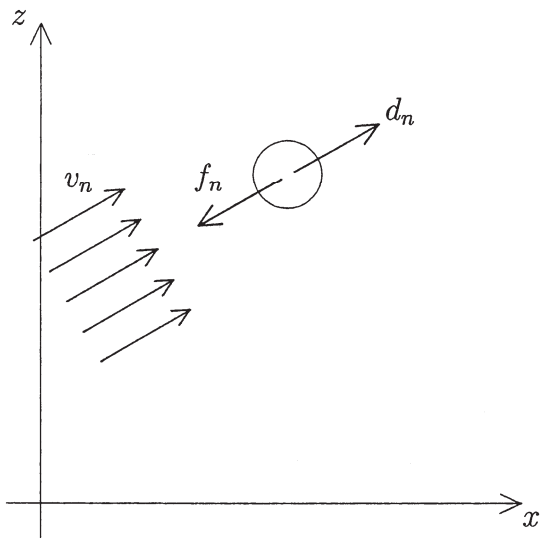


Fig.8.1　大変遅い水の流れの中におかれた

球形粒子がある方向 n の遅い水の流れ（流速 v_n）の中におかれていると，流水は粒子に n の方向に流速 v_n に比例した力（浸透力）$d_n = \alpha v_n$ を及ぼすことが知られている（Fig.8.1）[1]。ここに，α は流れに対する抵抗性を表す比例係数である。また，球形粒子の場合，その力の大きさ（すなわち α の大きさ）は流れの方向によって変わらない。そして，作用反作用の法則から水は粒子から d_n と同じ大きさで反対方向の力（制動力）$f_n = -d_n$ を受ける。これらの力は，ミクロな観点から見ると各粒子の表面に作用する力（表面力）であるが，マクロな観点から見ると粒子の集まり（塊）に作用する力（体積力）となる。このように，浸透力及び制動力はともに体積力と考えることができる。

次に，楕円形状の土粒子が遅い水の流れの中におかれているものとする。水の流れの方向が長軸方向 n と一致する場合（Fig.8.2(a)），粒子は流水から n 方向に流速 v_n に比例した浸透力 $d_n = \alpha_{nn} v_n$ を n 方向に受ける。また，水の流れの方向が短軸方向 s と一致する場合（Fig.8.2(b)），粒子は流水から s 方向に流速 v_s に比例した浸透力 $d_s = \alpha_{ss} v_s$ を s 方向に受ける。ここに，α_{nn}, α_{ss} は長軸方向及び短軸方向の抵抗係数であり，流れの方向に対して大きさが異なり，ここで考えている例の場合，

$$\alpha_{ss} > \alpha_{nn} \tag{8.1}$$

と表される[2]。

さて，水の流れの方向が長軸や短軸の方向と異なるとき，この粒子は，長軸と短軸の方向，及び，流れの方向に応じて力を受けることになる。比例係数の値は長軸方向と短軸方向において異なるので（Fig.8.2(a), (b)），その合力 d は一般に Fig.8.2(c)に示すように流れの方向とは異なるものとなる。ここで，Fig.8.2(c)に示すように，長軸方向（n 方向）を x 軸から反時計回りに θ の方向にとり，流れの方向を n 軸から反時計まわりに β にとる。また，n と直交方向に s をとる。ここで，n 軸から反時計まわりに β の方向の流速 v は，n, s 方向の成分 v_n, v_s に分解され，

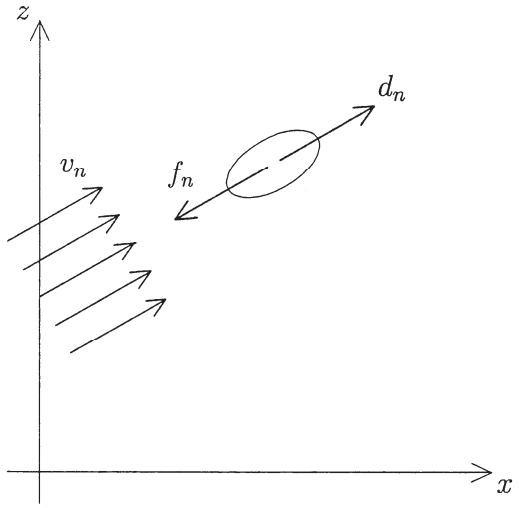
$$\left.\begin{aligned} v_n &= v\cos\beta \\ v_s &= v\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

となる。n, s は長軸及び短軸方向であるので，n（または s）方向の浸透力の大きさ d_n（または d_s）は，v_n（または v_s）のみによって決まり，それぞれ，

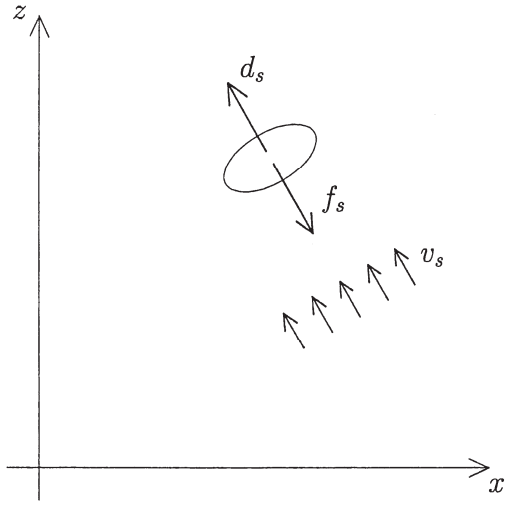
$$\left.\begin{aligned} d_n &= \alpha_{nn} v_n = \alpha_{nn} v\cos\beta \\ d_s &= \alpha_{ss} v_s = \alpha_{ss} v\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

と与えられる。したがって，浸透力の方向 γ（n 軸から反時計まわりにとる）は，

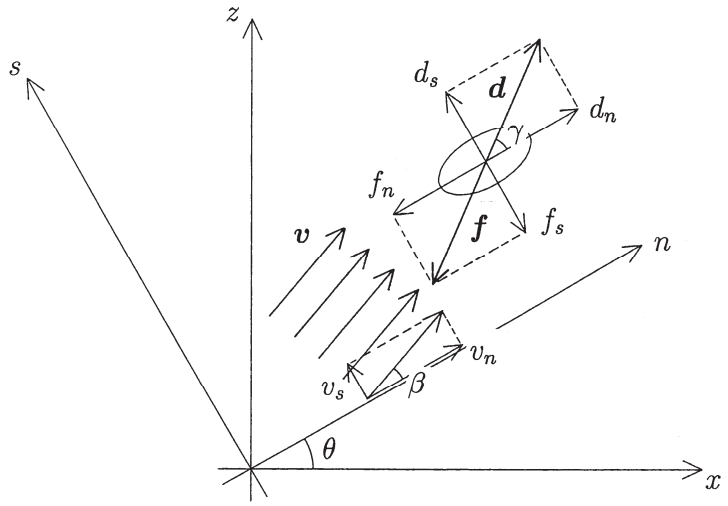
$$\begin{aligned} \gamma &= \tan^{-1}\frac{d_s}{d_n} \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_{ss}}{\alpha_{nn}}\tan\beta\right) \end{aligned}$$



(a) Flow in the direction of the long axis



(b) Flow in the direction of the short axis



(c) Flow in an arbitrary direction

Fig.8.2 二次元平面内の水の流れの中におかれた楕円形状粒子

$$\therefore\ \gamma > \beta \quad \left(\because\ \alpha_{ss}/\alpha_{nn} > 1\right) \tag{8.4}$$

となる。すなわち，一般的に水の流れの方向βと浸透力の方向γは異なることがわかる。

さて, (8.3)式をマトリックス表示すると,

$$\begin{Bmatrix} d_n \\ d_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{nn} & 0 \\ 0 & \alpha_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} \tag{8.5}$$

となる。$n-s$ 座標系における流速ベクトル$\{v_n, v_s\}^T$及び浸透力ベクトル$\{d_n, d_s\}^T$は, $x-z$ 座標系における流速ベクトル$\{v_x, v_z\}^T$及び浸透力ベクトル$\{d_x, d_z\}^T$と

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{8.6}$$

$$\begin{Bmatrix} d_n \\ d_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_n \\ d_s \end{Bmatrix} \tag{8.7}$$

の関係にある。(8.5)式を(8.6), (8.7)式を用いて整理すると,

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{nn} & 0 \\ 0 & \alpha_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{8.8}$$

となる。

ここで, $x-z$ 座標系における浸透力ベクトル$\{d_x, d_z\}^T$及び流速ベクトル$\{v_x, v_z\}^T$の間に,

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{8.9}$$

なる関係が成り立つものとすると, (8.8), (8.9)式から,

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{nn} & 0 \\ 0 & \alpha_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{8.10}$$

が成り立つ。抵抗性を表す係数α_{ij}は, 座標変換形式((8.10)式)の形からみて二階のテンソルであることがわかる。ただし, n, s 方向は主方向である。ここに, (8.9)式において, 抵抗性を表す係数マトリックス：

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}$$

を浸透力テンソルと呼ぶことにする。また, 土粒子の集合体の中を流れる水に関しても同様であると考える。

さて, ここで, 浸透力の合力 d と反対方向の力 f が制動力であり, x 方向の流速 v_x によって, 土粒子から水に x 方向と z 方向に作用する力を f_x', f_z'とすると,

$$f_x' = -\alpha_{xx} v_x \tag{8.11}$$

$$f_z' = -\alpha_{xz} v_x \tag{8.12}$$

と表される。ここに, α_{xx}, α_{xz} は x 方向の単位の流速によって浸透水から単位体積内の土粒子に x 方向及び z 方向に作用する力である。同様にして z 方向の流れ v_z によって, 土粒子から水に x 方向と z 方向に働く力 f_x''と f_z''は,

$$f_x'' = -\alpha_{zx} v_z \tag{8.13}$$

$$f_z'' = -\alpha_{zz} v_z \tag{8.14}$$

と表すことができる。ここに, α_{zx}, α_{zz} は z 方向の単位の流速によって浸透水から単位体積内の土粒子に x 方向及び z 方向に作用する力である。

このようにして, v_x と v_z によって単位体積内の土粒子に引き起こされる制動力ベクトル$\{f_x, f_z\}^T$は, (8.11)～(8.14)式をそれぞれ足し合わせたものとして表される。

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x' + f_x'' \\ f_z' + f_z'' \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} \tag{8.15}$$

8.2 二次元浸透場における浸透水の運動方程式

(8.15)式を用いると x, z 座標系における浸透水の運動方程式は次のように表すことができる。

(1) x 方向の運動方程式

Fig.8.3 を参考にして, 浸透水の x 方向の運動方程式(加速度が 0 の場合)が次のように導かれる。

$$p\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dz + f_x dx\,dz = p\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dz - \alpha_{xx} v_x\,dx\,dz - \alpha_{zx} v_z\,dx\,dz = 0$$

$$\therefore \left(\frac{\partial p}{\partial x}+\alpha_{xx}v_x+\alpha_{zx}v_z\right)dx\,dz=0$$

$$\therefore -\frac{\partial p}{\partial x}=\alpha_{xx}v_x+\alpha_{zx}v_z$$

$$\therefore -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma_w}+z\right)\gamma_w=\alpha_{xx}v_x+\alpha_{zx}v_z=-f_x$$

$$\left(\because -\frac{\partial z}{\partial x}=0\right)$$

$$\therefore i_x\gamma_w=\alpha_{xx}v_x+\alpha_{zx}v_z=-f_x \tag{8.16}$$

$$\left(\because -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma_w}+z\right)=-\frac{\partial h}{\partial x}=i_x\right)$$

$$\therefore i_x=\frac{\alpha_{xx}}{\gamma_w}v_x+\frac{\alpha_{zx}}{\gamma_w}v_z \tag{8.17}$$

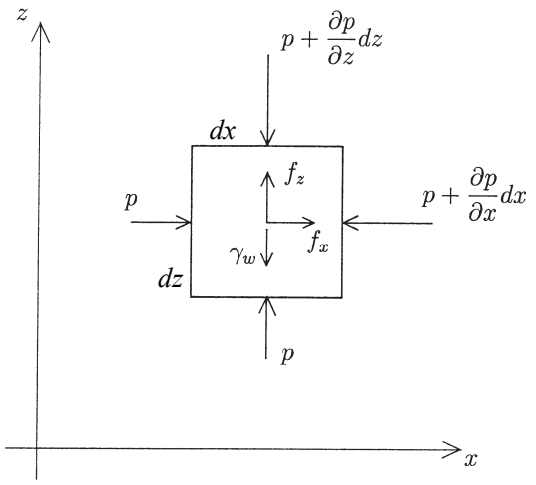


Fig.8.3　二次元浸透場における浸透水の運動方程式

(2) z 方向の運動方程式

(1)と同様にして，Fig.8.3 を参考にして，浸透水の z 方向の運動方程式(加速度が 0 の場合)が次のように導かれる。

$$p\,dx-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dx\right)dx+f_z dx\,dz-\gamma_w\,dx\,dz=p\,dx-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dx-\alpha_{xz}v_x\,dx\,dz-\alpha_{zz}v_z\,dx\,dz-\gamma_w\,dx\,dz=0$$

$$\therefore \left(\frac{\partial p}{\partial z}+\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}v_z+\gamma_w\right)dx\,dz=0$$

$$\therefore -\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma_w=\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}v_z$$

$$\therefore -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma_w}+z\right)\gamma_w=\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}v_z=-f_z$$

$$\therefore i_z\gamma_w=\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}v_z=-f_z \tag{8.18}$$

$$\left(\because -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma_w}+z\right)=-\frac{\partial h}{\partial z}=i_z\right)$$

$$\therefore i_z=\frac{\alpha_{xz}}{\gamma_w}v_x+\frac{\alpha_{zz}}{\gamma_w}v_z \tag{8.19}$$

x, z 方向の運動方程式(8.17), (8.19)式から

$$\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}=\frac{1}{\gamma_w}\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{8.20}$$

となるので, (8.20)式から，拡張されたダルシー則((2.11)式参照)が,

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix}=\gamma_w\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{8.21}$$

と導かれるのは明らかである。したがって，ダルシー則は浸透水の運動方程式の別表現であると考えることができる。

また, (8.16), (8.18), (8.20)式から,

$$-\begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} = \gamma_w \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{8.22}$$

となり, 特徴的な関係式：

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} = \gamma_w \tag{8.23}$$

が成立する。(8.23)式からα_{ij}と k_{ij} $(i, j = x, z)$ に関する次のような関係式が得られる。

$$\alpha_{xx} = \frac{k_{zz}}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \gamma_w \tag{8.24}$$

$$\alpha_{zx} = -\frac{k_{zx}}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \gamma_w \tag{8.25}$$

$$\alpha_{xz} = -\frac{k_{xz}}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \gamma_w \tag{8.26}$$

$$\alpha_{zz} = \frac{k_{xx}}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \gamma_w \tag{8.27}$$

または,

$$k_{xx} = \frac{\alpha_{zz}}{\alpha_{xx}\alpha_{zz} - \alpha_{xz}\alpha_{zx}} \gamma_w \tag{8.28}$$

$$k_{zx} = -\frac{\alpha_{zx}}{\alpha_{xx}\alpha_{zz} - \alpha_{xz}\alpha_{zx}} \gamma_w \tag{8.29}$$

$$k_{xz} = -\frac{\alpha_{xz}}{\alpha_{xx}\alpha_{zz} - \alpha_{xz}\alpha_{zx}} \gamma_w \tag{8.30}$$

$$k_{zz} = \frac{\alpha_{xx}}{\alpha_{xx}\alpha_{zz} - \alpha_{xz}\alpha_{zx}} \gamma_w \tag{8.31}$$

また, 浸透力ベクトル$\{d_x,\ d_z\}^T$は, 浸透水によって単位体積内の土粒子に作用する力であるが, 制動力ベクトル$\{f_x, f_z\}^T$と逆方向の力として定義することができる。すなわち, (8.22)式から,

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} = \gamma_w \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_w i_x \\ \gamma_w i_z \end{Bmatrix} \tag{8.32}$$

と表される。このように浸透力は流れの方向ではなく動水勾配の方向に働くことがわかる。

8.3 一次元拘束流れの場における浸透水の運動方程式

(8.24)～(8.27)式で表されるα_{xx}, α_{zx}, α_{xz}, α_{zz}の値は, (7.13), (7.14), (7.15), (7.16)式を用いると, k_{xx}, k_{zx}, k_{xz}, k_{zz}を介して,

$$\alpha_{xx} = \frac{1}{k_{x\,\mathrm{1DCF}}} \gamma_w \tag{8.33}$$

$$\alpha_{zx} = \frac{1}{k_{z\,\mathrm{1DCF}}} \left(-\frac{k_{zx}}{k_{xx}} \right) \gamma_w = \frac{1}{k_{z\,\mathrm{1DCF}}} \left(\frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z} \right) \gamma_w \tag{8.34}$$

$$\alpha_{xz} = \frac{1}{k_{x\,\mathrm{1DCF}}} \left(-\frac{k_{xz}}{k_{zz}} \right) \gamma_w = \frac{1}{k_{x\,\mathrm{1DCF}}} \left(\frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} \right) \gamma_w \tag{8.35}$$

$$\alpha_{zz} = \frac{1}{k_{z\,1\mathrm{DCF}}}\gamma_w \tag{8.36}$$

と表すことができる。

(1) x 方向の一次元拘束流れ

まず, x 方向の一次元拘束流れの場における運動方程式について考察する。流れが x 方向に拘束されると $v_x(\neq 0)$, $v_z(=0)$となるので, 制動力ベクトル$\{f_x, f_z\}^T$は(8.22), (8.33), (8.35)式から,

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} = -\gamma_w \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{xz} \end{bmatrix} v_x = -\gamma_w \begin{bmatrix} \dfrac{1}{k_{x\,1DCF}} v_x \\ \dfrac{1}{k_{x\,1DCF}} \left(\dfrac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} \right) v_x \end{bmatrix} \tag{8.37}$$

となる。したがって, Fig.8.4(a)を参考にして x 方向の一次元拘束流れに関連する運動方程式は, 次のようになる。

(i) x 方向について

$$p\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dz + f_x dx\,dz = 0$$

$$\therefore\ -\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma_w \frac{1}{k_{x\,1\mathrm{DCF}}} v_x = 0$$

$$\therefore\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z \right)\gamma_w - \gamma_w \frac{1}{k_{x\,1\mathrm{DCF}}} v_x = 0$$

$$\left(\because\ -\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \right)$$

$$\therefore\ v_x = k_{x1\mathrm{DCF}} \cdot i_x \tag{8.38}$$

$$\left(\because\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z \right) = -\frac{\partial h}{\partial x} = i_x \right)$$

(ii) z 方向について

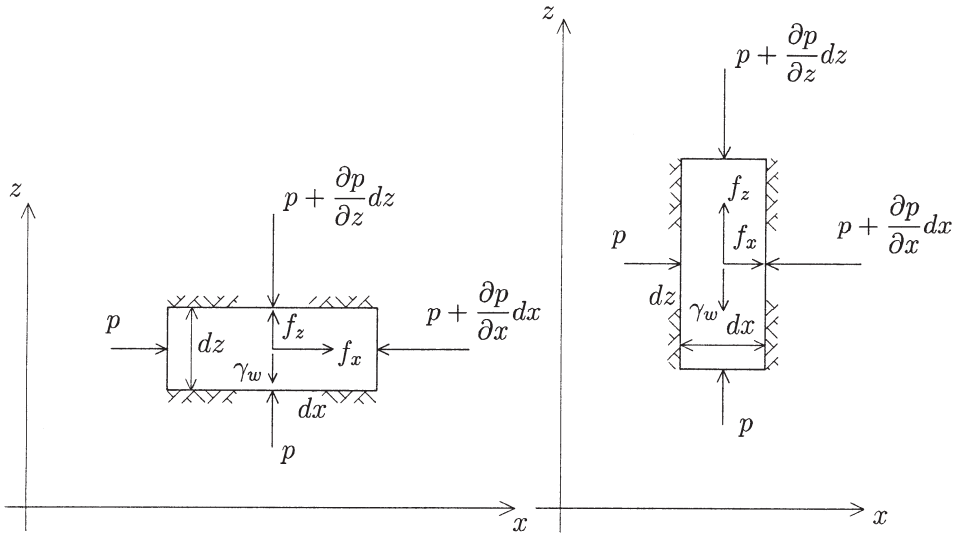
$$p\,dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx + f_z dx\,dz - \gamma_w\,dx\,dz = 0$$

$$\therefore\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z \right)\gamma_w - \gamma_w \frac{1}{k_{x\,1\mathrm{DCF}}} \frac{i_{z\,\mathrm{IND}}}{i_x} v_x = 0$$

$$\therefore\ i_z = \frac{1}{k_{x1\mathrm{DCF}}} \cdot i_{z\,\mathrm{IND}} \cdot \frac{v_x}{i_x}$$

$$\left(\because\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z \right) = -\frac{\partial h}{\partial z} = i_z \right)$$

$$\therefore\ i_z = i_{z\,\mathrm{IND}} \tag{8.39}$$



(a) x 方向の一次元拘束流れ　　(b) z 方向の一次元拘束流れ

Fig.8.4　一次元拘束流れ場における浸透水の運動方程式

$$\left(\because\ \frac{v_x}{i_x}=k_{x\,\mathrm{1DCF}}\right) \qquad \text{((7.7)式参照)}$$

このようにして, x 方向の一次元拘束流に関連する運動方程式は(8.38), (8.39)式で表されることがわかる。

(2) z 方向の一次元拘束流れ

次に, z 方向の一次元拘束流れの場における運動方程式について考察する。流れが z 方向に一次元的に拘束されると $v_z\ (\neq 0)$, $v_x\ (=0)$となるので, 制動力ベクトル$\{f_x, f_z\}^T$は (8.22), (8.34), (8.36)式から,

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} = -\gamma_w \begin{bmatrix} \alpha_{zx} \\ \alpha_{zz} \end{bmatrix} v_z = -\gamma_w \begin{bmatrix} \dfrac{1}{k_{z\,1DCF}}\left(\dfrac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)v_x \\ \dfrac{1}{k_{z\,1DCF}}v_z \end{bmatrix} \tag{8.40}$$

となる。したがって, Fig.8.4(b)を参考にして z 方向の一次元拘束流れに関連する運動方程式は, 次のようになる。

(i) x 方向について

$$p\,dz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dz+f_x dx\,dz=0$$

$$\therefore\ -\frac{\partial p}{\partial x}-\gamma_w\frac{1}{k_{z\,\mathrm{1DCF}}}\left(\frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)v_z=0$$

$$\therefore\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma_w}+z\right)\gamma_w-\gamma_w\frac{1}{k_{z\,\mathrm{1DCF}}}\left(\frac{i_{x\,\mathrm{IND}}}{i_z}\right)v_z=0$$

$$\left(\because\ -\frac{\partial z}{\partial x}=0\right)$$

$$\therefore\ i_x = \frac{1}{k_{z\,\mathrm{1DCF}}} \cdot i_{x\,\mathrm{IND}} \cdot \frac{v_z}{i_z}$$

$$\left(\because\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z \right) = -\frac{\partial h}{\partial x} = i_x \right)$$

$$\therefore\ i_x = i_{x\,\mathrm{IND}} \tag{8.41}$$

$$\left(\because\ \frac{v_z}{i_z} = k_{z\,\mathrm{1DCF}} \right) \qquad \text{((7.10)式参照)}$$

(ii) z 方向について

$$p\,dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx + f_z dx\,dz - \gamma_w\,dx\,dz = 0$$

$$\therefore\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z \right)\gamma_w - \gamma_w \frac{1}{k_{z\,\mathrm{1DCF}}} v_z = 0$$

$$\therefore\ v_z = k_{z\,\mathrm{1DCF}} \cdot i_z \tag{8.42}$$

$$\left(\because\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z \right) = -\frac{\partial h}{\partial z} = i_z \right)$$

このようにして, z 方向の一次元拘束流れに関連する運動方程式は(8.41), (8.42)式で表されることがわかる。

参考文献

1) 高野　瞳 (1975): 流体力学, 岩波書店, pp.211-214.
2) 川村三郎 (1982): 土砂水理学 1, 森北出版, pp.17-39.

第９章　座標変換の理論と異方及び等方透水性地盤の浸透流に関する支配方程式

9.1　序論

地盤は，浸透流に関して異方透水性を有する。そして，有限要素プログラムをコーディングして異方及び等方透水性地盤の浸透流を解析しようとする場合には，基礎方程式とその関係を明らかにする必要がある。一方，異方透水性地盤の浸透流は，座標変換によって等方透水性地盤の浸透流に帰着できること（すなわち，完全流体流れのポテンシャル流に帰着できること）が知られている。このことは，浸透流問題にポテンシャル理論が適用できること（すなわち，ポテンシャル理論の成果が浸透流問題の解析に利用できること）を意味している。このようにして，異方透水性地盤の浸透流問題は，1970 年ころ以前の，個人コンピューター（PC）が普及する前には，問題の地盤を座標変換した領域（等方透水性地盤）について解析を行い，その結果を座標変換の逆を用いて元に戻すことによって処理されてきた。現在では，PC の普及により数値解析が用いられるようになり，直接，異方透水性地盤の実領域に関して基礎方程式が解かれるようになった。

一方，浸透流理論を理解し，基礎方程式の関係を理解するためには，座標変換の理論とそれを用いた基礎方程式の理解が必要であり有用であると考えられる。ここでは，二次元地盤の浸透流について，その基礎方程式群とそれらの関係を明らかにするため，まず，異方透水性地盤の浸透流基礎方程式を明らかにし，その座標変換から，すなわち，座標軸の回転と伸縮から，透水係数テンソルの主方向を座標軸にとったときの浸透流基礎方程式，また等方透水性地盤の浸透流基礎方程式を順次導く。そして，二次元異方及び等方透水性地盤の浸透流理論体系（基礎方程式の関係）について考察する。また，「等方透水性地盤の浸透流理論（基礎方程式）」と「完全流体流れのポテンシャル理論（基礎方程式）」を対比して注意すべき事柄について述べる。

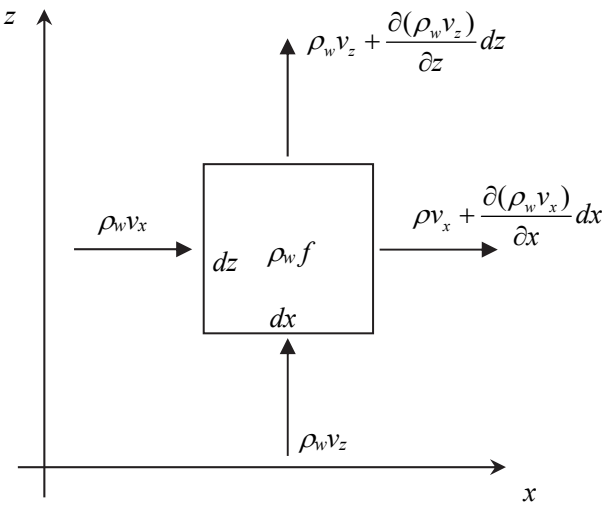


Fig.9.1 二次元地盤の微小要素に出入りする浸透流（質量に関して）

9.2　二次元異方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式

(1) 流量の連続式

Fig.9.1 に示すように，二次元 $x-z$ 座標系において，土中の微小な要素 $dx \times dz$ に着目する。単位時間内に x 方向に要素にはいる水の質量は，

$$\rho_w v_x dz - \left(\rho_w v_x + \frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} dx \right) dz = -\frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} dx\, dz$$

となる。同様に，単位時間内に z 方向に要素にはいる水の質量は，

$$-\frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial z} dx\, dz$$

と表される。ここに,

v_x: 水平方向の流量流速

v_z: 鉛直方向の流量流速

ρ_w: 水の密度

である。要素内における，単位時間，単位体積当たりの湧出し量（体積）を f とし，浸透水及び土骨格（Soil skeleton）が非圧縮性であるとすると，単位時間内に要素に流入し，または流出する全質量は 0 に等しくならなければならない。したがって,

$$-\frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x}-\frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial z}+\rho_w f=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial z}=\rho_w f \tag{9.1}$$

となる。浸透水の密度ρ_wが場所によって変化しない場合, (9.1)式は,

＜湧出しのある場合（$f\neq 0$）＞

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=f \tag{9.2a}$$

＜湧出しのない場合（$f=0$）＞

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{9.2b}$$

となる。(9.2b)式を流量の連続式という。

(2) 全水頭 h

点 P における全水頭 h は，圧力水頭 h_p と位置水頭 h_e で表され,

$$h=h_p+h_e=\frac{p}{\gamma_w}+z \tag{9.3}$$

となる。ここに,

h: 全水頭

$h_p=p/\gamma_w$: 圧力水頭

$h_e=z$: 位置水頭

p: 間隙水圧

$\gamma_w=\rho_w g$: 水の単位体積重量

ρ_w: 水の密度

g: 重力の加速度

z: 点 P の基準線 (Datum line or Datum)からの高さ

である。位置水頭 h_e は Fig.9.2 に示すように基準線から考えている点 P までの高さ z で表される。

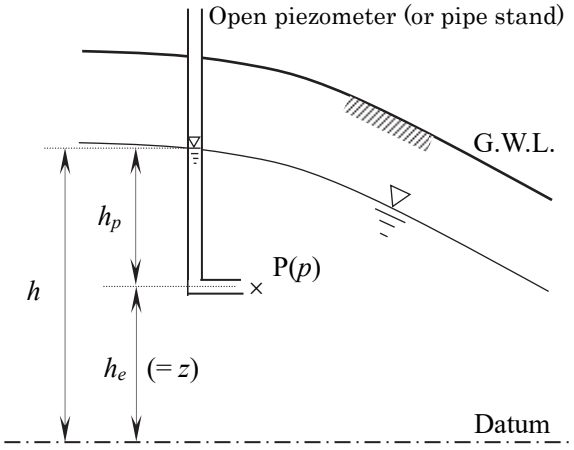


Fig.9.2　位置水頭，圧力水頭と全水頭の関係

(3) 動水勾配

動水勾配はある方向への全水頭の変化率（減少割合）で表され, x, z 方向の動水勾配 i_x, i_z は,

$$\left.\begin{aligned} i_x &= -\frac{\partial h}{\partial x} \\ i_z &= -\frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

で表される。(9.4)式において負の符号は流れの方向への動水勾配が正になるように付けられている。

浸透水の運動方程式は拡張されたダルシー則で表され，一般的に次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{9.5a}$$

または,

$$\left.\begin{aligned} v_x &= k_{xx} i_x + k_{zx} i_z \\ v_z &= k_{xz} i_x + k_{zz} i_z \end{aligned}\right\} \tag{9.5b}$$

ここに,

$[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}$: 透水係数テンソル

である。(9.5b)式は，また,

$$\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \begin{bmatrix} k_{zz} & -k_{zx} \\ -k_{xz} & k_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{9.6}$$

と表される。

さて，間隙水圧 p は(9.3)式と水の単位体積重量γ_wと密度ρ_wの関係式 $\gamma_w = \rho_w g$ を用いて,

$$p = \rho_w g h - \rho_w g z$$

と表されるが, x, z に関して偏微分すると, ρ_w が場所によって変化しない場合,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_w g \frac{\partial h}{\partial x} = -\rho_w g i_x \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_w g \frac{\partial h}{\partial z} - \rho_w g = -\rho_w g i_z - \rho_w g \end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

となる。また，Young の定理 [1] より（p に関する項を消去するために(9.7)式の混合微分（Mixed derivative）をとり，差し引きすると），次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \rho_w g \left(\frac{\partial i_z}{\partial x} - \frac{\partial i_x}{\partial z}\right) = \gamma_w \left(\frac{\partial i_z}{\partial x} - \frac{\partial i_x}{\partial z}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial i_z}{\partial x} - \frac{\partial i_x}{\partial z} = 0 \tag{9.8}$$

ここで，動水勾配 i_x, i_z は，全水頭 h の x, z 方向の（負の符号をつけた）偏微分であるので, (9.8)式は, h に関する混合微分の等価性（Equality of mixed partials）を表す。例えば，有限要素法（FEM）では積分方程式が要素ごとに計算されるが，要素内で h の値は線形要素（例えば CST 要素）の場合直線変化，二次アイソパラメトリック要素の場合二次曲線変化となり，混合微分の等価性（すなわち，二階導関数の対称性（Symmetry of second derivatives））が保証されている。さて, (9.8)式に(9.6)式を代入すると次式を得る（この式は透水係数 k_{ij} が場所によって（または FEM 要素内で）変化しない場合にも

成立する)。

$$\frac{1}{k_{xx}k_{zz}-k_{xz}k_{zx}}\left(k_{xx}\frac{\partial v_z}{\partial x}+k_{zx}\frac{\partial v_z}{\partial z}-k_{xz}\frac{\partial v_x}{\partial x}-k_{zz}\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=0 \tag{9.9}$$

また，拡張されたダルシー則(9.5a)式を(9.9)式の左辺に代入すると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k_{xx}k_{zz}-k_{xz}k_{zx}}\left(k_{xx}\left(-k_{xz}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-k_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}\right)+k_{zx}\left(-k_{xz}\frac{\partial^2 h}{\partial z\partial x}-k_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)\right.\\&\qquad\left.-k_{xz}\left(-k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-k_{zx}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}\right)-k_{zz}\left(-k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial z\partial x}-k_{zx}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)\right)\\&=\frac{1}{k_{xx}k_{zz}-k_{xz}k_{zx}}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\left(-k_{xx}k_{xz}+k_{xx}k_{xz}\right)+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}\left(-k_{xx}k_{zz}-k_{zx}k_{xz}+k_{xz}k_{zx}+k_{xx}k_{zz}\right)\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\left(k_{zz}k_{zx}-k_{zx}k_{zz}\right)\right)=0\end{aligned} \tag{9.10}$$

となり，明らかに(9.9)式を満たすことがわかる。ここで，$\dfrac{\partial^2 h}{\partial z\partial x}=\dfrac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}$ とした。

(4) 流れ関数

湧出しなしの場合，流量の連続式(9.2b)式が成り立ち，次の関係を満足する流れ関数ψ が存在することが知られている [2)]。

$$\begin{Bmatrix}v_x\\v_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\\-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{Bmatrix} \tag{9.11a}$$

すなわち，

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{\partial\psi}{\partial z}\\v_z&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{9.11b}$$

(9.11b)式を(9.2b)式の左辺に代入すると，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}=0 \tag{9.12}$$

となり，明らかに(9.2b)式を満たすことがわかる。

(5) 浸透水の支配方程式

(9.2b)式は, (9.5a)式を代入して整理すると，

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}+k_{zx}\frac{\partial h}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{xz}\frac{\partial h}{\partial x}+k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)=0$$

$$\therefore\ k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_{zx}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}+k_{xz}\frac{\partial^2 h}{\partial z\partial x}+k_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0 \tag{9.13a}$$

$$\therefore\ k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+2k_{xz}\frac{\partial^2 h}{\partial z\partial x}+k_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0 \tag{9.13b}$$

となり, (9.9)式は, (9.11b)式を代入して整理すると,

$$\frac{1}{k_{xx}k_{zz}-k_{zx}k_{xz}}\left(k_{xx}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+k_{zx}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}+k_{xz}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}+k_{zz}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=0 \tag{9.14a}$$

$$\therefore\ \frac{1}{k_{xx}k_{zz}-k_{zx}k_{xz}}\left(k_{xx}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2k_{xz}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}+k_{zz}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=0 \tag{9.14b}$$

となる。ここで, 透水係数テンソルの非対角成分の対称性 $k_{zx}=k_{xz}$ の性質[3)] を用いた。(9.13b), (9.14b)式は, 湧出しなしの場合の異方透水性地盤の浸透流における, 全水頭 h, 及び, 流れ関数ψに関する支配方程式である。二次元 $x-z$ 座標系における異方透水性地盤中の浸透流の基礎方程式(まとめ)を次ページの Fig.9.3 に示す(一般的な異方透水性地盤の場合の基礎方程式の関係を表す)。

9.3　浸透流の力学における座標変換の理論

前節 9.2 では異方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式を求めた。ここでは, これらの式が, 座標変換することによって等方透水性地盤の浸透流の基礎方程式に帰着できることを示す。

まず, 座標変換(座標軸の回転, および, 伸縮)のそれぞれに関して, 順に, その方法(座標変換理論)を示し, 実際にその方法を適用することによって,「異方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式」から, 最終的に「等方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式」を導出する。

9.3.1 座標軸の回転

(1) 座標変換の式

実際の地盤は, 異方透水性地盤であり, $x-z$ 座標系で表すことにする。Fig.9.4 に示すように, x 軸から反時計まわりにθ の方向に透水係数の主方向(最大主透水係数の方向)がありその方向を n とする。また, n から反時計まわりに 90°の方向を s とする。$x-z$ 座標系と $n-s$ 座標系の間には,

$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \tag{9.15a}$$

または,

$$\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} \tag{9.15b}$$

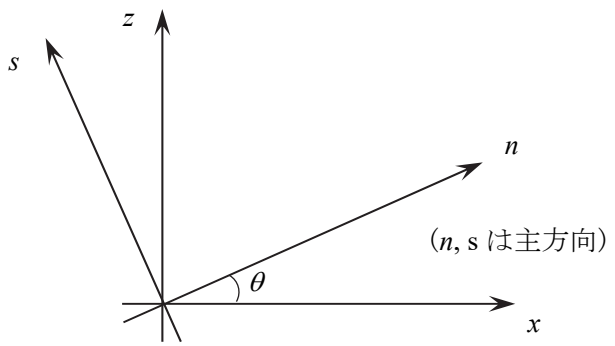


Fig.9.4　座標軸の回転($x-z$ 座標系とそれを反時計回りに 90°回転した $n-s$ 座標系の関係)

の関係がある。n, s 方向が透水係数の主方向であるとすると, 定義から明らかに,

$$k_{ns}=k_{sn}=0$$

となり, k_{nn}, k_{ss} と $k_{xx}, k_{zx}, k_{xz}, k_{zz}$ の間には, (3.5)式から次の関係式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & k_{ss} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{9.16a}$$

または,

＜流量の連続式＞

（湧出しなし）（非圧縮性流体）

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \qquad (9.2b)$$

$$\downarrow \uparrow$$

＜流れ関数 ψ の存在＞

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{\partial \psi}{\partial z} \\ v_z=-\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \qquad (9.11b)$$

＜非回転運動＞

（渦なし）

$$\frac{1}{k_{xx}k_{zz}-k_{zx}k_{xz}}\left(k_{xx}\frac{\partial v_z}{\partial x}+k_{zx}\frac{\partial v_z}{\partial z}-k_{xz}\frac{\partial v_x}{\partial x}-k_{zz}\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=0 \qquad (9.9)$$

$$\downarrow \uparrow$$

＜拡張された Darcy's formula の成立＞

$$\begin{cases} v_x=-k_{xx}\dfrac{\partial h}{\partial x}-k_{zx}\dfrac{\partial h}{\partial z}=k_{xx}i_x+k_{zx}i_z \\ v_z=-k_{xz}\dfrac{\partial h}{\partial x}-k_{zz}\dfrac{\partial h}{\partial z}=k_{xz}i_x+k_{zz}i_z \end{cases} \qquad (9.5a)$$

(9.9)式に代入

(9.2b)式に代入

＜h に関する支配方程式＞

$$k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+2k_{xz}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}+k_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0 \qquad (9.13b)$$

＜ψ に関する支配方程式＞

$$\frac{1}{k_{xx}k_{zz}-k_{zx}k_{xz}}\left(k_{xx}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+2k_{xz}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial z}+k_{zz}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (9.14b)$$

Fig.9.3　二次元 $x-z$ 座標系における異方透水性地盤中の浸透流の基礎方程式（まとめ）

ここに, v_x, v_z は流量流速, h は全水頭である。また, $\rightleftarrows$ は必要十分条件であることを表す。

（一般的な異方透水性地盤の場合の基礎方程式の関係を表す）

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{9.16b}$$

または, ((3.6a)式を参照して)

$$\left.\begin{aligned} k_{nn} &= k_{xx}\cos^2\theta + (k_{zx}+k_{xz})\sin\theta\cos\theta + k_{zz}\sin^2\theta \\ k_{sn} &= 0 = k_{zx}\cos^2\theta - k_{xz}\sin^2\theta + (k_{zz}-k_{xx})\sin\theta\cos\theta \\ k_{ns} &= 0 = -k_{zx}\sin^2\theta + k_{xz}\cos^2\theta + (k_{zz}-k_{xx})\sin\theta\cos\theta \\ k_{ss} &= k_{xx}\sin^2\theta - (k_{zx}+k_{xz})\sin\theta\cos\theta + k_{zz}\cos^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{9.16c}$$

ここで, 一般の関数$f=f(x, z)=f(n, s)$の偏微分について考える。一般的に, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$は(9.15b)式を用いて,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial n}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial s}\sin\theta \tag{9.17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial n}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial s}\cos\theta \tag{9.18}$$

となる。

次に, $x-z$ 座標系における流量の連続式(9.2b), Equality of mixed partials (9.9)式, 流速と流れ関数 ψ の関係式(9.11a), 流速と全水頭 h の関係式(9.5a), h に関する支配方程式(9.13a), ψ に関する支配方程式(9.14a)を座標変換し, $n-s$ 座標系における関係式を順に求める。

(2) 流量の連続式(9. 2b)の座標変換

$x-z$ 座標系における流量の連続式(9.2b)を座標変換し, $n-s$ 座標系における流量の連続の式を導く。$x-z$ 座標系における流速ベクトル$\{v_x, v_z\}^T$は, (9.15a)式の関係を参照して, $n-s$ 座標系における流速ベクトル$\{v_n, v_s\}^T$に次のように座標変換される。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} \tag{9.19a}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} v_x &= v_n\cos\theta - v_s\sin\theta \\ v_z &= v_n\sin\theta + v_s\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{9.19b}$$

ここで, $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}, \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$は, (9.17), (9.18), (9.19b)式を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial n}(v_n\cos\theta - v_s\sin\theta) - \sin\theta\frac{\partial}{\partial s}(v_n\cos\theta - v_s\sin\theta) \\ &= \frac{\partial v_n}{\partial n}\cos^2\theta - \frac{\partial v_s}{\partial n}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial v_n}{\partial s}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial v_s}{\partial s}\sin^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial n}(v_n\sin\theta + v_s\cos\theta) + \cos\theta\frac{\partial}{\partial s}(v_n\sin\theta + v_s\cos\theta) \\ &= \frac{\partial v_n}{\partial n}\sin^2\theta + \frac{\partial v_s}{\partial n}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial v_n}{\partial s}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial v_s}{\partial s}\cos^2\theta \end{aligned}$$

と変換される。これらの関係式を用いて, (9.2b)式は次のようになる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial v_n}{\partial n}+\frac{\partial v_s}{\partial s}=0 \tag{9.20}$$

(3) Equality of mixed partials (9.9)式の座標変換

前項(2)と同様にして，$\frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial z}$ は, (9.17), (9.18), (9.19b)式を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_z}{\partial x}&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial n}(v_n\sin\theta+v_s\cos\theta)-\sin\theta\frac{\partial}{\partial s}(v_n\sin\theta+v_s\cos\theta)\\&=\frac{\partial v_n}{\partial n}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial v_s}{\partial n}\cos^2\theta-\frac{\partial v_n}{\partial s}\sin^2\theta-\frac{\partial v_s}{\partial s}\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial z}&=\sin\theta\frac{\partial}{\partial n}(v_n\cos\theta-v_s\sin\theta)+\cos\theta\frac{\partial}{\partial s}(v_n\cos\theta-v_s\sin\theta)\\&=\frac{\partial v_n}{\partial n}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial v_s}{\partial n}\sin^2\theta+\frac{\partial v_n}{\partial s}\cos^2\theta-\frac{\partial v_s}{\partial s}\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

となる。これらの関係式及び前項(2)の関係式を用いて, (9.9)式の左辺（　）内の値は,

$$\begin{aligned}&k_{xx}\frac{\partial v_z}{\partial x}+k_{zx}\frac{\partial v_z}{\partial z}-k_{xz}\frac{\partial v_x}{\partial x}-k_{zz}\frac{\partial v_x}{\partial z}\\&=k_{xx}\left(\frac{\partial v_n}{\partial n}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial v_s}{\partial n}\cos^2\theta-\frac{\partial v_n}{\partial s}\sin^2\theta-\frac{\partial v_s}{\partial s}\sin\theta\cos\theta\right)\\&\quad+k_{zx}\left(\frac{\partial v_n}{\partial n}\sin^2\theta+\frac{\partial v_s}{\partial n}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial v_n}{\partial s}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial v_s}{\partial s}\cos^2\theta\right)\\&\quad-k_{xz}\left(\frac{\partial v_n}{\partial n}\cos^2\theta-\frac{\partial v_s}{\partial n}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial v_n}{\partial s}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial v_s}{\partial s}\sin^2\theta\right)\\&\quad-k_{zz}\left(\frac{\partial v_n}{\partial n}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial v_s}{\partial n}\sin^2\theta+\frac{\partial v_n}{\partial s}\cos^2\theta-\frac{\partial v_s}{\partial s}\sin\theta\cos\theta\right)\\&=\frac{\partial v_n}{\partial n}\left(k_{xx}\sin\theta\cos\theta+k_{zx}\sin^2\theta-k_{xz}\cos^2-k_{zz}\sin\theta\cos\theta\right)\\&\quad+\frac{\partial v_s}{\partial n}\left(k_{xx}\cos^2\theta+k_{zx}\sin\theta\cos\theta+k_{xz}\sin\theta\cos\theta+k_{zz}\sin^2\theta\right)\\&\quad+\frac{\partial v_n}{\partial s}\left(-k_{xx}\sin^2\theta+k_{zx}\sin\theta\cos\theta+k_{xz}\sin\theta\cos\theta-k_{zz}\cos^2\theta\right)\\&\quad+\frac{\partial v_s}{\partial s}\left(-k_{xx}\sin\theta\cos\theta+k_{zx}\cos^2\theta-k_{xz}\sin^2\theta+k_{zz}\sin\theta\cos\theta\right)\\&=k_{nn}\frac{\partial v_s}{\partial n}+k_{sn}\frac{\partial v_s}{\partial s}-k_{ns}\frac{\partial v_n}{\partial n}-k_{ss}\frac{\partial v_n}{\partial s}\\&=k_{nn}\frac{\partial v_s}{\partial n}-k_{ss}\frac{\partial v_n}{\partial s}\qquad(\because k_{ns}=k_{sn}=0)\end{aligned}$$

と変換され，したがって, (9.9)式は,

$$\frac{1}{k_{nn}k_{ss}}\left(k_{nn}\frac{\partial v_s}{\partial n}-k_{ss}\frac{\partial v_n}{\partial s}\right)=0 \tag{9.21}$$

となる。

ここで，上の計算において, (9.16a)式の行列式から得られた関係式：

$$\begin{vmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & k_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{vmatrix}$$

すなわち,

$$k_{nn}k_{ss} = k_{xx}k_{zz} - k_{zx}k_{xz} \tag{9.22}$$

を用いた。(9.22)式は, 問題の浸透領域における透水係数の不変量 II_3 である((5.17)式参照)。

(4) 流速と流れ関数 ψ の関係式(9. 11a)の座標変換

上述と同様にして, $x - z$ 座標系における流速と流れ関数の関係式(9.11a)は次のように座標変換される。まず, $n - s$ 座標系における流速ベクトル$\{v_n, v_s\}^T$は(9.19a)式の関係を参照して, $x - z$ 座標系における流速ベクトル$\{v_x, v_z\}^T$に次のように座標変換される。

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{9.23}$$

ここで, $\dfrac{\partial\psi}{\partial z}, -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ は, (9.17), (9.18)式の関係を用いて,

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial n}\sin\theta + \frac{\partial\psi}{\partial s}\cos\theta$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial n}\cos\theta + \frac{\partial\psi}{\partial s}\sin\theta$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial s} \\ -\dfrac{\partial\psi}{\partial n} \end{Bmatrix} \tag{9.24}$$

と座標変換される。したがって, 流速と流れ関数の関係式(9.11a)は, (9.23), (9.24)式より次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial s} \\ -\dfrac{\partial\psi}{\partial n} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial s} \\ -\dfrac{\partial\psi}{\partial n} \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial s} \\ -\dfrac{\partial\psi}{\partial n} \end{Bmatrix} \tag{9.25a}$$

または,

$$\left.\begin{aligned} v_n &= \frac{\partial\psi}{\partial s} \\ v_s &= -\frac{\partial\psi}{\partial n} \end{aligned}\right\} \tag{9.25b}$$

(5) 流速と全水頭 h の関係式(9.5a)の座標変換式

同様にして, $x-z$ 座標系における流速と全水頭 h の関係式(9.5a)は次のように座標変換される。まず, $\{v_n, v_s\}^T$ は(9.23)式で表される。$\dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial z}$ は, (9.17), (9.18)式の関係式を用いて,

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial n}\cos\theta-\frac{\partial h}{\partial s}\sin\theta$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial n}\sin\theta+\frac{\partial h}{\partial s}\cos\theta$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial n} \\ \dfrac{\partial h}{\partial s} \end{Bmatrix} \tag{9.26}$$

と変換される。したがって, $n-s$ 座標系における流速と全水頭 h の関係式は, (9.23), (9.5a), (9.26), (9.16a)式より次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial n} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial s} \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial n} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial s} \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_n \\ i_s \end{Bmatrix}$$

または,

$$\left.\begin{aligned} v_n &= -k_{nn}\frac{\partial h}{\partial n} = k_{nn}\, i_n \\ v_s &= -k_{ss}\frac{\partial h}{\partial s} = k_{ss}\, i_s \end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

ここに, i_n, i_s は, n, s 方向の動水勾配である。

$$\left.\begin{aligned} i_n &= -\frac{\partial h}{\partial n} \\ i_s &= -\frac{\partial h}{\partial s} \end{aligned}\right\} \tag{9.28}$$

(6) h に関する支配方程式(9.13a)の座標変換

h に関する支配方程式(9.13a)に関しても, 同様にして座標変換される。まず, 二階の偏微分 $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ は(9.17)式の関係を 2 回用いて,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial n}\cos\theta - \frac{\partial h}{\partial s}\sin\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\cos\theta - \frac{\partial h}{\partial s}\sin\theta\right)\cos\theta - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\cos\theta - \frac{\partial h}{\partial s}\sin\theta\right)\sin\theta \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial n^2}\cos^2\theta - \frac{\partial^2 h}{\partial n\partial s}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 h}{\partial s\partial n}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\sin^2\theta \end{aligned}$$

