



土／水連成有限要素法全体剛性方程式における段階的解法の検討

倉知, 万依
橘, 伸也
竹山, 智英

(Citation)

神戸大学都市安全研究センター研究報告, 29:23-33

(Issue Date)

2025-03

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/0100496647>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100496647>



土／水連成有限要素法全体剛性方程式における 段階的解法の検討

Sequential solution of the overall stiffness equation
for the coupled soil/water finite element method

倉知 万依¹⁾
Mai Kurachi
橘 伸也²⁾
Shinya Tachibana
竹山 智英³⁾
Tomohide takeyama

概要:本研究の目的は,有限要素法全体剛性方程式における段階的解法を提案し,従来の解法と解の精度および計算コストを比較し,優位性を検討することである.本研究では一次元土／水連成問題を対象とする.一般に,連立する支配方程式の増加や,解析対象物の要素分割数の増加に伴い,全体剛性マトリクスは非常に大きなマトリクスとなる.そこで,全体剛性マトリクスを分離し,未知変数を種類ごとに分けて解くことで計算コストの減少を目指した.その結果,段階的解法を用いた解析では,解の妥当性は確認できたが,計算コストの削減には至らなかった.

キーワード:土／水連成問題,有限要素法

1. はじめに

近年では,解析対象の構造や現象が複雑化しており,土粒子の変形や水圧の変化に加えて,間隙空気や熱,さらには化学変化といった多岐にわたる分野を取り入れた解析が求められている.そのため,複数種類の未知変数を持つ複数の偏微分方程式を連立させて解く必要がある.このような問題は連成問題と呼ばれ,連成する現象が増えれば未知変数も増加する.また,精度の高い解析を行うには,対象物を細かく要素分割する必要がある,これに伴い要素や節点数が増加する.このような状況では,未知変数や要素数が増加するほど必要な演算回数が大幅に増加し,それにより演算時間が増大するという問題が発生する.解析を効率的に行うためには,この演算時間の増加に対する解決策が重要な課題となっている.

演算回数および演算時間を短縮するための方法として,全体剛性マトリクスを分離し,未知変数を種類ごとに分けて解く手法が考えられる.このアプローチでは,大規模な線形方程式全体を一度に解くのではなく,各種の未知変数において独立した小規模な線形方程式に分解し,それらを個別に求解することで,計算負荷の軽減を目指す.

本研究では,一次元の土/水連成有限要素解析を対象とし,全体剛性方程式を従来の解法により求解する場合と,段階的解法により求解する場合の解の精度および計算コストを比較し,優位性を検討する.

2. 全体剛性方程式の導出

(1) 支配方程式¹⁾

土／水連成問題における支配方程式を以下に示す．特に断りがない限り，圧縮を正とする．

$$\text{運動方程式} \quad \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \rho \dot{\mathbf{b}} - \dot{\rho} \mathbf{b} = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{構成式} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.2)$$

$$\text{適合条件式} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}) \quad (2.3)$$

$$\text{連続式} \quad \dot{\varepsilon}_v - \nabla \cdot \dot{\mathbf{w}} = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{ダルシー則} \quad \dot{\mathbf{w}} = -\mathbf{k} \cdot \nabla h \quad (2.5)$$

$$\text{有効応力の原理} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \dot{p}_w \mathbf{1} \quad (2.6)$$

また，一次元問題の境界条件は以下の通りである．

$$\text{変位境界} \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{on } S_u \quad (2.7)$$

$$\text{水頭境界} \quad h = \hat{h} \quad \text{on } S_h \quad (2.8)$$

ここで，

$\mathbf{u}$:	変位テンソル	$\dot{\mathbf{u}}$:	速度ベクトル
$\dot{\mathbf{w}}$:	間隙水の流速ベクトル	$\boldsymbol{\varepsilon}$:	ひずみテンソル
$\mathbf{C}$:	剛性テンソル	$\boldsymbol{\sigma}$:	全応力テンソル
$\boldsymbol{\sigma}'$:	有効応力テンソル	$\mathbf{b}$:	物体力ベクトル
ρ :	密度	$\mathbf{k}$:	透水係数テンソル
p_w :	間隙水圧	h :	全水頭

であり，上付きの $\hat{}$ は既知量を表す．

(2) 空間・時間離散化^{2), 3)}

支配方程式を弱形式化し，ガラーキン近似を用いて空間離散化を行う．時間離散化には後退差分を適用し，一次元土／水連成有限要素法の全体剛性方程式を以下のように得る．

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{K}_v]^T \\ [\mathbf{K}_v] & -\theta \Delta t [\mathbf{K}_h] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u^n \\ \gamma_w h_{t+\Delta t}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{K}_v]^T \{\gamma_w h_t^m\} \\ (1 - \theta) \Delta t [\mathbf{K}_h] \{\gamma_w h_t^m\} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