となる。同様にして, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}$ は(9.18), (9.17)式の関係を順に用いて,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z} &= \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\sin\theta + \frac{\partial h}{\partial s}\cos\theta\right)\cos\theta - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\sin\theta + \frac{\partial h}{\partial s}\cos\theta\right)\sin\theta \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial n^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 h}{\partial n\partial s}\cos^2\theta - \frac{\partial^2 h}{\partial s\partial n}\sin^2\theta - \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

となる。同様にして, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial z\partial x}$ は(9.17), (9.18)式の関係を順に用いて,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial z\partial x} &= \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\cos\theta - \frac{\partial h}{\partial s}\sin\theta\right)\sin\theta + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\cos\theta - \frac{\partial h}{\partial s}\sin\theta\right)\cos\theta \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial n^2}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 h}{\partial n\partial s}\sin^2\theta + \frac{\partial^2 h}{\partial s\partial n}\cos^2\theta - \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

となる。同様にして, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial z^2}$ は(9.18)式の関係を 2 回用いて,

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial n}\sin\theta + \frac{\partial h}{\partial s}\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\sin\theta + \frac{\partial h}{\partial s}\cos\theta\right)\sin\theta + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\sin\theta + \frac{\partial h}{\partial s}\cos\theta\right)\cos\theta \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial n^2}\sin^2\theta + \frac{\partial^2 h}{\partial n\partial s}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 h}{\partial s\partial n}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\cos^2\theta \end{aligned}$$

となる。したがって, (9.13a)式は，これらの関係を用いて,

$$
\begin{aligned}
&k_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_{zx}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial z}+k_{xz}\frac{\partial^2 h}{\partial z\partial x}+k_{zz}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\\
&=k_{xx}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2 h}{\partial n\partial s}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial n}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\sin^2\theta\right)\\
&\quad+k_{zx}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 h}{\partial n\partial s}\cos^2\theta-\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial n}\sin^2\theta-\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\sin\theta\cos\theta\right)\\
&\quad+k_{xz}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2 h}{\partial n\partial s}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial n}\cos^2\theta-\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\sin\theta\cos\theta\right)\\
&\quad+k_{zz}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 h}{\partial n\partial s}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial n}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\cos^2\theta\right)\\
&=\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}\left(k_{xx}\cos^2\theta+k_{zx}\sin\theta\cos\theta+k_{xz}\sin\theta\cos\theta+k_{zz}\sin^2\theta\right)\\
&\quad+\frac{\partial^2 h}{\partial n\partial s}\left(-k_{xx}\sin\theta\cos\theta+k_{zx}\cos^2\theta-k_{xz}\sin^2\theta+k_{zz}\sin\theta\cos\theta\right)\\
&\quad+\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial n}\left(-k_{xx}\sin\theta\cos\theta-k_{zx}\sin^2\theta+k_{xz}\cos^2\theta+k_{zz}\sin\theta\cos\theta\right)\\
&\quad+\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\left(k_{xx}\sin^2\theta-k_{zx}\sin\theta\cos\theta-k_{xz}\sin\theta\cos\theta+k_{zz}\cos^2\theta\right)\\
&=k_{nn}\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}+k_{sn}\frac{\partial^2 h}{\partial n\partial s}+k_{ns}\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial n}+k_{ss}\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\qquad(\because\ \text{(9.16c)式より})\\
&=k_{nn}\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}+k_{ss}\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\qquad(\because\ k_{sn}=k_{ns}=0)\\
&=0
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
k_{nn}\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}+k_{ss}\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}=0 \tag{9.29}
$$

となる。

(7) ψ に関する支配方程式(9. 14a)の座標変換

ψに関する支配方程式(9.14a)に関しても，前項(6)と同様にして，次のように座標変換される。まず，$\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ は(9.17)式の関係を 2 回用いて,

$$
\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial n}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial s}\sin\theta
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial s}\sin\theta\right)\cos\theta-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial s}\sin\theta\right)\sin\theta\\
&=\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial n\partial s}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

となる。同様にして，$\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}$ は (9.17), (9.18)式の関係を順に用いて,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial s}\sin\theta\right)\sin\theta+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\cos\theta-\frac{\partial\psi}{\partial s}\sin\theta\right)\cos\theta$$
$$=\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial n\partial s}\sin^2\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n}\cos^2\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\sin\theta\cos\theta$$

となる。同様にして，$\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}$ は(9.18), (9.17)式の関係を順に用いて，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\sin\theta+\frac{\partial\psi}{\partial s}\cos\theta\right)\cos\theta-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\sin\theta+\frac{\partial\psi}{\partial s}\cos\theta\right)\sin\theta$$
$$=\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial n\partial s}\cos^2\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n}\sin^2\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\sin\theta\cos\theta$$

となる。同様にして，$\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ は(9.18)式の関係を 2 回用いて，

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\partial\psi}{\partial n}\sin\theta+\frac{\partial\psi}{\partial s}\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\sin\theta+\frac{\partial\psi}{\partial s}\cos\theta\right)\sin\theta+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\sin\theta+\frac{\partial\psi}{\partial s}\cos\theta\right)\cos\theta$$
$$=\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial n\partial s}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\cos^2\theta$$

となる。したがって, (9.14a)式の（　）内は，これらの関係式を用いて，

$$k_{xx}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+k_{zx}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}+k_{xz}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}+k_{zz}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$
$$=k_{xx}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial n\partial s}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\sin^2\theta\right)$$
$$+k_{zx}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\sin\theta\cos\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial n\partial s}\sin^2\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n}\cos^2\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$+k_{xz}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial n\partial s}\cos^2\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n}\sin^2\theta-\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$+k_{zz}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial n\partial s}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\cos^2\theta\right)$$
$$=\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\left(k_{xx}\cos^2\theta+k_{zx}\sin\theta\cos\theta+k_{xz}\sin\theta\cos\theta+k_{zz}\sin^2\theta\right)$$
$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial n\partial s}\left(-k_{xx}\sin\theta\cos\theta-k_{zx}\sin^2\theta+k_{xz}\cos^2\theta+k_{zz}\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n}\left(-k_{xx}\sin\theta\cos\theta+k_{zx}\cos^2\theta-k_{xz}\sin^2\theta+k_{zz}\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$+\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\left(k_{xx}\sin^2\theta-k_{zx}\sin\theta\cos\theta-k_{xz}\sin\theta\cos\theta+k_{zz}\cos^2\theta\right)$$
$$=k_{nn}\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}+k_{sn}\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n}+k_{ns}\frac{\partial^2\psi}{\partial n\partial s}+k_{ss}\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\qquad(\because\ \text{(9.16c)式より})$$
$$=k_{nn}\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}+k_{ss}\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\qquad(\because\ k_{sn}=k_{ns}=0)$$

となる。このようにして, (9.14a)式は,

$$\frac{1}{k_{nn}k_{ss}}\left(k_{nn}\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}+k_{ss}\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\right)=0 \tag{9.30}$$

となる。ここで, (9.22)式の関係を用いた。

このようにして得られた, 二次元 $n-s$ 座標系における異方透水性地盤中の浸透流の基礎方程式(まとめ)を次ページの Fig.9.5 に示す(n, s が主方向の場合)。

9.3.2 座標軸の伸縮

(1) 座標変換の式

まず, 透水係数の成分 $k_{ij}\,(i, j = n, s)$を, ある任意の透水係数の値 k_0 で無次元化した値 k_{ij}^*として,

$$k_{ij}^*=\frac{k_{ij}}{k_0}\quad (i, j = n, s) \tag{9.31}$$

と表す。ここで, n, s と方向は同じであるが, それぞれ, $1\big/\sqrt{k_{nn}^*}$, $1\big/\sqrt{k_{ss}^*}$ 倍した座標 N, S を導入する(Fig.9.6)。したがって, n, s と N, S の間には,

$$\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{k_{nn}^*} & 0 \\ 0 & \sqrt{k_{ss}^*} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} N \\ S \end{Bmatrix} \tag{9.32a}$$

または,

$$\begin{Bmatrix} N \\ S \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \tag{9.32b}$$

の関係がある。ここに,

$$k_{nn}^*=\frac{k_{nn}}{k_0}$$

$$k_{ss}^*=\frac{k_{ss}}{k_0}$$

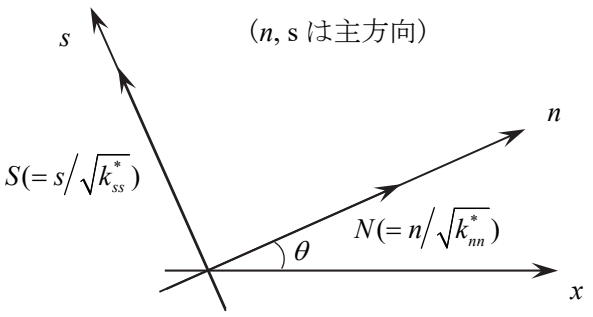


Fig.9.6 座標軸の伸縮($n-s$ 座標系と方向は同じであるが, それぞれの方向に, $1\big/\sqrt{k_{nn}^*}$, $1\big/\sqrt{k_{ss}^*}$ 倍した $N-S$ 座標系の関係)

である。浸透流の場は, 座標変換によって最終的に $N-S$ 座標系において等方透水性になることが知られている[2)]。ここでは, 座標変換によって $n-s$ 座標系における浸透流に関する基礎方程式から, $N-S$ 座標系における基礎方程式を導く。

ここで, 一般の関数 $f = f(n, s) = f(N, S)$の偏微分について考える。一般的に, $\dfrac{\partial f}{\partial n}, \dfrac{\partial f}{\partial s}$ は(9.32b)式を用いて((9.17), (9.18)式を参照),

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial n}+\frac{\partial f}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial n}=\frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}}\frac{\partial f}{\partial N} \tag{9.33}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}}\frac{\partial f}{\partial S} \tag{9.34}$$

となる。

次に, $n-s$ 座標系における流量の連続式(9.20), Equality of mixed partials (9.21), 流速と流れ関数 ψ

＜流量の連続式＞
（湧出しなし）（非圧縮性流体）

$$\frac{\partial v_n}{\partial n}+\frac{\partial v_s}{\partial s}=0 \qquad (9.20)$$

＜非回転運動＞
（渦なし）

$$\frac{1}{k_{nn}k_{ss}}\left(k_{nn}\frac{\partial v_s}{\partial n}-k_{ss}\frac{\partial v_n}{\partial s}\right)=0 \qquad (9.21)$$

↓↑

＜流れ関数 ψ の存在＞

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{\partial \psi}{\partial s} \\ v_s = -\dfrac{\partial \psi}{\partial n} \end{cases} \qquad (9.25b)$$

↓↑

＜拡張された Darcy's formula の成立＞

$$\begin{cases} v_n = -k_{nn}\dfrac{\partial h}{\partial n} = k_{nn}\, i_n \\ v_s = -k_{ss}\dfrac{\partial h}{\partial s} = k_{ss}\, i_s \end{cases} \qquad (9.27)$$

(9.21)式に代入

(9.20)式に代入

＜h に関する支配方程式＞

$$k_{nn}\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}+k_{ss}\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}=0 \qquad (9.29)$$

＜ψ に関する支配方程式＞

$$\frac{1}{k_{nn}k_{ss}}\left(k_{nn}\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}+k_{ss}\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}\right)=0 \qquad (9.30)$$

Fig.9.5　二次元 $n-s$ 座標系における異方透水性地盤中の浸透流の基礎方程式（まとめ）
（$n-s$ 座標系は, $x-z$ 座標系を反時計回りに θ だけ回転した変換座標系）
ここに, n, s は主方向, v_x, v_z は流量流速, h は全水頭である。また, ⇄ は必要十分条件であることを表す。

の関係式(9.25a), 流速と全水頭 h の関係式(9.27), h に関する支配方程式(9.29), ψ に関する支配方程式(9.30)を座標変換し, $N-S$ 座標系における関係式を順に求める。

(2) 流量の連続式(9.20)の座標変換

まず, $n-s$ 座標系における流量の連続式(9.20)を座標変換し, $N-S$ 座標系における流量の連続式を導く。$n-s$ 座標系における流速ベクトル$\{v_n, v_s\}^T$は, (9.32a)式の関係を参照して, $N-S$ 座標系における流速ベクトル$\{v_N, v_S\}^T$に次のように座標変換される。

$$\begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{k_{nn}^*} & 0 \\ 0 & \sqrt{k_{ss}^*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_N \\ v_S \end{Bmatrix} \tag{9.35a}$$

すなわち,

$$\left.\begin{aligned} v_n &= \sqrt{k_{nn}^*}\ v_N \\ v_s &= \sqrt{k_{ss}^*}\ v_S \end{aligned}\right\} \tag{9.35b}$$

ここで, $\dfrac{\partial v_n}{\partial n}, \dfrac{\partial v_s}{\partial s}$ は, (9.33), (9.34), (9.35b)式を用いて,

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} \frac{\partial v_n}{\partial N} = \frac{\partial v_N}{\partial N}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \frac{\partial v_s}{\partial S} = \frac{\partial v_S}{\partial S}$$

と変換される。したがって, (9.20)式は次のようになる。

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial v_s}{\partial s} = \frac{\partial v_N}{\partial N} + \frac{\partial v_S}{\partial S} = 0 \tag{9.36}$$

(3) Equality of mixed partials (9.21)の座標変換

前項(2)と同様にして, $\dfrac{\partial v_s}{\partial n}, \dfrac{\partial v_n}{\partial s}$ は, (9.33), (9.34), (9.35b)式を用いて,

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} \frac{\partial v_s}{\partial N} = \sqrt{\frac{k_{ss}^*}{k_{nn}^*}} \frac{\partial v_S}{\partial N}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \frac{\partial v_n}{\partial S} = \sqrt{\frac{k_{nn}^*}{k_{ss}^*}} \frac{\partial v_N}{\partial S}$$

となる。したがって, これらの関係式を用いて, (9.21)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k_{nn}k_{ss}} \left(k_{nn} \frac{\partial v_s}{\partial n} - k_{ss} \frac{\partial v_n}{\partial s} \right) \\ &= \frac{1}{k_{nn}k_{ss}} \left(k_{nn} \sqrt{\frac{k_{ss}^*}{k_{nn}^*}} \frac{\partial v_S}{\partial N} - k_{ss} \sqrt{\frac{k_{nn}^*}{k_{ss}^*}} \frac{\partial v_N}{\partial S} \right) \\ &= \frac{\sqrt{k_{nn}k_{ss}}}{k_{nn}k_{ss}} \left(\frac{\partial v_S}{\partial N} - \frac{\partial v_N}{\partial S} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k_{nn}k_{ss}}}\left(\frac{\partial v_S}{\partial N} - \frac{\partial v_N}{\partial S}\right)$$
$$= 0$$
$$\therefore \frac{1}{\sqrt{k_{nn}k_{ss}}}\left(\frac{\partial v_S}{\partial N} - \frac{\partial v_N}{\partial S}\right) = 0 \tag{9.37}$$

ここで，定義式 $k_{nn}^* = k_{nn} / k_0$, $k_{ss}^* = k_{ss} / k_0$ より，$k_{ss}^* / k_{nn}^* = k_{ss} / k_{nn}$, $k_{nn}^* / k_{ss}^* = k_{nn} / k_{ss}$ の関係を用いた。

(4) 流速と流れ関数の関係式(9. 25a)の座標変換

上述と同様にして，$n - s$ 座標系における流速と流れ関数の関係式(9.25a)は次のように座標変換される。まず，$N - S$ 座標系における流速ベクトル$\{v_N, v_S\}^T$は，(9.32b)式の関係を参照して，$n - s$ 座標系における流速ベクトル$\{v_n, v_s\}^T$に次のように座標変換される。

$$\begin{Bmatrix} v_N \\ v_S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} \tag{9.38}$$

ここに，$\frac{\partial \psi}{\partial s}, -\frac{\partial \psi}{\partial n}$ は，(9.34), (9.33)式の関係を用いて次のようになる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \frac{\partial \psi}{\partial S}$$
$$-\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} \frac{\partial \psi}{\partial N}$$
$$\therefore \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial s} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial S} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial N} \end{Bmatrix} \tag{9.39}$$

したがって，流速と流れ関数の関係式(9.25a)は，(9.38)式に，(9.25a), (9.39)式を代入し整理して次のように変換される。

$$\begin{Bmatrix} v_N \\ v_S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial s} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial n} \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial S} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial N} \end{Bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{k_{nn}^* k_{ss}^*}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{k_{nn}^* k_{ss}^*}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial S} \\ -\dfrac{\partial \psi}{\partial N} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^* k_{ss}^*}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial S} \\ -\dfrac{\partial \psi}{\partial N} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \frac{k_0}{\sqrt{k_{nn}\, k_{ss}}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial S} \\ -\dfrac{\partial \psi}{\partial N} \end{Bmatrix} \tag{9.40a}
$$

$$
\therefore \left. \begin{aligned} v_n &= \frac{k_0}{\sqrt{k_{nn} k_{ss}}} \frac{\partial \psi}{\partial S} \\ v_s &= -\frac{k_0}{\sqrt{k_{nn} k_{ss}}} \frac{\partial \psi}{\partial N} \end{aligned} \right\} \tag{9.40b}
$$

(5) 流速と全水頭 h の関係式(9.27)の座標変換

同様にして, $n-s$ 座標系における流速とポテンシャル関数 h の関係式(9.27)は次のように座標変換される。まず, $\{v_N, v_S\}^T$ は, (9.38)式で表される。$\dfrac{\partial h}{\partial n}, \dfrac{\partial h}{\partial s}$ は(9.33), (9.34)式の関係を用いて,

$$
\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} \frac{\partial h}{\partial N}
$$

$$
\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \frac{\partial h}{\partial S}
$$

$$
\therefore \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial n} \\ \dfrac{\partial h}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial N} \\ \dfrac{\partial h}{\partial S} \end{Bmatrix} \tag{9.41}
$$

と座標変換される。したがって, 流速と全水頭 h の関係式は, (9.38)式に, (9.27), (9.41)式を代入し整理して次のように変換される。

$$
\begin{Bmatrix} v_N \\ v_S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial n} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial s} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{nn} & 0 \\ 0 & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{k_{ss}^*}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial N} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial S} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \dfrac{k_{nn}}{k_{nn}^*} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_{ss}}{k_{ss}^*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial N} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial S} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial N} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial S} \end{Bmatrix}
$$

$$
= k_0 \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial N} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial S} \end{Bmatrix} \tag{9.42a}
$$

ここで，定義式 $k_{nn}^* = k_{nn} / k_0$, $k_{ss}^* = k_{ss} / k_0$ より, $k_{nn} / k_{nn}^* = k_{ss} / k_{ss}^* = k_0$ の関係を用いた。また, (9.42a)式は次のように表される。

$$
\left.\begin{aligned} v_N &= -k_0 \frac{\partial h}{\partial N} = k_0\, i_N = \frac{\partial \varphi}{\partial N} \\ v_S &= -k_0 \frac{\partial h}{\partial S} = k_0\, i_S = \frac{\partial \varphi}{\partial S} \end{aligned}\right\} \tag{9.42b}
$$

(9.42a), (9.42b)式からわかるように, k_0 は $N-S$ 座標系における透水係数である（$k_{NN} = k_{SS} = k_0$）。ここに,

$\varphi = -k_0 h$; 速度ポテンシャル (9.43)

$i_N = -\dfrac{\partial h}{\partial N}$; N 方向の動水勾配 (9.44a)

$i_S = -\dfrac{\partial h}{\partial S}$; S 方向の動水勾配 (9.44b)

である。

(6) h に関する支配方程式 (9.29) の座標変換

h に関する支配方程式(9.29)に関しても，同様にして座標変換される。まず，$\dfrac{\partial^2 h}{\partial n^2}$ は(9.33)式の関係を２回用いて,

$$
\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{k_{nn}^*}} \frac{\partial h}{\partial N}
$$

$$
\frac{\partial^2 h}{\partial n^2} = \frac{1}{k_{nn}^*} \frac{\partial^2 h}{\partial N^2}
$$

となる。同様にして，$\dfrac{\partial^2 h}{\partial s^2}$ は(9.34)式の関係を２回用いて,

$$\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{k_{ss}^{*}}}\frac{\partial h}{\partial S}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}=\frac{1}{k_{ss}^{*}}\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}$$

となる。したがって, (9.29)式は，これらの関係式を用いて,

$$\begin{aligned}
&k_{nn}\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}+k_{ss}\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\\
&=\frac{k_{nn}}{k_{nn}^{*}}\frac{\partial^2 h}{\partial N^2}+\frac{k_{ss}}{k_{ss}^{*}}\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\\
&=k_0\frac{\partial^2 h}{\partial N^2}+k_0\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\\
&=0
\end{aligned}$$

すなわち,

$$k_0\left(\frac{\partial^2 h}{\partial N^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\right)=0 \tag{9.45}$$

となる。

(7) ψ に関する支配方程式(9. 30)の座標変換

ψ に関する支配方程式(9.30)に関しても，前項(6)と同様にして，次のように座標変換される。まず，$\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}$ は(9.33)式の関係を 2 回用いて,

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=\frac{1}{\sqrt{k_{nn}^{*}}}\frac{\partial\psi}{\partial N}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}=\frac{1}{k_{nn}^{*}}\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}$$

となる。同様にして，$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}$ は(9.34)式の関係を２回用いて,

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{k_{ss}^{*}}}\frac{\partial\psi}{\partial S}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}=\frac{1}{k_{ss}^{*}}\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2}$$

となる。したがって, (9.30)式は，これらの関係式を用いて,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k_{nn}k_{ss}}\left(k_{nn}\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}+k_{ss}\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\right)\\
&=\frac{1}{k_{nn}k_{ss}}\left(\frac{k_{nn}}{k_{nn}^{*}}\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}+\frac{k_{ss}}{k_{ss}^{*}}\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2}\right)\\
&=\frac{1}{k_{nn}k_{ss}}\left(k_0\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}+k_0\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2}\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

または,

$$\frac{k_0}{k_{nn}k_{ss}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2}\right)=0 \tag{9.46}$$

となる。ここで, $k_{nn}/k_{nn}^*=k_{ss}/k_{ss}^*=k_0$ の関係を用いた。

このようにして得られた二次元 $N-S$ 座標系における異方透水性地盤中の浸透流の基礎方程式(まとめ)を Fig.9.7 に示す($N-S$ 座標変換断面では浸透流は等方透水性)。

9.4 二次元等方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式

前節 9.3 において, 二次元異方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式に座標変換をほどこすことによって, 二次元等方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式が得られることを示した。

(1) 変換された領域に関する等価透水係数 k_0

異方透水性地盤中の浸透流問題を解くとき, 問題の異方透水性地盤を座標変換によって等方透水性地盤に変換して取り扱う方法が用いられる [2)]。このとき, 通常, 変換された領域に関する等価な透水係数 k_0 として,

$$k_0=\sqrt{k_{nn}k_{ss}} \tag{9.47}$$

が与えられる [2)]。

これと同じ考え方に立って, $N-S$ 座標系における等方透水性地盤の透水係数 k_0 を(9.47)式とおき, 9.3.2 で座標変換によって得られた二次元等方透水性地盤中の浸透流に関する基礎方程式は次のようにまとめることができる。k_0 は, Harr の書籍 [2)] などにおいて, 幾何学的な考察から変換断面の等価透水係数として定義されているものであり, $k_0=\sqrt{k_{nn}k_{ss}}$ とおくことに整合性がある。

(2) 流量の連続式

まず, 流量の連続式は, (9.36)式から次のようになる。

$$\frac{\partial v_N}{\partial N}+\frac{\partial v_S}{\partial S}=0 \tag{9.48}$$

(3) Equality of mixed partials

次に, Equality of mixed partials は, (9.37)式から, (9.47)式の関係を用いて次のように与えられる。

$$\frac{1}{k_0}\left(\frac{\partial v_S}{\partial N}-\frac{\partial v_N}{\partial S}\right)=0 \tag{9.49}$$

ここで, Equality of mixed partials は完全流体では非回転運動(渦なし)の式を意味することがわかる。

(4) 流速と流れ関数 ψ の関係式

次に, 流速と流れ関数の関係式は, (9.40b)式から, (9.47)式の関係を用いて次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} v_N&=\frac{\partial\psi}{\partial S}\\ v_S&=-\frac{\partial\psi}{\partial N}\end{aligned}\right\} \tag{9.50}$$

＜流量の連続式＞
（湧出しなし）（非圧縮性流体）

$$\frac{\partial v_N}{\partial N}+\frac{\partial v_S}{\partial S}=0 \qquad (9.36)$$

＜非回転運動＞
（渦なし）

$$\frac{1}{\sqrt{k_{nn}k_{ss}}}\left(\frac{\partial v_S}{\partial N}-\frac{\partial v_N}{\partial S}\right)=0 \qquad (9.37)$$

$k_{nn}^{*}=k_{nn}/k_0$，$k_{ss}^{*}=k_{ss}/k_0$
k_0 は任意の透水係数

＜流れ関数 ψ の存在＞

$$\begin{cases} v_N=\dfrac{k_0}{\sqrt{k_{nn}k_{ss}}}\dfrac{\partial\psi}{\partial S} \\ v_S=-\dfrac{k_0}{\sqrt{k_{nn}k_{ss}}}\dfrac{\partial\psi}{\partial N} \end{cases} \qquad (9.40b)$$

＜速度ポテンシャル関数 φ の存在＞（$\varphi=-k_0 h$）

$$\begin{cases} v_N=-k_0\dfrac{\partial h}{\partial N}=k_0\, i_N=\dfrac{\partial\varphi}{\partial N} \\ v_S=-k_0\dfrac{\partial h}{\partial S}=k_0\, i_S=\dfrac{\partial\varphi}{\partial S} \end{cases} \qquad (9.42b)$$

(9.37)式に代入

(9.36)式に代入

＜h に関する支配方程式＞

$$k_0\left\{\frac{\partial^2 h}{\partial N^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\right\}=0 \qquad (9.45)$$

＜ψ に関する支配方程式＞

$$\frac{k_0}{k_{nn}k_{ss}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2}\right)=0 \qquad (9.46)$$

Fig.9.7 二次元 $N-S$ 座標系における異方透水性地盤中の浸透流の基礎方程式（まとめ）
（$N-S$ 座標系は, $n-s$ 座標系を，各方向にそれぞれ，$1/\sqrt{k_{nn}^{*}}$，$1/\sqrt{k_{ss}^{*}}$ 倍した変換座標系）
ここで, N, S 座標変換断面では浸透流は等方透水性であり, v_N, v_S は流量流速, h は全水頭である。また，⇄ は必要十分条件であることを表す。

(5) 流速と全水頭 h 及び速度ポテンシャル φ の関係式

また，流速と水頭 h 及び速度ポテンシャル φ の関係式は, (9.42b)式から次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} v_N &= -k_0 \frac{\partial h}{\partial N} = k_0\, i_N = \frac{\partial \varphi}{\partial N} \\ v_S &= -k_0 \frac{\partial h}{\partial S} = k_0\, i_S = \frac{\partial \varphi}{\partial S} \end{aligned}\right\} \tag{9.51}$$

(6) φ 及び h に関する支配方程式

まず, φ に関する支配方程式は, (9.45)式において, $\varphi = -k_0 h$ ((9.43)式) とおくことによって,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2} = 0 \tag{9.52}$$

となり, h に関する支配方程式は, (9.45)式そのもの，すなわち,

$$k_0 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial N^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial S^2} \right) = 0 \tag{9.53}$$

となる。

(7) ψ に関する支配方程式

ψ に関する支配方程式は, (9.46)式から, (9.47)式の関係を用いて次のように得られる。

$$\frac{1}{k_0} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial N^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial S^2} \right) = 0 \tag{9.54}$$

このようにして，二次元 $N - S$ 座標系における異方透水性地盤中の浸透流の基礎方程式(まとめ)を Fig.9.8 に示す。$N - S$ 座標変換断面では浸透流は等方透水性であり，等価透水係数を k_0 であるとした場合を表す。また, $\varphi = -k_0 h$ とする。

(8) 複素ポテンシャルと Cauchy - Riemann の関係式

(9.51), (9.52)式から,

$$\left.\begin{aligned} v_N &= \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \psi}{\partial S} \\ v_S &= \frac{\partial \varphi}{\partial S} = -\frac{\partial \psi}{\partial N} \end{aligned}\right\} \tag{9.55}$$

すなわち, Cauchy - Riemann の関係式が成り立つ。逆に, (9.55)式が成り立てば，正則な複素ポテンシャル $W(Z)$:

$$W(Z) = \varphi(N,S) + i\psi(N,S), \quad Z = N + iS \tag{9.56}$$

の存在が保証されることが示されている [2)]。

9.5 流体力学における完全流体の流れに関する関係式(等方透水性地盤の浸透流に対比される)

等方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式は，流体力学における完全流体の流れ [4)] に関する基礎方程式に対比される。次々頁に示す Fig.9.9 [5)] は，二次元 $x - y$ 座標系における完全流体の流れに関する基礎方程式の関係(まとめ)を表す。ここに, Fig.9.9 に示すように，二次元 $x - y$ 座標系に

＜流量の連続式＞

（湧出しなし）（非圧縮性流体）

$$\frac{\partial v_N}{\partial N}+\frac{\partial v_S}{\partial S}=0 \qquad (9.48)$$

＜非回転運動＞

（渦なし）

$$\frac{1}{k_0}\left(\frac{\partial v_S}{\partial N}-\frac{\partial v_N}{\partial S}\right)=0 \qquad (9.49)$$

$$k_0=\sqrt{k_{NN}k_{SS}}=\sqrt{k_{nn}k_{ss}}=\sqrt{k_{xx}k_{zz}}=\sqrt{k_{xx}k_{zz}-k_{xz}k_{zx}}$$

$$(k_{NN}=k_{SS}=k_0)$$

↓ ↑

＜流れ関数ψ の存在＞

$$\begin{cases} v_N=\dfrac{\partial\psi}{\partial S} \\ v_S=-\dfrac{\partial\psi}{\partial N} \end{cases} \qquad (9.50)$$

＜速度ポテンシャル関数φ の存在＞（$\varphi=-k_0 h$）

$$\begin{cases} v_N=-k_0\dfrac{\partial h}{\partial N}=k_0 i_N=\dfrac{\partial\varphi}{\partial N} \\ v_S=-k_0\dfrac{\partial h}{\partial S}=k_0 i_S=\dfrac{\partial\varphi}{\partial S} \end{cases} \qquad (9.51)$$

⇄

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial N}=\dfrac{\partial\psi}{\partial S} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial S}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial N} \end{cases} \qquad (9.55)$$

Cauchy-Riemann の関係

↓ ↑

正則な

複素ポテンシャル $W(Z)$の存在

$$W(Z)=\varphi+i\psi \qquad (9.56)$$
$$(Z=N+iS)$$

(9.49)式に代入

(9.48)式に代入

＜h またはφ に関する支配方程式＞

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial N^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}=0 \qquad (9.52)$$

$$k_0\left(\frac{\partial^2 h}{\partial N^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\right)=0 \qquad (9.53)$$

＜ψ に関する支配方程式＞

$$\frac{1}{k_0}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial S^2}\right)=0 \qquad (9.54)$$

Fig.9.8　二次元 $N-S$ 座標系における異方透水性地盤中の浸透流の基礎方程式（まとめ）

（$N-S$ 座標系は, $n-s$ 座標系において，$k_0=\sqrt{k_{NN}k_{SS}}=\sqrt{k_{nn}k_{ss}}=\sqrt{k_{xx}k_{zz}}$ $N=n/\sqrt{k_{nn}^*}$，$S=s/\sqrt{k_{ss}^*}$ とおいた場合に相当（Fig.9.6 参照））

ここで, N, S 座標変換断面では浸透流は等方透水性であり, v_N, v_S は流量流速, h は全水頭である。また，⇄は必要十分条件であることを表す。

等価透水係数を k_0 であるとした場合を表す。また, $\varphi=-k_0 h$ とする。

完全流体の流れ（等方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式の関係

＜流量の連続式＞
（湧出しなし）（非圧縮性流体）

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \qquad (9.57)$$

＜非回転運動＞
（渦なし）

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0 \qquad (9.58)$$

＜流れ関数 ψ の存在＞

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y=-\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \qquad (9.59)$$

＜速度ポテンシャル関数 ϕ の存在＞（$\phi=-k\,h$）

$$\begin{cases} v_x=-k\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v_y=-k\dfrac{\partial h}{\partial y}=\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \qquad (9.60)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \qquad (9.64)$$

Cauchy-Riemann の関係

(9.58)式に代入

(9.57)式に代入

＜φまたは h に関する支配方程式＞

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0 \qquad (9.61)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \qquad (9.62)$$

＜ψ に関する支配方程式＞

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0 \qquad (9.63)$$

正則な
複素ポテンシャル $W(z)$の存在

$$W(z)=\varphi+i\psi \qquad (9.65)$$
$$(z=x+iy)$$

Fig.9.9　二次元 $x-y$ 座標系における完全流体の流れに関する基礎方程式の関係（まとめ）
ここに，v_x, v_y は流量流速, k は透水係数，h は全水頭である（$\varphi=-k\,h$）。また，⇄ は必要十分条件であることを表す。
完全流体の流れは等方透水性地盤の浸透流に対比される。ここに，等方透水性地盤の浸透流の場合, v_x, v_y は(9.60)式（ダルシー則）で表され, $\varphi=-k\,h$ である。また, k は透水係数である。

おける，完全流体に関する流量の連続式（湧出しなし，非圧縮性流体），非回転運動（渦なし）の式，流速と流れ関数ψの関係式，流速と全水頭 h 及び速度ポテンシャルφ の関係式，φ, h，及び，ψ に関する支配方程式は，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{9.57}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0 \tag{9.58}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{9.59}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -k\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v_y &= -k\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{9.60}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0 \tag{9.61}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \tag{9.62}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0 \tag{9.63}$$

となる。ここに，等方透水性地盤の浸透流の場合，v_x, v_y は(9.60)式（ダルシー則）で表され，$\varphi = -k\,h$ である。また，k は透水係数である。

また，(9.59), (9.60)式から，

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{9.64}$$

すなわち，Cauchy - Riemann の関係式が成り立つ。逆に，(9.64)式が成り立てば，正則な複素ポテンシャル $W(z)$:

$$W(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y),\quad z=x+iy \tag{9.65}$$

の存在が保証されることが示されている [2) 5)]。

9.6　等方透水性地盤の浸透流基礎式

「二次元 $N-S$ 座標系の等方透水性地盤（変換断面）における浸透流に関する基礎方程式（Fig.9.8 参照）」と「二次元 $x-y$ 座標系における完全流体の流れに関する基礎方程式（Fig.9.9 参照）」を対比させて，注意すべき事柄について述べる。二次元 $N-S$ 座標系等方透水性地盤の浸透流における渦なしの式(9.49)，全水頭 h に関する支配方程式(9.53)，及び，流れ関数ψ に関する支配方程式(9.54)：

$$\frac{1}{k_0}\left(\frac{\partial v_S}{\partial N}-\frac{\partial v_N}{\partial S}\right)=0 \tag{9.49}$$

$$k_0\left(\frac{\partial^2 h}{\partial N^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial S^2}\right)=0 \tag{9.53}$$

$$\frac{1}{k_0}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial N^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial S^2}\right)=0 \tag{9.54}$$

は，二次元 $x-y$ 座標系完全流体の流れにおける渦なしの式(9.58)，全水頭 h に関する支配方程式(9.62)，及び，流れ関数 ψ に関する支配方程式(9.63)：

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0 \tag{9.58}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \tag{9.62}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0 \tag{9.63}$$

に，それぞれ対応する式である。これらの 3 つの式：二次元等方透水性地盤の浸透流における渦なしの式，全水頭 h に関する支配方程式，及び，流れ関数 ψ に関する支配方程式は，厳密にいうと，完全流体の流れ（から類推した等方透水性地盤の浸透流）におけるものと異なることを意味している。すなわち，二次元等方透水性地盤（とくに，不均質地盤の場合に問題）の浸透流に関する(9.49)，(9.53)，(9.54)式に対して，（完全流体に対比された）均質・等方透水性地盤の浸透流問題の場合には，透水係数の入らない(9.58)，(9.62)，(9.63)式となっている。ここで，不均質地盤とは，「二種類以上の地層からなる（それぞれ等方透水性地盤からなる）場合」や，「透水係数が空間的に分布する（要素ごとに透水係数が異なる）場合」を意味している。

結論から述べると，二次元等方透水性地盤の浸透流問題について，渦なしの式，全水頭 h 及び流れ関数 ψ に関して解析する場合，渦なしの式として(9.49)式，h 及び ψ の支配方程式として(9.53)及び(9.54)式を考えなければならない。これらの式は，(i) 浸透領域が一種類の等方透水性材料のみからなるときには解析結果が透水係数自体に関係しないが，(ii) 浸透領域が二種類以上の等方透水性材料からなるときには，解析結果が二種類以上の地層のそれぞれの透水係数の値に関係することを意味している。このことは，**第 11 章**の全水頭に関する有限要素近似の方法からもわかる。支配方程式に仮想水頭を乗じて全浸透領域について積分するというものであるが，その過程で構成領域ごとに（または構成要素ごとに）異なる透水係数値がカウントされなければならないからである。

ただし，不均質地盤の浸透流解析において，全水頭 h の代わりに，速度ポテンシャル関数 φ を用いる場合には，次に示すように，両者において同一の式（ラプラス方程式）を考えればよいことになる。これは，φ の中に透水係数が含まれているためである。

＜二次元 $N-S$ 座標系における異方透水性地盤の浸透流（座標変換により等方透水性地盤の浸透流に帰着）＞

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2}=0, \qquad \varphi=-k_0\,h \tag{9.52}$$

＜二次元 $x-z$ 座標系における完全流体の流れ（等方透水性地盤の浸透流に対比）＞

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\,,\qquad \varphi=-k\,h \tag{9.61}$$

この場合にも，当然のことではあるが，渦なしの式として(9.49)式，ψ の支配方程式として(9.54)式を考える必要がある。

9.7　結論

二次元異方透水性地盤における浸透流の理論体系を明らかにするため，また，基礎方程式の関係を理解するために，座標変換の方法を用いて基礎式を誘導し考察を行った。

まず，二次元 $x-z$ 座標系における異方透水性地盤の浸透流基礎方程式を明らかにした。次に，$x-z$ 座標系を回転した $n-s$ 座標系（主方向を座標軸とする）における浸透流基礎方程式を求めた。そして，$n-s$ 座標を伸縮した，$N-S$ 座標系（等方透水性地盤に変換された）における浸透流基礎方程式を求めた。

このようにして変換された等方透水性地盤の浸透流はポテンシャル流れとなる。また，「二次元 $N-S$ 座標系の等方透水性地盤（変換断面）における浸透流に関する基礎方程式」を「二次元 $x-y$ 座標系における完全流体の流れ（ポテンシャル流れ）に関する基礎方程式」と対比して，等方透水性地盤の浸透流理論体系（基礎方程式）において注意すべき事柄について議論した。そして，不均質地盤，すなわち，二種類以上の地層からなる（それぞれ等方透水性地盤からなる）場合や，透水係数が空間的に分布する（要素ごとに透水係数が異なる）場合の浸透流解析過程においては，渦なしの式，また，全水頭及び流れ関数の支配方程式に関して，構成領域ごとに（または構成要素ごとに）異なる透水係数の値を計算に取り込まなければならないことを示した。

参考文献

1) ウィキペディア(Wikipedia) (2015/04/28 07:47 UTC 版), https://ja.wikipedia.org/wiki/ヤングの定理)，二階導関数の対称性（英: symmetry of second derivatives)，または，混合微分の等価性（英: equality of mixed partials)；混合導関数（英: mixed derivative）の等価性を保証する条件を示す。

or 高校数学の美しい物語 ～定期試験から数学オリンピックまで 800 記事～，偏微分の順序交換の十分条件とその証明, https://mathtrain.jp/henbibunexchange, 20160515 更新

2) Harr, M.E. (1962) : Groundwater and Seepage, McGraw-Hill, New York, 101-111.

3) 田中　勉, Arnold Verruijt (2018): 異方透水性地盤における浸透水の流れ －透水係数テンソルとモール円－，神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 22 号, pp.140-162.

4) 高野　暲 (1975)：流体力学，岩波書店, 211-214.

5) 田中　勉 (2020)：二次元等方透水性地盤の浸透流と完全流体流れに関する基礎方程式，神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 24 号, pp.209-223.

第 10 章　全水頭 h に関する有限要素近似

二次元異方透水性地盤の浸透流解析，とくに，全水頭 h に関する有限要素近似について考える。ここでは，まず，二次元異方透水性地盤の浸透流について基礎式を示し，次に，弱形式表現による有限要素近似法について述べる。また，有限要素近似では，三角形定ひずみ要素（CST 要素（浸透流問題では定動水勾配要素））を用いた近似法，内節点消去による四角形 4 節点要素（4CST 要素），及び，四辺形アイソパラメトリック要素（8IS0 要素及び 9IS0 要素）を用いた方法について述べる。

10.1　二次元異方透水性地盤の浸透流基礎式

土中における水の移動(浸透流)について考える。ここでは，次の 3 つの仮定：

(i) 土粒子の間隙は水で飽和されているものとする。

(ii) 土粒子及び土骨格（Soil skeleton）は非圧縮性であるとする。

(iii) 浸透水の圧縮性を無視する。

の下に，時間的に変化のない定常浸透場について考える。

10.1.1 全水頭（Total hydraulic head）

土中のある点 P における間隙水圧を p とすると，全水頭 h は次式で表される。

$$h = h_p + h_e \tag{10.1a}$$

$$= \frac{p}{\gamma_w} + z \tag{10.1b}$$

ここに，

h：全水頭 (Total hydraulic head)

$h_p = p/\gamma_w$：圧力水頭 (Pressure head)

$h_e = z$：位置水頭 (Elevation head)

p：間隙水圧 (Pore water pressure)

γ_w：水の単位体積重量（= 9.8 kN/m^3）

z：基準線（Datum（or reference level））からの高さ（Height from the Datum）（Fig.10.1 参照）

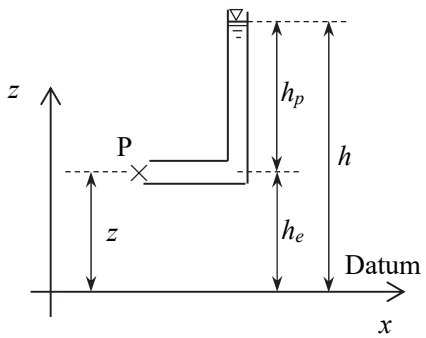


Fig.10.1　点 P における各種水頭

である。土中水は全水頭の高い所から低い所へ流れる。一般的に，浸透流の流速は非常に小さいので，水理学で一般的に考慮される速度水頭 h_v (= $v^2/2g$) は，h_p, h_e に比べて無視することができる。ここに，g は重力の加速度，v は流量流速である。

10.1.2 動水勾配（Hydraulic gradient）

全水頭 h の，ある方向への変化率をその方向の動水勾配と呼ぶ。x, z 方向の動水勾配 i_x, i_z は，

$$\begin{cases} i_x = -\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ i_z = -\dfrac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \tag{10.2}$$

と表される。ここに，負の符号は流れの方向の動水勾配を正にするために付けられたものである。

10.1.3 浸透水の運動方程式（ダルシー則）

浸透水の運動方程式：

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a} = 0 \tag{10.3}$$

ここに，

$\boldsymbol{F}$：流体に働く力

m：流体の質量

$\boldsymbol{a}$：流体に作用する加速度

は，ダルシー則（Darcy's formula）で表され，x, z 座標系において，一般的に次のように表される[1)]。

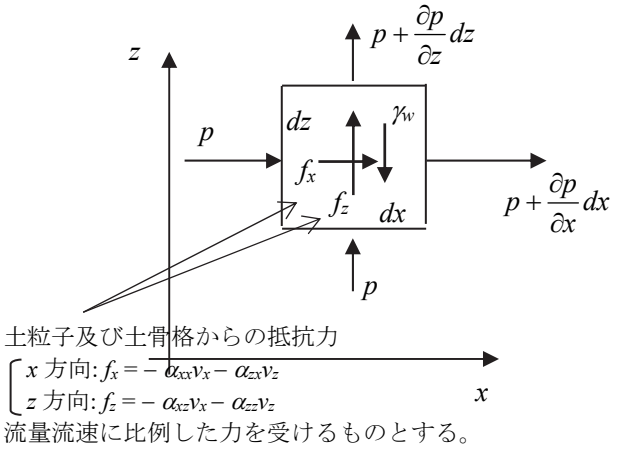


Fig.10.2　微小要素内の流体に作用する力

(1) x 方向の運動方程式

x 方向の運動方程式は, Fig.10.2 を参照して,

$$p\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dz + f_x\,dx\,dz = p\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dz - \alpha_{xx} v_x\,dx\,dz - \alpha_{zx} v_z\,dx\,dz = 0$$

$$\therefore\ -\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha_{xx} v_x + \alpha_{zx} v_z = -f_x \tag{10.4}$$

となる。ここに,

f_x：単位体積内の土粒子及び土骨格から流水に x 方向に作用する体積力

α_{xx}, α_{zx} : v_x, v_z によって流水から土粒子及び土骨格に x 方向に生じる抵抗力

v_x, v_z : x, z 方向の流量流速

である。ここで, $\partial z/\partial x = 0$ であるので,

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + z\,,$$

$$\therefore\ i_x = -\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{\gamma_w}$$

を用いて,

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma_w} + z\right)\gamma_w = -\frac{\partial h}{\partial x}\gamma_w = i_x \gamma_w$$

となり, (10.4)式は,

$$\gamma_w i_x = \alpha_{xx} v_x + \alpha_{zx} v_z \tag{10.5}$$

となる。

(2) z 方向の運動方程式

上述の (1) と同様にして, z 方向の運動方程式は,

$$p\,dx-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dx+f_z\,dx\,dz-\gamma_w\,dx\,dz=p\,dx-\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dx-\alpha_{xz}v_x\,dx\,dz-\alpha_{zz}v_z\,dx\,dz-\gamma_w\,dx\,dz=0$$

$$\therefore\ -\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma_w=\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}\,v_z=-f_z \tag{10.6}$$

となる。ここに,

f_z: 単位体積内の土粒子及び土骨格から流水に z 方向に作用する体積力

α_{xz}, α_{zz} : v_x, v_z によって流水から土粒子及び土骨格に z 方向に生じる抵抗力

である。ここで,

$$h=\frac{p}{\gamma_w}+z\,,$$

$$\therefore\ i_z=-\frac{\partial h}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma_w}+z\right)=-\frac{1}{\gamma_w}\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\gamma_w\right)$$

を用いて,

$$-\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma_w=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma_w}+z\right)\gamma_w=-\frac{\partial h}{\partial z}\gamma_w=i_z\gamma_w$$

となり, (10.6)式は,

$$i_z\,\gamma_w=\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}\,v_z \tag{10.7}$$

となる。したがって, (10.5), (10.7)式から,

$$\gamma_w\begin{Bmatrix}i_x\\i_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{xx}&\alpha_{zx}\\\alpha_{xz}&\alpha_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_x\\v_z\end{Bmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{Bmatrix}v_x\\v_z\end{Bmatrix}=\gamma_w\begin{bmatrix}\alpha_{xx}&\alpha_{zx}\\\alpha_{xz}&\alpha_{zz}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}i_x\\i_z\end{Bmatrix} \tag{10.8}$$

となる。ここで,

$$\begin{bmatrix}k_{xx}&k_{zx}\\k_{xz}&k_{zz}\end{bmatrix}=\gamma_w\begin{bmatrix}\alpha_{xx}&\alpha_{zx}\\\alpha_{xz}&\alpha_{zz}\end{bmatrix}^{-1}\quad\text{または,}\quad\begin{bmatrix}\alpha_{xx}&\alpha_{zx}\\\alpha_{xz}&\alpha_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{xx}&k_{zx}\\k_{xz}&k_{zz}\end{bmatrix}=\gamma_w \tag{10.9}$$

とおくと, (10.8)式は, (10.9), (10.2)式を用いて,

$$\begin{Bmatrix}v_x\\v_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{xx}&k_{zx}\\k_{xz}&k_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}i_x\\i_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{xx}&k_{zx}\\k_{xz}&k_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial h}{\partial x}\\-\dfrac{\partial h}{\partial z}\end{Bmatrix} \tag{10.10a}$$

となる。ここに,

$k_{xx}, k_{xz}, k_{zx}, k_{zz}$: 透水係数テンソルの成分

である。(10.10a)式をベクトル式で表すと,

$$\mathbf{v}=[\mathbf{D}]\,\mathbf{i} \tag{10.10b}$$

となる。このようにして, 拡張されたダルシー則((10.10a), (10.10b)式)は, 浸透水の運動方程式から導かれることがわかる。ここに,

$$[\mathbf{D}]=\begin{bmatrix}k_{xx}&k_{zx}\\k_{xz}&k_{zz}\end{bmatrix} \tag{10.11}$$

$$\mathbf{i} = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{10.12}$$

である。

10.1.4 流量の連続式

土の微小要素 $dx \times dz$ について考える。ρ_w を水の密度とすると，単位時間内に x 方向に要素に入る水の質量は, Fig.10.3 を参照して,

$$\rho_w v_x \, dx\, dz - \left\{ \rho_w v_x + \frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} dx \right\} dz = -\frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} dx\, dz$$

となる。同様に，単位時間内に z 方向に要素に入る水の質量は,

$$-\frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial z} dx\, dz$$

となる。要素内における単位時間，単位面積あたりの湧き出し量(体積)を f とし，浸透水，土粒子及び土骨格(Soil skeleton)が非圧縮性であるとすると，単位時間内に要素に入る水の全質量は 0 に等しくなければならない。したがって,

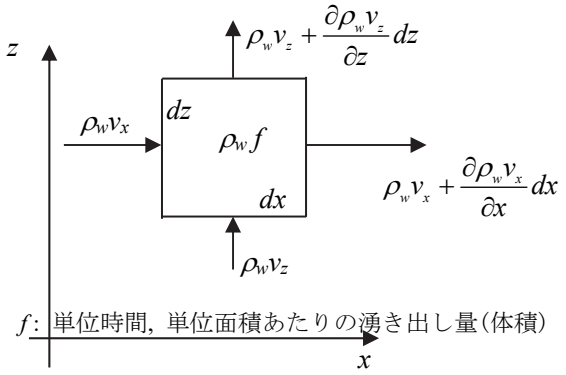


Fig.10.3　土の微小要素 $dx \times dz$ を通る浸透流（質量に関して）

$$-\frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} dx\, dz - \frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial z} dx\, dz + \rho_w f\, dx\, dz = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial z} = \rho_w f \tag{10.13}$$

となる。流体(ここでは水)の密度ρ_wが場所によって変化しない場合, (10.13)式は次のようになる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = f, \quad f\text{: 単位時間，単位面積あたりの湧き出し量(体積)} \tag{10.14}$$

(10.14)式を流量の連続式と呼ぶ。

10.1.5 浸透流を支配する方程式(全水頭，または，ポテンシャルに関する)

(1) 浸透流に関する支配方程式

(10.10a)式を(10.14)式に代入して整理すると次式を得る。

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zx}\frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{xz}\frac{\partial h}{\partial z} + k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z} \right) = f \tag{10.15}$$

(10.15)式は，透水係数の性質によって次のように表される。

(i) 均質等方の場合　$k_{xx} = k_{zz} = k$, $k_{xz} = k_{zx} = 0$ であり, (10.15)式は,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -\frac{f}{k} \quad (k_x = k_z = k) \qquad \text{ポアソン方程式 (Poisson's equation)} \tag{10.16}$$

で与えられる。

(ii) 均質等方で湧き出しがない場合　$f=0$ であり, (10.15)式は,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=\nabla^2 h=0 \qquad \text{ラプラス方程式(Laplace's equation)} \tag{10.17}$$

で与えられる。ここで,

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}: \text{ ラプラシアン(Laplacian)} \tag{10.18}$$

を表す。

ここで, 速度ポテンシャル φ を,

$$\varphi=-k\,h, \tag{10.19}$$

とおき,

$$v_x=-k\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_z=-k\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{10.20}$$

と定義すると, (10.17)式は,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=\nabla^2\varphi=0 \tag{10.21}$$

となり, 浸透流問題は, 電気の流れ, 熱の流れ, 完全流体の流れなどと同様に, ポテンシャル流れの問題となる。

10.2　浸透流の支配方程式と有限要素近似における弱形式表現

10.2.1 浸透流の支配方程式

浸透流の支配方程式は, 流量の連続式と浸透水の運動方程式から求められる。再掲すると次のようにまとめられる。

(1) 流量の連続式

流量の連続式は, 前述のとおり,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=f \qquad \text{in } S \tag{10.14}$$

と表される。ここに,

f: 単位時間, 単位面積当たりの湧出し量(体積)

S: 対象とする浸透領域

を表す。

(2) 浸透水の運動方程式

運動方程式は, 異方透水性地盤について, 一般的に, 拡張されたダルシー則：

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{10.10a}$$

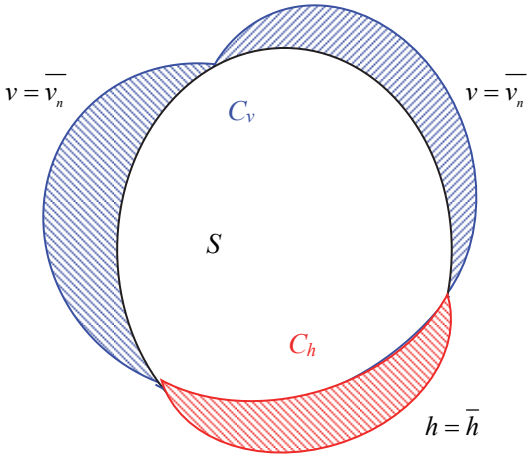


Fig.10.4　浸透流問題の境界条件

で表される。

(3) 浸透流の支配方程式

(10.10a)式を (10.14)式に代入することによって,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}+k_{zx}\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{xz}\frac{\partial h}{\partial x}+k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)+f=0 \text{ in S} \tag{10.22}$$

を得る。

浸透流問題は, 全水頭 h(または, 速度ポテンシャル φ (= $-k\ h$))に関して, 支配方程式(10.22)を, 境界条件：

(i) 基本境界(ディリクレ境界または水頭境界)

$$h=\bar{h} \quad \text{on } C_h \qquad (\bar{h}\text{は基本境界における全水頭値の規定値}) \tag{10.23}$$

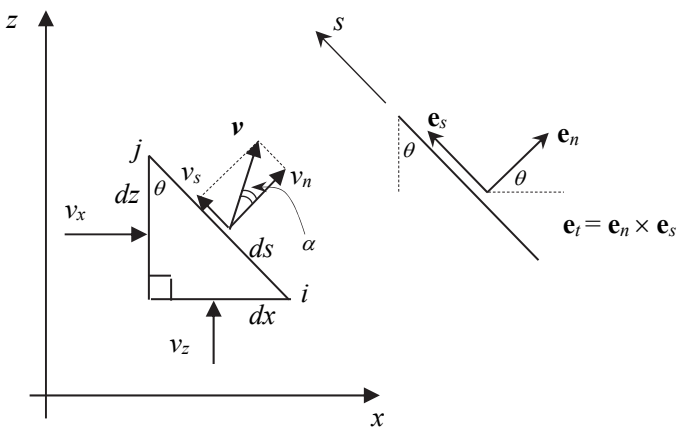
(ii) 自然境界(ノイマン境界または流速境界)

$$v=\overline{v_n} \quad \text{on } C_v \qquad (\overline{v_n}\text{は自然境界における法線方向の流速の規定値}) \tag{10.24}$$

の下に解くことによって, 解を得ることができる。ここに, C_h は基本境界(水頭境界), C_v は自然境界(流速境界)を表す。境界は一般的に C_h または C_v のどちらかで表される(Fig.10.4 参照)。

(4) 流速境界における流量の流入・流出量の計算方法

流速境界(線)上の点において, 境界に垂直な方向 n の流速 v_n は, Fig.10.5 を参照して, 微小要素における流量の連続式から, 次のように計算される。ここで, 境界に沿って長さ s をとる。



左図において, 各諸量には次の関係がある。

$\boldsymbol{n}$: $(n_x, n_z) = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dn \\ ds \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} dx = dn\cos\theta - ds\sin\theta \\ dz = dn\sin\theta + ds\cos\theta \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{dx}{dn} = \cos\theta = n_x \\ \dfrac{dz}{ds} = \sin\theta = n_z \end{cases}$$

Fig.10.5　流速境界 $i\,j$ における流量の計算

$$v_n ds = v_x dz + v_z dx \tag{10.25}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ v_n &= v_x\frac{dz}{ds}+v_z\frac{dx}{ds} \\ &= v_x\cos\theta + v_z\sin\theta \\ &= v_x n_x + v_z n_z \end{aligned} \tag{10.26}$$

ここで, v_n を一般的に求める方法について述べる。Fig.10.5 において, $\mathbf{e}_t$ は浸透領域を左側に見て, 右ねじが n 方向($\mathbf{e}_n$)から s 方向($\mathbf{e}_s$)に反時計回りに進む方向, すなわち, 紙面に垂直で手前(上向き

(Upward direction))に正をとる(すなわち, $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_s$ の関係がある)。$\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_t$ は, いずれも方向を表す単位ベクトルである。

要素への流入量(または, 流出量)q は, v_n を境界に沿って反時計回りに線積分することによって求めることができる。式で表すと次のようになる。

$$q\mathbf{e}_t = \int_{s=s_1}^{s=s_2} \mathbf{v} \times d\mathbf{s}$$

$$\therefore \quad q\mathbf{e}_t = \int_{s=s_1}^{s=s_2} \left\{ (v_n \mathbf{e}_n + v_s \mathbf{e}_s) \times \mathbf{e}_s ds \right\}$$

$$\therefore \quad q\mathbf{e}_t = \int_{s=s_1}^{s=s_2} v_n (\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_s) ds$$

$$\therefore \quad q\mathbf{e}_t = \int_{s=s_1}^{s=s_2} v_n \mathbf{e}_t ds$$

$$\because \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_s = 0$$

$$\therefore \quad q = \int_{s=s_1}^{s=s_2} v_n ds \qquad \text{(線積分)} \tag{10.27}$$

ここに, $v_n = v \sin \alpha$である。$q > 0$ のとき流出, $q < 0$ のとき流入を表す。$q\ \mathbf{e}_t$ の方向には物理的な意味はない。

10.2.2 有限要素近似における弱形式表現

支配方程式(10.22)の両辺に任意の仮想水頭 δh を乗じて領域について積分すると(言い換えると, 浸透領域に擾乱(じょうらん)を与えて整理すると),

$$\int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zx}\frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{xz}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z} \right) + f \right\} \delta h\, dS = 0 \tag{10.28}$$

となる。ここで, dS (= $dx\ dz$)は面積微分を表す。ガウスの発散定理(**付録５**参照)を用いて, (10.28)式は,

$$\begin{aligned} &\int_C \left\{ \left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zx}\frac{\partial h}{\partial z} \right) \delta h \cdot n_x + \left(k_{xz}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z} \right) \delta h \cdot n_z \right\} dC \\ &\quad - \int_S \left\{ \left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zx}\frac{\partial h}{\partial z} \right) \frac{\partial(\delta h)}{\partial x} + \left(k_{xz}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z} \right) \frac{\partial(\delta h)}{\partial z} \right\} dS + \int_S f\, \delta h\, dS = 0 \end{aligned} \tag{10.29}$$

となる。水頭境界の仮想水頭を 0 と仮定した場合(この場合, 有限要素近似は弱形式表現となる), (10.29)式は, (10.10)式を用いて,

$$\begin{aligned} &\int_S \left\{ \left(k_{xx}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zx}\frac{\partial h}{\partial z} \right) \frac{\partial(\delta h)}{\partial x} + \left(k_{xz}\frac{\partial h}{\partial x} + k_{zz}\frac{\partial h}{\partial z} \right) \frac{\partial(\delta h)}{\partial z} - f\, \delta h \right\} dS \\ &\quad + \int_{C_v} \left\{ \overline{v_x}\, n_x + \overline{v_z}\, n_z \right\} \delta h\, dC = 0 \end{aligned} \tag{10.30}$$

となり, ベクトル表示すると次のようになる。

$$\int_S \delta \mathbf{i}^T \mathbf{v}\, dS - \int_S f\, \delta h\, dS + \int_{C_v} \overline{v_n}\, \delta h\, dC = 0 \tag{10.31}$$

ここに,

$$\delta \mathbf{i} = \begin{Bmatrix} \delta i_x \\ \delta i_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial(\delta h)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(\delta h)}{\partial z} \end{Bmatrix} \text{: 仮想の動水勾配ベクトル} \tag{10.32}$$

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \text{ : 流量流速ベクトル} \tag{10.33}$$

$$\overline{v_n} = \overline{v_x} n_x + \overline{v_z} n_z \quad \text{on } C_v \tag{10.34}$$

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_z \end{Bmatrix} \text{ : 境界上における外向きの単位法線ベクトル} \tag{10.35}$$

$$\overline{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} \overline{v_x} \\ \overline{v_z} \end{Bmatrix} \text{ : 流速境界上において既定された流速} \tag{10.36}$$

である。

10.2.3 有限要素近似

全水頭hを領域内の有限個の節点における水頭h_β $(\beta = 1, 2, ..., n)$と場所の関数N_β $(\beta = 1, 2, ..., n)$の一次積和で表すことができるものとする。すなわち,

$$h \approx \sum_{\beta=1}^{n} N_\beta h_\beta ; \quad N_\beta = N_\beta(x, z) \ (\beta = 1, 2, \cdots, n) \text{ : 内挿関数,} \quad n \text{ : 節点の数,} \tag{10.37}$$

または,

$$h = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & .... & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{N} \end{bmatrix} \mathbf{H} \tag{10.38}$$

と表すことができるものとする。ここに, $\mathbf{H}$ は節点全水頭ベクトルであり,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & .... & N_n \end{bmatrix} \text{ : 内挿関数マトリックス} \tag{10.39}$$

$$\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{Bmatrix} \tag{10.40}$$

である。$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \end{bmatrix}$は内挿関数マトリックス(または, 座標について表す場合, 形状関数マトリックス)と呼ばれる。動水勾配ベクトル$\mathbf{i}$は, 内挿関数マトリックスの成分の導関数を用いて,

$$\mathbf{i} = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{H} \tag{10.41}$$

と表すことができる。ここに, [**B**] は全体「内挿関数の偏導関数マトリックス」として,

$$[\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial z}\end{bmatrix} \quad \text{：全体「動水勾配－全水頭マトリックス」} \tag{10.42}$$

と表される。同様にして, 流速ベクトル **v** は,

$$\mathbf{v}=\begin{Bmatrix}v_x\\ v_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{zx}\\ k_{xz} & k_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}i_x\\ i_z\end{Bmatrix}=[\mathbf{D}]\mathbf{i}=-[\mathbf{D}][\mathbf{B}]\mathbf{H} \tag{10.43}$$

と表すことができる。ここに, マトリックス $[\mathbf{D}]$ は,

$$[\mathbf{D}]=\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{zx}\\ k_{xz} & k_{zz}\end{bmatrix} \tag{10.44}$$

であり, 透水係数テンソルである。

さて, ギャラーキン法では, 次式に示すように, 仮想水頭 δh を, (10.37)式と同一の内挿関数を用いて表す。

$$\delta h \approx \sum_{\beta=1}^{n} N_\beta \delta h_\beta = [\mathbf{N}]\delta\mathbf{H} \tag{10.45}$$

$$\delta\mathbf{i}=-[\mathbf{B}]\delta\mathbf{H} \tag{10.46}$$

ここに,

$$\delta\mathbf{H}=\begin{Bmatrix}\delta h_1\\ \delta h_2\\ .\\ .\\ \delta h_n\end{Bmatrix} \tag{10.47}$$

である。(10.31)式に, (10.45), (10.46)式を代入して整理すると次のようになる。

$$\int_S\{-[\mathbf{B}]\delta\mathbf{H}\}^T\mathbf{v}\,dS-\int_S f(\delta\mathbf{H})^T[\mathbf{N}]^T dS+\int_{C_v}\overline{v_n}(\delta\mathbf{H})^T[\mathbf{N}]^T dC=0$$

$$\because\ [\mathbf{N}]\delta\mathbf{H}=\delta\mathbf{H}^T[\mathbf{N}]^T \qquad (\because\ (10.38)\text{式より})$$

$$\therefore\ \int_S-(\delta\mathbf{H})^T[\mathbf{B}]^T\mathbf{v}\,dS-\int_S(\delta\mathbf{H})^T f[\mathbf{N}]^T dS+\int_{C_v}(\delta\mathbf{H})^T\overline{v_n}[\mathbf{N}]^T dC=0$$

$$\because\ ([\mathbf{B}]\delta\mathbf{H})^T=(\delta\mathbf{H})^T[\mathbf{B}]^T$$

$$\therefore\ (\delta\mathbf{H})^T\left\{\int_S-[\mathbf{B}]^T\mathbf{v}\,dS-\int_S f[\mathbf{N}]^T dS+\int_{C_v}\overline{v_n}[\mathbf{N}]^T dC\right\}=0 \tag{10.48}$$

ここで, $(\delta\mathbf{H})^T$ は基本境界上を除いて任意に選ぶことができるので, (10.48)式から,

$$\int_S-[\mathbf{B}]^T\mathbf{v}\,dS-\int_S f[\mathbf{N}]^T dS+\int_{C_v}\overline{v_n}[\mathbf{N}]^T dC=0 \tag{10.49}$$

が得られる。(10.49)式に(10.43)式を代入することによって,

$$\int_S[\mathbf{B}]^T[\mathbf{D}][\mathbf{B}]\mathbf{H}\,dS=\int_S f[\mathbf{N}]^T dS-\int_{C_v}\overline{v_n}[\mathbf{N}]^T dC \tag{10.50}$$

が得られる。(10.50)式はマトリックス表示すると,

$$[\mathbf{K}]\mathbf{H} = \mathbf{P} \tag{10.51}$$

となる。(10.50), (10.51)式が有限要素近似式である。また, (10.50)式の左辺は要素ごとに計算されて,

$$[\mathbf{K}] = \int_S [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] dS = \sum_{e=1}^{m} [\mathbf{K}^e] \tag{10.52}$$

$$[\mathbf{K}^e] = \int_{S_e} [\mathbf{B}^e]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}^e] dS \tag{10.53}$$

となる。ここに,

$[\mathbf{K}]$ ：全体剛性マトリックス(または, 全体透水マトリックス)（全水頭 h 解析）

$[\mathbf{K}^e]$ ：要素剛性マトリックス(または, 要素透水マトリックス)（全水頭 h 解析）

$[\mathbf{B}^e]$ ：要素「動水勾配－全水頭マトリックス」(要素における **i** と **H** を関係づける)

である。また,

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} - \mathbf{Q} \tag{10.54}$$

$$\mathbf{F} = \int_S f[\mathbf{N}]^T dS = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{F}^e \tag{10.55}$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{S^e} f[\mathbf{N}^e]^T dS \tag{10.56}$$

$$\mathbf{Q} = \int_{C_v} \overline{v_n}[\mathbf{N}]^T dC = \sum_{e'=1}^{m'} \mathbf{Q}^{e'} \tag{10.57}$$

$$\mathbf{Q}^{e'} = \int_{C_v^{e'}} \overline{v_n}\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC \tag{10.58}$$

である。ここに, m は要素の数, スーパースクリプトの e は要素に関する値であることを表す。m' は流速境界辺の数, e' は流速境界辺の要素であることを表す。また, **F** は湧き出しによるフラックスベクトル, **Q** は自然境界(流速境界)におけるフラックスベクトル, [$\overline{\mathbf{N}^{e'}}$]は要素内挿関数マトリックスである。

有限要素解析では, (10.50), (10.51)式を解くことになる。各項は, 要素ごとに計算される。要素透水マトリックスは(10.53)式によって計算され, 境界条件は(10.58)式, 要素内の湧き出しは(10.56)式に従って計算処理される。このように, (10.50), (10.51)式の各項目が要素ごとに計算され領域全体についてまとめられると, 全水頭 h に関する n 元連立一次方程式が得られる。

以下では, 三角形定ひずみ要素を用いた近似(10.2.4 項)が議論される。

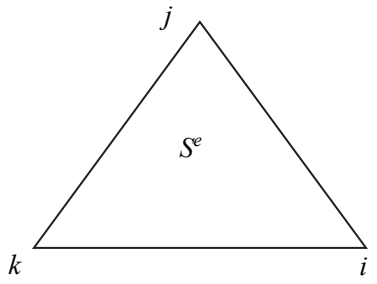


Fig.10.6　三角形要素 $i\,j\,k$

10.2.4 三角形定ひずみ要素を用いた近似

ここでは, CST 要素(Constant Strain Triangle（三角形定ひずみ要素))を用いた有限要素近似法について述べる。浸透流問題の場合には, 三角形定ひずみ要素は三角形定動水勾配要素と言い換えることができる。全水頭 h が三角形要素

S^e 内で次式のように線形に変化すると仮定する（三角形要素は線形要素である）。

$$h \approx a + bx + cz \tag{10.59}$$

係数 a, b, c は節点 i, j, k における全水頭の値（例えば，節点 i (x_i, z_i)においては $h = h_i$ など）から得られる，

$$\begin{cases} h_i = a + bx_i + cz_i \\ h_j = a + bx_j + cz_j \\ h_k = a + bx_k + cz_k \end{cases} \tag{10.60}$$

を解いて求められる。すなわち，

$$h = \begin{bmatrix} 1 & x & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & z \end{bmatrix} [\mathbf{A}] \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_i^e & N_j^e & N_k^e \end{bmatrix}}_{=\left[\mathbf{N}^e\right]} \underbrace{\begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix}}_{=\mathbf{H}^e} = \left[\mathbf{N}^e\right] \mathbf{H}^e \tag{10.61}$$

となる。ここに，

$$\left[\mathbf{N}^e\right] = \begin{bmatrix} N_i^e & N_j^e & N_k^e \end{bmatrix} \tag{10.62}$$

$$\mathbf{H}^e = \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix} \tag{10.63}$$

$$[\mathbf{A}] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} x_j z_k - x_k z_j & x_k z_i - x_i z_k & x_i z_j - x_j z_i \\ z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \tag{10.64}$$

要素の面積について

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{vmatrix} = 2A^e$$

$$= x_i (z_j - z_k) + x_j (z_k - z_i) + x_k (z_i - z_j)$$

$$= x_j z_k - x_k z_j - x_i z_k + x_k z_i + x_i z_j - x_j z_i$$

A^e: 要素の面積

$$N_i^e = \frac{1}{\Delta} \left\{ (x_j z_k - x_k z_j) + (z_j - z_k) x + (x_k - x_j) z \right\} \tag{10.65a}$$

$$N_j^e = \frac{1}{\Delta} \left\{ (x_k z_i - x_i z_k) + (z_k - z_i) x + (x_i - x_k) z \right\} \tag{10.65b}$$

$$N_k^e = \frac{1}{\Delta} \left\{ (x_i z_j - x_j z_i) + (z_i - z_j) x + (x_j - x_i) z \right\} \tag{10.65c}$$

であり，

N_i^e, N_j^e, N_k^e ：要素内挿関数

と定義される。また，

$$h = \left[\mathbf{N}^e\right] \mathbf{H}^e \tag{10.66}$$

と表され，$\left[\mathbf{N}^e\right]$を，$x, z$ に関して偏微分したもの（すなわち，要素「内挿関数の偏導関数マトリックス」）$\left[\mathbf{B}^e\right]$は，

$$\left[\mathbf{B}^e\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_k^e}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{10.67a}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \tag{10.67b}$$

と計算される。

弾性問題の場合，線形要素では，変位が要素内で直線的に変化するので，その一階微分（ひずみ）が要素内で一定となる。一方，浸透流問題の場合，線形要素では，全水頭が要素内で直線的に変化するので，その一階微分（動水勾配）が要素内で一定となる。

次に，要素透水マトリックス，境界条件，及び，要素内の湧き出しの計算処理方法について述べ，領域全体の節点全水頭ベクトルの計算方法について述べる。

(1) 要素透水マトリックス

要素透水マトリックス(10.53)式は次のように計算される。

$$\left[\mathbf{K}^e\right]=\int_{S_e}\underbrace{\left[\mathbf{B}^e\right]^T}_{\text{定数}}\left[\mathbf{D}\right]\left[\mathbf{B}^e\right]dS \tag{10.68a}$$

$$=\left[\mathbf{B}^e\right]^T\left[\mathbf{D}\right]\left[\mathbf{B}^e\right]A^e \tag{10.68b}$$

$$=\frac{A^e}{\Delta^2}\begin{bmatrix} z_j-z_k & x_k-x_j \\ z_k-z_i & x_i-x_k \\ z_i-z_j & x_j-x_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_j-z_k & z_k-z_i & z_i-z_j \\ x_k-x_j & x_i-x_k & x_j-x_i \end{bmatrix} \tag{10.68c}$$

(2) 自然境界 $C_v^{e'}$ におけるフラックスベクトル $Q_\alpha^{e'}$

要素 e' の自然境界（流速境界）$C_v^{e'}$ におけるフラックスベクトル $\mathbf{Q}^{e'}$ or $Q_\alpha^{e'}$ $(\alpha=i,j,k)$ は次のように計算される。

$$\mathbf{Q}^{e'}=\int_{C_v^{e'}}\overline{v_n}\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC=\int_{C_v^{e'}}\overline{v_n}\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T ds \tag{10.69}$$

または，成分表示して，

$$Q_\alpha^{e'}=\int_{C_v^{e'}}\overline{v_n}\,N_\alpha^{e'}ds=\int_{C_v^{e'}}\overline{v_n}\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T ds \quad (\alpha=i,j,k)$$

$$\begin{cases} \overline{N_i^{e'}}=1-\dfrac{s}{L^{e'}} \\ \overline{N_j^{e'}}=\dfrac{s}{L^{e'}} \\ \overline{N_k^{e'}}=0 \end{cases} \tag{10.70}$$

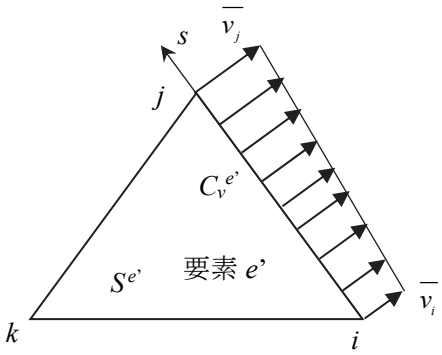


Fig.10.7　自然境界（流速境界）ij におけるフラックスベクトルの計算

ここに，s は節点 i から節点 j の方向に測った距離である（Fig.10.7 参照）。$\overline{N_i^{e'}}$，$\overline{N_j^{e'}}$，$\overline{N_k^{e'}}$ については，**付録９の A9.5 節**を参照のこと。また，$L^{e'}$ は流速境界のある要素 e' の辺 ij の長さである。ここで，境界上で与えられた流速 $\overline{v_n}$ は，直線分布と仮定すると，

$$\overline{v_n}=\overline{v_i}+\frac{\overline{v_j}-\overline{v_i}}{L^{e'}}s \tag{10.71}$$

となる。したがって，(10.69)式は次のように計算される。

$$Q_i^{e'}=\int_{C_v^{e'}}\overline{v_n}\,\overline{N_i^{e'}}\,dC$$

$$=\int_0^{L^{e'}}\left(\overline{v_i}+\frac{\overline{v_j}-\overline{v_i}}{L^{e'}}s\right)\left(1-\frac{s}{L^{e'}}\right)ds$$

$$= \frac{L^{e'}}{6}\left(2\overline{v_i} + \overline{v_j}\right) \tag{10.72}$$

$$Q_j^{e'} = \int_{C_v^{e'}} \overline{v_n}\ \overline{N_j^{e'}}\, dC$$

$$= \int_0^{L^{e'}} \left(\overline{v_i} + \frac{\overline{v_j} - \overline{v_i}}{L^{e'}} s \right) \frac{s}{L^{e'}} ds$$

$$= \frac{L^{e'}}{6}\left(\overline{v_i} + 2\overline{v_j}\right) \tag{10.73}$$

$$\therefore\ \mathbf{Q}^{e'} = \begin{bmatrix} Q_i^{e'} \\ Q_j^{e'} \\ Q_k^{e'} \end{bmatrix} = \frac{L^{e'}}{6} \begin{bmatrix} 2\overline{v_i} + \overline{v_j} \\ \overline{v_i} + 2\overline{v_j} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.74}$$

ちなみに，自然境界 ij より流入（または，流出）する流量 $Q_i^{e'} + Q_j^{e'}$ は，

$$Q_i^{e'} + Q_j^{e'} = \frac{L^{e'}}{6}\left\{ (2\overline{v_i} + \overline{v_j}) + (\overline{v_i} + 2\overline{v_j}) \right\}$$

$$= \frac{\overline{v_i} + \overline{v_j}}{2} L^{e'} \tag{10.75}$$

となる。

(3) 集中フラックスによるフラックスベクトル

集中フラックス Q によるフラックスベクトル（湧き出し，または，吸い込み）を計算するには，(10.69)式で，$\overline{v_n} = Q\delta(s)$ とおけばよい。ここに，$\delta(s)$ はディラックのデルタ関数である。

$$\mathbf{Q}^{e'} = \int_{C_v^e} \left[\overline{\mathbf{N}^e}\right]^T Q\delta(s)\, ds$$

$$= \int_{C_v^{e'}} \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{s}{L^{e'}} \\ \dfrac{s}{L^{e'}} \\ 0 \end{bmatrix} Q\delta(s)\, ds$$

$$= Q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.76}$$

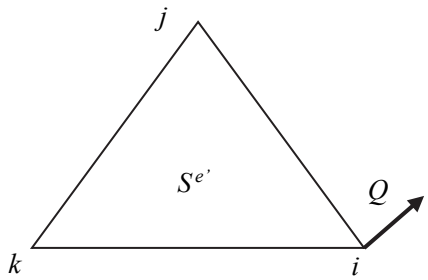


Fig.10.8　集中フラックスによるフラックスベクトル

(4) 要素内の湧き出し f によるフラックスベクトル

湧き出しが，要素内で一定（f = const.）の場合，それによるフラックスベクトル F_α^e ($\alpha = i, j, k$)は，次に示すように計算される。

$$F_\alpha^e = \int_{S^e} f\, N_\alpha^e\, dS = f \int_{S^e} N_\alpha^e\, dS\ , \qquad (\alpha = i, j, k) \tag{10.77}$$

(10.77)式は，まず，$\alpha = i$ の場合，(10.65a)式を用いて，

$$F_i^e = \int_{S^e} f \frac{1}{\Delta}\left\{(x_j z_k - x_k z_j) + (z_j - z_k)x + (x_k - x_j)z\right\} dS$$

と表される。ここで，

$$\int_{S^e} x\, dS = A^e x_0^e$$

$$\int_{S^e} z\, dS = A^e z_0^e$$

$A^e = \Delta/2$：要素の面積

(x_0^e, z_0^e)：要素の重心の座標

$$x_0^e = \frac{1}{3}\left(x_i + x_j + x_k\right)$$

$$z_0^e = \frac{1}{3}\left(z_i + z_j + z_k\right)$$

であるので，

$$F_i^e = f\frac{1}{\Delta}\left\{(x_j z_k - x_k z_j)A^e + (z_j - z_k)x_0^e A^e + (x_k - x_j)z_0^e A^e\right\}$$

$$= \frac{A^e}{\Delta} f\left\{(x_j z_k - x_k z_j) + (z_j - z_k)\frac{x_i + x_j + x_k}{3} + (x_k - x_j)\frac{z_i + z_j + z_k}{3}\right\}$$

$$= \frac{A^e}{3\Delta} f\left\{x_i(z_j - z_k) + x_j(z_k - z_i) + x_k(z_i - z_j)\right\}$$

$=\Delta$

$$= \frac{A^e}{3} f \qquad (10.78a)$$

となる。同様にして，$\alpha = j, k$ の場合，それぞれ，

$$F_j^e = \int_{S^e} f\, N_j^e\, dS = \frac{A^e}{3} f \qquad (10.78b)$$

$$F_k^e = \int_{S^e} f\, N_k^e\, dS = \frac{A^e}{3} f \qquad (10.78c)$$

となり，まとめると，

$$\mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \\ F_k^e \end{bmatrix} = \frac{A^e}{3} f \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (10.79)$$

となる。

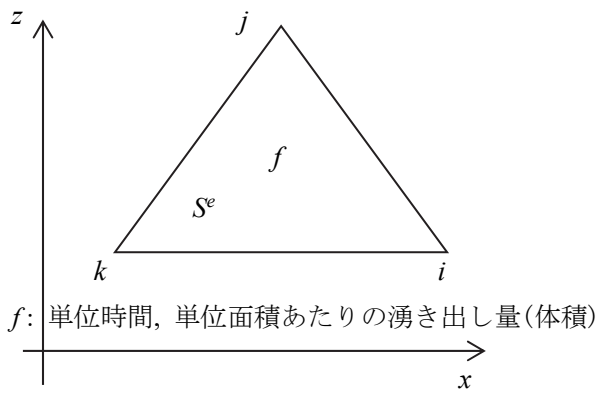


Fig.10.9　湧き出し f によるフラックスベクトル

(5) 領域全体にわたっての積分と節点全水頭ベクトルの解法

このようにして，要素ごとに計算された(10.50)式の各項が，領域全体についてまとめられると，全水頭 h に関する n 元連立一次方程式が得られる。この方程式を解くと節点全水頭ベクトルを求めることができる。ここで，基本境界は次のように取り扱われる。

節点全水頭ベクトル $\mathbf{H}$ の内，例えば，節点 α における全水頭が既知水頭値 $\overline{h_\alpha}$ であるとする。このとき，全体透水行列 $[\mathbf{K}]$ の α 行，α 列を消去し，フラックスベクトルを，

$P_i \rightarrow P_i - K_{i\alpha}\overline{h_\alpha}$ $(i = 1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, n))$

と修正する。また,

$K_{\alpha\alpha} = 1.0$

$P_\alpha = \overline{h_\alpha}$

と修正する。

このようにして n 元連立一次方程式を解いて得られた, 各節点における全水頭の値を用いて, 次に述べるように, 各要素内の動水勾配, 流速を計算することができる。

(6) 各要素内の動水勾配と流速の求め方

(i) 要素内の動水勾配

要素内の x 方向の動水勾配 i_x は次のようにして求めることができる。

$$\begin{aligned} i_x &= -\frac{\partial h}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{\alpha=i,j,k} N_\alpha^e h_\alpha\right) \\ &= \sum_{\alpha=i,j,k}\left(\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} h_\alpha\right) \end{aligned} \tag{10.80}$$

同様にして, 要素内の z 方向の動水勾配 i_z は,

$$\begin{aligned} i_z &= -\frac{\partial h}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{\alpha=i,j,k} N_\alpha^e h_\alpha\right) \\ &= \sum_{\alpha=i,j,k}\left(\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} h_\alpha\right) \end{aligned} \tag{10.81}$$

となる。まとめると,

$$\therefore \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = -\left[\mathbf{B}^e\right]\begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{Bmatrix} = -\left[\mathbf{B}^e\right]\mathbf{H}^e \tag{10.82}$$

となる。

(ii) 要素内の流速

要素内の流速は次のように計算される。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = -\left[\mathbf{D}\right]\left[\mathbf{B}^e\right]\mathbf{H}^e \tag{10.83}$$

(7) CST 要素及び 4CST 要素を用いた二次元 FEM 浸透流解析プログラム FEMNESD7

ここでは, まず, 4CST 要素を用いた有限要素近似法について述べる。Fig.10.10 に示すように, 四角形の重心を新たな節点とし, 四角形各辺の端点と重心点から構成される 4 つの三角形を考える。

このような内節点(内部自由度の点)は，四角形の端点である 4 節点とのみ関係し四角形の隣接要素節点には接続しないので，構造物全体の平衡方程式(全体剛性方程式)から消去することができる。浸透流問題の場合，「構造物全体の平衡方程式(全体剛性方程式)」は，「浸透領域全体の平衡方程式(全体透水方程式)」と言い換えられる。この消去は，静的縮小(Static condensation)と呼ばれる[2)]。四角形要素について，重心点を内節点とする 4 つの CST 要素からなる分割を考え，重心点を消去した(静的縮小した)四角形要素を 4CST 要素と呼ぶ。4CST 要素を用いた計算は，CST 要素のみを用いた計算より解の精度がかなり向上することが知られている[2)]。

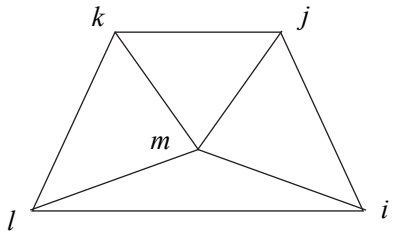


Fig.10.10　4CST 要素 $ijkl$ (m は内節点(重心点))

著者らは, CST 要素及び 4CST 要素を用いた二次元 FEM 浸透流解析プログラム FEMNESD7C を開発し断面二次元，及び，平面二次元問題の浸透流解析を行っている(**参考文献** 3 を参照のこと)。

10.2.5 四辺形アイソパラメトリック要素を用いた浸透流解析プログラム FEMSEE47C

アイソパラメトリック要素とは、形状関数と内挿関数が同一である要素のことを意味する。二次元異方透水性地盤において，四辺形８節点アイソパラメトリック要素(8ISO)を用いた有限要素近似法を**付録６**に，四辺形９節点アイソパラメトリック要素(9ISO)を用いた有限要素近似法を**付録７**に示す。

また, 8ISO 有限要素近似(**付録６**)では，ガウス･ルジャンドルの数値積分(**付録８**参照)を用いて，要素透水マトリックスの計算，境界条件と要素内の湧き出しの処理計算，領域全体の節点全水頭ベクトルの計算，及び，各要素内の動水勾配と流速の計算を行う方法について，次の項目(1)～(6)に沿って示した。

(1) 要素透水マトリックス
(2) 自然境界におけるフラックスベクトル
(3) 集中フラックスによるフラックスベクトル
(4) 要素内の湧き出し f によるフラックスベクトル
(5) 領域全体にわたっての積分
(6) 各要素内の動水勾配と流速の求め方

計算処理の方法(1)～(6)は, 9ISO 有限要素近似(**付録７**)においても同様である。

10.2.6 CST 要素は Iso parametric element か？

「CST 要素は Iso parametric element か？」どうかについては，**付録９**において考察した。そして、CST 要素に関して，形状関数と内挿関数は同一であり、CST 要素はアイソパラメトリック要素であるといえることを示した。

10.3　結論

二次元異方透水性地盤の浸透流解析，とくに，全水頭 h に関する有限要素近似について考察した。ここでは，まず，二次元浸透流について基礎式を示し，次に，弱形式表現による有限要素近似

法について述べた。また，有限要素近似では，まず, CST 要素（三角形定ひずみ要素，浸透流問題では定動水勾配要素）を用いた方法，及び, 4CST 要素（重心に静的縮小点をもつ, 4 つの三角形要素からなる四角形要素）を用いた方法について述べた。そして，四辺形アイソパラメトリック要素（8ISO 要素及び 9ISO 要素）を用いた方法について議論した。

アイソパラメトリック要素は形状関数と内挿関数が同一である要素のことを意味する。8ISO 要素及び 9ISO 要素の形状関数は座標に関する二次関数で表されるので，座標に関するその一階微分，すなわち，動水勾配は座標に関する一次関数となる。また，要素の境界は二次曲線で近似される。

次に, CST 要素はアイソパラメトリック要素かどうかについて考察した。そして、CST 要素において，形状関数と内挿関数は同一であり、CST 要素はアイソパラメトリック要素であると言えることを示した。CST 要素の形状関数は座標に関する一次関数で表されるので，その一階微分（すなわち，動水勾配）は Constant（一定）となる。また，要素の境界は直線で近似される。

併せて**参考文献** 4 を参照されたい。

付録５　ガウスの発散定理の証明

付録６　四辺形８節点アイソパラメトリック要素を用いた近似

付録７　四辺形９節点アイソパラメトリック要素を用いた近似

付録８　ガウス・ルジャンドルの数値積分と積分点

付録９　CST 要素は Iso parametric element か？

参考文献

1) 田中　勉, Arnold Verruijt (2019): 異方透水性地盤における一次元拘束流れと一次元透水試験, 神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 23 号, pp.264-285.

2) C.S.デサイ・J.F.アーベル著（山本善之訳）(1974)：マトリックス有限要素法－基本理論とその応用－，科学技術出版社, pp.136-138.

3) 田中　勉，景山敏一 (1995)：浸透流問題における各種数値解析法とフローネット法，神戸大学農学部研究報告，第 21 巻，第 2 号, pp.157～169.

4) 田中　勉, Arnold Verruijt (2021)：二次元異方透水性地盤の浸透流解析　－全水頭に関する有限要素近似－，神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 25 号, pp.257-296.

第 11 章　流れ関数ψ に関する支配方程式と有限要素近似

二次元異方透水性地盤の浸透流解析，とくに，流れ関数ψに関する有限要素近似について考える。ここでは，まず，本論に入る前に浸透流の基礎知識として，全水頭，動水勾配，ダルシー則，運動方程式，浸透力，混合微分の等価性，及び，流量の連続式と流れ関数について述べ，次に，流線と等ポテンシャル線の関係（すなわち，流速の方向と動水勾配の方向の関係），及び，浸透流の屈折現象について考える。そして，流れ関数に関して弱形式表現による有限要素近似法について議論する。また，有限要素近似では，三角形定ひずみ要素（CST 要素（流れ関数に関する浸透流問題では定流速要素））を用いた近似法，内節点消去による四角形 4 節点要素（4CST 要素）を用いた方法について述べる。

11.1　浸透流基礎理論（まとめ）

これまで異方透水性地盤中の浸透流の基礎理論に関して述べてきた[1)~4)]。ここでは，本論で必要となる基礎式をまとめておく。

11.1.1 全水頭[4)]

全水頭 h は，圧力水頭 h_p と位置水頭 h_e で表され，

$$h = h_p + h_e = \frac{p}{\gamma_w} + z \tag{11.1}$$

となる。ここに，

h：全水頭

$h_p = p/\gamma_w$：圧力水頭

$h_e = z$：位置水頭

p：間隙水圧

$\gamma_w = \rho_w g$：水の単位体積重量

ρ_w：水の密度

g：重力の加速度

z : Datum or Datum line（基準線）からの高さ

x：水平方向にとった座標

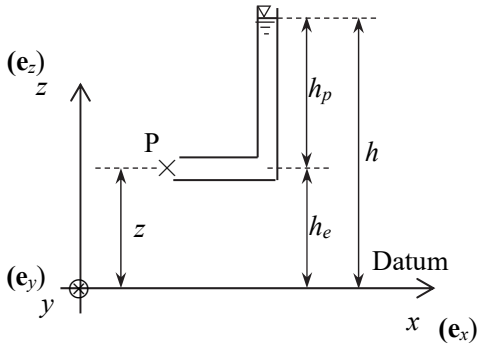


Fig.11.1　点 P における各種水頭

である。位置水頭 h_e は Fig.11.1 に示すように基準線（Datum）から考えている点までの高さ z（単位ベクトル $\mathbf{e}_z$）で表される。また，座標系は，横軸右方向に x（単位ベクトル $\mathbf{e}_x$），紙面奥行き方向に y（単位ベクトル $\mathbf{e}_y$）をとる（Fig.11.1 では，記号⊗で表される）。ここに，$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x$ の関係がある。

11.1.2 動水勾配[4)]

動水勾配はある方向への全水頭の変化率で与えられ，x 方向及び z 方向への動水勾配 i_x, i_z は，

$$\left.\begin{aligned} i_x &= -\frac{\partial h}{\partial x} \\ i_z &= -\frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

で表される。ここに,

i_x : x 方向の動水勾配

i_z : z 方向の動水勾配

である。(11.2)式において，流れの方向に動水勾配が正の値となるように負号がつけられている。

11.1.3 ダルシー則 [1)]

異方透水性地盤に対して拡張されたダルシー則は，流速ベクトル $\mathbf{v} = \{ v_x, v_z \}^T$ と動水勾配ベクトル $\mathbf{i} = \{ i_x, i_z \}^T$ の関係式として表され,

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{11.3}$$

と与えられる。ここに,

$\{$数値 1, 数値 2$\}^T$: T は転置ベクトルを表す(縦ベクトルを横向きに記述するときに用いる)

v_x : x 方向の流量流速

v_z : z 方向の流量流速

$k_{xx}, k_{zx}, k_{xz}, k_{zz}$: 透水係数テンソルの成分

を表す。ここで，座標系の取り方に関係しない値である「透水係数テンソルの不変量 [1)]」のうち，とくに, II_3 (= $1/R_3$) を考える。

$$II_3 = 1/R_3 = k_{xx}\, k_{zz} - k_{zx}\, k_{xz} = k_1\, k_3 \tag{11.4}$$

$$\therefore\ R_3 = \frac{1}{k_{xx}k_{zz} - k_{zx}k_{xz}} = \frac{1}{k_1 k_3} \tag{11.5}$$

ここに, k_1, k_2 は最大，最小主透水係数の値 [1)] である。

11.1.4 運動方程式 [2)]

x, z 方向の運動方程式は,

$$\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma_w} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{11.6}$$

と表され, (11.6)式の別表現として，拡張されたダルシー則が,

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \gamma_w \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{11.7}$$

と導かれる。ここに,

α_{xx}, α_{xz} : x 方向の単位の流速によって浸透水から単位体積内の土粒子に x, 及び, z 方向に作用する力

α_{zx}, α_{zz} : z 方向の単位の流速によって浸透水から単位体積内の土粒子に x, 及び, z 方向に作用する力

である。このように，ダルシー則は，浸透水の運動方程式の別表現であるといえる。

11.1.5 浸透力 [2)]

浸透力ベクトル $\mathbf{d} = \{d_x, d_z\}^T$ は浸透水によって単位体積内の土粒子に作用する力であるが，土粒

子から流体に作用する制動力ベクトル $\mathbf{f} = \{f_x, f_z\}^T$ と逆方向の力として定義することができる[2)]。すなわち,

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} = \gamma_w \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_w i_x \\ \gamma_w i_z \end{Bmatrix} \tag{11.8}$$

と表される。このように浸透力は流れの方向ではなく動水勾配の方向に働くことがわかる。x, z 座標系において, 制動力ベクトル $\mathbf{f} = \{f_x, f_z\}^T$ と浸透力ベクトル $\mathbf{d} = \gamma_w \mathbf{i} = \gamma_w\{i_x, i_z\}^T$ の関係式(11.8), 運動方程式(11.6), 及び, 拡張されたダルシー則((11.3)式)から,

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} = \gamma_w \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{11.9}$$

となり, 特徴的な関係式：

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} = \gamma_w \tag{11.10}$$

が成立する。(11.10)式から α_{ij} と k_{ij} $(i, j = x, z)$ に関する次のような関係式が得られる[2)]。

$$\alpha_{xx} = \frac{k_{zz}}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \gamma_w \tag{11.11}$$

$$\alpha_{zx} = -\frac{k_{zx}}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \gamma_w \tag{11.12}$$

$$\alpha_{xz} = -\frac{k_{xz}}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \gamma_w \tag{11.13}$$

$$\alpha_{zz} = \frac{k_{xx}}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \gamma_w \tag{11.14}$$

また, (11.9)式に(11.11)～(11.14)式を代入して,

$$\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \begin{bmatrix} k_{zz} & -k_{zx} \\ -k_{xz} & k_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{11.15}$$

を得る。

11.1.6 混合微分の等価性[3)]

間隙水圧 p は(11.1)式, 及び, 水の単位体積重量 γ_w と密度 ρ_w の関係式 $\gamma_w = \rho_w g$ を用いて,

$$p = \rho_w g h - \rho_w g z \tag{11.16}$$

と表されるが, (11.16)式を x, z に関して偏微分すると, ρ_w が場所によって変化しない場合,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_w g \frac{\partial h}{\partial x} = -\rho_w g\, i_x \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_w g \frac{\partial h}{\partial z} - \rho_w g = -\rho_w g\, i_z - \rho_w g \end{aligned}\right\} \tag{11.17}$$

となる。また, Young の定理[5)]より（または, p を消去するために(11.17)式の Mixed derivative をとり, 差し引きすると),

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \rho_w g \left(\frac{\partial i_z}{\partial x} - \frac{\partial i_x}{\partial z}\right) = \gamma_w \left(\frac{\partial i_z}{\partial x} - \frac{\partial i_x}{\partial z}\right) = 0 \tag{11.18a}$$

となる。ここで, (11.18a)式は, p に関する混合微分の等価性(Equality of mixed partials)を表す。換言

すると，圧力勾配の交差偏微分（Cross-partial derivative）が等価であることを意味する。または，流体粒子が圧力 p の作用を受けながら，ある点から別の点に移動したときに，圧力が粒子に対してなす仕事が経路によらず一定となる条件である（p が保存力であることの定義でもある）[6]。また，浸透力 $\mathbf{d}$（$= \mathbf{i}\ \gamma_w$）の y 軸回りの回転成分 $(\mathrm{rot}\ \mathbf{d})_y$ が 0 であること（すなわち，y 軸回りの回転力が 0 であること）を意味するものでもある。

$$(\mathrm{rot}\ \mathbf{d})_y = (\mathrm{rot}\ \gamma_w \mathbf{i})_y = \gamma_w \left\{ \frac{\partial i_z}{\partial x} - \frac{\partial i_x}{\partial z} \right\} = 0 \tag{11.18b}$$

また，この関係は，「奥行き方向 y に関する偏微分及び動水勾配が 0 のとき，すなわち，$\partial/\partial y = 0$ 及び $i_y = 0$ のときに」ナブラ∇と浸透力（$\mathbf{i}\ \gamma_w$）に関する外積が 0 である条件：$\nabla \times (\mathbf{i}\ \gamma_w) = 0$ から，次のように求めることができる。

$$\nabla \times (\mathbf{i}\gamma_w) = \gamma_w \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ i_x & i_y & i_z \end{vmatrix} = \gamma_w \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ i_x & 0 & i_z \end{vmatrix} = \gamma_w \left\{ \mathbf{e}_x(0) - \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial i_z}{\partial x} - \frac{\partial i_x}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z(0) \right\} = \gamma_w \left(\frac{\partial i_x}{\partial z} - \frac{\partial i_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y = 0 \tag{11.18c}$$

ここに，ナブラ∇ は，

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T \tag{11.19}$$

と定義される。

このように，(11.18a)～(11.18c)式から，

$$\gamma_w \left(\frac{\partial i_z}{\partial x} - \frac{\partial i_x}{\partial z} \right) = 0 \tag{11.20}$$

を得る。ここで，(11.20)式に(11.15)式を代入すると，透水係数の成分 k_{ij} が場所によって変化しない場合について，

$$\frac{1}{k_{xx}k_{zz} - k_{xz}k_{zx}} \left(k_{xx} \frac{\partial v_z}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial v_z}{\partial z} - k_{xz} \frac{\partial v_x}{\partial x} - k_{zz} \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = 0 \tag{11.21}$$

を得る。ちなみに，(11.21)式は，非回転運動（渦無し流れ）を表す式であり [3]，FEM における定ひずみ要素（例えば CST 要素）内において成り立つ式である。

11.1.7 流量の連続式と流れ関数 [3]

湧出しなしの場合について，流量の連続式は，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{11.22}$$

と表される [3]。また，湧出しなしの場合，流量の連続式(11.22)式からも明らかなように，次の関係を満足する流れ関数 ψ が存在することが知られている [3] [7]。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{11.23}$$

すなわち,

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ v_z &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (11.24)$$

を満足する流れ関数ψが存在する。

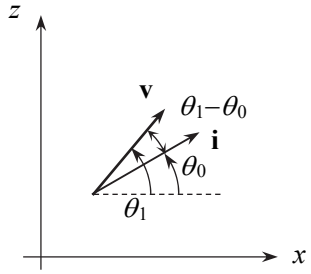


Fig.11.2 $\theta_1-\theta_0$の定義
（付録 10 の Fig.A10.1 に同じ）

11.1.8 等ポテンシャル線と流線の関係－動水勾配の方向と流速の方向の関係－[2)]

流線と等ポテンシャル線の関係，すなわち，流速の方向と動水勾配の方向の関係について述べる。流線は流れの流速ベクトルを繋いでいったものであり，流速ベクトルの方向はそれに接する方向である。また，等ポテンシャル線は速度ポテンシャルが等しい点を繋いでいったものであり，動水勾配の方向は等ポテンシャル線に直交する。したがって，流線と等ポテンシャル線は,「等方透水性地盤の場合には，動水勾配と流速の方向が一致するので」直交するが,「異方透水性地盤の場合には，動水勾配と流速の方向が一致しないので」直交しない。流速の方向θ_1と動水勾配の方向θ_0の交差角$\theta_1-\theta_0$は,

$$\theta_1-\theta_0=\tan^{-1}\frac{(k_{zz}-k_{xx})i_x i_z+k_{xz}(i_x^2-i_z^2)}{k_{xx}i_x^2+2k_{xz}i_x i_z+k_{zz}i_z^2} \qquad (11.25)$$