ここで，上付きの n, m は，変位の自由度数および水頭の自由度数を表す．

3. 段階的解法の導入

(1) 従来の解法

連立一次方程式の数値解法は多数存在するが，本研究では一般的な直接法であるガウス消去法⁴⁾を従来の解法として用いる．今回は簡易的な比較を行うため，バンドマトリクス法²⁾などの記憶効率化手法は併用しないものとする．

(2) 段階的解法

式(2.9)を簡潔に表現するため，新たな文字を用いて以下のように表す．

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}]_{nn} & [\mathbf{G}]_{nm} \\ [\mathbf{J}]_{mn} & [\mathbf{H}]_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_n \\ \{h\}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\}_n \\ \{q\}_m \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

本研究で導入する段階的解法とは，未知ベクトルのうち，変位量を表す $\{u\}_n$ と間隙水圧を表す $\{h\}_m$ を全体剛性マトリクスを分離することで，順に求解する手法である．本研究では二種類の方法で段階的解法の定式化を行う． $\{u\}_n$ と $\{h\}_m$ はどちらを先に求めてもよいが，今回は $\{u\}_n$ を先に求める場合の式展開を説明する．

a) 段階的解法①の定式化

式(3.1)を以下のように分離すると，

$$[\mathbf{K}]_{nn} \{u\}_n + [\mathbf{G}]_{nm} \{h\}_m = \{f\}_n \quad (3.2)$$

$$[J]_{mn}\{u\}_n + [H]_{mm}\{h\}_m = \{q\}_m \quad (3.3)$$

左辺二項目の係数行列の逆行列および一般逆行列⁵⁾をそれぞれ両辺に乘じると,

$$[G^{-1}]_{mn}[K]_{nn}\{u\}_n + \{h\}_m = [G^{-1}]_{mn}\{f\}_n \quad (3.4)$$

$$[H^{-1}]_{mm}[J]_{mn}\{u\}_n + \{h\}_m = [H^{-1}]_{mm}\{q\}_m \quad (3.5)$$

式(3.4)と式(3.5)の差をとり, 間隙水圧の未知ベクトルを消去すると,

$$[[G^{-1}]_{mn}[K]_{nn} - [H^{-1}]_{mm}[J]_{mn}]_{mn}\{u\}_n = [G^{-1}]_{mn}\{f\}_n - [H^{-1}]_{mm}\{q\}_m \quad (3.6)$$

式(3.6)を解くことで変位量の未知ベクトルが求まる. また, その値を式(3.3.1)に代入することで, 間隙水圧の未知ベクトルが得られる.

b) 段階的解法②の定式化

段階的解法①と同様に式(3.1)を分離する. 次に, 式(3.2.2)のみ左辺二項目の係数行列の逆行列を両辺に乘じると式(3.7)が得られる.

$$[H^{-1}]_{mm}[J]_{mn}\{u\}_n + \{h\}_m = [H^{-1}]_{mm}\{q\}_m \quad (3.7)$$

式(3.7)を間隙水圧の未知ベクトルの式に整理し, 式(3.2)に代入すると,

$$[K]_{nn}\{u\}_n + [G]_{nm}([H^{-1}]_{mm}\{q\}_m - [H^{-1}]_{mm}[J]_{mn}\{u\}_n) = \{f\}_n \quad (3.8)$$

式(3.8)を整理すると,

$$[[K]_{nn} - [G]_{nm}[H^{-1}]_{mm}[J]_{mn}]_{nn}\{u\}_n = \{f\}_n - \{[G]_{nm}[H^{-1}]_{mm}\{q\}_m\}_n \quad (3.9)$$

が得られ, この連立方程式を解くことで, 変位量の未知ベクトルが求まる. また, その値を式(3.7)に代入することで, 間隙水圧の未知ベクトルが得られる.

4. 解析概要

本章では, 全体剛性方程式を従来の方法であるガウス消去法により求解した場合と段階的解法を用いて求解した場合のそれぞれの解と計算量を比較・検討するために, 一次元圧密の計算を行う.

(1) 解析方法

ガウスの消去法による解法, および第3章で導入した二種類の段階的解法を用いたプログラムを用いて, それぞれに初期過剰間隙水圧を与え, 間隙水圧の消散過程を計算した. 計算に用いたモデルは図1に示すような, 高さ10.0mの一次元的な地盤を対象とし, 各手法の解を比較した. さらに, 計算コストとしてプログラム処理時間を評価基準とし, 要素数を変化させながら計算コストの比較も行った.

(2) 解析条件

図1のとおり, 変位は1要素あたり3節点, 水頭は1要素あたり2節点である. また, 変位境界は上端のみ固定, 水頭境界は下端排水, 上端非排水とする. 線形弾性体を用いるため, 構成式は式(4.1)を得る.

$$\dot{\sigma}' = E: \dot{\epsilon} \quad (4.1)$$

解析パラメータは表 1 のように設定した.