と表される[2)]。流速の方向θ_1と動水勾配の方向θ_0の交差角$\theta_1-\theta_0$は, Fig.11.2 に示すように，動水勾配の方向θ_0から流速の方向θ_1に反時計回りに測った角度を表す（詳細は**付録 10** を参照）。

11.1.9 浸透流の屈折現象[8)]

等方透水性地盤であっても，成層をなす土層では，各層ごとに透水性が異なるので，各層の境界面を通過する浸透流の流線は一般に屈折することが知られている。透水性の異なる 2 つの領域があり，浸透流が第一層（透水係数k_1）から第二層（透水係数k_2）へ入っていくとき，境界面においては，透水係数 k_1 と k_2，及び，入射角θ_1 と屈折角θ_2 の間に，次の関係が成り立つ[8)]。

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{k_1}{k_2}\ (0°<\theta_1,\theta_2<90°) \qquad (11.26)$$

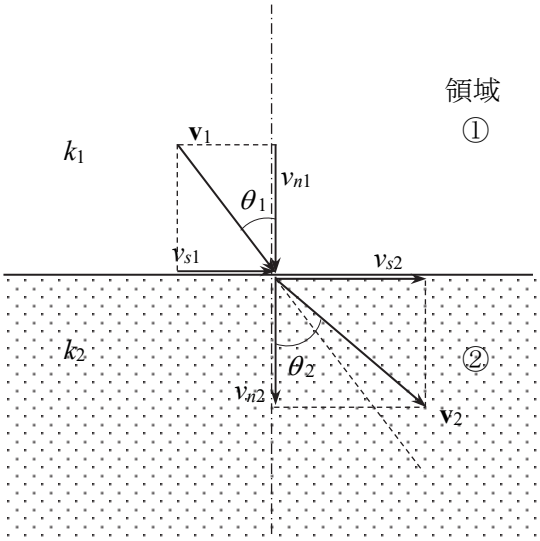


Fig.11.3 浸透流の屈折現象
（図は $k_1<k_2$ の場合を表している）
（付録 11 の Fig.A11.1 に同じ）

ここで，境界面における流線の屈折の様子を $k_1<k_2$ の場合について示すと Fig.11.3 となる（詳細は**付録 11** を参照）。Fig.11.3 において，記号は,

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$：流線が入射した地点における領域 1（$k_1$）及び領域 2（$k_2$）における流速ベクトル

θ_1, θ_2：境界線前後における流線の入射角，屈折角（いずれも法線方向から測る）

v_{n1}, v_{n2}：$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の法線方向の成分

v_{s1}, v_{s2}：$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の境界線方向の成分

k_1, k_2：領域 1, 2 における等方透水係数

$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$: 流線が入射した地点における領域 1（k_1）及び領域 2（k_2）における動水勾配ベクトル

i_{n1}, i_{n2} : $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ の法線方向の成分

i_{s1}, i_{s2} : $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ の境界線方向の成分

を表す。

11.2　流れ関数に関する支配方程式と境界条件

11.2.1 流れ関数に関する支配方程式

圧力勾配の Cross-partial derivative の等価性は(11.20)式のように与えられる。

$$\gamma_w\left(\frac{\partial i_x}{\partial z}-\frac{\partial i_z}{\partial x}\right)=0 \tag{11.20}$$

浸透力は(11.9)式から $d_x=\gamma_w i_x=\alpha_{xx}v_x+\alpha_{zx}v_z$ ，$d_z=\gamma_w i_z=\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}v_z$ と与えられるので，(11.20)式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_{xx}v_x+\alpha_{zx}v_z\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_{xz}v_x+\alpha_{zz}v_z\right)=0 \tag{11.27}$$

流れ関数 ψ の定義式(11.24)を(11.27)式に代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\alpha_{zx}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_{xz}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\alpha_{zz}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_{zz}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\alpha_{xz}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\alpha_{zx}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\alpha_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0 \tag{11.28}$$

が得られる。(11.28)式は(11.11)～(11.14)式を代入することにより次のように書き換えられる。

$$\gamma_w\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_{xx}}{k_{xx}k_{zz}-k_{xz}k_{zx}}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{k_{xz}}{k_{xx}k_{zz}-k_{xz}k_{zx}}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k_{zx}}{k_{xx}k_{zz}-k_{xz}k_{zx}}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{k_{zz}}{k_{xx}k_{zz}-k_{xz}k_{zx}}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right\}=0 \tag{11.29}$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial x}R_3\left(k_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial x}+k_{xz}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}R_3\left(k_{zx}\frac{\partial\psi}{\partial x}+k_{zz}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=0\ \text{ in S} \tag{11.30}$$

ここに，

$$R_3=\frac{1}{k_{xx}k_{zz}-k_{zx}k_{xz}}, \tag{11.5}$$

であり，$1/R_3=II_3=k_{xx}k_{zz}-k_{zx}k_{xz}$ は(11.4)式で与えられる透水係数テンソルの不変量である。R_3 は，透水係数テンソルの値が同一の単一層からなる地盤領域のみを取り扱うときには一定値であるので，(11.30)式の両辺をこの値で割って消すことができるが，透水係数テンソルの値が異なる複数層からなる地盤領域を取扱うときには，(11.30)式に示すように，この値を残しておく必要がある。

11.2.2 境界条件（Fig. 11.4 参照）

浸透流問題は，流れ関数に関して境界条件：

(i) 基本境界（ディリクレ境界，流れ関数境界）

$$\psi=\overline{\psi}\quad\text{on } C_\psi \qquad (\overline{\psi}\text{ は基本境界における流れ関数の規定値}) \tag{11.31}$$

(ii) 自然境界（ノイマン境界, 流速に関係する境界）

$u = \overline{u_n}$ on C_u　（$\overline{u_n}$ は自然境界における流速に関係する値の規定値）　(11.32)

の下に, 支配方程式(11.30)を解くことによって, 解を得ることができる。ここに, C_ψ は基本境界（流れ関数境界）, C_u は自然境界（流速に関係する境界）を表す。浸透領域の境界は, 一般的に, C_ψ と C_u のどちらかで表される。ここで, ノイマン境界におけるベクトル $\overline{u_n}$ は後述するように流速に関係する値である。

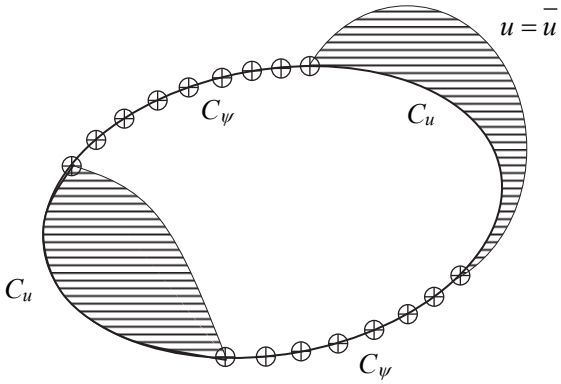


Fig.11.4 流れ関数に関する有限要素法における境界条件（付録 12 の Fig.A12.1 に同じ）

11.2.3 有限要素近似における弱型式表現

支配方程式(11.30)の両辺に任意の仮想流れ関数 $\delta\psi$ を乗じて積分すると（言い換えると, 浸透領域に擾乱（じょうらん）を与えて整理すると）,

$$\int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x} R_3 \left(k_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{xz} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} R_3 \left(k_{zx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} \delta\psi \, dS = 0 \tag{11.33}$$

となる。ここで, S は浸透領域, dS (= $dx\,dz$) は面積微分を表す。ガウスの発散定理（付録５参照）を用いて, (11.33)式は,

$$\int_C \left\{ R_3 \left(k_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{xz} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \delta\psi \cdot n_x + R_3 \left(k_{zx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \delta\psi \cdot n_z \right\} dC$$
$$- \int_S \left\{ R_3 \left(k_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{xz} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial x} + R_3 \left(k_{zx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial z} \right\} dS = 0 \tag{11.34}$$

となる。ここに, C は浸透領域の境界を表す。流れ関数境界の仮想流れ関数を 0 と仮定した場合（この場合, 有限要素近似は弱型式表現となる）, (11.34)式は, (11.23)式（または(11.24)式）を用いて,

$$\int_S \left\{ R_3 \left(k_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{xz} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial x} + R_3 \left(k_{zx} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial z} \right\} dS$$
$$- \int_{C_u} \left\{ R_3 \left(k_{xx} (-\overline{v_z}) + k_{xz} \overline{v_x} \right) n_x + R_3 \left(k_{zx} (-\overline{v_z}) + k_{zz} \overline{v_x} \right) n_z \right\} \delta\psi \, dC = 0 \tag{11.35}$$

となり,

$$\int_S R_3 \left\{ \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial x} \quad \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial z} \right\} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial z} \end{Bmatrix} dS - \int_{C_u} R_3 \left\{ n_x \quad n_z \right\} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix} \delta\psi \, dC = 0$$

となる。ベクトル表示すると次のようになる。

$$\int_S R_3 \delta \mathbf{a}^T \left[\mathbf{D} \right]^T \mathbf{a} \, dS - \int_{C_u} R_3 \mathbf{n}^T \left[\mathbf{D} \right]^T \overline{\mathbf{a}} \, \delta\psi \, dC = 0 \tag{11.36}$$

ここに, 太文字はベクトルを表し,

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-v_z\\ v_x\end{Bmatrix}:\ \text{流れ関数の勾配ベクトル（流速に関係する）} \tag{11.37}$$

$$\delta\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial(\delta\psi)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial(\delta\psi)}{\partial z}\end{Bmatrix}:\ \text{仮想の流れ関数の勾配ベクトル} \tag{11.38}$$

$$\bar{\mathbf{a}}=\begin{Bmatrix}\overline{a_x}\\ \overline{a_z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\overline{v_z}\\ \overline{v_x}\end{Bmatrix}:\ \text{ノイマン境界上において既定されたベクトル } \mathbf{a} \text{ の成分（流速に関係する）} \tag{11.39}$$

$$[\mathbf{D}]^T=\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{xz}\\ k_{zx} & k_{zz}\end{bmatrix}:\ \text{透水係数テンソルの転置マトリックス} \tag{11.40}$$

$$\mathbf{n}=\begin{Bmatrix}n_x\\ n_z\end{Bmatrix}:\ \text{境界上における外向きの単位法線ベクトル} \tag{11.41}$$

である。透水係数テンソル $[\mathbf{D}]$ は対称であり, $k_{xz}=k_{zx}$ であるので, その転置マトリックス $[\mathbf{D}]^T$ は $[\mathbf{D}]$ に等しい。また, (11.36)式中の $R_3(\mathbf{n}^T[\mathbf{D}]^T\bar{\mathbf{a}})$ はスカラー量である。

$$[\mathbf{D}]^T=[\mathbf{D}] \tag{11.42}$$

11.2.4 有限要素近似

流れ関数 ψ を領域内の有限個の節点における流れ関数 ψ_β ($\beta=1, 2, \cdots, n$)と場所の関数 N_β ($\beta=1, 2, \cdots, n$)の一次積和で表すことができるものとする。すなわち,

$$\psi\approx\sum_{\beta=1}^{N}N_\beta\psi_\beta;\quad N_\beta=N_\beta(x,z)\ (\beta=1,2,\cdots,n):\ \text{内挿関数},\quad n:\ \text{節点の数}, \tag{11.43}$$

または,

$$\psi=\left[N_1\ N_2\ \cdots\cdots\ N_n\right]\begin{Bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{Bmatrix}$$

$$=[\mathbf{N}]\,\boldsymbol{\psi} \tag{11.44}$$

と表すことができるものとする。ここに, ψ は節点流れ関数ベクトルであり,

$$[\mathbf{N}]=\left[N_1\ N_2\ \cdots\cdots\ N_n\right]:\ \text{内挿関数マトリックス} \tag{11.45}$$

$$\boldsymbol{\psi}=\begin{Bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{Bmatrix} \tag{11.46}$$

である。[**N**]は内挿関数マトリックス（または, 座標について表す場合, 形状関数マトリックス）と呼ばれる。ベクトル **a** は, 内挿関数マトリックスの成分の導関数を用いて,

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\end{Bmatrix}=[\mathbf{B}]\,\boldsymbol{\psi} \tag{11.47}$$

と表す。ここに, [**B**] は全体「内挿関数の偏導関数マトリックス」として次のように表される。

$$[\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial z}\end{bmatrix} \quad \text{：全体「流速－流れ関数マトリックス」} \tag{11.48}$$

さて, ギャラーキン法では, 次式に示すように, 仮想流れ関数 $\delta\psi$ を, ψ の内挿関数(11.43)式と同一の関数を用いて表す。

$$\delta\psi\approx\sum_{\beta=1}^{n}N_\beta\delta\psi_\beta=[\mathbf{N}]\delta\boldsymbol{\psi}=(\delta\boldsymbol{\psi})^T[\mathbf{N}]^T \tag{11.49}$$

$$\delta\mathbf{a}=[\mathbf{B}]\delta\boldsymbol{\psi} \tag{11.50}$$

ここに,

$$\delta\boldsymbol{\psi}=\begin{Bmatrix}\delta\psi_1\\ \delta\psi_2\\ \vdots\\ \delta\psi_n\end{Bmatrix} \tag{11.51}$$

である。(11.36)式に, (11.49), (11.50)式を代入して整理すると次のようになる。

$$\int_S R_3\left\{[\mathbf{B}]\delta\boldsymbol{\psi}\right\}^T[\mathbf{D}]^T\mathbf{a}\,dS-\int_{C_u}R_3(\mathbf{n}^T[\mathbf{D}]^T\bar{\mathbf{a}})[\mathbf{N}]\delta\boldsymbol{\psi}\,dC=0$$

$$\therefore\ \int_S R_3(\delta\boldsymbol{\psi})^T[\mathbf{B}]^T[\mathbf{D}]^T\mathbf{a}\,dS-\int_{C_u}R_3(\delta\boldsymbol{\psi})^T[\mathbf{N}]^T(\mathbf{n}^T[\mathbf{D}]^T\bar{\mathbf{a}})\,dC=0$$

$\because\ \left\{[\mathbf{B}]\delta\boldsymbol{\psi}\right\}^T=(\delta\boldsymbol{\psi})^T[\mathbf{B}]^T,\quad [\mathbf{N}]\delta\boldsymbol{\psi}=\delta\boldsymbol{\psi}^T[\mathbf{N}]^T$ （(11.49)式より）, and

R_3, $(\mathbf{n}^T[\mathbf{D}]^T\bar{\mathbf{a}})$ は各項ともスカラー量

$$\therefore\ (\delta\boldsymbol{\psi})^T\left\{\int_S R_3[\mathbf{B}]^T[\mathbf{D}]^T\mathbf{a}\,dS-\int_{C_u}R_3(\mathbf{n}^T[\mathbf{D}]^T\bar{\mathbf{a}})[\mathbf{N}]^T\,dC\right\}=0 \tag{11.52}$$

ここで, $(\delta\boldsymbol{\psi})^T$ は基本境界上を除いて任意に選ぶことができるので, (11.52)式から,

$$\int_S R_3[\mathbf{B}]^T[\mathbf{D}]^T\mathbf{a}\,dS-\int_{C_u}R_3(\mathbf{n}^T[\mathbf{D}]^T\bar{\mathbf{a}})[\mathbf{N}]^T\,dC=0 \tag{11.53}$$

が得られる。(11.53)式に(11.47)式を代入することによって,

$$\int_S R_3[\mathbf{B}]^T[\mathbf{D}]^T[\mathbf{B}]\boldsymbol{\psi}\,dS=\int_{C_u}R_3(\mathbf{n}^T[\mathbf{D}]^T\bar{\mathbf{a}})[\mathbf{N}]^T\,dC \tag{11.54}$$

が得られる。(11.54)式はマトリックス表示すると,

$$[\mathbf{K}_{\mathrm{SF}}]\boldsymbol{\psi}=\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}} \tag{11.55}$$

となる。サブスクリプト SF は Stream Function に関係する値であることを意味する（(11.55)式の $[\mathbf{K}_{\mathrm{SF}}]$ は, **参考文献 4** で示した[**K**]とは別のものである[4)]）。(11.54), (11.55)式が有限要素近似式であ

る。また, (11.55)式の左辺第一項は要素ごとに計算されて,

$$\left[\mathbf{K}_{\mathrm{SF}}\right]=\int_S R_3\left[\mathbf{B}\right]^T\left[\mathbf{D}\right]^T\left[\mathbf{B}\right]dS=\sum_{e=1}^{m}\left[\mathbf{K}_{\mathrm{SF}}^e\right], \tag{11.56}$$

$$\left[\mathbf{K}_{\mathrm{SF}}^e\right]=\int_{S^e} R_3\left[\mathbf{B}^e\right]^T\left[\mathbf{D}\right]^T\left[\mathbf{B}^e\right]dS \tag{11.57}$$

となる。$[\mathbf{D}]^T=[\mathbf{D}]$であるので, (11.56)式, 及び, (11.57)式は, 乗数 R_3 を除いて, ポテンシャル関数に関する同様の式(**第 10 章**における(10.52)式, 及び, (10.53)式) [4] に相応しており, 本質的に等しいことがわかる。ここに, S^e は浸透領域の要素を表し,

$[\mathbf{K}_{\mathrm{SF}}]$: 全体剛性マトリックス(または, 全体透水マトリックス) (流れ関数ψ 解析)

$[\mathbf{K}^e_{\mathrm{SF}}]$: 要素剛性マトリックス(または, 要素透水マトリックス) (流れ関数ψ 解析)

$[\mathbf{B}^e]$: 要素「流速－流れ関数マトリックス」(要素における **a** と**ψ** を関係づける)

である。また,

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}=\int_{C_u} R_3(\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}})\left[\mathbf{N}\right]^T dC=\sum_{e'=1}^{m'}\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'} \tag{11.58}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}=\int_{C_u^{e'}} R_3(\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}})\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC \tag{11.59}$$

である。ここで, $\bar{\mathbf{a}}$ はノイマン境界$\left(C_u, C_u^{e'}\right)$上で,

$$\bar{\mathbf{a}}=\begin{Bmatrix}\overline{a_x}\\ \overline{a_z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\overline{v_z}\\ \overline{v_x}\end{Bmatrix} \tag{11.39}$$

と与えられるので,

$$\overline{u_n}=R_3(\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}})=R_3\left\{n_x\ \ n_z\right\}\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{xz}\\ k_{zx} & k_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\overline{v_z}\\ \overline{v_x}\end{Bmatrix} \tag{11.60}$$

とおくと,

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}=\int_{C_u}\overline{u_n}\left[\mathbf{N}\right]^T dC=\sum_{e'=1}^{m'}\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'} \tag{11.61}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}=\int_{C_u^{e'}}\overline{u_n}\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC \tag{11.62}$$

となる。ここに, m は要素の数, スーパースクリプトの e は要素に関する値であることを表す。m' はノイマン境界辺の数, e' はノイマン境界辺の要素であることを表す。また, $\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}$ は流れ関数に関するノイマン境界におけるフラックスベクトル, $[\overline{\mathbf{N}^{e'}}]$ は要素内挿関数マトリックスである。(11.61)式, 及び, (11.62)式は, ポテンシャル関数に関する式(**第 10 章**における(10.57)式, 及び, (10.58)式)にそれぞれ相応する式である [4]。

有限要素解析では, (11.54), (11.55)式を解くことになる。各項は, (11.56), (11.57)式, 及び, (11.61), (11.62)式に示すように, 要素ごとに計算される。要素透水マトリックスは(11.57)式によって計算され, 境界条件は(11.62)式に従って計算処理される。このように, (11.54), (11.55)式の各項が要素ごとに計算され領域全体についてまとめられると, 流れ関数 ψ に関する n 元連立一次方程式が得られる。次項 11.2.5 では, 三角形定ひずみ要素を用いた近似が議論される。

11.2.5 三角形定ひずみ要素を用いた近似

ここでは, CST 要素(Constant Strain Triangle（三角形定ひずみ要素))を用いた有限要素近似法について述べる。浸透流(流れ関数)問題の場合には，三角形定ひずみ要素は三角形定流速要素(全水頭に関する有限要素法の場合には三角形定動水勾配要素)と言い換えることができる。流れ関数ψが三角形要素 S^e 内で次式のように線形に変化すると仮定する(三角形要素は線形要素である)。

$$\psi \approx a + bx + cz \tag{11.63}$$

係数 a, b, c は節点 i, j, k における流れ関数の値(例えば，節点 i (x_i, z_i) においては $\psi = \psi_i$ など)から得られる，

$$\begin{cases} \psi_i = a + bx_i + cz_i \\ \psi_j = a + bx_j + cz_j \\ \psi_k = a + bx_k + cz_k \end{cases} \tag{11.64}$$

を解いて求められる。すなわち，

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & x & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & z \end{bmatrix} [\mathbf{A}] \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_i^e & N_j^e & N_k^e \end{bmatrix}}_{=[\mathbf{N}^e]} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{\psi}^e} = \left[\mathbf{N}^e\right] \boldsymbol{\psi}^e \tag{11.65}$$

となる。ここに，

$$\left[\mathbf{N}^e\right] = \begin{bmatrix} N_i^e & N_j^e & N_k^e \end{bmatrix} \tag{11.66}$$

$$\boldsymbol{\psi}^e = \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{bmatrix} \tag{11.67}$$

$$[\mathbf{A}] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} x_j z_k - x_k z_j & x_k z_i - x_i z_k & x_i z_j - x_j z_i \\ z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \tag{11.68}$$

$$N_i^e = \frac{1}{\Delta} \left\{ (x_j z_k - x_k z_j) + (z_j - z_k) x + (x_k - x_j) z \right\} \tag{11.69a}$$

$$N_j^e = \frac{1}{\Delta} \left\{ (x_k z_i - x_i z_k) + (z_k - z_i) x + (x_i - x_k) z \right\} \tag{11.69b}$$

$$N_k^e = \frac{1}{\Delta} \left\{ (x_i z_j - x_j z_i) + (z_i - z_j) x + (x_j - x_i) z \right\} \tag{11.69c}$$

であり，

N_i^e, N_j^e, N_k^e ：要素内挿関数

と呼ばれる。また, (11.65)式から，三角形要素内で，

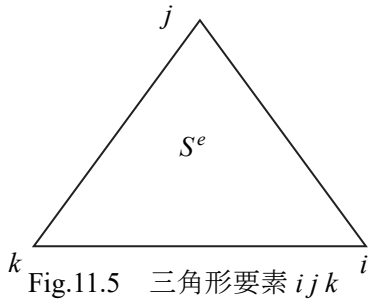


Fig.11.5　三角形要素 $i\,j\,k$

要素の面積について

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{vmatrix} = 2A^e$$

$$= x_i (z_j - z_k) + x_j (z_k - z_i) + x_k (z_i - z_j)$$

$$= x_j z_k - x_k z_j - x_i z_k + x_k z_i + x_i z_j - x_j z_i$$

A^e: 要素の面積

$$\psi = \left[\mathbf{N}^e\right]\boldsymbol{\psi}^e \tag{11.70}$$

と表され，$[\mathbf{N}^e]$ を，x, z に関して偏微分したもの（すなわち，要素「内挿関数の偏導関数マトリックス」）$[\mathbf{B}^e]$ は，

$$\left[\mathbf{B}^e\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_k^e}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{11.71a}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \tag{11.71b}$$

と計算される。

弾性問題の場合，線形要素では，変位が要素内で直線的に変化するので，その一階微分（ひずみ）が要素内で一定となる。一方，浸透流（流れ関数）問題の場合，線形要素では，流れ関数が要素内で直線的に変化するので，その一階微分（流速）が要素内で一定となる。

次に，要素透水マトリックス，及び，境界条件の計算処理方法について述べ，領域全体の節点流れ関数ベクトルの計算方法について述べる。

(1) 要素透水マトリックス

要素透水マトリックス(57)式は次のように計算される。

$$\left[\mathbf{K}_{\mathrm{SF}}^e\right] = \int_{S^e} R_3 \underbrace{\left[\mathbf{B}^e\right]^T \left[\mathbf{D}\right]^T \left[\mathbf{B}^e\right]}_{\text{定数}} dS \tag{11.72a}$$

$$= R_3 \left[\mathbf{B}^e\right]^T \left[\mathbf{D}\right]^T \left[\mathbf{B}^e\right] A^e \tag{11.72b}$$

$$= R_3 \frac{A^e}{\Delta^2} \begin{bmatrix} z_j - z_k & x_k - x_j \\ z_k - z_i & x_i - x_k \\ z_i - z_j & x_j - x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \tag{11.72c}$$

(2) 自然境界 $C_u^{e'}$ におけるフラックスベクトル $Q_\alpha^{e'}$

要素 e' の自然境界（流速に関係する境界）$C_u^{e'}$ におけるフラックスベクトル $\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$ ：

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'} = \int_{C_u^{e'}} R_3 (\mathbf{n}^T \left[\mathbf{D}\right]^T \bar{\mathbf{a}}) \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC \tag{11.59}$$

を求めるにあたり，まず，

$$\overline{u_n} = R_3 (\mathbf{n}^T \left[\mathbf{D}\right]^T \bar{\mathbf{a}}) \tag{11.60}$$

とおくと，

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'} = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T ds \tag{11.62}$$

または，$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$ を成分表示して，${}_{\mathrm{SF}}Q_\alpha^{e'}\ (\alpha = i, j, k)$ とおくと，

$${}_{\mathrm{SF}}Q_\alpha^{e'} = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{N_\alpha^{e'}}\right]^T dC = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{N_\alpha^{e'}}\right]^T ds \qquad (\alpha = i, j, k) \qquad (11.73)$$（付録 12 の(A12.4)式に同じ）

となる。ここに，$\overline{N_\alpha^{e'}}$：要素 e' に関する内挿関数であり，次のように与えられる。

$$\begin{cases} \overline{N_i^{e'}} = 1 - \dfrac{s}{L^{e'}} \\ \overline{N_j^{e'}} = \dfrac{s}{L^{e'}} \\ \overline{N_k^{e'}} = 0 \end{cases} \tag{11.74}$$

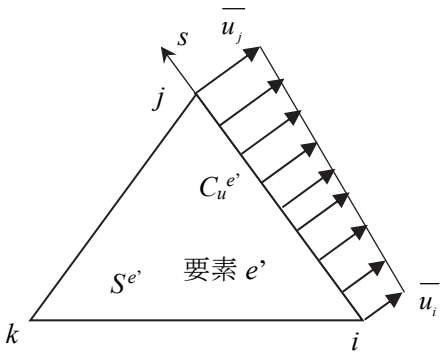


Fig.11.6　自然境界（流速境界）$i\ j$ におけるフラックスベクトルの計算

ここに，s は節点 i から節点 j の方向に測った距離である（Fig.11.6 参照）。$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T[\mathbf{D}]^T\bar{\mathbf{a}}$ の計算方法については，**付録 12** を参照のこと。$\overline{N_i^{e'}}$，$\overline{N_j^{e'}}$，$\overline{N_k^{e'}}$ については，**付録 9** でその根拠が述べられている。また，$L^{e'}$ は流速境界のある要素 e' の辺 $i\ j$ の長さである。ここで，境界上で与えられた流速 $\overline{u_n}$ は，直線分布と仮定すると，

$$\overline{u_n} = \overline{u_i} + \frac{\overline{u_j} - \overline{u_i}}{L^{e'}} s \tag{11.75}$$

となる。したがって，(11.73)式は次のように計算される（$\alpha = k$ の項は関係しないので 0 である）。

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{SF}}Q_i^{e'} &= \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n}\ \overline{N_i^{e'}}\, dC \\ &= \int_0^{L^{e'}} \left(\overline{u_i} + \frac{\overline{u_j} - \overline{u_i}}{L^{e'}} s \right) \left(1 - \frac{s}{L^{e'}} \right) ds \\ &= \frac{L^{e'}}{6} \left(2\overline{u_i} + \overline{u_j} \right) \end{aligned} \tag{11.76}$$

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{SF}}Q_j^{e'} &= \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n}\ \overline{N_j^{e'}}\, dC \\ &= \int_0^{L^{e'}} \left(\overline{u_i} + \frac{\overline{u_j} - \overline{u_i}}{L^{e'}} s \right) \frac{s}{L^{e'}} ds \\ &= \frac{L^{e'}}{6} \left(\overline{u_i} + 2\overline{u_j} \right) \end{aligned} \tag{11.77}$$

$$\therefore\ \mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'} = \begin{bmatrix} {}_{\mathrm{SF}}Q_i^{e'} \\ {}_{\mathrm{SF}}Q_j^{e'} \\ {}_{\mathrm{SF}}Q_k^{e'} \end{bmatrix} = \frac{L^{e'}}{6} \begin{bmatrix} 2\overline{u_i} + \overline{u_j} \\ \overline{u_i} + 2\overline{u_j} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.78}$$

ここで，(11.76)～(11.78)式における ${}_{\mathrm{SF}}Q_i^{e'}$，${}_{\mathrm{SF}}Q_j^{e'}$ の左側のサブスクリプト SF は右側に付けた場合と同様に Stream Function に関係する値であることを意味する。ちなみに，ノイマン境界 $i\,j$ における流量に関係する値 ${}_{\mathrm{SF}}Q_i^{e'} + {}_{\mathrm{SF}}Q_j^{e'}$ は，

$${}_{\mathrm{SF}}Q_i^{e'} + {}_{\mathrm{SF}}Q_j^{e'} = \frac{L^{e'}}{6} \left\{ (2\overline{u_i} + \overline{u_j}) + (\overline{u_i} + 2\overline{u_j}) \right\}$$

$$= \frac{\overline{u_i} + \overline{u_j}}{2} L^{e'} \tag{11.79}$$

となる。

次に座標変換について考える(Fig.11.7 参照)。ここで, s は境界に沿って, 左側に浸透領域を見ながら反時計回りに進んだときの座標ベクトル(値は始点からの距離)を表すものとする。s の方向に境界要素の節点並び(辺 i, j)をとる(Fig.11.6 参照)。また, 考えている点における s 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_s$ とする。s から時計回りに90°の方向に q をとりその方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_q$ とする。このとき, 境界上 s 方向にとった辺 i, j に垂直な単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は次のように表される。ここで, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_q$, 及び, $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_y$ である。

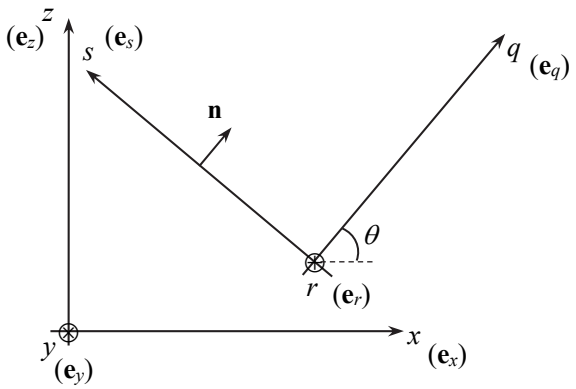


Fig.11.7　三次元 x - y - z 座標系とそれを反時計回りに θ だけ回転した三次元 q - r - s 座標系(付録 12 の Fig.A12.2 に同じ)

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_n = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_z \end{Bmatrix} \text{ : 単位法線ベクトル(領域の外側向きを正の向きとする)} \tag{11.80}$$

$$\begin{cases} l_x = x_j - x_i \\ l_z = z_j - z_i \end{cases} \tag{11.81}$$

$$l_s = \sqrt{(l_x)^2 + (l_z)^2} \text{ : 境界辺の長さ} \tag{11.82}$$

$$\mathbf{e}_s = \begin{Bmatrix} l_x / l_s \\ l_z / l_s \end{Bmatrix} \tag{11.83}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_s \tag{11.84a}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_s = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ l_x / l_s & 0 & l_z / l_s \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x (l_z / l_s) - \mathbf{e}_y (0) + \mathbf{e}_z (-l_x / l_s) \tag{11.84b}$$

$$\therefore\ \mathbf{n} = (l_z / l_s)\mathbf{e}_x - (l_x / l_s)\mathbf{e}_z \tag{11.84c}$$

$$\therefore\ \mathbf{n} = \{ l_z / l_s \ \ -l_x / l_s \}^T \tag{11.84d}$$

ここに, {数値 1　数値 2 }^{T} はベクトルを表し, 数値 1 及び数値 2 はその成分(ここでは二次元)を表す。$\mathbf{a}$ は次のように表される。

$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{v}} \times \mathbf{e}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \overline{v_x} & 0 & \overline{v_z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x (-\overline{v_z}) - \mathbf{e}_y (0) + \mathbf{e}_z (\overline{v_x}) \tag{11.85a}$$

$$\therefore\ \overline{\mathbf{a}} = -\overline{v_z}\mathbf{e}_x + \overline{v_x}\mathbf{e}_z \tag{11.85b}$$

$$\therefore\ \left(\overline{\mathbf{a}}\right)^T = \left\{ -\overline{v_z} \ \ \overline{v_x} \right\} \tag{11.85c}$$

このように，ノイマン境界におけるベクトル$\bar{\mathbf{a}}$は，「境界において既定される速度ベクトル$\bar{\mathbf{v}}$」と「y軸方向の単位ベクトル$\mathbf{e}_y(=\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_x)$」の外積$\bar{\mathbf{a}}=\bar{\mathbf{v}}\times\mathbf{e}_y$で表される((11.85a)～(11.85c)式参照)。したがって，$\overline{u_n}/R_3=\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}}$は，次のように計算される。

$$
\begin{aligned}
\overline{u_n}/R_3 &= \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}} \\
&= \left\{\ l_z/l_s \quad -l_x/l_s\right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x}\end{Bmatrix} \\
&= \left\{\ l_z/l_s \quad -l_x/l_s\right\}\begin{Bmatrix} -k_{xx}\overline{v_z}+k_{xz}\overline{v_x} \\ -k_{zx}\overline{v_z}+k_{zz}\overline{v_x}\end{Bmatrix} \\
&= \left(-k_{xx}\overline{v_z}+k_{xz}\overline{v_x}\right)\cdot(l_z/l_s)+\left(-k_{zx}\overline{v_z}+k_{zz}\overline{v_x}\right)\cdot(-l_x/l_s)
\end{aligned}
\tag{11.86}
$$

(3) 領域全体にわたっての積分と節点流れ関数ベクトルの解法

このようにして，要素ごとに計算された(11.54)，(11.55)式の各項が，領域全体についてまとめられると，流れ関数ψに関するn元連立一次方程式が得られる。この方程式を解くと節点流れ関数ベクトルを求めることができる。ここで，基本境界は次のように取り扱われる。

節点流れ関数ベクトル$\boldsymbol{\psi}$の内，例えば，節点 α における流れ関数が既知流れ関数値$\overline{\psi_\alpha}$であるとする。このとき，全体透水行列$[\mathbf{K}_{\mathrm{SF}}]$の$\alpha$行，$\alpha$列を消去し，フラックスベクトルを，

$$P_i \rightarrow P_i - K_{i\alpha}\overline{\psi_\alpha} \quad (i=1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, n)$$

と修正する。また，

$$K_{\alpha\alpha} = 1.0$$

$$P_\alpha = \overline{\psi_\alpha}$$

と修正する。

このようにしてn元連立一次方程式を解いて得られた，各節点における流れ関数の値を用いて，次に述べるように，各要素内の流速，動水勾配を計算することができる。

(4) 各要素内の流速と動水勾配の求め方

(i) 要素内の流速

要素内の流速は次のように計算される。まず，有限要素解析により，

$$\boldsymbol{\psi}^e=\begin{bmatrix}\psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k\end{bmatrix} \tag{11.87}$$

が求められ，

$$\mathbf{a}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-v_z \\ v_x\end{Bmatrix}=\left[\mathbf{B}^e\right]\boldsymbol{\psi}^e \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}=\begin{Bmatrix}v_x \\ v_z\end{Bmatrix} \tag{11.88}$$

であるので，

$$\left[\mathbf{B}^e\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k^e}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_k^e}{\partial z}\end{bmatrix} \tag{11.71a}$$

から, **v** が求められる。

(ii) 要素内の動水勾配

要素内の動水勾配は次のようにして求めることができる。まず, (11.3)式をベクトル表示した,

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{zx}\\ k_{xz} & k_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}i_x\\ i_z\end{Bmatrix}=\left[\mathbf{D}\right]\mathbf{i} \tag{11.89}$$

から,

$$\mathbf{i}=\left[\mathbf{D}\right]^{-1}\mathbf{v} \tag{11.90}$$

となるので,

$$\left[\mathbf{D}\right]=\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{zx}\\ k_{xz} & k_{zz}\end{bmatrix} \tag{11.91}$$

$$\left[\mathbf{D}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{zx}\\ k_{xz} & k_{zz}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{k_{xx}k_{zz}-k_{zx}k_{xz}}\begin{bmatrix}k_{zz} & -k_{xz}\\ -k_{zx} & k_{xx}\end{bmatrix}=R_3\begin{bmatrix}k_{zz} & -k_{xz}\\ -k_{zx} & k_{xx}\end{bmatrix} \tag{11.92}$$

$$R_3=\frac{1}{k_{xx}k_{zz}-k_{xz}k_{zx}} \tag{11.5}$$

を用いて, **i** が求められる。

(5) CST 要素及び 4CST 要素を用いた二次元 FEM 浸透流解析プログラム FEMNESD4

ここでは, 4CST 要素を用いた有限要素近似法について述べる。Fig.11.8 に示すように, 四角形の重心を新たな節点とし, 四角形各辺の端点と重心点から構成される 4 つの三角形を考える。このような内節点(内部自由度の点)は, 四角形の端点である 4 節点とのみ関係し四角形の隣接要素節点には接続しないので, 構造物全体の平衡方程式(全体剛性方程式)から消去することができる。浸透流(流れ関数)問題の場合,「構造物全体の平衡方程式(全体剛性方程式)」は,「浸透領域全体の平衡方程式(全体透水方程式)」と言い換えられる。この消去は, 静的縮小(Static condensation)と呼ばれる [9]。四角形要素について, 重心点を内節点とする 4 つの CST 要素からなる分割を考え, 重心点を消去した(静的縮小した)四角形要素を 4CST 要素と呼ぶ。4CST 要素を用いた計算は, CST 要素のみを用いた計算より解の精度がかなり向上することが知られている [9]。

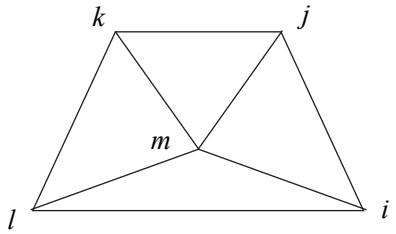


Fig.11.8　4CST 要素 *i j k l* (*m* は内節点(重心点))

著者らは, CST 要素及び 4CST 要素を用いた流れ関数に関する二次元 FEM 浸透流解析プログラム FEMNESD4C を開発し断面二次元, 及び, 平面二次元問題の浸透流解析を行っている(**参考文献** 10 (流線網の一例が示されている)を参照)。

11.2.6 CST 要素は Iso parametric element か？

「CST 要素は Iso parametric element か？」どうかについては，流れ関数に関する有限要素法においても, 10.2.6 で述べたように[4)],「CST 要素に関して，形状関数と内挿関数は同一であり, CST 要素はアイソパラメトリック要素である」といえる。ここでの内挿関数は，流れ関数に関するものである。

11.3 結論

二次元異方透水性地盤の浸透流解析，とくに，流れ関数ψに関する有限要素近似について考察した。ここでは，まず，二次元浸透流について基礎式を示し，次に，弱形式表現による有限要素近似法について述べた。また，有限要素近似では, CST 要素（三角形定ひずみ要素，浸透流（流れ関数）問題では定流速要素）を用いた方法，及び, 4CST 要素（重心に静的縮小点をもつ, 4 つの三角形要素からなる四角形要素）を用いた方法について述べた。

次に, CST 要素はアイソパラメトリック要素かどうかについて述べた。そして, CST 要素において，形状関数と内挿関数は同一であり，CST 要素はアイソパラメトリック要素であると言えることを示した。ここで，アイソパラメトリック要素は形状関数と内挿関数が同一である要素のことを意味する。CST 要素の形状関数は座標に関する一次関数で表されるので，その一階微分は Constant（一定）となり，要素の境界は直線で近似される。また，流れ関数の内挿関数についても座標に関する一次関数で表されるので，その一階微分は Constant（一定）となり，したがって流速は要素内で一定と近似される。

併せて**参考文献** 11 を参照されたい。

付録 10　流速ベクトル **v** と動水勾配ベクトル **i** のなす角

付録 11　等方透水性の成層地盤における浸透流の屈折現象

付録 12　流れ関数に関する有限要素法のノイマン境界における$\overline{u_n}/R_3$の値について

付録 13　有限要素法における境界条件

参考文献

1) 田中　勉, Arnold Verruijt (2018): 異方透水性地盤における浸透水の流れ －透水係数テンソルとモール円－, 神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 22 号, 140-162.
2) 田中　勉, Arnold Verruijt (2019): 異方透水性地盤における一次元拘束流れと一次元透水試験, 神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 23 号, 264-285.
3) 田中　勉, Arnold Verruijt (2020): 異方透水性地盤の浸透流理論 －座標変換の理論と異方及び等方透水性地盤の浸透流に関する基礎方程式－, 神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 24 号, 224-252.
4) 田中　勉, Arnold Verruijt (2021): 二次元異方透水性地盤の浸透流解析 －全水頭に関する有限要素近似－, 神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 25 号, 257-296.
5) ウィキペディア(Wikipedia)（2021/11/13 更新）: 二階導関数の対称性（英: symmetry of second

derivatives)，または，混合微分の等価性（英: equality of mixed partials)；混合導関数（英: mixed derivative）の等価性を保証する条件（https://ja.wikipedia.org/wiki/ヤングの定理）.
or 高校数学の美しい物語 ～定期試験から数学オリンピックまで 800 記事～（2021/03/07 更新）: 偏微分の順序交換の十分条件とその証明 (https://mathtrain.jp/henbibunexchange).
6) 原　康夫 (1988): 物理学通論Ⅰ，学術図書出版社.
7) Harr, M.E. (1962): Groundwater and Seepage, McGraw-Hill, New York, 101-111.
8) 田中　勉 (2017)：土質工学Ⅰ（講義ノート）, 137p., 神戸大学大学院農学研究科，平成 29 年 10 月 1 日.
9) C.S.デサイ・J.F.アーベル著（山本善之訳）(1974): マトリックス有限要素法－基本理論とその応用－，科学技術出版社, pp.136-138.
10) 田中　勉，景山敏一 (1995): 浸透流問題における各種数値解析法とフローネット法，神戸大学農学部研究報告，第 21 巻，第 2 号, pp.157～169.
11) 田中　勉，Arnold Verruijt (2022): 二次元異方透水性地盤の浸透流解析 －流れ関数に関する有限要素近似－，神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 26 号, pp.121-160.

まとめ

第一著者は，1998 年 7 月 1 日～1999 年月 28 日，アーノルド・フェライト教授（スーパーバイザー）のもと，オランダにて在外研究（文部科学省在外研究員）を行った。そのとき，共著で書籍「異方透水性地盤における浸透水の流れ」を制作しようということになった。日本に帰国する間際，英文案が出来上がり内容を教授と相談し，第一著者が責任をもって作成することになった。現役時代には，もう一つの研究テーマである「地盤の浸透破壊に関する研究」や日常業務に時間が取られ，制作作業に多くの時間が費やせなかった。その後，最初に日本語で作成することに計画変更し，定年の少し前からようやく取りかかることができた。

そして順次，神戸大学都市安全研究センター研究報告に論文を投稿してきた。本書はこれら一連の論文をまとめ直したものである。また，神戸大学農学部及び大学院農学研究科で行った講義の内容（講義ノート）が元になっている。本書作成に当たり，

「異方透水性の大きさ」及び「異方透水性の発現メカニズム」（**第１章**），

「重み付き相加平均，重み付き相乗平均及び重み付き調和平均とそれらの関係」（**付録２**），

「応力成分の正方向の定義－第Ⅰ系列と第Ⅱ系列－」（**付録３**），

などに関する新たな知見や考察を補充した。また，構造上の透水性とそれに等価な透水係数テンソル（**第５章**），一次元拘束流れと誘導動水勾配（**第６章**），二次元異方透水性土の一次元透水試験（**第７章**），浸透水の運動方程式（**第８章**），座標変換の理論と異方及び等方透水性地盤の浸透流に関する支配方程式（**第９章**）は，著者らが提案する新しい概念である。また，**付録 14** では「浸透水の運動を支配する 3 つの式（Stokes の法則，浸透力，Darcy 則）の相互関係」，**付録 15** では「透水係数テンソルの非対角成分（$k_{xz} = k_{zx}$）には正負の値があること」をわかりやすく説明した。

「透水係数テンソルの非対角成分が負値になることがある」という事柄は，著者らがこれまで日本の学会発表などで主張してきたが，会合における参加者との討論や意見交換を重ねると，理解がまだまだ浸透していないことを実感した。一方，在外研究で訪れたオランダでは，この事柄が当然のことのように理解され受け入れられている。本書の執筆を閉じるにあたり，この点について言及し，すべての読者に正しい知識を早急にご理解いただくことを期待するものである。

「異方透水性地盤の浸透水の流れ」に関しては，これまで，土質力学や浸透流力学などの関係書籍や論文などで取り扱われてきた。しかしながら，体系的に一つにまとめられたものは皆無である。本書で述べているように，水利施設構造物の設計において土の異方透水性への配慮を怠ると，

(1) 流量の増大，(2) 浸潤線の上昇，(3) 浸出点の上昇，(4) 間隙水圧の影響する範囲の拡大，(5) 地盤の浸透破壊に対する安定性の低下，及び，(6) フィルダム下流側斜面のすべりに対する安全率の低下

など好ましくない問題が生じる可能性が指摘される。

水利施設構造物の設計においては，土の中の水の流れ(すなわち浸透流)は解決すべき重要課題となる。土の異方透水性とその特性についてよく理解しておく必要がある。本書は，「異方透水性地盤の浸透水の流れ」に関して体系的な理論構築を図ろうとするものであり，水利施設構造物など水と土にかかわる課題解決に必要となる基礎的知識を与えるものである。

付録 14 三つの式＜Stokes の法則，浸透力，Darcy 則＞の相互関係

付録 15 透水係数テンソルの非対角成分（誘導成分）k_{xz}（＝k_{zx}）の正負について

付録１　Muskat の書籍における異方透水性の値

Muskat[A1.1] は，その書籍に掲載の Table 8 の基になった論文[A1.2] にもともと含まれていた，k_h, k_v に関する 65 対のデータについて, 2/3 以上のデータ（46 対）が $k_h/k_v > 1$ であり，その値 k_h/k_v は 1～42 であったと述べている。ここでは, Table 8 から抜粋した 48 対のデータを Table A1.1 に示す（48 対のデータの内, k_h 及び k_v の両方が揃ったものは 46 対である）。

リストアップされたデータ（異方透水性の値）k_x/k_z は，全部で 46 対あり，最小値が 0.14，最大値が 42.19（諸平均は 4.02, 1.94, 1.11）である。異方透水性の値が 1.0 以上のデータについてみると，全部で 36 対あり，最小値が 1.02，最大値が 42.19（諸平均は 4.98, 2.87, 2.23）である。また，異方透水性の値が 1.0 以下のデータについてみると，全部で 10 対あり，最小値が 0.14，最大値が 0.96（諸平均は 0.53, 0.47, 0.38）である。Muskat における自然地盤の異方透水性の値 k_x/k_z として, 1.0 以上のデータについては 36 データの諸平均 4.98, 2.87, 2.23 を，1.0 以下のデータについては 10 データの諸平均 0.53，0.47，0.38 を考えることができる。ここに，諸平均の値は，左から算術平均（Arithmetic mean），幾何平均（Geometric mean），調和平均（Harmonic mean）を表す。

参考文献

A1.1) Muskat, M. (1937): The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media (McGraw-Hill, New York), pp.101-113.

A1.2) Fancher, G. H., Lewis, J. A. and Barner, K. B. (1933): Min. Ind. Exp. Sta., Penn. State College Bull. 12.

Table A1.1　Muskat の書籍[A1.1] に掲載の Table 8 から抜粋した 48 対のデータ

THE　PERMEABILITY　AND　POROSITY OF OIL SANDS							
sample number	Sand [1]	State	Field or locality	Percent porosity	Permeability , millidarcys (0.001 darcys)		k_h/k_v
					2	3	
19	Woodbine	Texas	East Texas	23.8	111		5.6061
19*	Woodbine	Texas	East Texas	23.6	19.8		
23	Woodbine	Texas	East Texas	28.8	2350		6.8915
23*	Woodbine	Texas	East Texas	29.0	341		
35	Bradford	Pennsylvania	Bradford	13.4		3.280	1.1007
35*	Bradford	Pennsylvania	Bradford	12.8		2.980	
38	Bradford	Pennsylvania	Bradford	13.2		1.560	1.8886
38*	Bradford	Pennsylvania	Bradford	13.2		0.826	
128	Bradford	Pennsylvania	Kane	16.4	2.81		2.2302
128*	Bradford	Pennsylvania	Kane	14.4	1.26		
129	Bradford	Pennsylvania	Bradford	12.8	3.01		1.3202
129*	Bradford	Pennsylvania	Bradford	12.9	2.28		

136	Bradford	Pennsylvania	Bradford	12.9	3.65		1.8912
136*	Bradford	Pennsylvania	Bradford	13.4	1.93		
137	Bradford	Pennsylvania	Bradford	14.8	20.5		6.4465
137*	Bradford	Pennsylvania	Bradford	14.6	3.18		
154	Bradford	Pennsylvania	Kane	11.0	15.4		42.1918
154*	Bradford	Pennsylvania	Bradford	10.3	0.365		
232	2nd Venango	Pennsylvania	Oil City	20.1	30.3		0.6630
232*	2nd Venango	Pennsylvania	Oil City	19.7	45.7		
233	2nd Venango	Pennsylvania	Oil City	15.5	18.3		1.0223
233*	2nd Venango	Pennsylvania	Oil City	15.6	17.9		
236	2nd Venango	Pennsylvania	Oil City	8.20	12.7		1.0855
236*	2nd Venango	Pennsylvania	Oil City	8.50	11.7		
283	Wilcox	Oklahoma	Seminole	15.6	356		4.7090
283*	Wilcox	Oklahoma	Seminole	15.6	75.6		
284	Wilcox	Oklahoma	Bowlegs	12.1	84.9		0.9648
284*	Wilcox	Oklahoma	Bowlegs	12.8	88.0		
298	Johnson	Oklahoma	Oklahoma City	11.7	24.7		31.1475
298*	Johnson	Oklahoma	Oklahoma City	11.7	0.793		
299	Johnson	Oklahoma	Oklahoma City	21.3	692		2.4892
299*	Johnson	Oklahoma	Oklahoma City	21.3	278		
300	Johnson	Oklahoma	Oklahoma City	15.3	88.8		1.3495
300*	Johnson	Oklahoma	Oklahoma City	15.3	65.8		
301	Johnson	Oklahoma	Oklahoma City	15.5	464		3.1565
301*	Johnson	Oklahoma	Oklahoma City	15.5	147		
304	School Land	Oklahoma	Oklahoma City	11.4	36.1		0.2820
304*	School Land	Oklahoma	Oklahoma City	11.4	128		
305	School Land	Oklahoma	Oklahoma City	14.8	518		2.3229
305*	School Land	Oklahoma	Oklahoma City	14.8	223		
306	Layton	Oklahoma	Oklahoma City	17.6	170		1.4407
306*	Layton	Oklahoma	Oklahoma City	17.6	118		
307	Prue	Oklahoma	Oklahoma City	11.4	0.466		0.1371
307*	Prue	Oklahoma	Oklahoma City	11.4	3.40		
308	Hammer-Haindel	Oklahoma	Oklahoma City	14.1	464		3.2222
308*	Hammer-Haindel	Oklahoma	Oklahoma City	14.1	144		
309	Gilcrease	Oklahoma	Holdenville	16.8	62.1		1.0214
309*	Gilcrease	Oklahoma	Holdenville	16.8	60.8		
310	Gilcrease	Oklahoma	Francis	27.3	559		0.6988
310*	Gilcrease	Oklahoma	Francis	27.5	800		

311	Gilcrease	Oklahoma	Sasakwa	18.3	202		1.3557
311*	Gilcrease	Oklahoma	Sasakwa	18.1	149		
312	Cromwell	Oklahoma	Konawa	16.6	172		0.4247
312*	Cromwell	Oklahoma	Konawa	16.7	405		
313	Cromwell	Oklahoma	Konawa	22.6	68.1		0.6306
313*	Cromwell	Oklahoma	Konawa	21.6	108		
314	Cromwell	Oklahoma	Konawa	17.9	772		5.5143
314*	Cromwell	Oklahoma	Konawa	18.8	140		
315	Cromwell	Oklahoma	Little River	16.9	53.8		
315*	Cromwell	Oklahoma	Little River	16.2			
316	Cromwell	Oklahoma	Little River	19.9	96.8		0.6722
316*	Cromwell	Oklahoma	Little River	19.4	144		
317	Cromwell	Oklahoma	Little River	21.3	359		2.6791
317*	Cromwell	Oklahoma	Little River	21.5	134		
318	Cromwell	Oklahoma	Little River	20.9	159		2.3382
318*	Cromwell	Oklahoma	Little River	21.2	68.0		
319	Cromwell	Oklahoma	Little River	23.2	314		4.2261
319*	Cromwell	Oklahoma	Little River	22.8	74.3		
320	Cromwell	Oklahoma	Little River	21.6	289		1.7622
320*	Cromwell	Oklahoma	Little River	21.5	164		
321	Cromwell	Oklahoma	Little River	17.8	246		1.1182
321*	Cromwell	Oklahoma	Little River	18.2	220		
322	Cromwell	Oklahoma	Little River	19.4	154		0.3355
322*	Cromwell	Oklahoma	Little River	19.4	459		
323	Cromwell	Oklahoma	Little River	19.1	772		2.0423
323*	Cromwell	Oklahoma	Little River	19.1	378		
324	Cromwell	Oklahoma	Little River	18.8	360		0.5373
324*	Cromwell	Oklahoma	Little River	18.8	670		
325	Cromwell	Oklahoma	Little River	20.8	261		6.7442
325*	Cromwell	Oklahoma	Little River	20.8	38.7		
326	Wanette	Oklahoma	Wanette	22.7	482		12.8877
326*	Wanette	Oklahoma	Wanette	22.2	37.4		
329	Wanette	Oklahoma	Wanette	17.4	199		1.2134
329*	Wanette	Oklahoma	Wanette	18.5	164		
330	Wanette	Oklahoma	Wanette	14.2	18.3		2.3312
330*	Wanette	Oklahoma	Wanette	14.5	7.85		
332	Wanette	Oklahoma	Wanette	12.6	13.4		5.3386
332*	Wanette	Oklahoma	Wanette	13.0	2.51		

333	Wanette	Oklahoma	Wanette	15.9	21.2		2.9650
333*	Wanette	Oklahoma	Wanette	16.4	7.15		
334	Wanette	Oklahoma	Wanette	18.1	52.7		1.5873
334*	Wanette	Oklahoma	Wanette	18.6	33.2		
337	Tokio	Louisiana	Pine Island	18.4	†		
337*	Tokio	Louisiana	Pine Island	18.4	†		
340	Glen Rose	Louisiana	Caddo	24.3	341		2.7280
340*	Glen Rose	Louisiana	Caddo	24.3	125		

* Sample cut perpendicular (across) to the planes of bedding.

† Sample impermeable under the conditions of test, namely, no flow obtained in 2hr, under a pressure gradient of 80 lb./sq.in./in.

1 Name of geological formation. Throughout this table the term sand is used in the sense customary to petroleum engineering and geology, i.e., an oil-bearing formation, usually a sandstone, but frequently another rock or relatively unconsolidated sand.

2 Data obtained from flow of water through sample.

3 Data obtained from flow of air through sample.

(1 darcy = 1.0403×10^3 cm/s (20℃))

	Average of all (46 pairs)	Average of data larger than 1.0 (36 pairs)	Average of data less than 1.0 (10 pairs)
Arithmetic mean	4.0155	4.9824	0.5346
Geometric mean	1.9402	2.8715	0.4730
Harmonic mean	1.1149	2.2260	0.3771

付録２　重み付き算術平均，重み付き幾何平均及び重み付き調和平均とそれらの関係

ここでは，重み付き算術平均，重み付き幾何平均及び重み付き調和平均とそれらの関係について考察する。算術平均は相加平均，幾何平均は相乗平均と呼ばれることもある。

重み $w_1, w_2, \cdots, w_n > 0$ が $\sum_{m=1}^{n} w_m = 1$ を満たすとき，任意の $k_1, k_2, \cdots, k_n > 0$ に対して，

$$\sum_{m=1}^{n} w_m k_m \geq \prod_{m=1}^{n} k_m^{w_m} \geq \frac{1}{\sum_{m=1}^{n} \frac{w_m}{k_m}} \tag{A2.1}$$

が恒に成り立つ。等号は $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ のときに成立する。ここで, (A2.1)式の各項は,
重み付き算術平均（weighted arithmetic mean）:

$$k_{wam} = \sum_{m=1}^{n} w_m k_m \ , \tag{A2.2}$$

重み付き幾何平均（weighted geometric mean）:

$$k_{wgm} = \prod_{m=1}^{n} k_m^{w_m} = k_1^{w_1} k_2^{w_2} \cdots\cdots k_n^{w_n} \tag{A2.3}$$

及び，重み付き調和平均（weighted harmonic mean）:

$$k_{whm} = \frac{1}{\sum_{m=1}^{n} \frac{w_m}{k_m}} \tag{A2.4}$$

である。すなわち，一般的に,

（重み付き算術平均）≥（重み付き幾何平均）≥（重み付き調和平均） (A2.5)

の関係がある。(A2.5)式において，等号は $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ のときに成立する。

まず,（重み付き算術平均）≥（重み付き幾何平均）を証明する。この不等式の証明は多数知られているが，ここでは, Polya の方法 [A2.1)] を用いる。まず，はじめに,

$$G = \prod_{m=1}^{n} k_m^{w_m} \tag{A2.6}$$

とおく。任意の実数 x について, $\exp(x-1) \geq x$ が成り立つので, $x = k_m/G$ を代入すると,

$$\exp\left(\frac{k_m}{G} - 1\right) \geq \frac{k_m}{G} \tag{A2.7}$$

が得られる。(A2.7)式の両辺を w_n 乗すると,

$$\exp\left(\frac{w_m k_m}{G} - w_m\right) \geq \frac{k_m^{w_m}}{G^{w_m}} \tag{A2.8}$$

となる。(A2.8)式において, $m = 1, 2, \cdots, n$ とおいた不等式を辺々かけ合わせることによって,

$$\exp\left(\frac{\sum_{m=1}^{n} w_m k_m}{G} - \sum_{m=1}^{n} w_m\right) \geq \prod_{m=1}^{n} \frac{k_m^{w_m}}{G^{w_m}} \mathrm{A} \tag{A2.9}$$

が得られる。$\sum_{m=1}^{n} w_m = 1$ より, (A2.9)式の左辺は,

$$\exp\left(\frac{\sum_{m=1}^{n} w_m k_m}{G} - \sum_{m=1}^{n} w_m\right) = \exp\left(\frac{\sum_{m=1}^{n} w_m k_m}{G} - 1\right) \tag{A2.10}$$

となる。一方, (A2.9)式の右辺は, $\sum_{m=1}^{n} w_m = 1$, 及び, (A2.6)式から,

$$\prod_{m=1}^{n} \frac{k_m^{w_m}}{G^{w_m}} = \frac{\prod_{m=1}^{n} k_m^{w_m}}{G^{\sum_{m=1}^{n} w_m}} = \frac{\prod_{m=1}^{n} k_m^{w_m}}{G} = 1 \tag{A2.11}$$

となる。したがって, (A2.9)式は, (A2.10), (A2.11)式を用いて,

$$\exp\left(\frac{\sum_{m=1}^{n} w_m k_m}{G} - 1\right) \geq 1 \tag{A2.12}$$

$$\therefore \frac{\sum_{m=1}^{n} w_m k_m}{G} - 1 \geq 0 \tag{A2.13}$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{n} w_m k_m \geq G = \prod_{m=1}^{n} k_m^{w_m} \tag{A2.14}$$

となる。(A2.14)式の等号は, (A2.1)式の等号成立条件と同様, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ のときに成立する。このようにして, (重み付き算術平均) ≥ (重み付き幾何平均) が証明された。

次に, (重み付き幾何平均) ≥ (重み付き調和平均) を証明する。k_m の逆数 $1/k_m$ ($m = 1, 2, \cdots, n$) > 0 についても, 前述の, (重み付き算術平均) ≥ (重み付き幾何平均) が成立するので, (A2.14)式から,

$$\sum_{m=1}^{n} w_m \frac{1}{k_m} \geq \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{k_m^{w_m}} = \frac{1}{\prod_{m=1}^{n} k_m^{w_m}} \tag{A2.15}$$

$$\therefore \prod_{m=1}^{n} k_m^{w_m} \geq \frac{1}{\sum_{m=1}^{n} \frac{w_m}{k_m}} \tag{A2.16}$$

となる。(A2.16)式の等号は, (A2.14)式の等号成立条件と同様, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ のときに成立する。このようにして, (重み付き幾何平均) ≥ (重み付き調和平均) が証明された。

(A2.14)式と(A2.16)式から, 一般的に, (A2.1)式が成立するので, (A2.1)式の両端の関係, (重み付き算術平均) ≥ (重み付き調和平均) も成り立つ。すなわち,

$$\sum_{m=1}^{n} w_m k_m \geq \frac{1}{\sum_{m=1}^{n} \frac{w_m}{k_m}} \tag{A2.17}$$

が恒に満たされている。(A2.17)式の等号は, 前述と同様, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ のときに成立する。

参考文献

A2.1) ウェブサイト : 高校数学の美しい物語 > 重み付き相加相乗平均の不等式の意味とその証明.
重み付き相加相乗平均の不等式の意味とその証明 | 高校数学の美しい物語 (manabitimes.jp)
https://manabitimes.jp/math/602, (参照 2024-05-24)

付録３　応力成分の正方向の定義 －第Ⅰ系列と第Ⅱ系列－

連続体力学におけるテンソル成分の正方向の定義(すなわち，応力のテンソル成分の表し方)には第Ⅰ系列と第Ⅱ系列が用いられている。ここでは，第Ⅰと第Ⅱ系列における，テンソル成分の正方向，点における応力，モール円の定義について考えてみる。

(1) テンソル成分の正方向

第Ⅰ系列とは，弾性体力学 [A3.1)] における，応力テンソル(物理量)の表し方であり，垂直応力に関して引張りを正とする。一方，第Ⅱ系列とは，土質力学 [A3.2)] における，応力テンソルの表し方であり，垂直応力に関して圧縮を正とする。このように，四角形要素を考えたとき，垂直応力の正の向きは，第Ⅰ，第Ⅱ系列において，それぞれ, Fig.A3.1(a), Fig.A3.2(a)に示すようになる。

次に，せん断応力の正の向きに関しては，次のように統一して表すことができる。

「四角形要素の各辺について考えたとき，垂直応力の正の向きが座標軸と同じ方向を向いている面では，座標軸の正の向きに作用するせん断応力を正とし，逆に，垂直応力の正の向きが座標軸と逆の方向を向いている面では，座標軸の負の向きに作用するせん断応力を正とする。」

たとえば，第Ⅰ系列では，Fig.A3.1(a)に示すように，右面及び上面に作用する引張り応力は座標軸と同じ方向を向いているので，せん断応力は座標軸方向のものを正とする。一方，左面及び下面に作用する引張り応力は座標軸と逆方向を向いているので，せん断応力は座標軸方向と逆向きのものを正とする。第Ⅱ系列においても，同様にして，せん断応力の正の向きは, Fig.A3.2(a)に示すようになる。両者において，応力成分の正の方向がすべて逆向きであることに注意すべきである。

(2) 点における応力

応力は考える面の方向によって異なる値となるので，種々の面における応力の値を知る必要がある。ここでは, Fig.A3.1(b), Fig.A3.2(b)に示すように，点 A における応力について，鉛直下向きから反時計回りにθだけ傾いた面 BC における応力成分(σ_{nn}, σ_{ns})について考える。ここで, $x-y$ 座標系を反時計回りにθだけ回転したものを $n-s$ 座標系とする。ここに, σ_{nn}, σ_{ns} は，それぞれ, BC 面に作用する垂直応力，及び，せん断応力である。ここで，三角形要素 ABC の力の釣合い式から，

＜第Ⅰ系列の場合＞

$$x\text{ 方向：}\sigma_{nn}\, l\cos\theta-\sigma_{ns}\, l\sin\theta-\sigma_{xx}\, l\cos\theta-\sigma_{zx}\, l\sin\theta=0 \tag{A3.1}$$

$$y\text{ 方向：}\sigma_{nn}\, l\sin\theta+\sigma_{ns}\, l\cos\theta-\sigma_{xz}\, l\cos\theta-\sigma_{zz}\, l\sin\theta=0 \tag{A3.2}$$

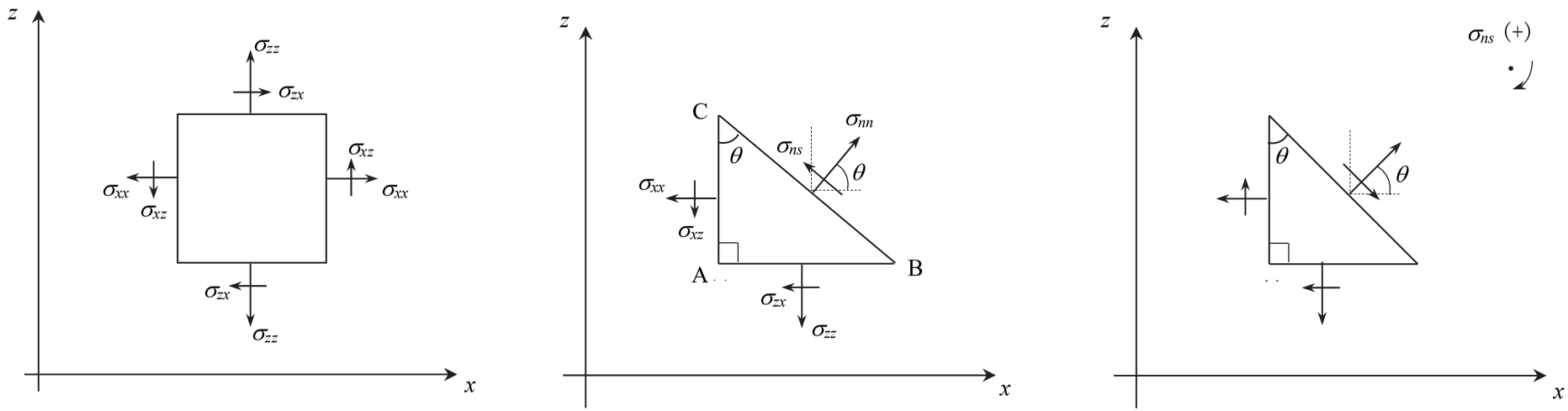
＜第Ⅱ系列の場合＞

$$x\text{ 方向：}-\sigma_{nn}\, l\cos\theta+\sigma_{ns}\, l\sin\theta+\sigma_{xx}\, l\cos\theta+\sigma_{zx}\, l\sin\theta=0 \tag{A3.3}$$

$$y\text{ 方向：}-\sigma_{nn}\, l\sin\theta-\sigma_{ns}\, l\cos\theta+\sigma_{xz}\, l\cos\theta+\sigma_{zz}\, l\sin\theta=0 \tag{A3.4}$$

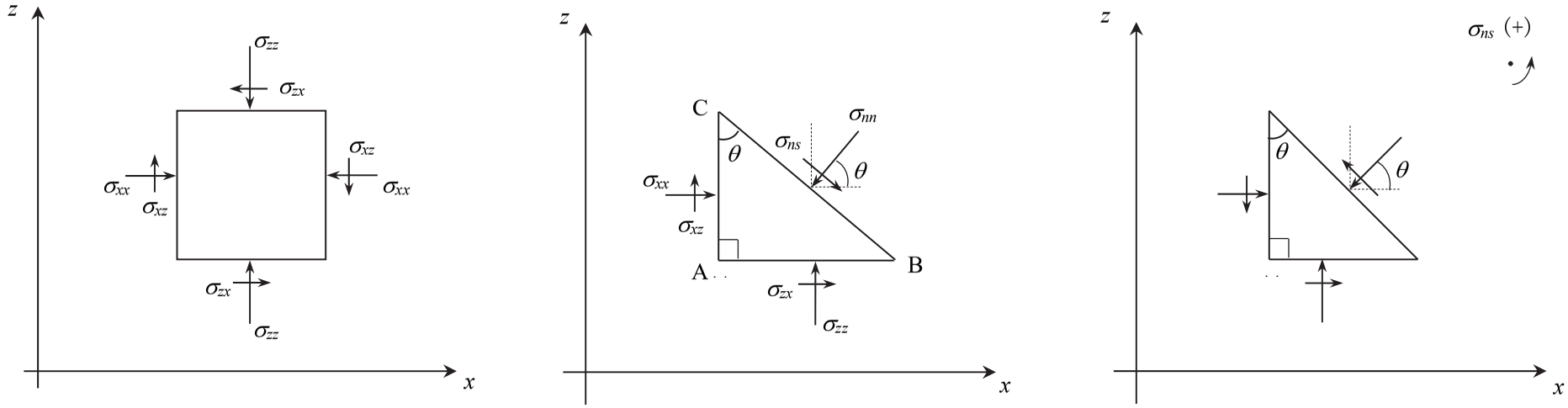
が得られる。(A3.1), (A3.2)式は，それぞれ, (A3.3), (A3.4)式に本質的に同等であり，これらの式から応力成分(σ_{nn}, σ_{ns})を計算すると，第Ⅰ，Ⅱ系列において，同一の式：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{nn}&=\sigma_{xx}\frac{1+\cos2\theta}{2}+\sigma_{zz}\frac{1-\cos2\theta}{2}\sin^2\theta+\sigma_{xz}\sin2\theta=\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\cos2\theta+\sigma_{xz}\sin2\theta\\ \sigma_{ns}&=\frac{\sigma_{zz}-\sigma_{xx}}{2}\sin2\theta+\sigma_{xz}\cos2\theta\end{aligned}\right\} \tag{A3.5}$$



(a) テンソル成分の正方向　(b) 点における応力　(c) モール円（非対角成分の正方向）

Fig.A3.1 第Ⅰ系列（弾性体力学）における応力成分の正方向の定義



(a) テンソル成分の正方向　(b) 点における応力　(c) モール円（非対角成分の正方向）

Fig.A3.2 第Ⅱ系列（土質力学）における応力成分の正方向の定義

が得られる。(A3.5)式から, θ を消去すると,

$$\left(\sigma_{nn}-\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{zz}}{2}\right)^2+\sigma_{ns}{}^2=\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{zz}}{2}\right)^2+\sigma_{xz}{}^2 \tag{A3.6}$$

を得る。(A3.6)式はσ_{nn}～σ_{ns} 座標系において中心及び半径が, それぞれ,

$$\left(\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{zz}}{2},0\right),\ 及び,\ \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{zz}}{2}\right)^2+\sigma_{xz}{}^2}$$

の円の方程式を表す。この円をモールの円と呼ぶ。ある方向の面における応力状態はモール円上の点で表される。

第Ⅰ, 第Ⅱ系列においては, それぞれ, 引張応力を正, 圧縮応力を正にとり(すなわち, 垂直応力の正の方向をそれぞれ逆にとり), かつ, せん断応力の正の方向をそれぞれ逆にとっているため, 応力成分について(向きは正反対であっても)値自体は正負が全く逆となっているので, 記号で表すことにより(A3.5)式, 及び, (A3.6)式は全く同一の式となる。

(3) モール円

上述のように, ある方向の面における応力状態はモール円上の点で表される。せん断応力は, モール円を描くときに限り, 第Ⅰ系列では時計回りのものを正(Fig.A3.1(c)), 第Ⅱ系列では反時計回りのものを正(Fig.A3.2(c))とする。例題を用いて, モール円上に応力状態をプロットする方法を示すと次のようになる。

＜第Ⅰ系列(弾性体力学)について＞ 例えば,

例題 A3.1　応力状態(Fig.A3.3(a)):

$\sigma_{xx}=60$ (引張応力)

$\sigma_{zz}=20$ (引張応力)

$\sigma_{xz}=20$ (向きは Fig.3.1(a)より(AC 面上で反時計回り, AB 面上で時計回り))

をモール円上にプロットすると Fig.A3.3(b)となる。ここで, 点 Q, R のプロットについては本文**5.2 節**を参照のこと。また,「直交する 2 つの面に働く応力は, モール円上において 2 つの点で表され, それらを結ぶ直線はモール円の中心を通る直径となる」という性質を用いている。

＜第Ⅱ系列(土質力学)について＞ 同様にして, 例えば,

例題 A3.2　応力状態(Fig.A3.4(a)):

$\sigma_{xx}=60$ (圧縮応力)

$\sigma_{zz}=20$ (圧縮応力)

$\sigma_{xz}=20$ (向きは Fig.3.2(b)より(AC 面上で時計回り, AB 面上で反時計回り))

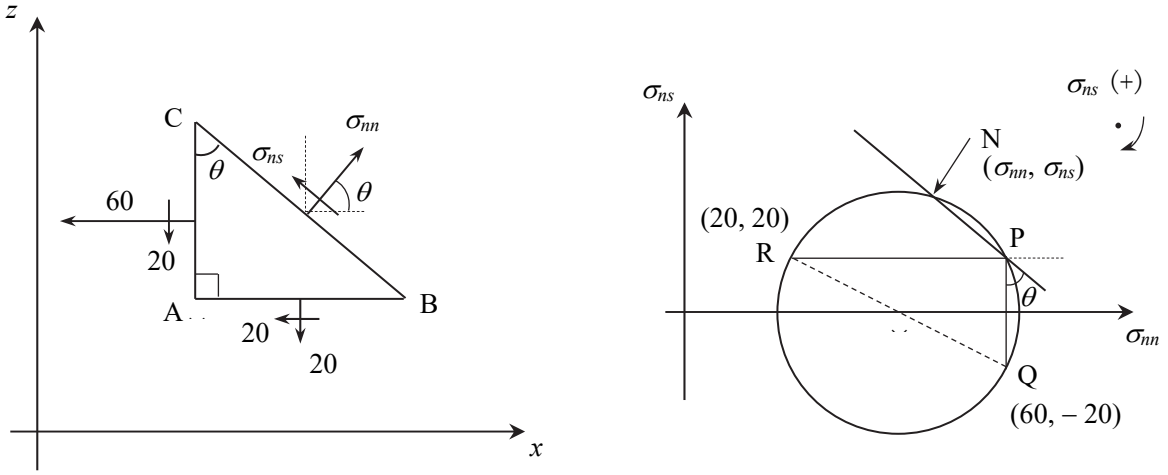
をモール円で表すと Fig.A3.4(b)となる。

次に, 用極法(Pole method)の性質を用いてモール円の極を求める。モール円の極は,

「極から, 考えている作用面に平行な線を引いたとき, その線がモール円と交わる点がその面に働く応力を表す」

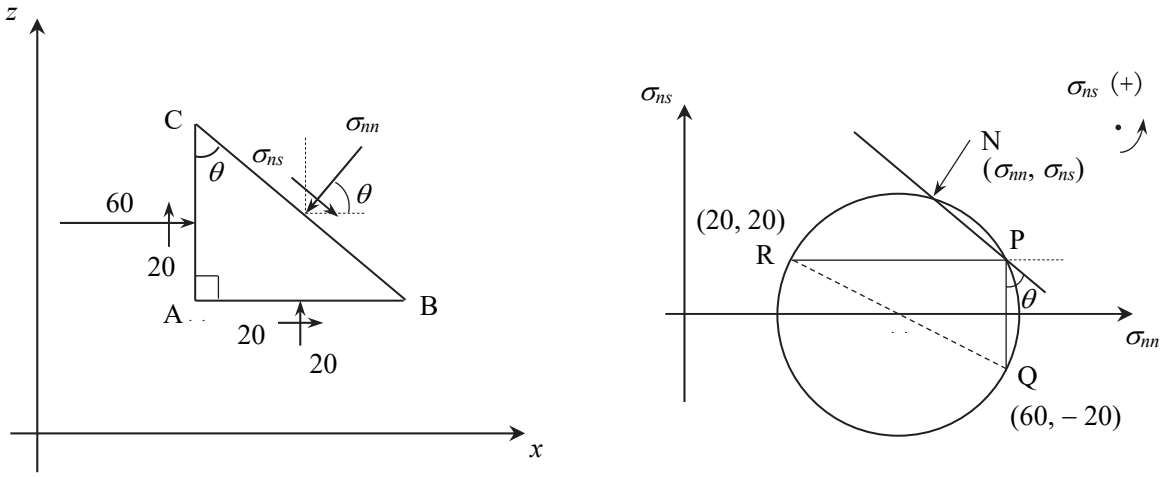
と定義されている。例題 A3.1, 例題 A3.2 について,「極の性質」を逆に用いて, 極を求めることができ, それぞれ, Fig.A3.3(b), Fig.A3.4(b)となる。

極が求まると, モール円を用いて, 種々の角度をもつ面における応力状態を求めることができるが, その方法については本文**5.2 節**及び**5.3 節**を参照のこと。



(a) 応力状態　　(b) モール円

Fig.A3.3　例題 A3.1 第 I 系列(弾性体力学)における応力状態, 及び, モール円とθ 方向の面における応力



(a) 応力状態　　(b) モール円

Fig.A3.4　例題 A3.2 第Ⅱ系列(土質力学)における応力状態, 及び, モール円とθ 方向の面における応力

2 つの例題は, 数値自体の大きさは全く同一であるが, σ_{xx}, σ_{zz} は第 I 系列では引張応力として(正値)であり, 第Ⅱ系列では圧縮応力として(正値)である。また, せん断応力のσ_{xz} は同じ面上で正の方向の定義がちょうど反対向きとなっている。前者では時計回りのものを正にとり, 後者では反時計まわりのものを正にとっているためである。このようにして, 例題 A3.1, A3.2 の両者において, モール円は全く同一ものとして表されることになる。2 つの系列において,「テンソル成分の正方向」,「モール円を描くときのせん断応力の正の向き」が巧妙に定義され, 応力の値自体が同一の場合, 力の釣合い式, モール円が全く同一になるように考案されている。このように, 連続体力学の分野では, 巧妙に考案された 2 つの系列が存在する。

浸透流理論における, 透水係数テンソル(材料定数)に関しては, 便宜上第 I 系列(弾性体力学)

の定義にしたがった。すなわち，対角成分 k_{xx}, k_{zz} については正値のみとし（要素各辺において外向きを正とし），非対角成分 k_{xz}, k_{zx} については，弾性体力学のせん断応力成分と同じように表している。例えば, Fig.A3.5 の右側の面（$(+x)$ 面）について述べると，単位の動水勾配 i_x が x 軸の正方向に作用したときに，誘導浸透流が z 軸の正の向きに生じる場合 k_{zx} は正の値とし，負の向きに生じる場合 k_{zx} は負の値とする。また，左側の面（$(-x)$ 面）について述べると，単位の動水勾配 i_x が x 軸の負方向に作用したときに，誘導浸透流が z 軸の負の向きに生じる場合 k_{zx} は正の値とし，正の向きに生じる場合 k_{zx} は負の値とする。他の成分についても同様である。Fig.A3.5 に透水係数テンソル成分の正方向を示す。

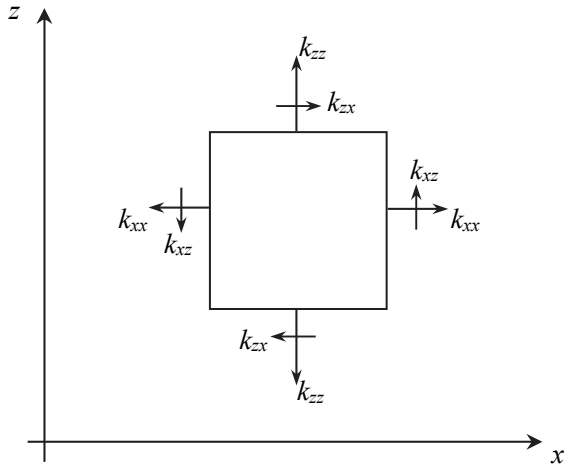


Fig.A3.5　透水係数テンソル成分の正方向

参考文献

A3.1) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (1970): Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill (1st ed. 1934).

A3.2) Atkinson, J.H. & Bransby, P.L. (1978): The Mechanics of Soils, McGraw-Hill, London.

付録４　透水係数テンソルの主値の求め方（解析的方法）

A4.1 主透水係数の求め方

ここでの議論は主に参考文献 A4.1 に基づく。第 5 章で述べたように, x, z 座標系を反時計回りに θ だけ回転した n, s 座標系に関する透水係数テンソルの成分 k_{nn}, k_{ns} は, (5.1)式から,

$$k_{nn} = k_{xx}\frac{1+\cos 2\theta}{2} + k_{zz}\frac{1-\cos 2\theta}{2} + k_{xz}\sin 2\theta \tag{A4.1}$$

$$k_{ns} = k_{xz}\cos 2\theta - \frac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\sin 2\theta \tag{A4.2}$$

と表される。x 軸から反時計回りに θ の角度をなす n 方向の透水係数テンソルの成分 k_{nn}（(A4.1)式）を角 θ について微分すると,

$$k_{nn} = k_{xx}\frac{1+\cos 2\theta}{2} + k_{zz}\frac{1-\cos 2\theta}{2} + k_{xz}\sin 2\theta\ ,$$

$$\frac{d\,k_{nn}}{d\theta} = -k_{xx}\sin 2\theta + k_{zz}\sin 2\theta + 2k_{xz}\cos 2\theta$$

$$= -(k_{xx}-k_{zz})\sin 2\theta + 2k_{xz}\cos 2\theta \tag{A4.3}$$

となる。透水係数テンソルの成分 k_{nn} が極値（最大, 最小値）をとる方向は, (A4.3)式を 0 とおくことによって得られ次のようになる。

$$\tan 2\theta = \frac{2k_{xz}}{k_{xx}-k_{zz}} \tag{A4.4}$$

(A4.4)式を満足する一つの角を主値 $2\theta_0$（$-90° \le 2\theta_0 \le 90°$）に選べば,

$$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2k_{xz}}{k_{xx}-k_{zz}}\right) = 2\theta_0,\ 2\theta_0 + \pi \tag{A4.5}$$

$$\therefore\ \theta_1 = \theta_0,\ \theta_2 = \theta_0 + \frac{\pi}{2} \tag{A4.6}$$

を得る。(A4.6)式より透水係数テンソルの成分 k_{nn} が極値をとる方向は 2 つあり, その方向 θ_1 と θ_2 は互いに直交することがわかる。このとき, k_{ns} の値（(A4.2)式）は, (A4.4)式を用いて,

$$k_{ns} = 0 \tag{A4.7}$$

となる。また, k_{nn} の値（(A4.1)式）は, (A4.4)式を用いて, 次のようになる。

$$k_{nn} = \begin{cases} k_1 = \dfrac{k_{xx}+k_{zz}}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2 + k_{xz}{}^2} \\ k_3 = \dfrac{k_{xx}+k_{zz}}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2 + k_{xz}{}^2} \end{cases} \tag{A4.8}$$

ここで, k_{nn} の最大値を k_1, 最小値を k_3 とおいて, それぞれ, 最大, 最小主透水係数と呼ぶ。

次に, k_{nn} が最大値 k_1, あるいは, 最小値 k_3 となる方向を調べる。(A4.3)式を θ についてさらに微分すると,

$$\frac{d^2k_{nn}}{d\theta^2} = -2(k_{xx} - k_{zz})\cos 2\theta - 2k_{xz}\sin 2\theta$$

$$= -2\{(k_{xx} - k_{zz})\cos 2\theta + k_{xz}\sin 2\theta\} \tag{A4.9}$$

となる。(A4.9)式は, (A4.5)式を用いて整理すると,

$$\frac{d^2k_{nn}}{d\theta^2} = -2(k_{xx} - k_{zz})\cos 2\theta\left(1 + \frac{k_{xz}}{k_{xx} - k_{zz}}\tan 2\theta\right)$$

$$= -2(k_{xx} - k_{zz})\cos 2\theta_0(1 + \tan^2 2\theta_0) \tag{A4.10}$$

となる。ここで, $-90° \le 2\theta_0 \le 90°$であるので,

$$\cos 2\theta_0 \ge 0, \quad 1 + \tan^2 2\theta_0 > 0$$

である。したがって, $k_{xx} - k_{zz}$が正か負であるかによって$\frac{d^2k_{nn}}{d\theta^2}$の符号が定まる。

(i) $k_{xx} - k_{zz} > 0$ のとき, $\frac{d^2k_{nn}}{d\theta^2} \le 0$ となり,

$-45° \le \theta_0 \le 45°$の範囲で k_{xx}は最大値をとる。

(ii) $k_{xx} - k_{zz} < 0$ のとき, $\frac{d^2k_{nn}}{d\theta^2} \ge 0$ となり,

$-45° \le \theta_0 \le 45°$ の範囲で k_{xx}は最小値をとる。

A4.2 非対角成分 k_{ns} の極値の求め方

(A4.2)式で表される k_{ns} を角θ について微分すると,

$$\frac{d\,k_{ns}}{d\theta} = -2k_{xz}\sin 2\theta - (k_{xx} - k_{zz})\cos 2\theta \tag{A4.11}$$

となる。透水係数テンソルの誘導成分 k_{ns} が極値(最大, 最小値)をとる方向は, (A4.11)式を 0 とおくことによって得られ次のようになる。

$$\tan 2\theta = -\frac{k_{xx} - k_{zz}}{2k_{xz}} \tag{A4.12}$$

(A4.12)式を満足する一つの角を $2\theta_0$'（$-90° \le 2\theta_0' \le 90°$）とすると,

$$2\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{k_{xx} - k_{zz}}{2k_{xz}}\right) = 2\theta_0', 2\theta_0' + \pi \tag{A4.13}$$

$$\therefore \theta_1' = \theta_0', \ \theta_2' = \theta_0' + \frac{\pi}{2} \tag{A4.14}$$

となる。(A4.14)式により透水係数テンソルの誘導成分 k_{ns} が極値をとる方向は 2 つあり, その方向 θ_1' とθ_2' は互いに直交することがわかる。このとき, k_{nn} の値((A4.1)式)は, (A4.12)式を用いて,

$$k_{nn} = \frac{k_{xx} + k_{zz}}{2} + \frac{k_{xx} - k_{zz}}{2}\cos 2\theta + k_{xz}\sin 2\theta$$

$$= \frac{k_{xx} + k_{zz}}{2} \tag{A4.15}$$

となる。また, k_{ns} の大きさ((A4.2)式)は, (A4.12)式を用いて次のように表される。

$$k_{ns} = \begin{cases} k_{ns\,\max} = \sqrt{\left(\dfrac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2 + k_{xz}{}^2} \\ k_{ns\,\min} = -\sqrt{\left(\dfrac{k_{xx}-k_{zz}}{2}\right)^2 + k_{xz}{}^2} \end{cases} \tag{A4.16}$$

次に, k_{ns} が最大値 $k_{ns\,\max}$, あるいは, 最小値 $k_{ns\,\min}$ となる方向を調べる。(A4.11)式を θ についてさらに微分すると,

$$\frac{d^2 k_{ns}}{d\theta^2} = -4k_{xz}\cos 2\theta + 2(k_{xx}-k_{zz})\sin 2\theta$$

$$= -4\{k_{xz}\cos 2\theta - \frac{1}{2}(k_{xx}-k_{zz})\sin 2\theta\} \tag{A4.17}$$

となる。(A4.17)式は(A4.13)式を用いて整理すると,

$$\frac{d^2 k_{ns}}{d\theta^2} = -2k_{xz}\cos 2\theta\left(1 - \frac{k_{xx}-k_{zz}}{2k_{xz}}\tan 2\theta\right)$$

$$= -2k_{xz}\cos 2\theta_0'(1+\tan^2 2\theta_0') \tag{A4.18}$$

となる。ここで, $-90° \le 2\theta_0' \le 90°$ であるので,

$$\cos 2\theta_0 \ge 0, \quad 1+\tan^2 2\theta_0' > 0$$

であり, k_{xz} の値によって $\dfrac{d^2 k_{ns}}{d\theta^2}$ の符号が定まる。

(i) $k_{xz} > 0$ のとき, $\dfrac{d^2 k_{ns}}{d\theta^2} \le 0$ となり,

$-45° \le \theta_0' \le 45°$ の範囲で k_{ns} は最大値 $k_{ns\,\max}$ をとる。

(ii) $k_{xz} < 0$ のとき, $\dfrac{d\,k_{ns}}{d\theta^2} \ge 0$ となり,

$-45° \le \theta_0' \le 45°$ の範囲で k_{ns} は最小値 $k_{ns\,\min}$ をとる。

また, (A4.5)式, (A4.13)式から,

$$\tan 2\theta_0 \cdot \tan 2\theta_0' = \frac{2k_{xz}}{k_{xx}-k_{zz}} \cdot \left(-\frac{k_{xx}-k_{zz}}{2k_{xz}}\right) = -1$$

となり, 2 つの方向 $2\theta_0$ と $2\theta_0'$ は直交する。したがって,

$$\left|2\theta_0 - 2\theta_0'\right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \left|\theta_0 - \theta_0'\right| = \frac{\pi}{4} \tag{A4.19}$$

を得る。(A4.19)式から最大・最小主透水係数の方向と透水係数テンソルの誘導成分が最大, 最小値となる方向は 45°の角度をなしていることがわかる。

参考文献

A4.1) モールの応力円編集委員会編 (1993): モールの応力円＜ジオテクノート 4＞, pp.26-43, 土質工学会.

付録５　ガウスの発散定理の証明

ここでは, $x-z$ 座標系におけるガウスの発散定理：

$$\iint_S \left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}\right)dx\,dz=\int_C\left(An_x+Bn_z\right)dC \tag{A5.1}$$

の証明を行う[A5.1)]。ここに, A, B は x, z の関数であり, x, z に関して微分可能であるとする。S は対象の浸透領域, C は対象領域の周囲を表す。また, (n_x, n_z)は境界に垂直な外向きの法線ベクトルである。まず, (A5.1)式の左辺第一項について考える。Fig.A5.1 を参照して，偏微分の面積積分に，順次，操作を加えていくと，次に示すように，境界に沿っての線積分に帰着できることがわかる。

$$\begin{aligned}
&\iint_S \frac{\partial A}{\partial x}dx\,dz\\
&=\int\left\{\int_{x_2}^{x_1}\frac{\partial A}{\partial x}dx\right\}dz\\
&=\int\left\{A(x_1,z)-A(x_2,z)\right\}dz\\
&=\int_{C_1}A\,dz-\int_{C_2}A\,dz\\
&=\int_{C_1}A\,n_x dC+\int_{C_2}A\,n_x dC\\
&=\int_{C_1+C_2}A\,n_x dC
\end{aligned}$$

$$\because\quad dz=n_x\,dC\quad(n_x>0)\quad\text{on } C_1$$
$$dz=-n_x\,dC\quad(n_x<0)\quad\text{on } C_2$$

$$=\int_C A\,n_x dC \tag{A5.2}$$

次に, (A5.1)式の左辺第二項について考える。

上述と同様にして，順次操作を加えると，

$$\iint_S \frac{\partial B}{\partial z}dx\,dz=\int_C B\,n_z dC \tag{A5.3}$$

となる。このようにして，(A5.2)式と(A5.3)式の両辺を，それぞれ，足し合わせることによって，ガウスの発散定理(A5.1)式が得られることがわかる。

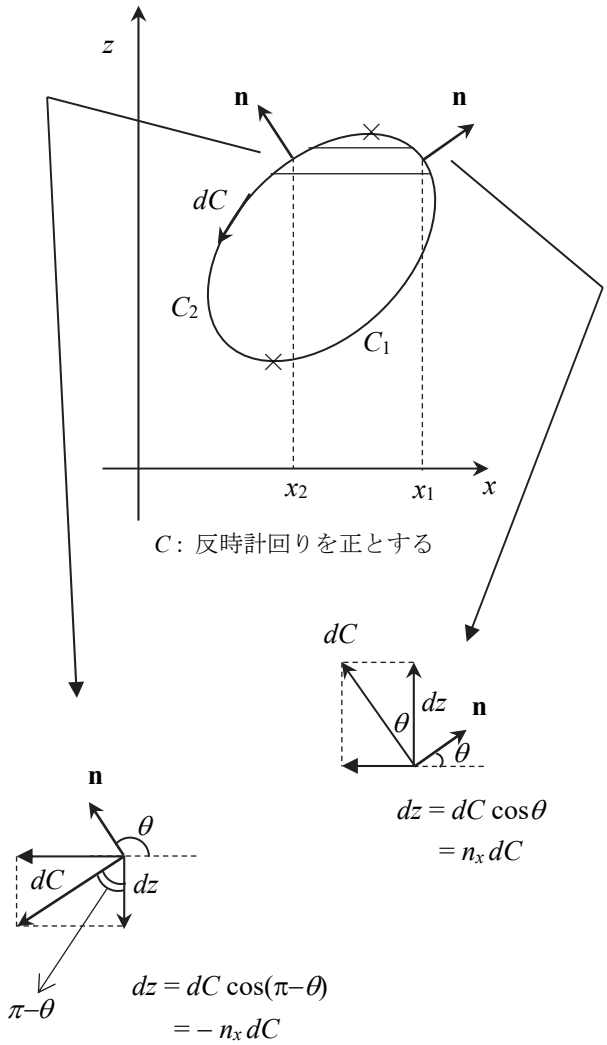


Fig.A5.1　ガウスの発散定理の説明図

ここで, $A=A_1A_2$ とおくと, (A5.2)式は,

$$\iint_S \frac{\partial A}{\partial x}dx\,dz=\iint_S\frac{\partial(A_1A_2)}{\partial x}dx\,dz=\iint_S\frac{\partial A_1}{\partial x}A_2\,dx\,dz+\iint_S A_1\frac{\partial A_2}{\partial x}dx\,dz=\int_C A_1A_2\,n_x\,dC$$

$$\therefore\ \iint_S A_1\frac{\partial A_2}{\partial x}dx\,dz=\int_C A_1A_2\,n_x\,dC-\iint_S\frac{\partial A_1}{\partial x}A_2\,dx\,dz \tag{A5.4}$$

となる。次に, $B=B_1B_2$ とおくと, (A5.3)式は,

$$\iint_S \frac{\partial B}{\partial z}dx\,dz=\iint_S\frac{\partial(B_1B_2)}{\partial z}dx\,dz=\iint_S\frac{\partial B_1}{\partial z}B_2\,dx\,dz+\iint_S B_1\frac{\partial B_2}{\partial z}dx\,dz=\int_C B_1B_2\,n_z\,dC$$

$$\therefore \iint_S B_1 \frac{\partial B_2}{\partial z} dx\,dz = \int_C B_1 B_2 n_z \, dC - \iint_S \frac{\partial B_1}{\partial z} B_2 \, dx\,dz \tag{A5.5}$$

となる。(A5.4), (A5.5)式から，ガウスの発散定理から派生した式：

$$\iint_S \left(A_1 \frac{\partial A_2}{\partial x} + B_1 \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) dx\,dz = \int_C \left(A_1 A_2 n_x + B_1 B_2 n_z \right) dC - \iint_S \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} A_2 + \frac{\partial B_1}{\partial z} B_2 \right) dx\,dz \tag{A5.6}$$

が導かれる。(A5.4)～(A5.6)式は，ちょうど，一次関数における「部分積分の公式」に対応するものである。

本文**第 10 章**において, (10.28)式から, (10.29)式を導くとき ，及び，本文**第 11 章**において, (11.33)式から, (11.34)式を導くとき，ガウスの発散定理から導かれた(A5.6)式を用いた。

参考文献

A5.1) 田村　武，関口秀樹，西垣　誠 (1987)：(講座)有限要素法入門 2. 土質力学における現象と方程式, pp.81-88，土と基礎(土質工学会誌), 35 巻,12 号(359 号).

付録６　四辺形８節点アイソパラメトリック要素を用いた近似

x, z 平面座標系において二次曲線的な境界形状をもつ四辺形要素を, 2×2 の正方形平面座標系(ξ, η) ($-1 \le \xi \le 1$, $-1 \le \eta \le 1$)に変換する。そして，有限要素式を，物理座標系(x, z)から局所座標系(ξ, η)に変換することを考える。局所座標系は自然座標系とも呼ばれる。アイソパラメトリック要素とは，境界形状の二次曲線的近似（形状関数），領域内における物理量 h の二次曲線的近似（内挿関数）に関して，同じ関数を用いるものである。ここに, h は全水頭の値である。ここでは，要素について議論するので，特に断らない限り，要素に関する内挿関数及び形状関数は，記号にスーパースクリプト e を付して表すものとする。

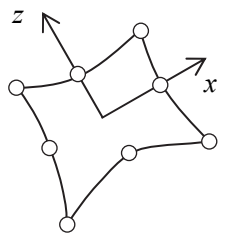


Fig.A6.1　物理座標系(x, z)における要素の形状

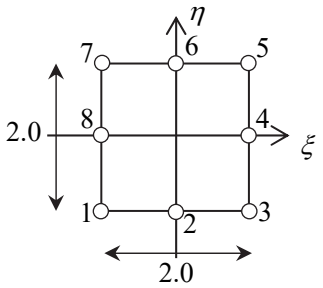


Fig.A6.2　局所座標系(ξ, η)における要素の形状

局所座標系(ξ, η)において，各要素内の全水頭 h は，内挿関数 N_α^e を用いて，

$$h = \sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha N_\alpha^e(\xi,\eta)\,,\quad N_\alpha^e = N_\alpha^e(\xi,\eta) \tag{A6.1}$$

と表される。同時に，アイソパラメトリック要素の場合，全体座標系が，形状関数（= 内挿関数）を用いて，

$$x = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha N_\alpha^e(\xi,\eta) \tag{A6.2a}$$

$$z = \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha N_\alpha^e(\xi,\eta) \tag{A6.2b}$$

と表される。ここで, n は要素を構成する節点の数, $-1 \le \xi$, $\eta \le 1$ は局所正規座標, h_α は各節点における全水頭の値, x_α, z_α は各節点の座標値である。8 節点（n = 8）の形状関数 $N_\alpha^e(\xi, \eta)$ (α = 1～8) は，次のように表される [A6.1)]。この形状関数はセレンディピティ属と呼ばれる。

$$N_1^e(\xi,\eta) = -(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)/4 \tag{A6.3a}$$

$$N_2^e(\xi,\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \tag{A6.3b}$$

$$N_3^e(\xi,\eta) = -(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)/4 \tag{A6.3c}$$

$$N_4^e(\xi,\eta) = (1+\xi)(1-\eta^2)/2 \tag{A6.3d}$$

$$N_5^e(\xi,\eta) = -(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)/4 \tag{A6.3e}$$

$$N_6^e(\xi,\eta) = (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \tag{A6.3f}$$

$$N_7^e(\xi,\eta) = -(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)/4 \tag{A6.3g}$$

$$N_8^e(\xi,\eta) = (1-\xi)(1-\eta^2)/2 \tag{A6.3h}$$

全水頭値 h は形状関数 N_α^e を用いて，

$$h = \left[N_1^e \;\; N_2^e \;\; .... \;\; N_n^e \right] \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{N}^e \right] \mathbf{H}^e \qquad (n = 8) \tag{A6.4}$$

と表され，動水勾配 $(i_x, i_z)^T$ は，

$$\mathbf{i}=\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1{}^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2{}^e}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial N_n{}^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1{}^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2{}^e}{\partial z} & \cdots & \dfrac{\partial N_n{}^e}{\partial z} \end{bmatrix}\mathbf{H}^e=-\left[\mathbf{B}^e\right]\mathbf{H}^e \qquad (n=8) \tag{A6.5}$$

と表される。また，全体座標系(x, y)と局所座標系(ξ, η)の微分は,

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dz \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\dfrac{\partial x}{\partial \eta}d\eta \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\dfrac{\partial z}{\partial \eta}d\eta \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \tag{A6.6}$$

によって関係づけられる。(A6.6)式の右辺第一項：

$$\left[\mathbf{J}\right]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{A6.7}$$

はヤコビアン・マトリックス(Jacobian matrix)と呼ばれる。また,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}=\left[\mathbf{J}^T\right]\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{A6.8}$$

である。同様にして，ヤコビアンマトリックスの逆$\left[\mathbf{J}\right]^{-1}$は,

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}=\left[\mathbf{J}\right]^{-1}\begin{Bmatrix} dx \\ dz \end{Bmatrix}$$

の関係から求まり,

$$\left[\mathbf{J}\right]^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{A6.9}$$

となる。また, (A6.8)式の逆の関係が,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial z} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}=\left[\mathbf{J}^{-1}\right]^T\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{A6.10}$$

と表される。ヤコビアン行列式Jは,

$$J=\det\left[\mathbf{J}\right]=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi} \tag{A6.11}$$

と定義される。ヤコビアンマトリックスは,

Cf. (A6.8)式の導出

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \xi}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \xi}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \eta}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}f=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}f$$

$$[\mathbf{J}]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} & \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}\\ \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} & \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 \,....\, x_n\\ z_1 & z_2 \,....\, z_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_1^e}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial N_2^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial \eta}\\ . & .\\ . & .\\ \dfrac{\partial N_n^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 \,....\, x_n\\ z_1 & z_2 \,....\, z_n\end{bmatrix}\left[B(\xi,\eta)\right]^T \qquad (n=8)$$

$$=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix} \tag{A6.12}$$

と表される。ここに,

$$\begin{cases} J_{11}=\dfrac{\partial x}{\partial \xi}, \quad J_{12}=\dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ J_{21}=\dfrac{\partial z}{\partial \xi}, \quad J_{22}=\dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{cases} \tag{A6.13}$$

であり，また,

$$\frac{\partial N_1^e}{\partial \xi}=\frac{(1-\eta)(2\xi+\eta)}{4} \qquad \frac{\partial N_1^e}{\partial \eta}=\frac{(1-\xi)(\xi+2\eta)}{4} \tag{A6.14a}$$

$$\frac{\partial N_2^e}{\partial \xi}=-\xi(1-\eta) \qquad \frac{\partial N_2^e}{\partial \eta}=-\frac{1-\xi^2}{2} \tag{A6.14b}$$

$$\frac{\partial N_3^e}{\partial \xi}=\frac{(1-\eta)(2\xi-\eta)}{4} \qquad \frac{\partial N_3^e}{\partial \eta}=-\frac{(1+\xi)(\xi-2\eta)}{4} \tag{A6.14c}$$

$$\frac{\partial N_4^e}{\partial \xi}=\frac{1-\eta^2}{2} \qquad \frac{\partial N_4^e}{\partial \eta}=-(1+\xi)\eta \tag{A6.14d}$$

$$\frac{\partial N_5^e}{\partial \xi}=\frac{(1+\eta)(2\xi+\eta)}{4} \qquad \frac{\partial N_5^e}{\partial \eta}=\frac{(1+\xi)(\xi+2\eta)}{4} \tag{A6.14e}$$

$$\frac{\partial N_6^e}{\partial \xi}=-\xi(1+\eta) \qquad \frac{\partial N_6^e}{\partial \eta}=\frac{1-\xi^2}{2} \tag{A6.14f}$$

$$\frac{\partial N_7^e}{\partial \xi}=\frac{(1+\eta)(2\xi-\eta)}{4} \qquad \frac{\partial N_7^e}{\partial \eta}=-\frac{(1-\xi)(\xi-2\eta)}{4} \tag{A6.14g}$$

$$\frac{\partial N_8^e}{\partial \xi}=-\frac{1-\eta^2}{2} \qquad \frac{\partial N_8^e}{\partial \eta}=-(1-\xi)\eta \tag{A6.14h}$$

である[A6.1)]。また，$[\mathbf{J}]$の逆は,

$$[\mathbf{J}]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z}\end{bmatrix}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}J_{22} & -J_{12}\\ -J_{21} & J_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}JI_{11} & JI_{12}\\ JI_{21} & JI_{22}\end{bmatrix} \tag{A6.15}$$

で表される。ここに，J はヤコビアン行列式((A6.11)式)であり，JI_{ij} $(i, j = 1, 2)$は，

$$\begin{cases} JI_{11} = J_{22}/J, & JI_{12} = -J_{12}/J \\ JI_{21} = -J_{21}/J, & JI_{22} = J_{11}/J \end{cases} \tag{A6.16}$$

である。

要素内の全水頭値 h は，

$$h = \left[N_1^e \ N_2^e \ .... \ N_n^e \right] \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{N}^e \right] \mathbf{H}^e \qquad (n = 8) \tag{A6.17}$$

で表される。

また，要素内の動水勾配は，

$$\mathbf{i} = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} & .... & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial z} & .... & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{Bmatrix} = -\left[\mathbf{B}^e \right] \mathbf{H}^e \qquad (n = 8) \tag{A6.18}$$

と表される。ここに，

$$\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} = \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = JI_{11}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} + JI_{21}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \tag{A6.19a}$$

$$\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} = \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} = JI_{12}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} + JI_{22}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \tag{A6.19b}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JI_{11} & JI_{21} \\ JI_{12} & JI_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{J}^{-1} \right]^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{A6.20}$$

である。また，

$$\left[\mathbf{B}^e(x,z) \right] = \underbrace{\left[\mathbf{J}^{-1} \right]^T}_{=[\mathbf{G}]} \left[\mathbf{B}^e(\xi,\eta) \right] = [\mathbf{G}] \left[\mathbf{B}^e(\xi,\eta) \right] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial \xi} & .... & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial \eta} & .... & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (n = 8) \tag{A6.21}$$

である。ここに，

$$[\mathbf{G}] = \left[\mathbf{J}^{-1} \right]^T = \begin{bmatrix} JI_{11} & JI_{21} \\ JI_{12} & JI_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

である。また，面積微分 dS は，

$$dS = dx\,dz = J\,d\xi\,d\eta \tag{A6.22}$$

で表される。

8ISO 二次要素では，全水頭値が要素内で二次曲線的に変化するので，その一階微分(動水勾配)

は直線的に変化する。

次に，要素透水マトリックス，境界条件，及び，要素内の湧き出しの計算処理方法について述べ，領域全体の節点全水頭ベクトルの計算方法について述べる。

(1) 要素透水マトリックス

要素透水マトリックス（本文の(10.53)式）は，次のように計算することができる。

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{K}^e\right] &= \int_{S^e}\left[\mathbf{B}^e\right]^T\left[\mathbf{D}\right]\left[\mathbf{B}^e\right]dS \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\mathbf{B}^e\right]^T\left[\mathbf{D}\right]\left[\mathbf{B}^e\right]|J|\,d\xi\,d\eta\end{aligned} \tag{A6.23}$$

ここに，

$$\left[\mathbf{B}^e(x,z)\right] = \left[\mathbf{J}^{-1}\right]^T\left[\mathbf{B}^e(\xi,\eta)\right] = \left[\mathbf{G}\right]\left[\mathbf{B}^e(\xi,\eta)\right] \tag{A6.24}$$

$$\left[\mathbf{G}\right] = \left[\mathbf{J}^{-1}\right]^T = \begin{bmatrix} JI_{11} & JI_{21} \\ JI_{12} & JI_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} \tag{A6.25}$$

であり，透水係数マトリックス$\left[\mathbf{D}\right]$は要素内で一定と考える。また，

$$\begin{cases} J_{11} = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}, \quad J_{12} = \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ J_{21} = \dfrac{\partial z}{\partial \xi}, \quad J_{22} = \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{cases} \tag{A6.26}$$

である。

(A6.23)～(A6.26)式は，ガウス・ルジャンドルの数値積分（付録８参照）を用いて計算することができる（以下の項目 (2)～(4) についても同様である）。

(2) 自然境界におけるフラックスベクトル

要素 e' の自然境界（流速境界）$C_v^{e'}$ におけるフラックスベクトル（本文の(10.58)式）：

$$\mathbf{Q}^{e'} = \int_{C_v^{e'}} \overline{v_n}\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC \tag{A6.27}$$

を計算する。ここでは, Figs.A6.3, A6.4 に示すような一元二次関数の曲線要素を用いる。形状関数（= 内挿関数）には，

$$\begin{cases} \overline{N_1^{e'}} = -\xi(1-\xi)/2 \\ \overline{N_2^{e'}} = (1-\xi^2)/2 \\ \overline{N_3^{e'}} = \xi(1+\xi)/2 \end{cases} \tag{A6.28}$$

を用いる [A6.1)]。ここで，流速が与えられた境界に沿って座標 s をとる。また，座標 s は，浸透領域を左に見ながら，反時計回りに正をとるものとする。また，流速境界における流速は境界に垂直な方向（法線方向）の成分について考える。座標 s 及び境界に沿った法線方向の流速$\overline{v_n}$ は，一元二次形状関数（= 内挿関数）(A6.28)式を用いて，

$$s = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha \overline{N_\alpha^{e'}}(\xi) \tag{A6.29}$$

$$\overline{v_n} = \sum_{\alpha=1}^{3} \overline{v_{n\alpha}}\,\overline{N_\alpha^{e'}}(\xi) \tag{A6.30}$$

と表される。したがって, (A6.27)式は,

$$\mathbf{Q}^{e'} = \int_{C_v^{e'}} \overline{v_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}} \right]^T dC$$

$$= \int_{C_v^{e'}} \overline{v_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}} \right]^T ds$$

$$= \int_{-1}^{1} \overline{v_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}} \right]^T \left| \frac{ds}{d\xi} \right| d\xi \qquad \text{(A6.31)}$$

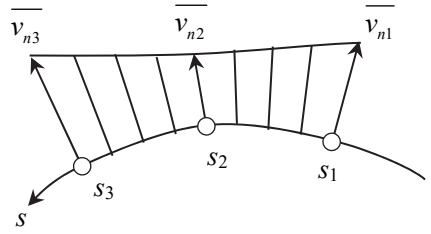


Fig.A6.3　流速境界（物理座標系）

と表される。ここに,

$$\frac{ds}{d\xi} = \sum_{\alpha=1}^{3} s_\alpha \frac{\partial \overline{N_\alpha^{e'}}(\xi)}{\partial \xi}$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \overline{N_1^{e'}}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \overline{N_2^{e'}}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \overline{N_3^{e'}}}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1+2\xi)/2 \\ -\xi \\ (1+2\xi)/2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A6.32)}$$

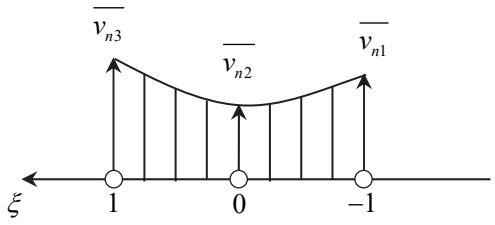


Fig.A6.4　一元二次内挿関数（局所座標系）

である。

(3) 集中フラックスによるフラックスベクトル

(2)の特別な場合として，流速境界に沿って座標 s をとり，原点 $s = 0$ に集中フラックス（湧き出し，または，吸い込み）がある場合：$\overline{v_n} = Q\,\delta(s)$ について考える。ここに，$\delta(s)$はディラックのデルタ関数である。このとき, (A6.27)式は,

$$\mathbf{Q}^{e'} = \int_{C_v^e} \left[\overline{\mathbf{N}^e} \right]^T Q\delta(s)\,ds \qquad \text{(A6.33a)}$$

と表される。そして,

$$\mathbf{Q}^{e'} = \int_{C_v^e} \begin{bmatrix} \overline{N_1^{e'}} \\ \overline{N_2^{e'}} \\ \overline{N_3^{e'}} \end{bmatrix} Q\delta(s)\,ds \qquad \text{(A6.33b)}$$

$$= Q \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(A6.33c)}$$

となる。

(4) 要素内の湧き出し f によるフラックスベクトル

湧き出し f が要素内で一定とした場合（f = const.），それによるフラックスベクトル $\mathbf{F}$（本文の(10.55)式参照）：

$$\mathbf{F} = \int_S f\left[\mathbf{N}\right]^T dS = \sum_{e=1}^{M} \mathbf{F}^e \tag{A6.34}$$

を計算する。要素 e におけるフラックスベクトル $\mathbf{F}^e$（本文の(10.56)式参照）は,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^e &= \int_{S^e} f\left[\mathbf{N}^e\right]^T dS \\ &= f\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\mathbf{N}^e\right]^T |J|\, d\xi\, d\eta\end{aligned} \tag{A6.35}$$

で表される。ここに, $\left[\mathbf{N}^e\right]^T$ は, 要素内挿関数マトリックスである。

付録８に, ガウス・ルジャンドルの数値積分を用いて, 項目(1)～(4)を計算処理する方法について示す。

(5) 領域全体にわたっての積分

このようにして, 要素ごとに計算された(1)～(4)の各項目が, 領域全体についてまとめられると, 全水頭 h に関する n 元連立一次方程式が得られる（本文の(10.50), (10.51)式参照）。この方程式を解くと節点全水頭ベクトルを求めることができる。ここで, 基本境界は, 本文 10.2.4 項(5)と同じように次のように取り扱われる。

節点全水頭ベクトル $\mathbf{H}$ の内, 例えば, 節点 α における全水頭が既知水頭値 $\overline{h_\alpha}$ であるとする。このとき, 全体透水行列 $[\mathbf{K}]$ の α 行, α 列を消去し, フラックスベクトルを,

$$P_i \rightarrow P_i - K_{i\alpha}\overline{h_\alpha} \quad (i = 1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, N)$$

と修正する。また,

$$K_{\alpha\alpha} = 1.0$$

$$P_\alpha = \overline{h_\alpha}$$

と修正する。

このようにして n 元連立一次方程式を解いて得られた, 各節点における全水頭の値を用いて, 次に述べるように, 各要素内の動水勾配, 流速を計算することができる。

(6) 各要素内の動水勾配と流速の求め方

要素内の動水勾配 $i = \{i_x, i_z\}^T$ は,

$$\mathbf{i} = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial z} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n \end{Bmatrix} = -\left[\mathbf{B}^e\right]\mathbf{H}^e \qquad (n = 8) \tag{A6.36}$$

と表される。ここに,

$$\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} = \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = JI_{11}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} + JI_{21}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \tag{A6.37a}$$

$$\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} = \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} = JI_{12}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} + JI_{22}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \tag{A6.37b}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JI_{11} & JI_{21} \\ JI_{12} & JI_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{J}^{-1}\right]^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{A6.38}$$

である。また,

$$\left[\mathbf{B}^e(x,z)\right] = \underbrace{\left[\mathbf{J}^{-1}\right]^T}_{=[\mathbf{G}]} \left[\mathbf{B}^e(\xi,\eta)\right] = \left[\mathbf{G}\right]\left[\mathbf{B}^e(\xi,\eta)\right] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial \xi} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial \eta} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (n = 8) \tag{A6.39}$$

である。ここに,

$$\left[\mathbf{G}\right] = \left[\mathbf{J}^{-1}\right]^T = \begin{bmatrix} JI_{11} & JI_{21} \\ JI_{12} & JI_{22} \end{bmatrix}$$

である。動水勾配 i は，積分点（**付録８**参照）において, (A6.36)式を用いて計算される（動水勾配については，積分点における値が最も信頼される値である）。また，流速 $\mathbf{v}$ は，積分点において,

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{D}\right]\mathbf{i} = -\left[\mathbf{D}\right]\left[\mathbf{B}\right]\mathbf{H} \tag{A6.40}$$

として算出される。

参考文献

A6.1) 鷲津久一郎 宮本博 山田嘉昭 山本義之 川井忠彦 (1983)：有限要素法ハンドブック（1）基礎編／(2) 応用編，昭和 58 年刊.

付録７　四辺形９節点アイソパラメトリック要素を用いた近似

x, z 平面座標系において二次曲線的な境界形状をもつ四辺形要素を, 2×2 の正方形平面座標系(ξ, η) ($-1 \le \xi \le 1$, $-1 \le \eta \le 1$)に変換する。そして，有限要素式を，物理座標系(x, z)から局所座標系(ξ, η)に変換することを考える。局所座標系は自然座標系とも呼ばれる。アイソパラメトリック要素とは，境界形状の二次曲線的近似（形状関数），領域内における物理量 h の二次曲線的近似（内挿関数）に関して，同じ関数を用いるものである。ここに, h は全水頭の値である。ここでは，要素について議論するので，特に断らない限り，要素に関する内挿関数及び形状関数は，記号にスーパースクリプト e を付して表すものとする。

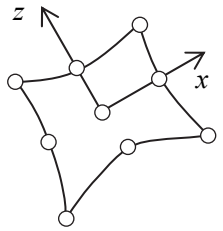


Fig.A7.1　物理座標系(x, z)における要素の形状

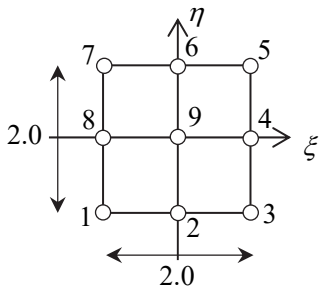


Fig.A7.2　局所座標系(ξ, η)における要素の形状

局所座標系(ξ, η)において，各要素内の全水頭 h は，内挿関数 N_α^e を用いて，

$$h = \sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha N_\alpha^e(\xi,\eta)\,,\quad N_\alpha^e = N_\alpha^e(\xi,\eta) \tag{A7.1}$$

と表される。同時に，アイソパラメトリック要素の場合，全体座標系が，形状関数（= 内挿関数）を用いて，

$$x = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha N_\alpha^e(\xi,\eta) \tag{A7.2a}$$

$$z = \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha N_\alpha^e(\xi,\eta) \tag{A7.2b}$$

と表される。ここで, n は要素を構成する節点の数, $-1 \le \xi$, $\eta \le 1$ は局所正規座標, h_α は各節点における全水頭の値, x_α, z_α は各節点の座標値である。9 節点（n = 9）の形状関数 $N_\alpha^e(\xi, \eta)$ (α = 1～9) は，次のように表される [A7.1)]。この形状関数はラグランジェ属と呼ばれる。

$$N_1^e(\xi,\eta) = \xi(1-\xi)\eta(1-\eta)/4 \tag{A7.3a}$$

$$N_2^e(\xi,\eta) = -(1-\xi^2)\eta(1-\eta)/2 \tag{A7.3b}$$

$$N_3^e(\xi,\eta) = -\xi(1+\xi)\eta(1-\eta)/4 \tag{A7.3c}$$

$$N_4^e(\xi,\eta) = \xi(1+\xi)(1-\eta^2)/2 \tag{A7.3d}$$

$$N_5^e(\xi,\eta) = \xi(1+\xi)\eta(1+\eta)/4 \tag{A7.3e}$$

$$N_6^e(\xi,\eta) = (1-\xi^2)\eta(1+\eta)/2 \tag{A7.3f}$$

$$N_7^e(\xi,\eta) = -\xi(1-\xi)\eta(1+\eta)/4 \tag{A7.3g}$$

$$N_8^e(\xi,\eta) = -\xi(1-\xi)(1-\eta^2)/2 \tag{A7.3h}$$

$$N_9^e(\xi,\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \tag{A7.3i}$$

全水頭値 h は形状関数 N_α^e を用いて，

$$h = \left[N_1^e \;\; N_2^e \;\; .... \;\; N_n^e \right] \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{N}^e \right] \mathbf{H}^e \qquad (n = 9) \tag{A7.4}$$

と表され，動水勾配 $(i_x, i_z)^T$ は，

$$\mathbf{i}=\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1{}^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2{}^e}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial N_n{}^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1{}^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2{}^e}{\partial z} & \cdots & \dfrac{\partial N_n{}^e}{\partial z} \end{bmatrix}\mathbf{H}^e=-\left[\mathbf{B}^e\right]\mathbf{H}^e \qquad (n=9) \tag{A7.5}$$

と表される。また，全体座標系(x, y)と局所座標系(ξ, η)の微分は，

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dz \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\dfrac{\partial x}{\partial \eta}d\eta \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\dfrac{\partial z}{\partial \eta}d\eta \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \tag{A7.6}$$

によって関係づけられる。(A7.6)式の右辺第一項：

$$\left[\mathbf{J}\right]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{A7.7}$$

はヤコビアン・マトリックス(Jacobian matrix)と呼ばれる。また，

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}=\left[\mathbf{J}^T\right]\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{A7.8}$$

である。同様にして，ヤコビアンマトリックスの逆$\left[\mathbf{J}\right]^{-1}$は，

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}=\left[\mathbf{J}\right]^{-1}\begin{Bmatrix} dx \\ dz \end{Bmatrix}$$

の関係から求まり，

$$\left[\mathbf{J}\right]^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{A7.9}$$

となる。また，(A7.8)式の逆の関係が，

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial z} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}=\left[\mathbf{J}^{-1}\right]^T\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{A7.10}$$

と表される。ヤコビアン行列式 J は，

$$J=\det\left[\mathbf{J}\right]=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi} \tag{A7.11}$$

と定義される。ヤコビアンマトリックスは，

Cf. (A7.8)式の導出

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \xi}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \xi}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \eta}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}f=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}f$$

$$[\mathbf{J}]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} & \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}\\ \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} & \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 \,....\, x_n\\ z_1 & z_2 \,....\, z_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_1^e}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial N_2^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial \eta}\\ . & .\\ . & .\\ \dfrac{\partial N_n^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 \,....\, x_n\\ z_1 & z_2 \,....\, z_n\end{bmatrix}\left[B(\xi,\eta)\right]^T \qquad (n=9)$$

$$=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix} \tag{A7.12}$$

と表される。ここに,

$$\begin{cases} J_{11}=\dfrac{\partial x}{\partial \xi}, \quad J_{12}=\dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ J_{21}=\dfrac{\partial z}{\partial \xi}, \quad J_{22}=\dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{cases} \tag{A7.13}$$

であり, また,

$$\frac{\partial N_1^e}{\partial \xi}=\frac{(1-2\xi)\eta(1-\eta)}{4} \qquad \frac{\partial N_1^e}{\partial \eta}=\frac{\xi(1-\xi)(1-2\eta)}{4} \tag{A7.14a}$$

$$\frac{\partial N_2^e}{\partial \xi}=\xi\eta(1-\eta) \qquad \frac{\partial N_2^e}{\partial \eta}=-\frac{(1-\xi^2)(1-2\eta)}{2} \tag{A7.14}$$

$$\frac{\partial N_3^e}{\partial \xi}=-\frac{(1+2\xi)\eta(1-\eta)}{4} \qquad \frac{\partial N_3^e}{\partial \eta}=-\frac{\xi(1+\xi)(1-2\eta)}{4} \tag{A7.14c}$$

$$\frac{\partial N_4^e}{\partial \xi}=\frac{(1+2\xi)(1-\eta^2)}{2} \qquad \frac{\partial N_4^e}{\partial \eta}=-\xi(1+\xi)\eta \tag{A7.14d}$$

$$\frac{\partial N_5^e}{\partial \xi}=\frac{(1+2\xi)\eta(1+\eta)}{4} \qquad \frac{\partial N_5^e}{\partial \eta}=\frac{\xi(1+\xi)(1+2\eta)}{4} \tag{A7.14e}$$

$$\frac{\partial N_6^e}{\partial \xi}=-\xi\eta(1+\eta) \qquad \frac{\partial N_6^e}{\partial \eta}=\frac{(1-\xi^2)(1+2\eta)}{2} \tag{A7.14f}$$

$$\frac{\partial N_7^e}{\partial \xi}=-\frac{(1-2\xi)\eta(1+\eta)}{4} \qquad \frac{\partial N_7^e}{\partial \eta}=-\frac{\xi(1-\xi)(1+2\eta)}{4} \tag{A7.14g}$$

$$\frac{\partial N_8^e}{\partial \xi}=-\frac{(1-2\xi)(1-\eta^2)}{2} \qquad \frac{\partial N_8^e}{\partial \eta}=\xi(1-\xi)\eta \tag{A7.14h}$$

$$\frac{\partial N_9^e}{\partial \xi} = -2\xi(1-\eta^2) \qquad \frac{\partial N_9^e}{\partial \eta} = -2(1-\xi^2)\eta \tag{A7.14i}$$

である[A7.1)]。また，$[\mathbf{J}]$の逆は,

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JI_{11} & JI_{12} \\ JI_{21} & JI_{22} \end{bmatrix} \tag{A7.15}$$

で表される。ここに，J はヤコビアン行列式((A7.11)式)であり, JI_{ij} $(i, j = 1, 2)$は,

$$\begin{cases} JI_{11} = J_{22}/J, \quad JI_{12} = -J_{12}/J \\ JI_{21} = -J_{21}/J, \quad JI_{22} = J_{11}/J \end{cases} \tag{A7.16}$$

である。

要素内の全水頭値 h は,

$$h = \left[N_1^e \ N_2^e \ .... \ N_n^e \right] \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{N}^e \right] \mathbf{H}^e \qquad (n = 9) \tag{A7.17}$$

で表される。

また，要素内の動水勾配は,

$$\mathbf{i} = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} & .... & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial z} & .... & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{Bmatrix} = -\left[\mathbf{B}^e \right] \mathbf{H}^e \qquad (n = 9) \tag{A7.18}$$

と表される。ここに,

$$\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} = \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = JI_{11}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} + JI_{21}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \tag{A7.19a}$$

$$\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} = \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} = JI_{12}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} + JI_{22}\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \tag{A7.19b}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JI_{11} & JI_{21} \\ JI_{12} & JI_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{J}^{-1} \right]^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{A7.20}$$

である。また,

$$\left[\mathbf{B}^e(x,z)\right]=\underbrace{\left[\mathbf{J}^{-1}\right]^T}_{=[\mathbf{G}]}\left[\mathbf{B}^e(\xi,\eta)\right]=\left[\mathbf{G}\right]\left[\mathbf{B}^e(\xi,\eta)\right]=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial \xi} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial \eta} & \cdots & \dfrac{\partial N_n^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (n=9) \qquad \text{(A7.21)}$$

である。ここに,

$$\left[\mathbf{G}\right]=\left[\mathbf{J}^{-1}\right]^T=\begin{bmatrix} JI_{11} & JI_{21} \\ JI_{12} & JI_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

である。また, 面積微分 dS は,

$$dS = dx\,dz = J\,d\xi\,d\eta \qquad \text{(A7.22)}$$

で表される。

9ISO 二次要素では, 全水頭値が要素内で二次曲線的に変化するので, その一階微分(動水勾配)は直線的に変化する。

要素透水マトリックス, 境界条件, 及び, 要素内の湧き出しの処理計算, 領域全体の節点全水頭ベクトルの計算, 及び, 各要素内の動水勾配と流速の計算を行う方法については, **付録６**(8ISO 有限要素近似)で示したもの(次の項目(1)～(6))と同様である。

(1) 要素透水マトリックス
(2) 自然境界におけるフラックスベクトル
(3) 集中フラックスによるフラックスベクトル
(4) 要素内の湧き出し f によるフラックスベクトル
(5) 領域全体にわたっての積分
(6) 各要素内の動水勾配と流速の求め方

参考文献

A7.1) 鷲津久一郎 宮本博 山田嘉昭 山本義之 川井忠彦 (1983) : 有限要素法ハンドブック (1) 基礎編／(2) 応用編, 昭和 58 年刊.

付録８　ガウス・ルジャンドルの数値積分

ガウス・ルジャンドルの数値積分は，まず，一次元問題の場合，次のように表すことができる。x の関数 $f_1(x)$の積分を考えたとき，全体座標系（Global coordinate）の座標成分 x に関する（x_1～x_2 の範囲の積分）を自然座標系（Local coordinate）の座標成分 ξ に関する（-1～$+1$ の範囲の積分）に変換し，積分点における値 $f_1(\xi)$とそれに対応する重み係数の値 w_i の積和を用いて表すものである。積分点の数 m，積分点の座標ξ_i，重み係数 w_i を Table A8.1 に示す。有限要素法においては，各要素について，計算することになる。式で表すと次のようになる [A8.1)]。

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f_1(\xi)\left|\frac{dx}{d\xi}\right| d\xi=\sum_{i=1}^{m} w_i f_1(\xi_i) f_2(\xi_i) \tag{A8.1}$$

ここに，$f_2(\xi_i)$ は点（ξ_i）における微分係数であり，

$$f_2(\xi)=\left.\frac{dx}{d\xi}\right|_{\xi_i} \tag{A8.2}$$

と表される。ここに，m は積分点の数である。

二次元問題の場合，全体座標系(x, z)から局所座標系(ξ, η) へ座標変換する。積分範囲は，$x=x_1$～x_2，$z=z_1$～z_2 が，それぞれ，$\xi=-1$～$+1$，$\eta=-1$～$+1$ となる。x, z の関数 $g_1(x, z)$の積分を考えたとき，

$$II=\int_{x_1}^{x_2}\int_{z_1}^{z_2} g_1(x,z)\,dx\,dz=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_1(\xi,\eta)\left|\det[\mathbf{J}]\right| d\xi\,d\eta=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_i\,w_j\,g_1(\xi_i,\eta_j)g_2(\xi_i,\eta_j) \tag{A8.3}$$

となる [A8.1)]。ここに，$[\mathbf{J}]$はヤコビアンマトリックスであり，$J=\det[\mathbf{J}]$ はその行列式である。そして，$g_2(\xi_i, \eta_j)$は点(ξ_i, η_j) におけるヤコビアンの値であり，

$$g_2(\xi_i,\eta_j)=J\big|_{\xi_i,\eta_j}=\left(\det[\mathbf{J}]\right)\big|_{\xi_i,\eta_j}=\left.\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)\right|_{\xi_i,\eta_j} \tag{A8.4}$$

と表される。座標系 ξ, η の両方向に，それぞれ，Table A8.1 に示す「積分点の数(m)」だけ積分点をとる。

Table A8.1　ガウス・ルジャンドルの数値積分の積分点の座標ξ_iと重み係 w_i

積分点の数(m)	積分点の座標(ξ_i)	重み係数(w_i)
1	0.0	2.0
2	± 0.577350	1.0
3	0.0	0.888889
	± 0.774597	0.555556
4	± 0.861136	0.347855
	± 0.339981	0.652145
5	0.0	0.568889
	± 0.538469	0.478629
	± 0.906180	0.236927

参考文献

A8.1) 鷲津久一郎，宮本　博，山田嘉昭，山本義之，川井忠彦編著 (1981): 有限要素ハンドブック I 基礎編, pp.146-148, pp.245-250，培風館（1981 初版, 1983（初版第 3 刷））.

付録９　CST 要素は Iso parametric element か？

ここでは，まず，三角形定ひずみ要素（CST 要素）を用いた有限要素近似化について述べ，次に，要素内における全水頭 h の表し方について述べる。そして，「CST 要素の形状関数は内挿関数と同一の式で表されるか？」について考察し，CST 要素の内挿関数の本質的な意義（構造），及び，自然境界（線）上の内挿関数について考える。

A9.1　三角形定ひずみ要素を用いた有限要素近似化

浸透流問題における全水頭 h は，浸透領域内の有限個の節点における全水頭の値 $h_\beta\,(\beta=1,2,....,n)$ と場所の関数 $N_\beta\,(\beta=1,2,....,n)$ の一次積和として次のように表される（本文の(10.37)式参照）。

$$h \approx \sum_{\beta=1}^{n} N_\beta h_\beta;\quad N_\beta = N_\beta(x,z):\ \text{内挿関数};\quad n:\ \text{全節点の数} \qquad (10.37)(\text{本文})$$

$N_\beta = N_\beta(x,z)$ は内挿関数と呼ばれ，有限要素近似化に用いられる。有限要素近似化では，支配方程式（本文の(10.15)式）が積分され，最終的に，全体剛性マトリックス（浸透流問題の場合には全体透水マトリックス）に関して，本文の(10.50), (10.51)式として定式化される。内挿関数は，定式化の関係で，領域内の全節点に関して表現される。

全水頭 h は，実際の計算では，例えば節点 i, j, k からなる三角形定ひずみ要素（CST element）の場合を考えると（Fig.A9.1 参照），要素ごとに，要素内挿関数 $N_\beta^e\,(\beta=i,j,k)$ と三角形の 3 つの頂点における全水頭値 h_i, h_j, h_k を用いて，

$$h \approx \sum_{\alpha=i,j,k} N_\alpha^e h_\alpha \qquad (A9.1)$$

と表される。項を書き下すと，

$$h = N_i^e h_i + N_j^e h_j + N_k^e h_k \qquad (A9.2)$$

となる。ここに，N_α^e は要素 e の内挿関数を意味する。

CST 要素では, h が，まず，要素ごとに，次の線形関係式（本文の(10.59)式）：

$$h \approx a + bx + cz \qquad (10.59)(\text{本文})$$

で表される。次に，係数 a, b, c が節点 i, j, k における条件（例えば，節点 $i\,(x_i, z_i)$において $h = h_i$ など）から求められ，N_α^e が最終的に次のように求められる（本文の(10.65a)～(10.65c)式参照）。

$$N_i^e = \frac{1}{\Delta}\left\{(x_j z_k - x_k z_j) + (z_j - z_k)x + (x_k - x_j)z\right\} \qquad (10.65a)(\text{本文})$$

$$N_j^e = \frac{1}{\Delta}\left\{(x_k z_i - x_i z_k) + (z_k - z_i)x + (x_i - x_k)z\right\} \qquad (10.65b)(\text{本文})$$

$$N_k^e = \frac{1}{\Delta}\left\{(x_i z_j - x_j z_i) + (z_i - z_j)x + (x_j - x_i)z\right\} \qquad (10.65c)(\text{本文})$$

ここに, Δは三角形要素 $i\,j\,k$ の面積 A_e の 2 倍の値であり，

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{vmatrix} = 2A^e$$

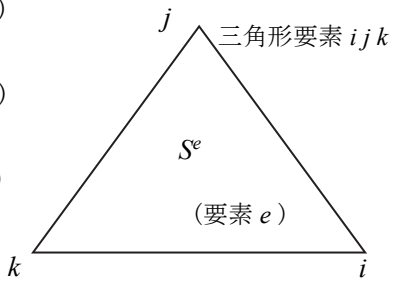


Fig.A9.1　三角形要素 $i\,j\,k$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x_j & z_j \\ x_k & z_k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_i & z_i \\ x_k & z_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_i & z_i \\ x_j & z_j \end{vmatrix} \\
&= x_j z_k - x_k z_j - x_i z_k + x_k z_i + x_i z_j - x_j z_i
\end{aligned} \tag{A9.3}
$$

である。また，動水勾配ベクトル **i** は（本文の(10.82)式），

$$
\mathbf{i} = \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} = -\left[\mathbf{B}^e\right] \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{Bmatrix} = -\left[\mathbf{B}^e\right] \mathbf{H}^e \tag{10.82（本文）}
$$

と定義される。ここに，$\left[\mathbf{B}^e\right]$ は要素における内挿関数の偏導関数マトリックスであり（本文の(10.67a), (10.67b)式），

$$
\left[\mathbf{B}^e\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_j^e}{\partial z} & \dfrac{\partial N_k^e}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{10.67a)(本文}
$$

$$
= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \tag{10.67b)(本文}
$$

と表される。

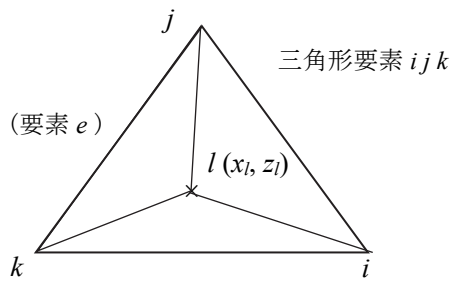


Fig.A9.2　三角形要素 ijk 内の一般点 l

A9.2　要素内における全水頭値 h の表し方

要素内における全水頭値 h は，要素内挿関数 N_α^e を用いて，(A9.2)式で表される。そして，Fig.A9.2 に示すように，要素 e 内の一般点 l（座標は(x_l, z_l)）における内挿関数 N_α^e ($\alpha = i, j, k$) の値は，本文の(10.65a)～(10.65c)式を用いて，

$$
N_i^e = \frac{1}{\Delta}\left\{(x_j z_k - x_k z_j) + (z_j - z_k) x_l + (x_k - x_j) z_l\right\} \tag{A9.4a}
$$

$$
N_j^e = \frac{1}{\Delta}\left\{(x_k z_i - x_i z_k) + (z_k - z_i) x_l + (x_i - x_k) z_l\right\} \tag{A9.4b}
$$

$$
N_k^e = \frac{1}{\Delta}\left\{(x_i z_j - x_j z_i) + (z_i - z_j) x_l + (x_j - x_i) z_l\right\} \tag{A9.4c}
$$

と表される。

ちなみに，点 l と節点 i が一致したとき，すなわち，$(x_l, z_l) = (x_i, z_i)$のとき，

$$
\begin{aligned}
N_i^e &= \frac{1}{\Delta}\left\{(x_j z_k - x_k z_j) + (z_j - z_k) x_l + (x_k - x_j) z_l\right\} \\
&= \frac{1}{\Delta}\left\{(x_j z_k - x_k z_j) + (z_j - z_k) x_i + (x_k - x_j) z_i\right\} \\
&= \frac{1}{\Delta}\left\{x_j z_k - x_k z_j + x_i z_j - x_i z_k + x_k z_i - x_j z_i\right\} \\
&= \frac{\Delta}{\Delta} = 1
\end{aligned} \tag{A9.5a}
$$

$$
\begin{aligned}
N_j^e &= \frac{1}{\Delta}\left\{ (x_k z_i - x_i z_k) + (z_k - z_i) x_l + (x_i - x_k) z_l \right\} \\
&= \frac{1}{\Delta}\left\{ x_k z_i - x_i z_k + x_i z_k - x_i z_i + x_i z_i - x_k z_i \right\} \\
&= \frac{0}{\Delta} = 0
\end{aligned}
\tag{A9.5b}
$$

$$
\begin{aligned}
N_k^e &= \frac{1}{\Delta}\left\{ (x_i z_j - x_j z_i) + (z_i - z_j) x_l + (x_j - x_i) z_l \right\} \\
&= \frac{1}{\Delta}\left\{ x_i z_j - x_j z_i + x_i z_i - x_i z_j + x_j z_i - x_i z_i \right\} \\
&= \frac{0}{\Delta} = 0
\end{aligned}
\tag{A9.5c}
$$

となり,

$$h = h_i \tag{A9.6}$$

となる。同様にして，点 l が節点 i, j と一致したとき，それぞれ,

$$(x_l, z_l) = (x_j, z_j) \text{のとき}, h = h_j \tag{A9.7}$$

$$(x_l, z_l) = (x_k, z_k) \text{のとき}, h = h_k \tag{A9.8}$$

となる。

A9.3　CST 要素の形状関数は内挿関数と同一の式で表されるか？

CST 要素の形状関数が内挿関数 $N_\alpha^e\ (\alpha = i, j, k)$ と同一の式であると仮定すると，座標 x, z は,

$$x = N_i^e x_i + N_j^e x_j + N_k^e x_k \tag{A9.9}$$

$$z = N_i^e z_i + N_j^e z_j + N_k^e z_k \tag{A9.10}$$

と表せることになる。ここでは，これらの式が成り立つかどうかを証明する（形状関数の証明）。

まず, (A9.9)式を証明する。(A9.9)式に(A9.4a)～(A9.4c)式を代入すると，すべての項に共通する係数 1/Δを念頭において（計算では省略して），定数項, x_l の項, z_l の項の 3 つに分けて示すと,

＜定数項＞

$$
\begin{aligned}
&(x_j z_k - x_k z_j) x_i + (x_k z_i - x_i z_k) x_j + (x_i z_j - x_j z_i) x_k \\
&= x_i x_j z_k - x_i x_k z_j + x_j x_k z_i - x_i x_j z_k + x_k x_i z_j - x_j x_k z_i \\
&= z_i (x_j x_k - x_j x_k) + z_j (-x_i x_k + x_k x_i) + z_k (x_i x_j - x_i x_j) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

＜x_l の項＞

$$
\begin{aligned}
&(z_j - z_k) x_i + (z_k - z_i) x_j + (z_i - z_j) x_k \\
&= x_i z_j - x_i z_k + x_j z_k - x_j z_i + x_k z_i - x_k z_j \\
&= \Delta
\end{aligned}
$$

＜z_l の項＞

$$
\begin{aligned}
&(x_k - x_j) z_i + (x_i - x_k) z_j + (x_j - x_i) z_k \\
&= x_k z_i - x_j z_i + x_i z_j - x_k z_j + x_j z_k - x_i z_k \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり, (A9.9)式は,

$$x = x_l \tag{A9.11}$$

となる。(A9.10)式についても，同様にして,

$$z = z_l \tag{A9.12}$$

となる。このように, x, z が一般的な点 x_l, z_l として表せることがわかる。すなわち，N_α^e $(\alpha = i, j, k)$ は形状関数であることがわかる。ここまでの議論のとおり, CST 要素の場合，形状関数は座標 x, z に関する一次関数（線形）であることは言うまでもない。このようにして，CST 要素は，線形の Iso parametric element であることがわかる。CST 要素が Iso parametric element であることを取り立てて強調する必要はないが，この事柄は基本事項として理解しておくべきである。座標は位置ベクトルであるが，座標値 x, z そのものは，全水頭値 h と同様に座標に固有の値（物性値）であると考えれば，この事柄は自明であるといえる。

A9.4　CST 要素の内挿関数の本質的な意義（構造）について

ここでは，CST 要素の内挿関数の本質的な意義（構造）について考える。Fig.A9.3 に示すような, CST 要素 ijk を考える。CST 要素の一つの頂点 i に対応する辺 jk と要素内の一般点 l（座標を(x_l, z_l)とする）を考える。ここで, Δ_{jkl} を三角形 $j\,k\,l$ の面積の 2 倍の値と定義する。ちなみに，三角形要素 $i\,j\,k$ の面積 A^e の 2 倍の値はΔ（(A9.3)式）で表される。ここでは，各種三角形の面積を議論するため, CST 要素 ijk の面積の 2 倍の値ΔをΔ_{ijk} と表すことにする。

$$\Delta_{ijk} = \Delta = x_j\,z_k - x_k\,z_j - x_i\,z_k + x_k\,z_i + x_i\,z_j - x_j\,z_i \tag{A9.13}$$

さて，三角形 $j\,k\,l$ の面積の 2 倍の値Δ_{jkl} は,

$$\begin{aligned}
\Delta_{jkl} &= \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_l & z_l \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_k & z_k \\ x_l & z_l \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_j & z_j \\ x_l & z_l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_j & z_j \\ x_k & z_k \end{vmatrix} \\
&= x_k\,z_l - x_l\,z_k - x_j\,z_l + x_l\,z_j + x_j\,z_k - x_k\,z_j \\
&= (x_j\,z_k - x_k\,z_j) + (z_j - z_k)x_l + (x_k - x_j)z_l \\
&= N_i^e \times \Delta_{ijk} \qquad (\because \text{(A9.4a)式から}) \qquad \text{(A9.14)}
\end{aligned}$$

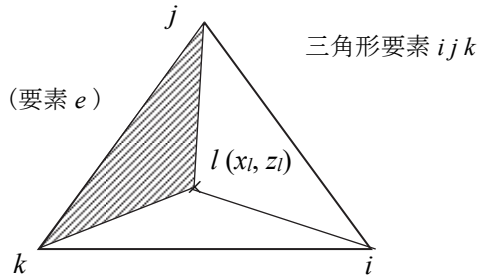


Fig.A9.3　節点 i の対辺 jk と三角形要素 ijk 内の一般点 l からなる三角形 jkl

と表され,

$$N_i^e = \frac{\Delta_{jkl}}{\Delta_{ijk}} \tag{A9.15a}$$

となる。同様にして, CST 要素の頂点 j に対応する辺 $k\,i$ と一般点 l からなる三角形 $k\,i\,l$ の面積の 2 倍の値をΔ_{kil} とし，また, CST 要素の頂点 k に対応する辺 $i\,j$ と一般点 l からなる三角形 $i\,j\,l$ の面積の 2 倍の値をΔ_{ijl} とすると,

$$N_j^e = \frac{\Delta_{kil}}{\Delta_{ijk}} \tag{A9.15b}$$

$$N_k^e = \frac{\Delta_{ijl}}{\Delta_{ijk}} \tag{A9.15c}$$

となる。CST 要素の内挿関数は，(A9.14a)～(A9.14c)式で表され，例えば頂点 i について述べると，「要素内の点 l と頂点 i の対辺 $j\ k$ が構成する三角形の面積の 2 倍の値Δ_{jkl} 」と「CST 要素 $i\ j\ k$ の面積の 2 倍の値Δ_{ijk}」の比として定義される。そして, h, x, y は，それぞれ,

$$\begin{aligned} h &= N_i^e h_i + N_j^e h_j + N_k^e h_k \\ &= \frac{1}{\Delta_{ijk}}(\Delta_{jkl} h_i + \Delta_{kil} h_j + \Delta_{ijl} h_k) \end{aligned} \tag{A9.16}$$

$$\begin{aligned} x &= N_i^e x_i + N_j^e x_j + N_k^e x_k \\ &= \frac{1}{\Delta_{ijk}}(\Delta_{jkl} x_i + \Delta_{kil} x_j + \Delta_{ijl} x_k) \end{aligned} \tag{A9.17}$$

$$\begin{aligned} z &= N_i^e z_i + N_j^e z_j + N_k^e z_k \\ &= \frac{1}{\Delta_{ijk}}(\Delta_{jkl} z_i + \Delta_{kil} z_j + \Delta_{ijl} z_k) \end{aligned} \tag{A9.18}$$

と表される。

ちなみに, $l \rightarrow i$ のとき，$\Delta_{jkl} = \Delta_{ijk}$，$\Delta_{kil} = 0$，$\Delta_{ijl} = 0$ となり,

$$\begin{aligned} h &= N_i^e h_i + N_j^e h_j + N_k^e h_k \\ &= \frac{1}{\Delta_{ijk}}(\Delta_{jkl} h_i + \Delta_{kil} h_j + \Delta_{ijl} h_k) \\ &= \frac{\Delta_{ijk}}{\Delta_{ijk}} h_i \\ &= h_i \end{aligned}$$

となり，同様にして,

$x = x_i$，$z = z_i$

となる。また,

$l \rightarrow j$ のとき，$\Delta_{jkl} = 0$，$\Delta_{kil} = \Delta_{ijk}$，$\Delta_{ijl} = 0$ となり,

$h = h_j$，$x = x_j$，$z = z_j$

$l \rightarrow k$ のとき，$\Delta_{jkl} = 0$，$\Delta_{kil} = 0$，$\Delta_{ijl} = \Delta_{ijk}$ となり,

$h = h_k$，$x = x_k$，$z = z_k$

となる。

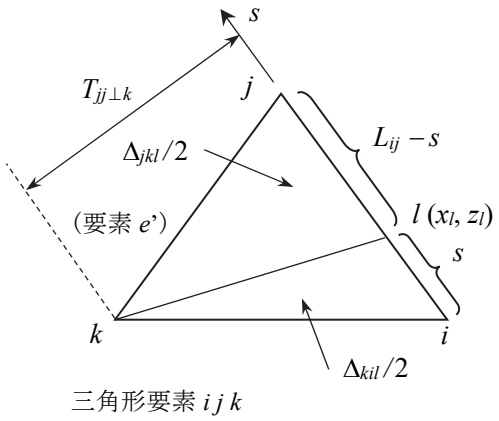


Fig.A9.4　節点 l が辺 ij 上に存在するとき(ij は自然境界)

A9.5　自然境界(線)上における内挿関数

Fig.A9.4 に示すように，節点 $i\ j\ k$ からなる三角形要素 e' について考える。$i\ j$ が自然境界であり，点 l が辺 $i\ j$ 上にあるとすると，まず，三角形 $i\ j\ k$ の面積の 2 倍の値Δ_{ijk} は,

$$\Delta_{ijk} = L_{ij} T_{ij\perp k}$$

となる。ここに, L_{ij} は辺 $i\ j$ の長さ, $T_{ij\perp k}$ は辺 $i\ j$ と頂点 k の距離である。

また，三角形 $j\ k\ l$ の面積の 2 倍の値Δ_{jkl}，および，三角形 $k\ i\ l$ の面積の 2 倍の値Δ_{kil} は，それぞれ,

$$\Delta_{jkl} = (L_{ij} - s)T_{ij\perp k} = \frac{L_{ij} - s}{L_{ij}}\Delta_{ijk} \tag{A9.19a}$$

$$\Delta_{kil} = s\,T_{ij\perp k} = \frac{s}{L_{ij}}\Delta_{ijk} \tag{A9.19b}$$

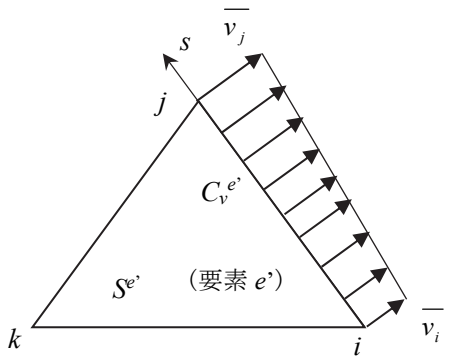
となる。ここで, s は点 i から点 j の方向に測った距離を表す。また, 点 l は辺 $i\,j$ 上にあり三角形 $i\,j\,l$ は形成されないので(一直線上にあるので),

$$\Delta_{ijl} = 0 \tag{A9.19c}$$

となる。したがって, (A9.15a)～(A9.15c)式及び(A9.19a)～(A9.19c)式から,

$$\begin{cases} N_i^{e'} = 1 - \dfrac{s}{L_{ij}} \\ N_j^{e'} = \dfrac{s}{L_{ij}} \\ N_k^{e'} = 0 \end{cases} \tag{A9.20}$$

が得られる(本文の(10.70)式参照)。Fig.A9.5 に示すように, $N_\alpha^{e'}(\alpha = i, j)$ は一次要素(すなわち, 点 i から点 j の方向に測った距離 s について線形)の内挿関数といえる。流速境界(線) s に沿った流速の法線方向成分 $\overline{v_n}$ は, 節点 i, j におけるその値 $\overline{v_{n\alpha}}$ ($\alpha = i, j$) を用いて(Fig.A9.5 参照),



三角形要素 $i\,j\,k$

Fig.A9.5　流速境界 $i\,j$ における法線方向の流速分布 $\overline{v_n}(s)$

$$\overline{v_n} \approx \sum_{\alpha=i,j} N_\alpha^{e'}\,\overline{v_{n\alpha}} \tag{A9.21}$$

と表される(本文 10.2.4(2)参照)。Fig.A9.5 では, i, j 点における境界の法線方向の流速について, サブスクリプトの最初の文字 n を省略し $\overline{v_{ni}} = \overline{v_i}$, $\overline{v_{nj}} = \overline{v_j}$ と表している。これは, Fig.A9.5 については, 本文第 10 章 Fig.10.7 の表し方に合わせたためである。

付録 10　流速ベクトル v と動水勾配ベクトル i のなす角

A10.1 等ポテンシャル線の接線方向と動水勾配の方向

まず, 等ポテンシャル線の接線方向と動水勾配の方向の関係について考える。等ポテンシャル線の接線方向は, 全水頭値 h の全微分 $dh = 0$ の条件から次のように表される。

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial z}dz = 0 \tag{A10.1}$$

$$\therefore \left(\frac{dz}{dx}\right)_{h=\text{const.}} = -\frac{\dfrac{\partial h}{\partial x}}{\dfrac{\partial h}{\partial z}} = -\frac{i_x}{i_z} \tag{A10.2}$$

また, 動水勾配の方向は,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_i = \frac{i_z}{i_x} \tag{A10.3}$$

と表される。これらの値をかけ合わせたものは, (A10.2), (A10.3)式から,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{h=\text{const.}} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)_i = \left(-\frac{i_x}{i_z}\right) \cdot \left(\frac{i_z}{i_x}\right) = -1 \tag{A10.4}$$

であるので, 等ポテンシャル線と動水勾配ベクトルは直交することがわかる。

A10.2 流速ベクトル v 動水勾配ベクトル i と動水勾配ベクトル i のなす角

流速ベクトルと動水勾配ベクトルのなす角について, (1) x - z 座標系(x, z が主方向でない場合), (2) X - Z 座標系(X, Z が主方向の場合), 及び, (3) 等方透水性地盤の場合に分けて考える。

(1) x - z 座標系(x, z が主方向でない場合)

まず, x - z 座標系(x, z が主方向でない場合)について考える。二次元 x - z 座標系(x, z が主方向でない場合)におけるダルシー則は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}, \text{ または,} \tag{A10.5}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= k_{xx}i_x + k_{zx}i_z \\ v_z &= k_{xz}i_x + k_{zz}i_z \end{aligned}\right\} \tag{A10.6}$$

ここに,

v_x : x 方向の流量流速

v_z : z 方向の流量流速

i_x : x 方向の動水勾配

i_z : z 方向の動水勾配

$k_{xx}, k_{zx}, k_{xz}, k_{zz}$: 透水係数テンソルの成分

である。まず, 浸透流の流れ(流速)の方向 θ_1 は, (A10.6)式から,

$$\tan\theta_1 = \frac{v_z}{v_x} = \frac{k_{xz}i_x + k_{zz}i_z}{k_{xx}i_x + k_{zx}i_z} \tag{A10.7}$$

と表される。また，動水勾配の方向 θ_0 は, (A10.3)式から,

$$\tan\theta_0 = \frac{i_z}{i_x} \tag{A10.8}$$

と表される。

これらの方向がなす角は，等方透水性地盤の場合には 0°であるが（すなわち一致するが），異方透水性地盤中の浸透流の場合には，一般的に，ある角度をなす（すなわち一致しない）。二つの方向の差，すなわち, $\theta_1 - \theta_0$ は，正接の加法定理：

$$\tan\left(\theta_1 - \theta_0\right) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_0}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_0} \tag{A10.9}$$

を用いて，次のように表される。

$$\theta_1 - \theta_0 = \tan^{-1}\frac{\dfrac{k_{xz}i_x + k_{zz}i_z}{k_{xx}i_x + k_{zx}i_z} - \dfrac{i_z}{i_x}}{1 + \dfrac{k_{xz}i_x + k_{zz}i_z}{k_{xx}i_x + k_{zx}i_z}\cdot\dfrac{i_z}{i_x}} \tag{A10.10}$$

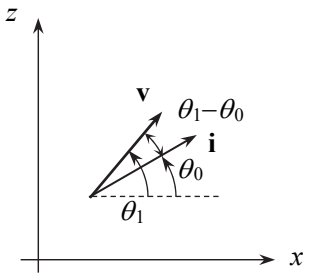


Fig.A10.1 $\theta_1 - \theta_0$ の定義

(A10.10)式の分母，分子に$(k_{xx}\, i_x + k_{zx}\, i_z)\, i_x$ をかけて整理すると,

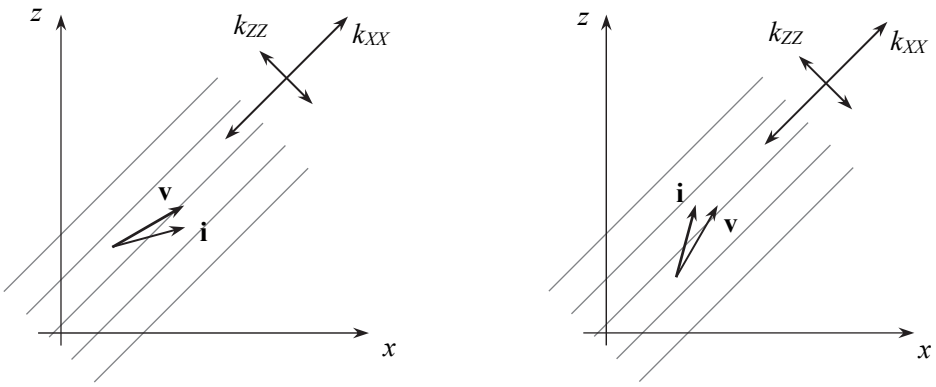
$$\theta_1 - \theta_0 = \tan^{-1}\frac{i_x\left(k_{xz}i_x + k_{zz}i_z\right) - i_z\left(k_{xx}i_x + k_{zx}i_z\right)}{\left(k_{xx}i_x + k_{zx}i_z\right)i_x + \left(k_{xz}i_x + k_{zz}i_z\right)i_z}$$

$$\therefore\ \theta_1 - \theta_0 = \tan^{-1}\frac{(k_{zz} - k_{xx})\, i_x\, i_z + k_{xz}(i_x^2 - i_z^2)}{k_{xx}i_x^2 + 2k_{xz}i_x\, i_z + k_{zz}i_z^2} \tag{A10.11}$$

となる。ここで，透水係数テンソルは対称であるとし，$k_{zx} = k_{xz}$ とした。「浸透水の流れの方向θ_1」と「動水勾配の方向θ_0」がなす角$\theta_1 - \theta_0$ の値は，動水勾配ベクトル **i** の方向（(A10.8)式）から流速ベクトル **v** の方向（(A10.7)式）に向けて反時計回りに測った角度である。$\theta_1 - \theta_0$ の値は Fig.A10.1 のように定義される。また, $\theta_1 - \theta_0$ の大きさは Fig.A10.2 のように与えられる（図において, X, Z は最大・最小主透水係数の方向を表す）。等ポテンシャル線は動水勾配に直交するので，流線と等ポテンシャル線の交差角Θ は,

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \pm (\theta_1 - \theta_0) \tag{A10.12}$$

と表される。



(a) $\theta_1 - \theta_0 > 0$　　(b) $\theta_1 - \theta_0 < 0$

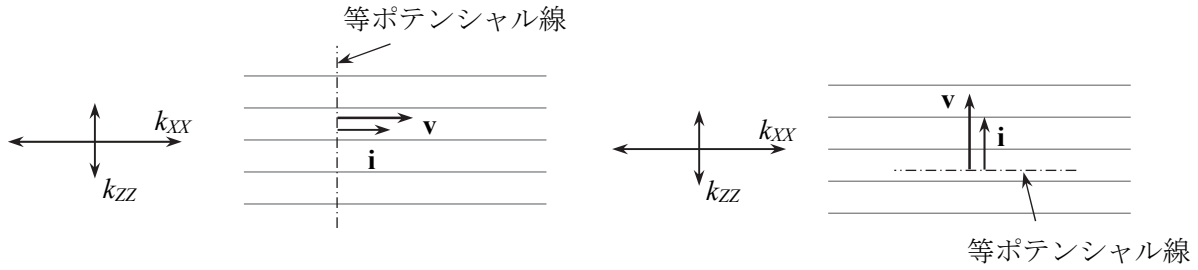
Fig.A10.2　$\theta_1 - \theta_0$ の大きさ

(2) X - Z 座標系（X, Z が主方向の場合）

次に, X - Z 座標系（X, Z が主方向の場合）について考える。二次元 X - Z 座標系（X, Z が主方向の場合）において，（A10.11）式は,

$$\theta_1 - \theta_0 = \tan^{-1} \frac{(k_{ZZ} - k_{XX}) i_X i_Z}{k_{XX} i_X^2 + k_{ZZ} i_Z^2} \tag{A10.13}$$

となる。動水勾配が存在する場合，(A10.13)式の分母は常に正であるので，異方透水性地盤（$k_{XX} \neq k_{ZZ}$）において $\theta_1 = \theta_0$（すなわち, $\theta_1 - \theta_0 = 0$）となるのは, $i_X = 0$ のときか $i_Z = 0$ のときのみである。言い換えれば，$i_X = 0$ または $i_Z = 0$ の地点でのみ流線と等ポテンシャル線が直交することになる（Fig.A10.3 参照）。



(a) 動水勾配が主方向（X 方向）と一致する場合　(b) 動水勾配が主方向（Z 方向）と一致する場合

Fig.A10.3 動水勾配の方向が主方向と一致する場合

(3) 等方透水性地盤の場合

ここで，等方透水性地盤の場合（$k_{xx} = k_{zz}$ and $k_{zx} = k_{xz} = 0$, or, $k_{XX} = k_{ZZ}$）について考える。このとき，(A10.7)式は,

$$\tan\theta_0 = \frac{v_z}{v_x} = \frac{i_z}{i_x} \tag{A10.14}$$

となる。(A10.14), (A10.84)式から $\theta_1 = \theta_0$ となり，浸透水の流れの方向が動水勾配の方向と一致することがわかる。等ポテンシャル線は動水勾配ベクトルに直交するので，この場合，等ポテンシャル線と流線が直交することになる。

注意

参考文献 A10.1 では，同じ問題を「動水勾配ベクトル **i** と流速ベクトル **v** のなす角」という観点から議論し，「動水勾配の方向を θ_1」,「浸透水の流れの方向を θ_0」と定義している。一方，本書では,「浸透水の流れの方向を θ_1」,「動水勾配の方向を θ_0」と定義しているので，それらがなす角 $\theta_1 - \theta_0$ の値（したがって, $\tan(\theta_1 - \theta_0)$ の値）の正負がちょうど逆になっている。本書を**参考文献** A10.1 と併せて読むときにはご注意願いたい。

参考文献

A10.1) 田中 勉, Arnold Verruijt (2019): 異方透水性地盤における一次元拘束流れと一次元透水試験, 神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 23 号, pp.264-285，平成 31 年 3 月.

付録 11　等方透水性の成層地盤における浸透流の屈折現象

等方透水性地盤であっても，成層をなす土層では，各層ごとに透水性が異なるのが普通であり，2 層の境界面を通過する浸透流の流線は一般に屈折することが知られている。

A11.1　屈折理論

まず，屈折理論について述べる。Fig.A11.1 に示すように，透水性の異なる二つの領域があり，流線が境界面に入射角θ_1で入射し屈折角θ_2で出ていくとき，質量保存則は，

$$v_{n1} = v_{n2} \tag{A11.1}$$

または，

$$|\mathbf{v}_1| \cos\theta_1 = |\mathbf{v}_2| \cos\theta_2 \tag{A11.2}$$

$$v_{n1}\,(= k_1\, i_{n1}) = v_{n2}\,(= k_2\, i_{n2}) \tag{A11.3}$$

である。ここに，Fig.A11.1 に示す記号は，

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$：流線が入射した地点における領域 1（$k_1$）及び領域 2（$k_2$）における流速ベクトル

θ_1, θ_2：境界線前後における流線の入射角，屈折角（法線から測った）

v_{n1}, v_{n2}：ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の法線方向の成分

v_{s1}, v_{s2}：ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の境界線方向の成分

k_1, k_2：領域 1, 2 における等方透水係数

$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$：流線が入射した地点における領域 1（$k_1$）及び領域 2（$k_2$）における動水勾配ベクトル

i_{n1}, i_{n2}：ベクトル $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ の法線方向の成分

i_{s1}, i_{s2}：ベクトル $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ の境界接線方向の成分

を表す。

一方，全水頭の値 h は境界線に沿って連続であるので，h を境界方向にとった座標で一階微分した値（または，領域 1, 2 における境界点でのそれぞれの動水勾配ベクトル $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ の境界接線方向の成分）i_{s1}, i_{s2} は等しい，すなわち，

$$i_{s1} = i_{s2} \tag{A11.4}$$

と考えることができる。(A11.3)，(A11.4)式を考慮して，$\tan\theta_1, \tan\theta_2$ を求めると，

$$\tan\theta_1 = \frac{v_{s1}}{v_{n1}} = \frac{k_1\, i_{s1}}{k_1\, i_{n1}} = \frac{k_1\, i_{s2}}{k_2\, i_{n2}} = \frac{k_1}{k_2}\cdot\frac{i_{s2}}{i_{n2}}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{v_{s2}}{v_{n2}} = \frac{k_2\, i_{s2}}{k_2\, i_{n2}} = \frac{i_{s2}}{i_{n2}}$$

$$\therefore\ \tan\theta_1 = \frac{k_1}{k_2}\tan\theta_2$$

$$\therefore\ \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{k_1}{k_2}\ (0° < \theta_1, \theta_2 < 90°) \tag{A11.5}$$

を得る。

次に，特別な場合（入射角θ_1 が 0°の場合，及び，90°の場合）について考察する。

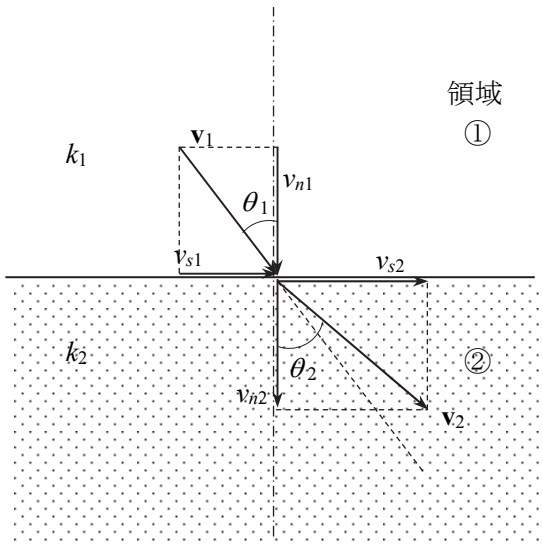


Fig.A11.1 浸透流の屈折現象
（図は $k_1 < k_2$ の場合を表す）

A11.2 入射角と反射角の関係

(1) 入射角θ_1が 0°の場合

入射角θ_1が 0°の場合，屈折角θ_2は(A11.2)式より，

$$\theta_2 = \cos^{-1}\frac{|\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}_2|} \tag{A11.6}$$

で与えられるが，このとき，等ポテンシャル線は境界線に一致するので，$\mathbf{v}_2$ は境界線に直交し，(A11.1)式より $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ となる。また, (A11.6)式より$\theta_2 = 0°$となる（すなわち，θ_1が 0° に近づくとき，θ_2は屈折則(A11.5)式にしたがって 0°に近づく）。

(2) 入射角θ_1が 90°の場合

入射角θ_1が 90°の場合，流線は境界線と一致し交わらないので(A11.2)式は成立せず屈折は生じない(すなわち, θ_1が 90°に近づくとき，θ_2は屈折則(A11.5)式にしたがって 90°に近づく)。

「光の屈折」で生じる全反射は,「浸透流の流線の屈折」では生じない。なぜなら，(A11.2)式で屈折角θ_2が 90°となるのに必要な, θ_1の値は 90°であるからである。Fig.A11.2(2)でθ_1 = 90°の場合について示すように，2 層の境界に沿って平行に進んできた浸透流は，層を横切ることなく(独立してそのまま) 2 層の境界に沿って平行に進んでいく。

(3) 浸透流が透水係数の異なる 2 層の境界を横切るときの屈折の様子

浸透流が透水係数の異なる 2 層(透水係数が k_1 及び k_2)の境界を横切るときの屈折の様子を，(1) $k_1 < k_2$ の場合, (2) $k_1 > k_2$ の場合に分けて示すと Fig.A11.2 となる。流線は流速ベクトルを繋いでいったものである。したがって, Fig.A11.2 は，浸透流が，透水係数の異なる 2 層の境界をまたぐときの流線の進路を表している。

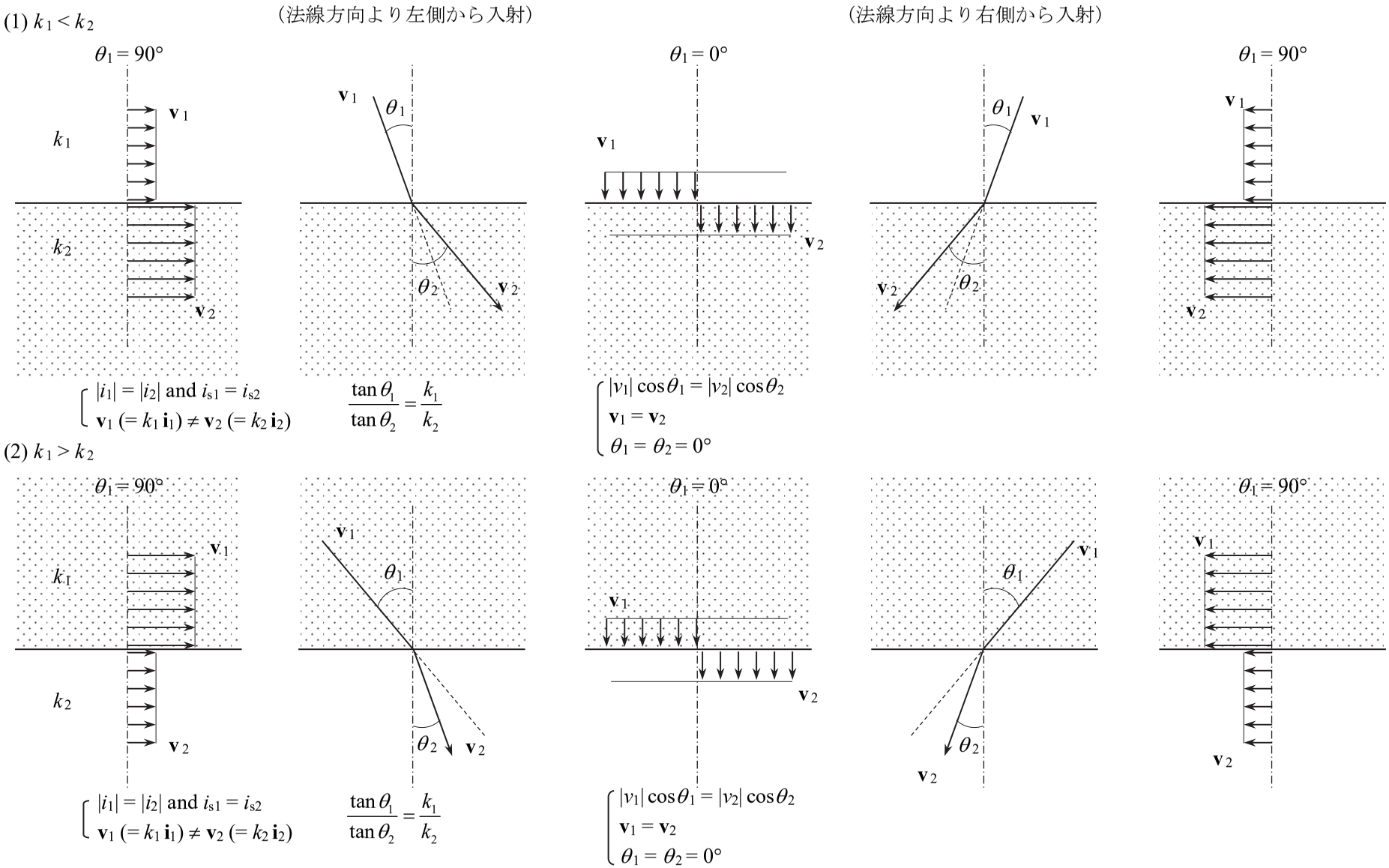


Fig.A11.2　浸透流が透水係数の異なる 2 層を横切るときの屈折の様子

付録 12　流れ関数に関する有限要素法のノイマン境界における$\overline{u_n}/R_3$の値について

流れ関数に関する有限要素法のノイマン境界（要素 e' の自然境界（流速に関係する境界）$C_u^{e'}$）（Fig.A12.1 参照）におけるフラックスベクトル$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$は，本文の(11.59)式で与えられ，

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'} = \int_{C_u^{e'}} R_3 (\mathbf{n}^T [\mathbf{D}]^T \bar{\mathbf{a}}) \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}} \right]^T dC \tag{A12.1}$$

と表される。ここに，

$$\overline{u_n} = R_3 (\mathbf{n}^T [\mathbf{D}]^T \bar{\mathbf{a}}) \tag{A12.2}$$

とおくと，

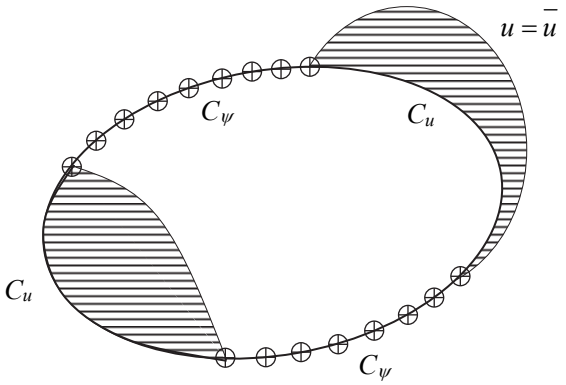


Fig.A12.1　流れ関数に関する有限要素法の境界条件

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'} = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}} \right]^T dC = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}} \right]^T ds , \tag{A12.3}$$

または，$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$を成分表示して，${}_{\mathrm{SF}}Q_\alpha^{e'}$ ($\alpha = i, j, k$) とおくと，

$${}_{\mathrm{SF}}Q_\alpha^{e'} = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{N_\alpha^{e'}} \right]^T dC = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{N_\alpha^{e'}} \right]^T ds \qquad (\alpha = i, j, k) \tag{A12.4}$$

となる。ここでは，被積分関数である$\overline{u_n} \left[\overline{N_\alpha^{e'}} \right]^T$の内，$\overline{u_n}$の値：

$$\overline{u_n} = R_3 (\mathbf{n}^T [\mathbf{D}]^T \bar{\mathbf{a}}) \tag{A12.2}$$

または，(A12.2)式の両辺を R_3 で除した$\overline{u_n}/R_3$の値：

$$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T [\mathbf{D}]^T \bar{\mathbf{a}} \tag{A12.5}$$

の計算方法について考える（$\overline{N_\alpha^{e'}}$の値については，**付録９**または**参考文献** A12.1 参照）。ここに，

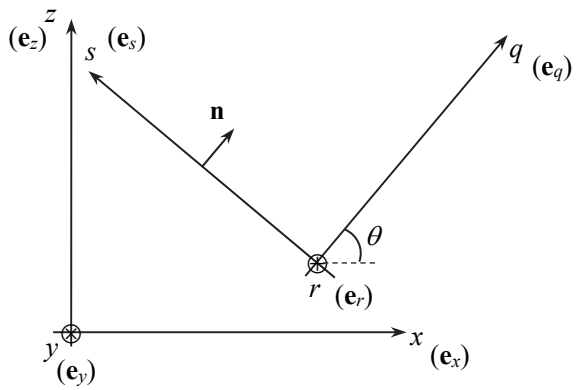


Fig.A12.2　三次元 x - y - z 座標系とそれを反時計回りにθだけ回転した三次元 q - r - s 座標系

$\overline{u_n}$: (A12.2)式で定義される値

$\overline{N_\alpha^{e'}}$: 要素 e' に関する内挿関数（本文の(11.74)式参照）

R_3 (= 1/II_3): 座標系の取り方に依存しない「透水係数テンソルの不変量II_3（本文(5.17)式）」の逆数

$\mathbf{n}^T$: ノイマン境界における外向きの法線ベクトル

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \text{: 透水係数テンソル} \tag{A12.6}$$

$[\mathbf{D}]^T$: $[\mathbf{D}]$の転置マトリックス

$k_{xx}, k_{zx}, k_{xz}, k_{zz}$: x, z 座標系における透水係数のテンソル成分

$\bar{\mathbf{a}}$: ノイマン境界において既定されるベクトル（後掲の(A12.7), (A12.8), (A12.9a), (A12.9b)式）

である。

まず，ここで用いる座標系（Fig.A12.2 参照）について述べる。三次元 x - y - z 座標系を y 軸を固定して反時計回りに θ だけ回転した三次元 q - r - s 座標系を考える。座標 s は境界上の始点（通常はある節点）から境界に沿って浸透領域を左に見ながら反時計回りに進む方向に正をとるものとする。r は y と同じ方向を表し，紙面に対して垂直で奥行き方向に正をとる。また，次の記号を用いる。

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$: 座標 x, y, z の正方向の単位ベクトル

$\mathbf{e}_q, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s$: 座標 q, r, s の正方向の単位ベクトル

ノイマン境界において既定されるベクトル $\bar{\mathbf{a}}$ は，次に示すように，x, y, z 座標系において，「速度ベクトル $\bar{\mathbf{v}}$ 」と「y 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_y$」の外積 $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{e}_y$ を表す。

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{e}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \overline{v_x} & 0 & \overline{v_z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x(-\overline{v_z}) - \mathbf{e}_y(0) + \mathbf{e}_z(\overline{v_x}) \tag{A12.7}$$

$$\therefore\ \bar{\mathbf{a}} = -\overline{v_z}\mathbf{e}_x + \overline{v_x}\mathbf{e}_z \tag{A12.8}$$

$$\therefore\ \left(\bar{\mathbf{a}}\right)^T = \left\{-\overline{v_z}\ \ \overline{v_x}\right\} \quad (x, y, z \text{ 座標系からみた}) \tag{A12.9a}$$

同様にして，q, r, s 座標系において，$\bar{\mathbf{v}}$ と $\mathbf{e}_r$ の外積 $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{e}_r$ で表され，

$$\left(\bar{\mathbf{a}}\right)^T = \left\{-\overline{v_s}\ \ \overline{v_q}\right\} \quad (q, r, s \text{ 座標系からみた}) \tag{A12.9b}$$

となる。ここに，次の記号を用いている。

$\overline{v_x}$, $\overline{v_z}$:ノイマン境界において既定される x, z 方向の流速（x, y, z 座標系からみた）

$\overline{v_q}$, $\overline{v_s}$:ノイマン境界において既定される q, s 方向の流速（q, r, s 座標系からみた）

以下，(A12.5)式で与えられる，$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}}$ の計算方法について，等方透水性地盤の場合，及び，異方透水性地盤の場合に分けて考察する。

A12.1 等方透水性地盤の場合

等方透水性地盤の場合について，2 つの境界条件（**付録 13** 参照）：貯水境界と浸出面（または浸潤面）に分けて考察する。

A12.1.1 等方透水性地盤の貯水境界において

まず，等方透水性地盤の貯水境界においては，Fig.A12.3 に示すように，(1) 水平境界，(2) 鉛直境界，(3) 傾斜境界に分けて計算式を示すと次のようになる。ここでは，水平及び鉛直境界については x - z 座標系で考え，傾斜方向については q - s 座標系に変換して考える。

(1) 水平境界

$$\begin{aligned}
\overline{u_n}/R_3 &= \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}} \\
&= \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_x} \\ \overline{a_z} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ 0 \quad 1 \right\}\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{A12.10) Continue}$$

$$= k\left\{\begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} -\overline{v_z} \\ 0 \end{matrix}\right\} \qquad \text{(A12.10) Continued}$$

$$= 0$$

(2) 鉛直境界

$$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}}$$

$$= \left\{\begin{matrix} n_x & n_z \end{matrix}\right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} \overline{a_x} \\ \overline{a_z} \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} n_x & n_z \end{matrix}\right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{matrix}\right\} \qquad \text{(A12.11)}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}\right\}\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} 0 \\ \overline{v_x} \end{matrix}\right\}$$

$$= k\left\{\begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 0 \\ \overline{v_x} \end{matrix}\right\}$$

$$= 0$$

(3) 傾斜境界

$$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}}$$

$$= \left\{\begin{matrix} n_q & n_s \end{matrix}\right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} n_q & n_s \end{matrix}\right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{matrix}\right\} \qquad \text{(A12.12)}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}\right\}\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} 0 \\ \overline{v_q} \end{matrix}\right\}$$

$$= k\left\{\begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 0 \\ \overline{v_q} \end{matrix}\right\}$$

$$= 0$$

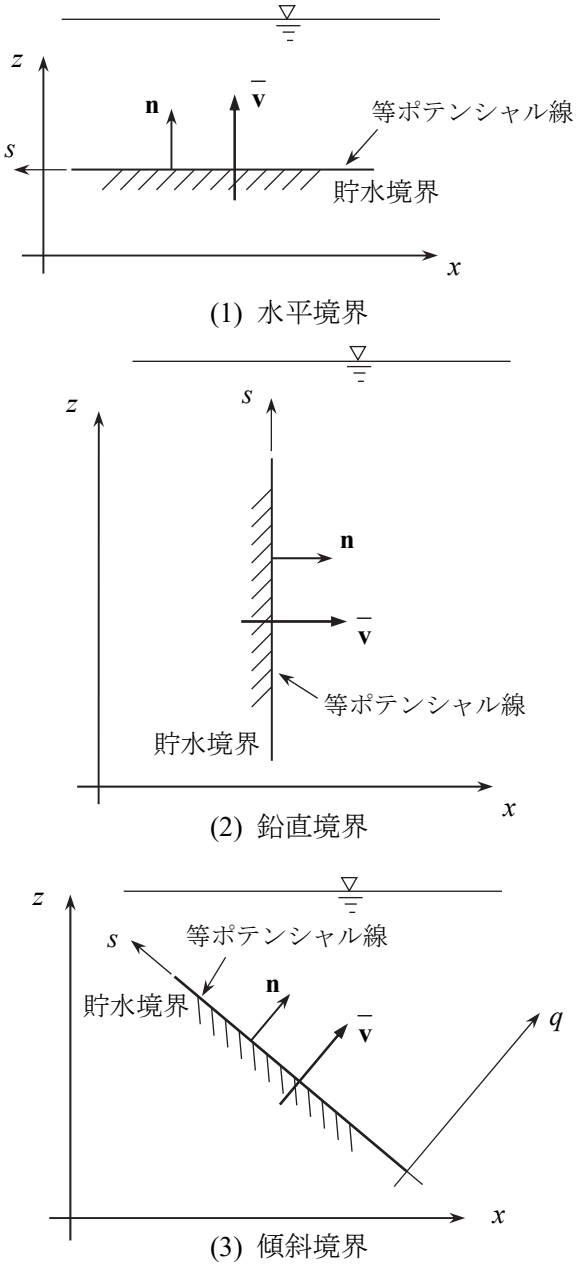


Fig.A12.3 等方透水性地盤の貯水境界

ここに，座標変換式：

$$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}} = \left\{\begin{matrix} n_x & n_z \end{matrix}\right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} \overline{a_x} \\ \overline{a_z} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} n_q & n_s \end{matrix}\right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{matrix}\right\} \qquad \text{(A12.13)}$$

及び, (A12.9b)式を用いている((A12.13)式の証明は, A12.3 節を参照)。また，次の記号を用いた。

$\{n_x \quad n_z\}$：ノイマン境界における外向きの法線方向の単位ベクトル（x, z 座標系における）

$\{n_q \quad n_s\}$：ノイマン境界における外向きの法線方向の単位ベクトル（q, s 座標系における）

k：等方透水係数の値

$k_{qq}, k_{sq}, k_{qs}, k_{ss}$: q, s 座標系における透水係数テンソルの成分

ここに，座標 s は境界に沿って領域を左に見ながら反時計回りに正をとるものとする。

(A12.7), (A12.8), (A12.9a), 及び, (A12.9b)式で表されるように，ノイマン境界において既定されるベクトル $\overline{\mathbf{a}}$ は，x, y, z 座標系において「速度ベクトル $\overline{\mathbf{v}}$」と「y 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_y$」の外積 $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{v}} \times \mathbf{e}_y$，また，同様にして, q, r, s 座標系において $\overline{\mathbf{v}}$ と $\mathbf{e}_r$ の外積 $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{v}} \times \mathbf{e}_r$ で表される（ここに, $\mathbf{e}_r =$

$\mathbf{e}_y$である)。

また，(1)～(3)において，等方透水性地盤の場合，貯水境界は等ポテンシャル線であるので，境界に垂直な方向の流速成分はあるが，境界に平行な流速成分はないことを用いている。

一般的な条件である，傾斜境界の場合(3)についてまとめて述べると次のようになる。q - s 座標系における等方透水性地盤を考えた場合，貯水境界上では，「既定された流速$\bar{\mathbf{v}}$に関してみると，法線q方向成分$\overline{v_q}$のみが存在し接線s方向成分$\overline{v_s}$は存在しない」ので，「$\bar{\mathbf{a}}$に関してみると，境界線s方向の成分$\overline{a_s}$ $(=\overline{v_q})$のみが存在し法線q方向成分$\overline{a_q}$ $(=-\overline{v_s})$は存在しない」ことになる。

このようにして，等方透水性地盤の貯水境界においては，$\overline{u_n}/R_3=\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}}=0$となるので，ノイマン境界の計算を行う必要がなくなる。

ここでは，$\overline{u_n}/R_3=\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}}=0$を証明するため，水平及び鉛直境界については$x$ - z 座標系で考え，傾斜方向についてはq - s 座標系に変換して考えた。q - s 座標系への変換は説明のために用いたものである。プログラムのコーディングにおいては，x - z 座標系で計算しs方向に沿って(すなわち，浸透領域を左に見ながら境界に沿って)計算すればよい。この事柄に関しては，後述のA12.1.2,A12.2.1,A12.2.2項においても同様である。

A12.1.2 等方透水性地盤の浸出面(または浸潤面)において

次に，等方透水性地盤の浸出面(または浸潤面)においては，Fig.A12.4に示すように，(1) 鉛直境界，(2) 傾斜境界に分けて計算式を示すと次のようになる。

(1) 鉛直境界

$$
\begin{aligned}
\overline{u_n}/R_3 &= \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}} \\
&= \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_x} \\ \overline{a_z} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ 1 \quad 0 \right\}\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix} \\
&= k\left\{ 1 \quad 0 \right\}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix} \\
&= -k\,\overline{v_z} \neq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(A12.14)}
$$

(2) 傾斜境界

$$
\begin{aligned}
\overline{u_n}/R_3 &= \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\bar{\mathbf{a}} \\
&= \left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ 1 \quad 0 \right\}\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\qquad \text{(A12.15)}
$$

Continue

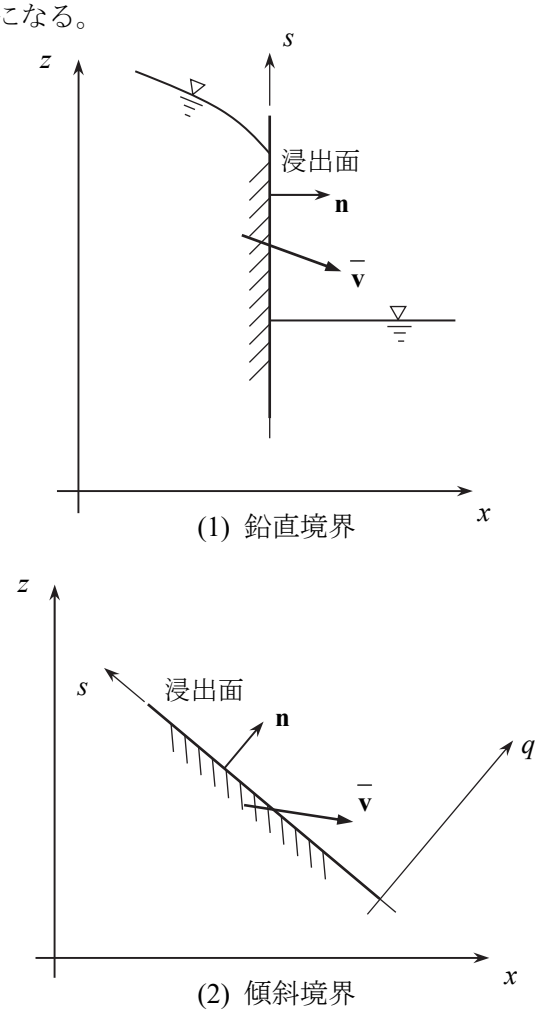


Fig.A12.4 等方透水性地盤の浸潤面(浸出面)

$$= k\left\{ 1 \quad 0 \right\}\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix}$$

$$= -k\overline{v_s} \neq 0$$

(A12.15) Continued

このようにして，(1)，(2)から，等方透水性地盤の浸出面（または浸潤面）においては，(1)の場合 $\overline{v_z} \neq 0$ または(2)の場合 $\overline{v_s} \neq 0$ であり境界方向の流速が存在し，$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}} \neq 0$ となるので，ノイマン境界について計算を行う必要がある。

A12.2 異方透水性地盤の場合

異方透水性地盤の場合について，2 つの境界条件：貯水境界と浸出面（または浸潤面）に分けて考察する。

A12.2.1 異方透水性地盤の貯水境界において

ここでは，異方透水性地盤における透水係数の主方向がノイマン境界の境界線の方向と異なる場合，及び，一致する場合に分けて考える。

＜異方透水性地盤における透水係数の主方向がノイマン境界の境界線の方向と異なる場合＞

まず，異方透水性地盤における透水係数の主方向がノイマン境界の境界線の方向と異なる場合について，Fig.A12.5 に示すように，(1) 水平境界，(2) 鉛直境界，(3) 傾斜境界に分けて，計算式を示すと次のようになる。

(1) 水平境界

$$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}}$$

$$= \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_x} \\ \overline{a_z} \end{Bmatrix}$$

$$= \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix}$$

$$= \left\{ 0 \quad 1 \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix} \qquad \text{(A12.16)}$$

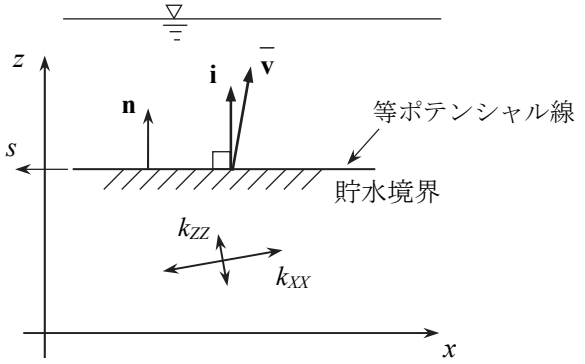
$$= \left\{ k_{zx} \quad k_{zz} \right\}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix}$$

$$= -k_{zx}\overline{v_z} + k_{zz}\overline{v_x}$$

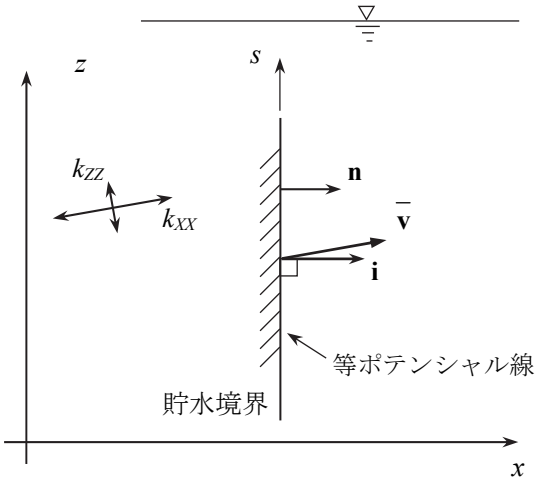
(2) 鉛直境界

$$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}}$$

$$= \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_x} \\ \overline{a_z} \end{Bmatrix} \qquad \text{(A12.17) Continue}$$



(1) 水平境界



(2) 鉛直境界

Fig.A12.5 異方透水性地盤の貯水境界 (Continue)

$$=\left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix}$$

$$=\left\{ 1 \quad 0 \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix}$$

(A12.17) Continued

$$=\left\{ k_{xx} \; k_{xz} \right\}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix}$$

$$=-k_{xx}\overline{v_z}+k_{xz}\overline{v_x}$$

(3) 傾斜境界

$$\overline{u_n}/R_3=\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}}$$

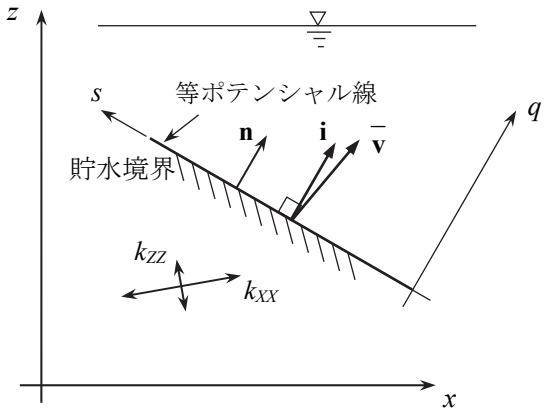
$$=\left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix}$$

$$=\left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix}$$

$$=\left\{ 1 \quad 0 \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix} \qquad \text{(A12.18)}$$

$$=\left\{ k_{qq} \quad k_{qs} \right\}\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix}$$

$$=-k_{qq}\overline{v_s}+k_{qs}\overline{v_q}$$



(3) 傾斜境界

Fig.A12.5 異方透水性地盤の貯水境界 (Continued)

＜異方透水性地盤における透水係数の主方向がノイマン境界の境界線の方向と異なる場合＞

異方透水性地盤における透水係数の主方向がノイマン境界の境界線の方向と異なる場合，貯水境界が水平，鉛直及び傾斜にかかわらず，(1)～(3)から，一般的に，$\overline{u_n}/R_3 \neq 0$ であるといえる。

傾斜境界の場合についてまとめて述べると次のようになる。すなわち，貯水境界において，

(1) $\overline{v_s} \neq 0$ のとき，または，

(2) $\overline{v_s}=0$ のとき，$k_{qs} \neq 0$，かつ，$\overline{v_q} \neq 0$ である場合，

$\overline{u_n}/R_3 \neq 0$ となる。

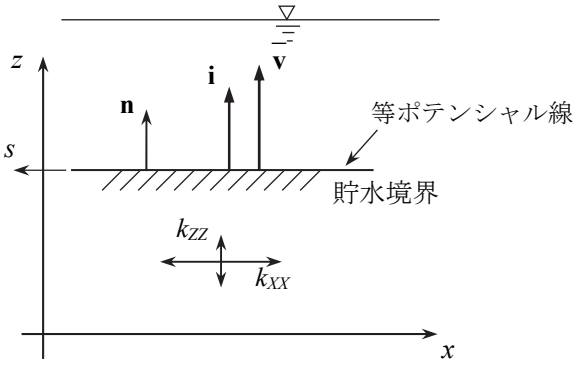
このように，異方透水性地盤の場合には，$\overline{u_n}/R_3=-k_{qq}\overline{v_s}+k_{qs}\overline{v_q} \neq 0$ の条件が満たされるノイマン境界について計算を行う必要があることがわかる。

＜異方透水性地盤における透水係数の主方向がノイマン境界の境界線の方向と一致する場合＞

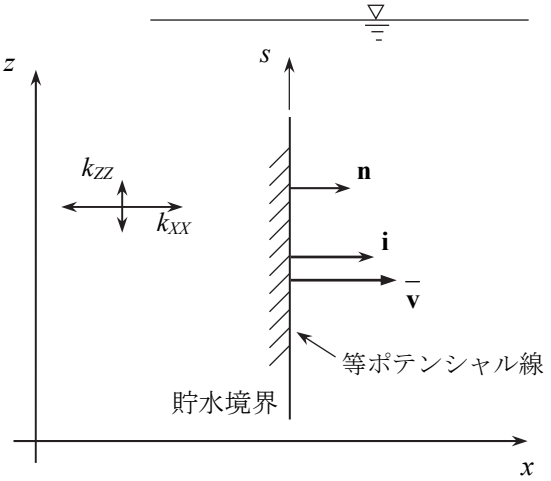
異方透水性地盤における透水係数の主方向がノイマン境界の境界線の方向と一致する場合には，Fig.A12.6 に示すように，流速に関係する(流速既定)境界において，A12.1 節と同様の条件(境界で既定される流速の方向が，境界線の法線方向すなわち動水勾配の方向と一致する)となり，$\overline{u_n}/R_3=\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}}=0$ となるので，ノイマン境界の計算を行う必要がないことがわかる。

A12.2.2 異方透水性地盤の浸出面(または浸潤面)において

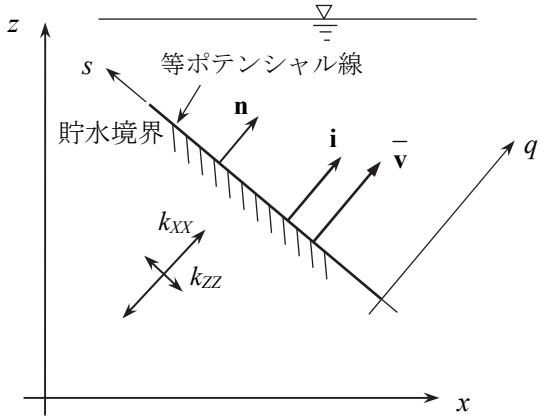
異方透水性地盤の浸出面(または浸潤面)においては， A12.1.2 と同様の条件となり，$\overline{u_n}/R_3=\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}}$ の値は，鉛直境界及び傾斜境界の場合について，それぞれ，次のようになる。



(1) 水平方向



(2) 鉛直方向



(3) 傾斜境界

Fig.A12.6 異方透水性地盤の貯水境界

＜異方透水性地盤における透水係数の主方向がノイマン境界の境界線の方向と一致する場合＞

(1) 鉛直境界の場合

(A12.14)式の導出過程を参照して,

$$
\begin{aligned}
\overline{u_n}/R_3 &= \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}} \\
&= \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_x} \\ \overline{a_z} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ 1 \quad 0 \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ k_{xx} \quad k_{xz} \right\}\begin{Bmatrix} -\overline{v_z} \\ \overline{v_x} \end{Bmatrix} \\
&= -k_{xx}\overline{v_z} + k_{xz}\overline{v_x}
\end{aligned}
\qquad \text{(A12.19)}
$$

となる。

(2) 傾斜境界の場合

(A12.15)式の導出過程を参照して,

$$
\begin{aligned}
\overline{u_n}/R_3 &= \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}} \\
&= \left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ 1 \quad 0 \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ k_{qq} \quad k_{qs} \right\}\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\qquad \text{(A12.20) Continue}
$$

$$= -k_{qq}\overline{v_s} + k_{qs}\overline{v_q} \qquad \text{(A12.20) Continued}$$

となる。

このようにして，(1)，(2)から，一般的に，$\overline{u_n}/R_3 \neq 0$ となる。傾斜境界の場合についてまとめて述べると，「一般的に，$\overline{v_s} \neq 0$ and/or $\overline{v_q} \neq 0$ から，$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}} = -k_{qq}\overline{v_s} + k_{qs}\overline{v_q} \neq 0$ となるので，ノイマン境界について計算を行う必要がある」となる。

補遺 ＜浸出面が水平の場合＞

A12.1.2 項及び A12.2.2 項において，浸出面が水平の場合について議論を省略した。ここで，まとめて補充しておく。

A12.1.2 項において，浸出面が水平の場合，浸出面境界線は，等ポテンシャル線となるので，水理学的に貯水境界の水平境界(A12.1.1(1))と同一の状態となる。結果は(A12.10)式と同一である。

A12.2.2 項において，浸出面が水平の場合，浸出面境界線は，等ポテンシャル線となるので，水理学的に貯水境界の水平境界(A12.2.1(1))と同一の状態となる。結果は(A12.16)式と同一である。

結論的に述べると，このようにして，浸出面が水平の場合の議論は最終的な考察に影響しないことがわかる。

A12.3 (A12.13) 式の証明

傾斜境界の説明において用いた，次の(A12.13)式の証明を行う。ここでは，x, z 座標系を反時計回りにθ 回転した q, s 座標系を考える。

$$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}_{xz}\right]^T\overline{\mathbf{a}} = \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_x} \\ \overline{a_z} \end{Bmatrix} = \left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix} \qquad \text{(A12.13)}$$

まず，境界線の法線方向ベクトル $\mathbf{n}^T$に関して，座標変換式を示すと，

$$\mathbf{n}^T = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_z \end{Bmatrix}^T = \left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} n_q \\ n_s \end{Bmatrix}\right)^T = \begin{Bmatrix} n_q \\ n_s \end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} n_q \\ n_s \end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_q \\ n_s \end{Bmatrix}^T\left[\mathbf{A}\right]$$

(A12.21)

となる。ここで，

$$\left[\mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},\ \left[\mathbf{A}\right]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \left[\mathbf{A}\right]^{-1} \qquad \text{(A12.22)}$$

を用いた。次に，透水係数マトリックスに関して，x, z 座標系における$[\mathbf{D}_{xz}]$と x, z 座標系を反時計回りにθ回転した q, s 座標系における$[\mathbf{D}_{qs}]$に関して，

$$\left[\mathbf{D}_{qs}\right] = \left[\mathbf{A}\right]\left[\mathbf{D}_{xz}\right]\left[\mathbf{A}\right]^{-1} \qquad \text{(A12.23)}$$

$$\therefore\ \left[\mathbf{D}_{xz}\right] = \left[\mathbf{A}\right]^{-1}\left[\mathbf{D}_{qs}\right]\left[\mathbf{A}\right] \qquad \text{(A12.24)}$$

$$\therefore\ \left[\mathbf{D}_{xz}\right]^T = \left(\left[\mathbf{A}\right]^{-1}\left[\mathbf{D}_{qs}\right]\left[\mathbf{A}\right]\right)^T = \left(\left[\mathbf{D}_{qs}\right]\left[\mathbf{A}\right]\right)^T\left(\left[\mathbf{A}\right]^{-1}\right)^T = \left[\mathbf{A}\right]^T\left[\mathbf{D}_{qs}\right]^T\left[\mathbf{A}\right] = \left[\mathbf{A}\right]^{-1}\left[\mathbf{D}_{qs}\right]^T\left[\mathbf{A}\right] \qquad \text{(A12.25)}$$

の関係がある [A12.2)] (ただし，**参考文献** A12.2 では，q, s 座標系の代わりに，n, s 座標系が使用されて

いる)。また，$\bar{\mathbf{a}}$ に関して，

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{Bmatrix} \overline{a_x} \\ \overline{a_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}]^{-1} \begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix} \tag{A12.26}$$

である。したがって，$\overline{u_n}/R_3$ の定義式：$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T [\mathbf{D}]^T \bar{\mathbf{a}}$ に, (A12.21), (A12.25), (A12.26)式を代入して整理すると,

$$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T [\mathbf{D}_{xz}]^T \bar{\mathbf{a}} = \begin{Bmatrix} n_q \\ n_s \end{Bmatrix}^T [\mathbf{A}][\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{D}_{qs}]^T [\mathbf{A}][\mathbf{A}]^{-1} \begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_q \\ n_s \end{Bmatrix}^T [\mathbf{D}_{qs}]^T \begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix} \tag{A12.27}$$

となり, (A12.13)式が証明される。

A12.4 まとめ

129.1, A12.2 節から，ノイマン境界における $\overline{u_n}/R_3$（または $\overline{u_n}$）の計算について，一般的な条件である，傾斜境界の場合に関してまとめて述べると，q, s 座標系について，次のように表すことができる。

ノイマン境界において既定される流速について，次の条件：

(1) $\overline{v_s} \neq 0$ のとき，または,

(2) $\overline{v_s} = 0$ のとき，$k_{qs} \neq 0$，かつ，$\overline{v_q} \neq 0$ である場合

が満たされるときには，$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T [\mathbf{D}]^T \bar{\mathbf{a}} = -k_{qq}\overline{v_s} + k_{qs}\overline{v_q} \neq 0$ となるので，境界条件 $\overline{u_n}/R_3 = -k_{qq}\overline{v_s} + k_{qs}\overline{v_q}$ の計算を行う必要がある。ここに，座標 s は境界に沿って領域を左に見ながら反時計回りに正をとり，座標 q は s から時計回りに 90°の方向に領域外向きに正をとるものとする。

このようにして,「等方透水性地盤の場合には浸出面(または浸潤面)に関して」，及び,「異方透水性地盤の場合には水平境界，鉛直境界，及び，傾斜境界すべてに関して」次のことが言える。

流れ関数に関する有限要素法のノイマン境界(要素 e' の自然境界(流速に関係する境界) $C_u^{e'}$)においては, (A12.4)式で表されるフラックスベクトル ${}_{\mathrm{SF}}Q_\alpha^{e'}$ ($\alpha = i, j, k$)：

$${}_{\mathrm{SF}}Q_\alpha^{e'} = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{N_\alpha^{e'}} \right]^T dC = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{N_\alpha^{e'}} \right]^T ds \quad (\alpha = i, j, k),\ \text{ここに，}\ \overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T [\mathbf{D}]^T \bar{\mathbf{a}}$$

を計算して考慮する必要がある。

A12.1.1 項で述べたように，プログラムのコーディングについては, (A12.3)式(または, (A12.4)式)に関して, x - z 座標系で計算し，浸透領域を左に見ながら境界方向(s 方向)に沿って計算すればよい。

A12.5 $\overline{u_n}/R_3$ の別表現と流れ関数の有限要素法におけるノイマン境界のフラックスベクトル $\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$

前述の(A12.5)式で表される式：$\overline{u_n}/R_3$ の別表現について考える。

$$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T [\mathbf{D}]^T \bar{\mathbf{a}} \tag{A12.5}$$

ここで，二次元 x - z 座標系を反時計回りに θ だけ回転した，二次元 q - s 座標系を考える。座標 s は境界上の始点(通常はある節点)から境界に沿って浸透領域を左に見ながら反時計回りに進む方向に正をとるものとする。q は境界において外向きの法線ベクトル $\mathbf{n}$ と同じ方向にとった座標系

となる。まず, (A12.5)式で表される$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}}$は, スカラー量であり, ベクトルとマトリックスで表すと,

$$\overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}_{xz}\right]^T\overline{\mathbf{a}} = \left\{ n_x \quad n_z \right\}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_x} \\ \overline{a_z} \end{Bmatrix} = \left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix} \tag{A12.13}$$

となる。ここで,

$$\begin{Bmatrix} \overline{v_q} \\ \overline{v_s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{qq} & k_{sq} \\ k_{qs} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{i_q} \\ \overline{i_s} \end{Bmatrix} \tag{A12.28a}$$

または,

$$\begin{cases} \overline{v_q} = k_{qq}\overline{i_q} + k_{sq}\overline{i_s} \\ \overline{v_s} = k_{qs}\overline{i_q} + k_{ss}\overline{i_s} \end{cases} \tag{A12.28b}$$

より,

$$\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{qs} & -k_{ss} \\ k_{qq} & k_{sq} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{i_q} \\ \overline{i_s} \end{Bmatrix} \tag{A12.29}$$

であるので, (A12.13)式は, (A12.9b)式, (A12.29)式の関係を順に用いて,

$$\begin{aligned} \overline{u_n}/R_3 &= \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}_{qs}\right]^T\overline{\mathbf{a}} = \left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix} = \left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix} \\ &= \left\{ n_q \quad n_s \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -k_{qs} & -k_{ss} \\ k_{qq} & k_{sq} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{i_q} \\ \overline{i_s} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{A12.30}$$

となる。また, ノイマン境界上で, 法線ベクトルは$\{n_q \quad n_s\} = \{1 \quad 0\}$であるので, (A12.30)式は,

$$\begin{aligned} \overline{u_n}/R_3 &= \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}_{qs}\right]^T\overline{\mathbf{a}} = \left\{ 1 \quad 0 \right\}\begin{bmatrix} k_{qq} & k_{qs} \\ k_{sq} & k_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -k_{qs} & -k_{ss} \\ k_{qq} & k_{sq} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{i_q} \\ \overline{i_s} \end{Bmatrix} \\ &= \left\{ k_{qq} \quad k_{qs} \right\}\begin{bmatrix} -k_{qs} & -k_{ss} \\ k_{qq} & k_{sq} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{i_q} \\ \overline{i_s} \end{Bmatrix} \\ &= \left\{ -k_{qq}k_{qs} + k_{qs}k_{qq} \quad -k_{qq}k_{ss} + k_{qs}k_{sq} \right\}\begin{Bmatrix} \overline{i_q} \\ \overline{i_s} \end{Bmatrix} \\ &= \left\{ 0 \quad k_{qs}^2 - k_{qq}k_{ss} \right\}\begin{Bmatrix} \overline{i_q} \\ \overline{i_s} \end{Bmatrix} \\ &= (k_{qs}^2 - k_{qq}k_{ss})\,\overline{i_s} \\ &= -\overline{i_s}/R_3 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \overline{u_n}/R_3 = \mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}_{qs}\right]^T\overline{\mathbf{a}} = -\overline{i_s}/R_3 \tag{A12.31}$$

$$\therefore \quad \overline{u_n} = R_3\,\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}_{qs}\right]^T\overline{\mathbf{a}} = -\overline{i_s} \tag{A12.32}$$

となる。ここで，透水係数の不変量：$k_{qs}^2 - k_{qq}k_{ss} = II_3 = 1/R_3$ を用いた。このようにして，(A12.1)式で表される，フラックスベクトル $\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$ は，最終的に，

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'} &= \int_{C_u^{e'}} R_3(\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}})\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC \\ &= \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n}\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC \\ &= \int_{C_u^{e'}} -\overline{i_s}\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC\end{aligned} \tag{A12.33}$$

となる。(A12.33)式からわかるように，「$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$ は，流れ関数のノイマン境界において，境界に沿って動水勾配 $\overline{i_s}$ が存在するときに考慮に入れる必要があること」を示唆している。

一方，**第10章**（または**参考文献**A12.1）で述べたように，ポテンシャル関数の有限要素法では，ノイマン境界において，フラックスベクトル $\mathbf{Q}^{e'}$ は，

$$\mathbf{Q}^{e'} = \int_{C_v^{e'}} \overline{v_n}\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T dC = \int_{C_v^{e'}} \overline{v_n}\left[\overline{\mathbf{N}^{e'}}\right]^T ds \tag{A12.34}$$

と表され（本文**第10章**の(10.58)式 or (10.69)式参照）[A12.1)]，境界に垂直な方向の流速 $\overline{v_n}$ $(=\overline{v_q})$ が存在するときに考慮に入れる必要があることを示している。

本文**11.2.5項**に記載のプログラム FEMNESD4C のコーディングにおいては，**A12.1.1 項**で述べたように，ノイマン境界のフラックスベクトルを x - z 座標系で計算している。すなわち，(A12.2)式と，$\mathbf{n}^T = \{n_1 \quad n_2\}$，(A12.9a)式から，次のようになる（(A12.10)式参照）。

$$\overline{u_n} = R_3(\mathbf{n}^T\left[\mathbf{D}\right]^T\overline{\mathbf{a}}) = R_3\left\{n_x \quad n_z\right\}\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{xz}\\ k_{zx} & k_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{a_x}\\ \overline{a_z}\end{Bmatrix} = R_3\left\{n_x \quad n_z\right\}\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{xz}\\ k_{zx} & k_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\overline{v_z}\\ \overline{v_x}\end{Bmatrix} \tag{A12.35}$$

上述したように，浸透領域を左に見ながら境界に沿って s 方向をとったとき，$\overline{u_n}$ の値は $-\overline{i_s}$ となる（ここに，$\overline{i_s}$ は s 方向の動水勾配）。したがって，境界に沿って動水勾配 $\overline{i_s}$ が存在するとき，フラックスベクトル $\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$ がカウントされることになる。これまで，$\overline{u_n}$ は流速に関係する値として定義してきたが，本質的には，（境界線の沿った方向の）動水勾配 $\overline{i_s}$ に関係する値であることがわかる。

参考文献

A12.1) 田中　勉, Arnold Verruijt (2021): 二次元異方透水性地盤の浸透流解析 －全水頭に関する有限要素近似－，神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 25 号, 256-296.

A12.2) 田中　勉, Arnold Verruijt (2018): 異方透水性地盤における浸透水の流れ －透水係数テンソルとモール円－，神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 22 号, 140-162.

付録 13　有限要素法における境界条件

A13.1 浸透流と境界条件

有限要素法(FEM)による浸透流解析は，ポテンシャル関数，及び，流れ関数に関する支配方程式を境界条件の下に解くことに帰着される。浸透流問題の境界条件には，不透水性基盤上の河川堤防についてみると, Fig.A13.1 に示すように，主に，次の 4 つのものがある。

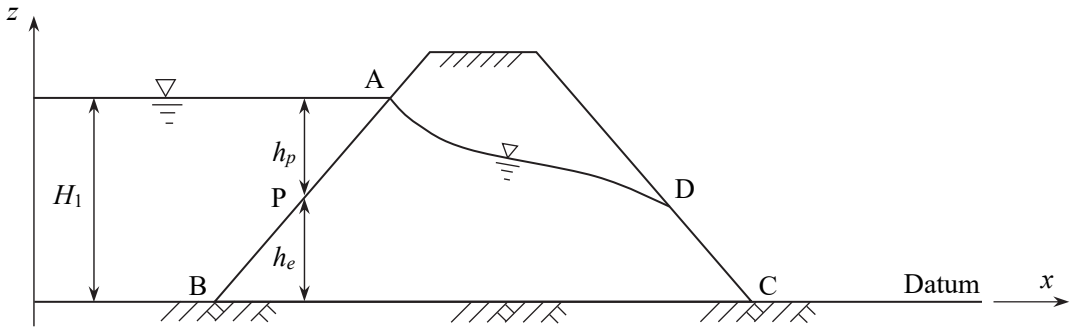


Fig.A13.1 浸透流問題の境界条件(不透水性基盤上の河川堤防)

① 貯水境界 (Boundary of reservoir water)

貯水が直接接する上流側斜面(Fig.A13.1 の AB)は貯水境界と呼ばれ，等ポテンシャル線であり，

AB 上で，$h = H_1$　　(A13.1)

で表される。ここに，

x, z : 水平方向右向き及び鉛直方向上向きにとった座標系, Fig.A13.1 では, x 軸は基準線(Datum)に一致するようにとられている

H_1 : 貯水池の基準線(座標系 x に同じ)から測った上流側水深

h_e : 貯水境界上の点 P における位置水頭

h_p : 貯水境界上の点 P における圧力水頭

② 浸潤線または自由水面 (Line of seepage, Phreatic surface, Ground water level or Water table)

堤体内で間隙を通して大気圧と接する水面(Fig.A13.1 の DA)は浸潤線と呼ばれ，浸透領域上部の流線でもある。その境界に沿って，水圧が 0 で大気圧に等しく一定であり，自由水面とも呼ばれる。すなわち，

DA 上で，$h = z$　（$\because\ p = 0$）　　(A13.2)

である。その軌跡を決定することは，地下水研究の主要な目的の一つである。ここに，

$h\ (= h_e + h_p)$: 全水頭

$p\ (= h_p\ \gamma_w)$: 点 P における水圧

γ_w : 水の単位体積重量

である。

③ 浸出面または浸潤面（Surface of seepage）

浸透水が，浸透領域から離れ，液体と土の両方に対して自由なゾーンへ入ってゆく境界(Fig.A13.1 の CD)は，浸出面または浸潤面と呼ばれる。この面における水圧は大気圧に等しく一定である，すなわち，

CD 上で，$h = z$ (A13.3)

である。しかしながら，浸出面は等ポテンシャル線でも流線でもない。

④ 不透水性境界（Impervious boundary）

Fig.A13.1 に示す BC は不透水性境界と呼ばれる。不透水性境界では，流体はその境界を横切って通過したり離れたりしない。すなわち，境界に垂直な速度成分は，この境界上のすべての点で 0 である。境界上の点において境界に垂直な方向および接する方向を n, s とすると，本文の(11.24)式を参照して，

境界接線 BC 上で，$\psi = \text{const.}$，または，$v_n = \dfrac{\partial \psi}{\partial s} = 0$ (A13.4)

となり，不透水性境界は一つの流線となる。

A13.2　ポテンシャル関数に関する有限要素法の境界条件

ポテンシャル関数に関する有限要素法の境界条件を，不透水性基盤上の河川堤防について図示すると Fig.A13.2(a)となる。すなわち，浸透流問題は，全水頭 h に関して，支配方程式を，境界条件:

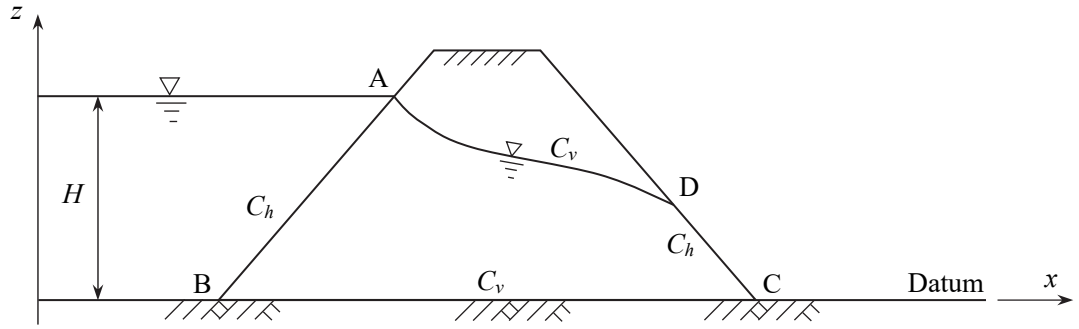
(i) 基本境界（ディリクレ境界，水頭境界）

$h = \bar{h}$ on C_h　（$\bar{h}$ はは基本境界における全水頭の規定値） (A13.5)

(ii) 自然境界（ノイマン境界，流速境界）

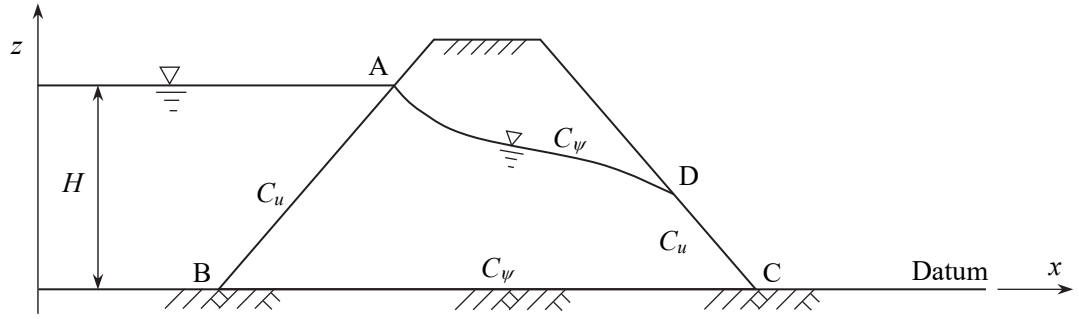
$v = \overline{v_n}$ on C_v　（$\overline{v_n}$ は自然境界における法線方向の流速の規定値） (A13.6)

の下に解くことによって，解を得ることができる。ここに，C_h は基本境界（水頭境界），C_v は自然境界（流速境界）を表す。Fig.A13.2(a)に示されるように，境界は一般的に C_h または C_v のどちらかで表される。FEM 解析の理論においては，通常，Fig.A13.2(a)をイメージ化して，Fig.A13.3(a)のように表される。



(a) ポテンシャル関数に関する境界条件

Fig.A13.2 有限要素法の境界条件（Continue）



(b) 流れ関数に関する境界条件

Fig.A13.2 有限要素法の境界条件（Continued）

A13.3 流れ関数に関する有限要素法の境界条件

流れ関数に関する有限要素法の境界条件を，不透水性基盤上の河川堤防について図示すると Fig.A13.2(b)となる。すなわち，浸透流問題は，流れ関数ψに関して，支配方程式を，境界条件：

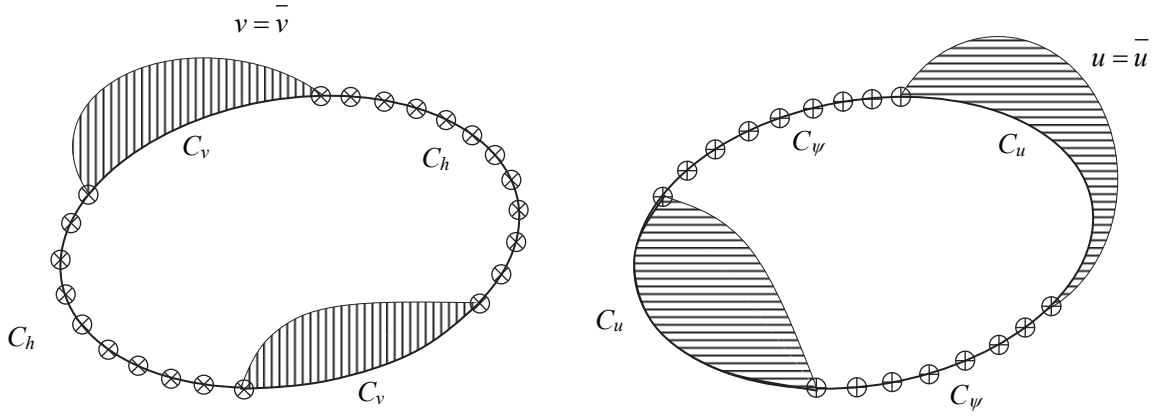
(i) 基本境界（ディリクレ境界，流れ関数境界）

$\psi = \overline{\psi}$ on C_ψ （$\overline{\psi}$は基本境界における流れ関数の規定値） (A13.7)

(ii) 自然境界（ノイマン境界，流速に関係する境界）

$u = \overline{u_n}$ on C_u （$\overline{u_n}$は自然境界における流速に関係する値の規定値） (A13.8)

の下に解くことによって，解を得ることができる。ここに，C_ψは基本境界（流れ関数境界），C_uは自然境界（流速に関係する境界）を表す。Fig.A13.2(b)に示されるように，境界は一般的に C_ψ または C_u のどちらかで表される。FEM 解析の理論においては，通常，Fig.A13.2(b)をイメージ化して，Fig.A13.3(b)のように表される。



(a) ポテンシャル関数に関する境界条件　　(b) 流れ関数に関する境界条件

Fig.A13.3 ポテンシャル関数及び流れ関数に関する有限要素法における境界条件

（Figs.A13.2 (a), (b)をイメージ化した図）

Figs.A13.3 (a), (b)からわかるように，境界はすべて，ディリクレ境界かノイマン境界に分類され

ることがわかる。次に，自然境界（流速境界 $C_v^{e'}$，または，流速に関係する境界 $C_u^{e'}$）におけるフラックスベクトルについて述べる。

A13.4　自然境界 $C_v^{e'}$ 及び $C_u^{e'}$ におけるフラックスベクトル $\mathbf{Q}^{e'}$ 及び $\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$

まず，ポテンシャル関数に関する有限要素法において，要素 e' の自然境界（流速境界）$C_v^{e'}$ におけるフラックスベクトル $\mathbf{Q}^{e'}$ は次のように計算される（本文第 10 章の(10.58)式 or (10.69)式参照）[A13.1)]。

$$\mathbf{Q}^{e'} = \int_{C_v^{e'}} \overline{v_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}} \right]^T dC = \int_{C_v^{e'}} \overline{v_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}} \right]^T ds \tag{A13.9}$$

ポテンシャル関数に関する有限要素法のノイマン境界は，不透水性境界であり，境界を横切る流れがないので，$\overline{v_n} = 0$ となるので，$\mathbf{Q}^{e'}$ の計算を行う必要がないことがわかる。ここに，s は領域を左側に見ながらノイマン境界辺上を進む方向に正をとった座標である。また，n は s を右回りに 90° 回転した座標であり，境界上に外向きに正をとった法線ベクトルである。

一方，流れ関数に関する有限要素法において，要素 e' の自然境界（流速に関係する境界）$C_u^{e'}$ におけるフラックスベクトル $\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$ は次のように計算される（本文の(11.62)式参照）[A13.2)]。

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'} = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}} \right]^T dC = \int_{C_u^{e'}} \overline{u_n} \left[\overline{\mathbf{N}^{e'}} \right]^T ds \tag{A13.10}$$

ここに，$\overline{u_n}$ は，

$$\overline{u_n} = R_3 (\mathbf{n}^T \left[\mathbf{D} \right]^T \overline{\mathbf{a}}) \tag{A13.11}$$

と表される（本文の(11.60)式参照）。x, z 座標系を反時計回りに 90°回転した q, s 座標系についてみると，ノイマン境界上においては，$\overline{\mathbf{a}}$ が，$\overline{\mathbf{a}} = \left\{ \overline{a_q},\ \overline{a_s} \right\}^T = \left\{ -\overline{v_s},\ \overline{v_q} \right\}^T$ であり，$\overline{u_n} / R_3$ が，

$$\overline{u_n} / R_3 = \mathbf{n}^T \left[\mathbf{D} \right]^T \overline{\mathbf{a}} = \left\{ k_{qq} \quad k_{qs} \right\} \begin{Bmatrix} \overline{a_q} \\ \overline{a_s} \end{Bmatrix} = \left\{ k_{qq} \quad k_{qs} \right\} \begin{Bmatrix} -\overline{v_s} \\ \overline{v_q} \end{Bmatrix} = k_{qq} \overline{a_q} + k_{qs} \overline{a_s} = -k_{qq} \overline{v_s} + k_{qs} \overline{v_q} \tag{A13.12}$$

$$\left(\because\ \overline{a_q} = -\overline{v_s},\ \overline{a_s} = \overline{v_q} \right)$$

と与えられる。したがって，(A13.12)式から，ノイマン境界上において $\overline{u_n}$ が 0 となるのは，一般的に $k_{qq} \neq 0$ であることから，限られた条件:「$\overline{v_s} = 0$」，かつ，「$k_{qs} = 0$ または $\overline{v_q} = 0$」のときのみである。すなわち，通常，ノイマン境界上においては，$\overline{u_n} \neq 0$ となるので，$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$ の計算を行う必要があることがわかる。言い換えると次のとおりである。

ノイマン境界において，$\overline{u_n} / R_3 = \mathbf{n}^T \left[\mathbf{D} \right]^T \overline{\mathbf{a}} = -k_{qq} \overline{v_s} + k_{qs} \overline{v_q} \neq 0$ の場合には，$\mathbf{Q}_{\mathrm{SF}}^{e'}$ の計算が必要である。ここに，s は境界に沿って浸透領域を左に見ながら反時計回りに進む方向を正にとった座標であり，q は s 方向から時計回りに 90°の方向に正をとった座標である。

参考文献

A13.1) 田中　勉, Arnold Verruijt (2021): 二次元異方透水性地盤の浸透流解析 －全水頭に関する有限要素近似－，神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 25 号, 256-296.

A13.2) 田中 勉, Arnold Verruijt (2022): 二次元異方透水性地盤の浸透流解析 －流れ関数に関する有限要素近似－，神戸大学都市安全研究センター研究報告，第 26 号, pp.121-160.

付録 14　三つの式＜Stokes の法則，浸透力，Darcy 則＞の相互関係

ここでは，三つの式＜Stokes の法則，浸透力，Darcy 則＞について，まず，それぞれの表現式を示し，それらの値の相互関係について考える。ここで取り上げる「Stokes の法則」は，正確には，「Stokes の法則から類推した抵抗力」を意味する。

(1) Stokes の法則（から類推した式）

異方透水性地盤内において，遅い一様流速 **v** (v_x, v_z)の粘性流体から，単位体積内の土粒子が受ける抵抗力 **d** (d_x, d_z)は, Stokes の法則（から類推した抵抗力）：

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} \tag{A14.1}$$

で表される（本文の(1.9)式参照）。ここに, (　,　), 及び, {　,　}^{T} 内の値はベクトルの x, z 成分を表す（以下も同様である）。また, α_{ij} $(i, j = x, z)$ は流れに対する抵抗性を表す比例係数（テンソル成分）である。(A14.1)式で表される Stokes の法則はミクロな観点から導かれた式である。[　] 内はベクトル **d** とベクトル **v** を結びつける行列を表す。

(2) 浸透力

動水勾配 **i** (i_x, i_z) が作用するとき，単位体積内の土粒子が流体から受ける力（すなわち，浸透力）**s** (s_x, s_z) はフローリン（ФЛОРИН）[A14.1)]によると, **s** = γ_w **i**，すなわち,

$$\begin{Bmatrix} s_x \\ s_z \end{Bmatrix} = \gamma_w \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{A14.2}$$

で表される（本文の(11.8)式参照）。ここに, γ_w は水の単位体積重量の値である。(A14.2)式で表される浸透力はマクロな観点から導かれた式である。「マクロな観点から導かれた」浸透力ベクトル **s** ((A14.2)式）は,「ミクロな観点から導かれた」抵抗力ベクトル **d** ((A14.1)式）と同一である。

(3) Darcy 則（運動方程式）

浸透水の運動方程式は, Darcy 則：

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{A14.3}$$

で表される（本文の(1.20)式参照）。(A14.3)で表されるダルシー則は浸透水の運動方程式の表現形式の一つであるといえる。[　] はベクトル **v** とベクトル **i** を結びつける透水係数テンソルである。

(4) 三つの式＜Stokes の法則，浸透力，Darcy 則＞の相互関係

ここで，例えば，ミクロな観点からみた「遅い一様流速の粘性流体から単位体積内の土粒子が受ける抵抗力 **d**」は，マクロな観点からみた「単位体積内の土粒子が流体から受ける力（すなわち，浸透力）**s**」に等しいので, **d** = **s** の関係が成り立ち, (1) と (2) の関係より,

$$\begin{Bmatrix} d_x \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \gamma_w \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \gamma_w \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}$$

$$\therefore\ \mathbf{v}=\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix}=[\mathbf{D}]\,\mathbf{i} \tag{A14.4}$$

となり, (3)の関係が導かれることがわかる。ここに, [**D**] は透水係数テンソルであり,

$$[\mathbf{D}]=\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}=\gamma_w\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{\gamma_w}{\alpha_{xx}\alpha_{zz}-\alpha_{xz}\alpha_{zx}}\begin{bmatrix} \alpha_{zz} & -\alpha_{zx} \\ -\alpha_{xz} & \alpha_{xx} \end{bmatrix} \tag{A14.5}$$

である(本文では(1.21)式)。また, 特徴的な関係式：

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}=\gamma_w \tag{A14.6}$$

が成り立つ(本文**第８章**の(8.23)式参照)。

このようにして, (1), (2)の関係から(3)の関係が導かれることがわかる。同様にして, (2), (3)の関係から(1)の関係が導かれ, (3), (1)の関係から(2)の関係が導かれる。すなわち, (1), (2), (3)は, いずれか2つの式から他の一つの式を導くことができ, 相互に関係があることがわかる。

また, (A14.6)式から,

$$\frac{1}{\gamma_w}\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}=1$$

の関係式が成り立つので, 抵抗力と透水性を表す行列：

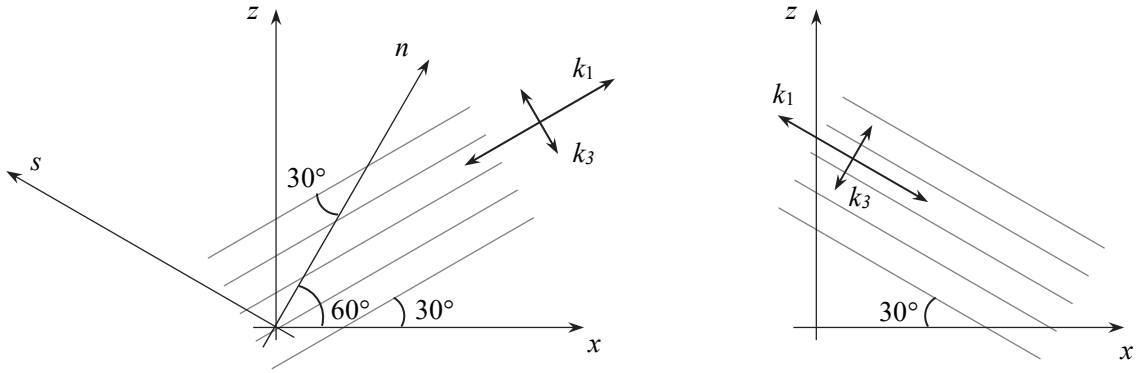
$$\frac{1}{\gamma_w}\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \quad と \quad \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

の間には逆行列の関係があることがわかる。

参考文献

A14.1) ベー・アー・フローリン(ФЛОРИН, В. А.)原著／赤井浩一監修, 大草重康訳編 (1971): フローリンの土質力学 第Ⅰ巻, 第2版, 森北出版, pp.183-193.

付録 15　透水係数テンソルの非対角成分（誘導成分）k_{xz} (= k_{zx}) の正負について



(a) 右斜め上方向にある場合　　(b) 右斜め下方向にある場合

Fig.A15.1　$x-z$ 座標系における最大主透水係数の方向と透水係数テンソルの成分

透水係数テンソルの非対角成分（誘導成分）k_{xz} (= k_{zx})の正負について考える。ここでは，最大，最小主透水係数の値 k_1, k_3 が，

$k_1 = 1.0 \times 10^{-4}$ m/s

$k_3 = 0.5 \times 10^{-4}$ m/s

の場合について考える。まず，水平と鉛直方向に固定した $x-z$ 座標系についてみる。

(1) 最大主透水係数の方向が右斜め上方向にある場合（Fig. A15.1 (a)の場合）

Fig. A15.1 (a)に示すように，最大主透水係数の方向が右斜め上方向（30°）にある場合，$x-z$ 座標系における透水係数テンソルの成分は，

$$\left.\begin{aligned} k_{xx} &= 0.875 \times 10^{-4}\ \text{m/s} \\ k_{zz} &= 0.625 \times 10^{-4}\ \text{m/s} \\ k_{xz} &= 0.21651 \times 10^{-4}\ \text{m/s} \end{aligned}\right\} \tag{A15.1}$$

となる。

(2) 最大主透水係数の方向が右斜め下方向にある場合（Fig. A15.1 (b)の場合）

一方，Fig. A15.1 (b)に示すように，最大主透水係数の方向が右斜め下方向（–30°）にある場合，$x-z$ 座標系における透水係数テンソルの成分は，

$$\left.\begin{aligned} k_{xx} &= 0.875 \times 10^{-4}\ \text{m/s} \\ k_{zz} &= 0.625 \times 10^{-4}\ \text{m/s} \\ k_{xz} &= -\,0.21651 \times 10^{-4}\ \text{m/s} \end{aligned}\right\} \tag{A15.2}$$

となる。

(3) 座標系の回転（座標系の取り方によるテンソル成分の変化）（Fig. A15.1 (a)参照）

次に，Fig. A15.1 (a)において，$x-z$ 座標系を反時計回りに 60°回転した $n-s$ 座標系についてみると，

$$\left.\begin{aligned} k_{nn} &= 0.875 \times 10^{-4}\ \text{m/s} \\ k_{ss} &= 0.625 \times 10^{-4}\ \text{m/s} \\ k_{ns} &= -\,0.21651 \times 10^{-4}\ \text{m/s} \end{aligned}\right\} \tag{A15.3}$$

となる。

このように，地盤の状態（透水係数テンソルの主方向がどの方向にあるか）によって，また，現象を観察する座標系の取り方によって，透水係数テンソル成分の値が変わることがわかる。対角成分 k_{xx} や k_{zz}，及び，k_{nn} や k_{ss} は必ず正の値をとるが，非対角成分 k_{xz} (= k_{zx}) 及び k_{ns} (= k_{sn}) は正の値となったり負の値となったりする場合があることに注意すべきである。

水平と鉛直方向に固定した $x-z$ 座標系についてみると，非対角成分 k_{xz} (= k_{zx}) は，最大主透水係数 k_1 の方向が，右斜め上方に向いていると正の値をとり，右斜め下方に向いていると負の値をとる。この図式を覚えておくと非対角成分の正負の状況がイメージしやすい。

＜付録 15 の例題で用いた透水係数テンソルの座標変換式とその計算＞

まず，付録 15 の例題で用いた透水係数テンソルの座標変換式についてまとめておく。$x-z$ 座標系の透水係数テンソルを反時計回りに θ 回転した $n-s$ 座標系に変換する式は，

$$\begin{bmatrix} k_{nn} & k_{sn} \\ k_{ns} & k_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{A15.4}$$

である（本文の(3.5)式参照）。(A15.4)式に関して，透水係数成分について書き下すと，透水係数が対称の場合（$k_{zx} = k_{xz}$），

$$\left.\begin{aligned} k_{nn} &= k_{xx}\cos^2\theta + 2k_{xz}\sin\theta\cos\theta + k_{zz}\sin^2\theta \\ \left.\begin{matrix} k_{sn} \\ k_{ns} \end{matrix}\right\} &= k_{xz}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (k_{xx} - k_{zz})\sin\theta\cos\theta \\ k_{ss} &= k_{xx}\sin^2\theta - 2k_{xz}\sin\theta\cos\theta + k_{zz}\cos^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{A15.5}$$

となる（本文の(3.6b)式参照）。ここで，$x-z$ 座標系を反時計回りに θ_0 回転した $X-Z$ 座標が主方向（X が最大，Z が最小主方向）であるとすると，(A15.4)式は，

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \tag{A15.6}$$

となる。逆に，(A15.6)式から $x-z$ 座標系における透水係数テンソルを求める式は，

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{zx} \\ k_{xz} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \tag{A15.7}$$

となる。(A15.7)式に関して，透水係数成分について書き下すと，透水係数が対称の場合（$k_{zx} = k_{xz}$），

$$\left.\begin{aligned} k_{xx} &= k_1\cos^2\theta_0 + k_3\sin^2\theta_0 \\ \left.\begin{matrix} k_{zx} \\ k_{xz} \end{matrix}\right\} &= (k_1 - k_3)\sin\theta_0\cos\theta_0 \\ k_{zz} &= k_1\sin^2\theta_0 + k_3\cos^2\theta_0 \end{aligned}\right\} \tag{A15.8}$$

となる。(A15.4) or (A15.5)式，及び，(A15.7) or (A15.8)式が，ここで用いた座標変換式である。

(1)　$k_1 = 1.0 \times 10^{-4}$ m/s, $k_3 = 0.5 \times 10^{-4}$ m/s, $\theta_0 = 30°$の場合

これらの条件を(A15.8)式に代入すると，(15.1)式が得られる。

(2)　$k_1 = 1.0 \times 10^{-4}$ m/s, $k_3 = 0.5 \times 10^{-4}$ m/s, $\theta_0 = -30°$の場合

これらの条件を(A15.8)式に代入すると，(15.2)式が得られる。

(3)　$k_{xx} = 0.875 \times 10^{-4}$ m/s, $k_{zz} = 0.625 \times 10^{-4}$ m/s, $k_{xz} = 0.21651 \times 10^{-4}$ m/s, $\theta = 60°$の場合

これらの条件を(A15.5)式に代入すると，(15.3)式が得られる。

索引

ア行

アイソパラメトリック要素　119

圧力エネルギー　1

圧力型（浸透水の流れにおける）　64, 67

圧力水頭　104, 121

位置エネルギー　1

位置水頭　104, 121

一次元拘束流れ（流線方向の流れ）　55-58, 59

一次元拘束流れに関する透水係数（n 方向の場合, $k_{n\,1\mathrm{DCF}}$）55-58, 59-63

一次元拘束流れに関する誘導動水勾配（s 方向の場合, $i_{s\,\mathrm{IND}}$）57, 59-61

一次元拘束流れの場における浸透水の運動方程式　72

一次元拘束流問題　67

一次元動水勾配問題　67

一次元透水試験（二次元異方透水性土）59-62, 63-67

一様流型（浸透水の流れにおける）　64, 67

異方性（Anisotropy）　1

異方透水性　1

異方透水性土の透水試験　59

異方透水性の大きさ（値）　2-7

異方透水性の効果　19-28

異方透水性の発現メカニズム　8-18

渦なし（流れ）　81, 90, 97, 99, 100, 124

運動方程式（浸透流）　122

運動方程式としてのダルシー則　8

円管内の水の流れ　17

円弧すべり（フィルダムにおける）　27

オイルサンド（Oil sand）　3

応力成分の正方向の定義（第Ⅰ系列と第Ⅱ系列）146（→ 透水係数テンソル成分の正方向）

重み付き算術平均　14, 144

重み付き幾何平均　14, 144

重み付き調和平均　14, 144

カ行

回転成分 $(\mathrm{rot}\,\mathbf{d})_y$　124

ガウスの発散定理　110, 127, 154-155

ガウス・ルジャンドルの数値積分　160, 169

拡張されたダルシー則　12,15, 35, 122, 197

仮想水頭　110

仮想流れ関数　127

間隙水圧　122

管水路中の流れ　17, 30

完全流体の流れ　98

関東ローム層（異方透水性の大きさ）　4

幾何平均　3

基準線（Datum, Datum line）　104, 121

基本境界（ディリクレ境界，水頭境界）　109, 126, 194, 195

ギャラーキン法　112, 129

境界条件（浸透流問題における）　109, 126-127, 193-196

極（Pole）→ モール円の極

均質　1

均質・異方性　1-2

均質・等方性　1-2

矩形形状のフィルダム → フィルダム

屈折角（二層地盤における浸透流）　125, 179

屈折現象（二層地盤における浸透流）　125-126, 179-181

屈折理論（二層地盤における浸透流）　125-126, 179-181

クラック中の水の流れ　17

形状関数　112, 119, 128, 164, 172

限界水頭差（浸透破壊に対する）　26

交差偏微分　124

「構造上の透水性」と「数学的に等価な透水係数テンソル」　47-52

混合微分の等価性　78, 123

サ行
最小主透水係数　36, 41-42, 151
最大主透水係数　36, 41-42, 151
砂丘砂（異方透水性の大きさ）　5
座標変換の式（座標軸の回転，及び，伸縮）　80, 89
座標変換の理論（Theory of coordinate transformation）　15-17, 19-23, 76-103, 80-96
砂礫地盤（異方透水性の大きさ）　4
三角形定ひずみ要素　113, 131
三角形定動水勾配要素 → 三角形定ひずみ要素
算術平均　3
軸対称流　24, 26
止水壁　23
自然境界（ノイマン境界，流速境界）　109, 127, 132, 182, 194, 195
自然地盤（異方透水性の大きさ）　2
実・仮定地盤流量比　22, 24-25
実験室のモデル地盤（異方透水性の大きさ）　6
支配方程式 → 浸透水の支配方程式
シープスフートローラ　6
四辺形８節点アイソパラメトリック要素　119, 156-163
四辺形９節点アイソパラメトリック要素　119, 164-168
弱形式表現 → 有限要素近似における弱形式表現
自由水面（Phreatic surface, Groundwater level or Water table）　193
集中フラックス　116
人工の締固め地盤（異方透水性の大きさ）　6
浸出面（浸潤面）（Surface of seepage）　194
浸潤線（堤体における）（Line of seepage）　193
浸透水の運動方程式　68-75, 108
　二次元（x 方向及び z 方向）11, 70, 71, 105-107
　一次元拘束流れ　72
浸透流の屈折現象　125, 179
浸透流の支配方程式　79, 107-108
浸透水の流れの方向　53, 176
浸透水の流れの方向と動水勾配の方向の関係 → 流速ベクトルと動水勾配ベクトルのなす角
浸透破壊に対する安定性　26
浸透流を支配する方程式（全水頭またはポテンシャルに関する）　107, 108-109
浸透力（浸透力ベクトル）9, 68, 69, 122-123, 197
浸透力と制動力　1, 8, 10, 68
水頭境界 → 基本境界
水平ドレーン　23-24
数学的に等価な透水係数テンソルの主方向　49
ストークスの式（ストークスの法則）8, 19, 197
水成の堆積地盤（異方透水性の大きさ）　2
砂地盤（異方透水性の大きさ）　3
正則な複素ポテンシャルの存在　98, 99, 100
静的縮小（Static condensation）　119, 136
正方形網（等方地盤における流線網）　16, 21
制動力（制動力ベクトル）　68-70
節点全水頭ベクトル　111, 117
節点流れ関数ベクトル　128, 135
線形要素　114, 131
全水頭　1, 77, 104, 121
全水頭 h に関する支配方程式　104-108
全水頭 h に関する有限要素近似　108-118
全体剛性マトリックス → 全体透水マトリックス
全体透水マトリックス　113, 130
全体「内挿関数の偏導関数マトリックス」→ [**B**]
全体「動水勾配－全水頭マトリックス」→ [**B**]
全体「流速－流れ関数マトリックス」→ [**B**]
層状地盤（異方透水性）　12-14
相対密度（地盤）　6
速度エネルギー　1
速度水頭　104
速度ポテンシャル　94

タ行
台形形状のフィルダム → フィルダム
対称テンソルとしての透水係数　30-34
タイヤ―ローラ（異方透水性の大きさ）　6
立上がりドレーン　23-24
タールサンド（異方透水性の大きさ）　3
ダルシー則 → 拡張されたダルシー則
単位体積の水のもつエネルギー　1
タンピングローラ（異方透水性の大きさ）　6
調和平均　3
貯水境界（Boundary of reservoir water）　193
ディラックのデルタ関数　116
ディリクレ境界 → 基本境界
テーパーフート（異方透水性の大きさ）　6
点における透水係数テンソル　35-37, 146-148
等価透水係数（層に平行及び垂直な方向）　12-13
等価透水係数（異方透水性地盤）　15, 96
頭首工基礎地盤の浸透流　23-24
透水係数テンソル（成分）　18, 35-37, 38-39
透水係数テンソルの主値　41-47, 151-152（→ 最小主透水係数, 最大主透水係数）
透水係数（テンソル）の主方向　36, 45
透水係数テンソル成分の正方向 38-39（→ 応力成分の正方向の定義（第Ⅰ系列と第Ⅱ系列））
透水係数テンソルの非対角成分　38, 199-200
透水係数テンソルの非対角成分の極値　43, 152-153
透水係数テンソルの不変量　47
透水係数テンソルのモール円　40-41, 148
透水係数テンソルの誘導成分　32, 36, 40
透水楕円　56, 59
動水勾配　30, 77, 104, 121
動水勾配の方向　53, 176
動水勾配ベクトル　35, 176
等方性（Isotropy）　1
等方透水性地盤の浸透流に関する支配方程式 98-101, 101-102（→ 二次元等方透水性地盤の浸透水に関する支配方程式）
等ポテンシャル線　21, 23
等ポテンシャル線と流線の関係　21, 23, 55, 177
土粒子の配列　1

ナ行
内挿関数　111, 128
内挿関数マトリックス　111, 128
流れ関数　79
流れ関数ψに関する支配方程式　121-125, 126
流れ関数ψに関する有限要素近似　127-135
流れの方向（浸透水の流れの方向）　53
ナブラ　124
二階導関数の対称性（Symmetry of second derivatives）　78（→ 混合微分の等価性）
二階のテンソル　18, 35, 70
二次元異方透水性地盤の浸透流基礎式　104
二次元 FEM 浸透流解析プログラム　118, 136
二次元集中流（異方透水性の効果）　23
二次元等方透水性地盤の浸透水に関する支配方程式　96-98
二次元矢板締切り地盤の浸透流　24
二次元地盤内の水みち　31
入射角（二層地盤における浸透流）　125,179-180
粘土地盤（異方透水性の大きさ）　2
ノイマン境界 → 自然境界
法先ドレーン（異方透水性の大きさ）　23-24

ハ行
非圧縮性流体（浸透水）　77
ピエゾメーター（の水面高さ）　1
非回転運動 → 渦なし（流れ）
フィルダム（矩形形状及び台形形状）　23- 27
風積土（異方透水性の大きさ）　4
不均質　1
不均質・異方性　1-2
不均質・等方性　1-2
複素ポテンシャル　98, 99, 100
複素ポテンシャルと Cauchy-Rieman の関係式 98, 99, 100

複列矢板締め切り地盤の浸透流　23, 24, 26
不透水性境界（Impervious boundary）　194
フラックスベクトル　115-116, 132-133
フローネット　16, 21, 23
フローネット法　17, 21
平行平板間（クラック中）の水の流れ　17
平滑胴ローラ（異方透水性の大きさ）　6
ポアソン方程式　107

マ行
水みち中の水の流れ　31
綿毛構造（Flocculated structure）　2
モール円　40-41, 44, 146-150（→ 透水係数テンソルのモール円）
モール円の極　40-41, 44, 146-150
モール円における非対角成分の正方向（透水係数テンソルにおける）　40-41, 146-150

ヤ行
矢板締切り地盤　23-26
矢板の根入れ比　26
矢板の根入れ深さ　26
有限要素近似　111, 128
有限要素近似における弱形式表現　110, 127
誘導浸透流　39
誘導透水係数成分　43
誘導透水係数成分の最大・最小値　43
誘導動水勾配　57, 59
用極法（Pole method）　40
要素剛性マトリックス　113（→ 要素透水マトリックス）
要素透水マトリックス　113, 115, 132
要素内挿関数　114, 131
要素内挿関数マトリックス　113
4CST 要素　118, 136
要素「内挿関数の偏導関数マトリックス」→ [$\mathbf{B}^e$]
要素「動水勾配－全水頭マトリックス」→ [$\mathbf{B}^e$]
要素「流速－流れ関数マトリックス」→ [$\mathbf{B}^e$]

ラ行
ラプラス方程式(Laplace's equation)　15, 19, 108
ラプラシアン（Laplacian）　108
ラミナ（構造）　5
ランダム配置の水みち　32
ランダム・パッキング　5
流線　21, 23
流線方向の透水係数　55, 59
流線網　21, 23（→ フローネット）
流速境界 → 自然境界
流速と全水頭及び速度ポテンシャルの関係式 85, 93-98
流速と流れ関数の関係式 84, 92, 96
流速ベクトル 176
流速ベクトルと動水勾配ベクトルのなす角 54, 125, 176-178
流量の連続式 15, 19, 76, 82, 91, 96, 107, 108
流量の連続式と流れ関数 124
レス → 風積土

ワ行
湧き出しあり　77, 116
湧き出しなし　77, 81, 90, 97, 99, 100

アルファベット
Aeolian soil → 風積土
B マトリックス（[**B**] and [$\mathbf{B}^e$]）
[**B**]
全体「内挿関数の偏導関数マトリックス」 112, 129
全体「動水勾配－全水頭マトリックス」 112
全体「流速－流れ関数マトリックス」 129
[$\mathbf{B}^e$]
要素「内挿関数の偏導関数マトリックス」 114, 132, 171
要素「動水勾配－全水頭マトリックス」 113
（要素における「節点全水頭値と動水勾配を

関係づけるマトリックス」)
要素「流速－流れ関数マトリックス」 130
（要素における「節点流れ関数値と流速を関係づけるマトリックス」)
Cauchy-Rieman の関係式 98, 99, 100
Coefficient of permeability of one-dimensional Confined flow ($k_{n\ 1DCF}$) → 一次元拘束流れに関する透水係数
Compacted soil → 人工の締固め地盤
Coordinate transformation formula → 座標変換式
Cross-partial derivative 124（→ 交差偏微分）
CST 要素（Constant Strain Triangle element）118, 136（→ 三角形定ひずみ要素）
CST 要素は Iso parametric element か？ 119, 137, 170-173
Datum (Datum line) → 基準線
Drag force 8
Dune sand → 砂丘砂
Edge to edge 2
Edge to face 2
Equality of mixed partials 91, 96（→ 混合微分の等価性）
Face to face 3
FEM 浸透流解析プログラム 118, 136
Flocculated structure → 綿毛構造
h に関する支配方程式 79, 86, 94, 98
Hagen-Poiseuille の式 30
Iso parametric element → アイソパラメトリック要素
Hydraulic gradient → 動水勾配
$k_{n\ 1DCF}$ → 一次元拘束流れに関する透水係数（n 方向の水の流れに関する）
$i_{s\ IND}$ → 一次元拘束流れに関する誘導動水勾配（n 方向の水の流れに対して s 方向に発生）
Laminar (or stratified) structure 3
Laplace's equation → ラプラス方程式
Laplacian → ラプラシアン
Loess → 風積土
Man-made soil → 人工の締固め地盤
Mixed derivative 123
Oil sand → オイルサンド
One-Dimensional Confined Flow (1DCF) → 一次元拘束流れ
φ に関する支配方程式 98
Poison's equation → ポアソン方程式
Polya の方法 144
Prismatic failure concept 26
ψ に関する支配方程式 80, 87, 95, 98
Random packing → ランダム・パッキング
Stokes の法則 → ストークスの式（ストークスの法則）
Stream function → 流れ関数
Symmetry of second derivatives → 二階微分の対称性
Tar sand → タールサンド
Theory of coordinate transformation 座標変換の理論
Total hydraulic head → 全水頭
Weighted arithmetic mean → 重み付き算術平均
Weighted harmonic mean → 重み付き調和平均
Weighted geometric mean → 重み付き幾何平均
x 方向の一次元拘束流れ（運動方程式） 73-74
x 方向の運動方程式（浸透水） 11, 70, 105
x 方向の透水試験（二次元異方透水性土）59- 60
$x-z$ 平面内の二次元浸透流 31-34
$x-z$ 平面内の管水路中の水流 30
Young の定理 78, 123
z 方向の一次元拘束流れ（運動方程式） 73
z 方向の運動方程式（浸透水） 11, 71, 105-106
z 方向の透水試験（二次元異方透水性土）60- 61