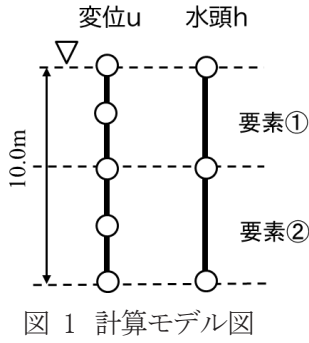


表 1 解析パラメータ(線形弾性体)

Initial excess pore water pressure P_w (kN/m ²)	100.0
Young's modulus E (Pa)	1.0E+06
Permeability coefficient k (m/sec)	1.0E-04
Unit weight of pore water γ_w (kN/m ³)	9.8

(3) 境界条件

段階的解法では, 逆行列および一般逆行列を多く用いる. その際, 対象とする行列がフルランク行列であるか否かが, 適切な逆行列・一般逆行列の計算に大きな影響を与える. そのため, 「全体剛性マトリクスの分離」と「境界条件の代入」の順序を適切に設定することが重要である.

a) 段階的解法①

2要素の場合(変位 5 節点, 水頭 3 節点)を仮定して, 全体剛性方程式を明記しその解法手順を説明する.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & G_{11}^1 & G_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 & G_{21}^1 & G_{22}^1 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{22}^2 & G_{31}^1 & G_{32}^1 + G_{11}^2 & G_{12}^2 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 & G_{21}^2 & G_{22}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & 0 & G_{31}^2 & G_{32}^2 \\ J_{11}^1 & J_{12}^1 & J_{13}^1 & 0 & 0 & H_{11}^1 & H_{12}^1 & 0 \\ J_{21}^1 & J_{22}^1 & J_{23}^1 + J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{13}^2 & H_{21}^1 & H_{22}^1 + H_{11}^2 & H_{12}^2 \\ 0 & 0 & J_{21}^2 & J_{22}^2 & J_{23}^2 & 0 & H_{21}^2 & H_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ q_1^1 \\ q_2^1 + q_1^2 \\ q_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

先に分離すると,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1 & 0 \\ G_{21}^1 & G_{22}^1 & 0 \\ G_{31}^1 & G_{32}^1 + G_{11}^2 & G_{12}^2 \\ 0 & G_{21}^2 & G_{22}^2 \\ 0 & G_{31}^2 & G_{32}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} J_{11}^1 & J_{12}^1 & J_{13}^1 & 0 & 0 \\ J_{21}^1 & J_{22}^1 & J_{23}^1 + J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{13}^2 \\ 0 & 0 & J_{21}^2 & J_{22}^2 & J_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 & 0 \\ H_{21}^1 & H_{22}^1 + H_{11}^2 & H_{12}^2 \\ 0 & H_{21}^2 & H_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 + q_1^2 \\ q_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

間隙水圧の未知ベクトル $\{h\}_m$ を消去する前に, 水頭境界条件を反映させるために, 間隙水圧の未知ベクトルのうち境界条件として与えられている項を右辺に移項し, 水頭境界条件を代入すると,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1 \\ G_{21}^1 & G_{22}^1 \\ G_{31}^1 & G_{32}^1 + G_{11}^2 \\ 0 & G_{21}^2 \\ 0 & G_{31}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{12}^2 \\ G_{22}^2 \\ G_{32}^2 \end{bmatrix} \{h_3\} \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} J_{11}^1 & J_{12}^1 & J_{13}^1 & 0 & 0 \\ J_{21}^1 & J_{22}^1 & J_{23}^1 + J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{13}^2 \\ 0 & 0 & J_{21}^2 & J_{22}^2 & J_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 \\ H_{21}^1 & H_{22}^1 + H_{11}^2 \\ 0 & H_{21}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 + q_1^2 \\ q_2^2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ H_{12}^2 \\ H_{22}^2 \end{bmatrix} \{h_3\} \quad (4.6)$$

を得る. この操作により, 式(4.5)および式(4.6)の左辺二項目の係数行列がフルランク行列となり, 一般逆行列が求まる. その後の計算手順については, 第3章で述べたとおりであり, 変位量の未知ベクトル $\{u\}_n$ を求解する際に, 変位境界条件を代入する.

b) 段階的解法②

段階的解法①と同様に要素数2の場合の計算モデルを用いて解法手順を説明する. 式(4.2)に変位境界条件と水頭境界条件を代入すると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 & G_{21}^1 & G_{22}^1 & 0 \\ 0 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{22}^2 & G_{31}^1 & G_{32}^1 + G_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 & G_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & 0 & G_{31}^2 & 0 \\ 0 & J_{12}^1 & J_{13}^1 & 0 & 0 & H_{11}^1 & H_{12}^1 & 0 \\ 0 & J_{22}^1 & J_{23}^1 + J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{13}^2 & H_{21}^1 & H_{22}^1 + H_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ q_1^1 \\ q_2^1 + q_1^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

となる. 全体剛性マトリクス of 行と列を入れ替えて, 既知数と未知数を分離すると,

$$\begin{bmatrix} K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 & G_{21}^1 & G_{22}^1 & 0 & 0 \\ K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{22}^2 & G_{31}^1 & G_{32}^1 + G_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & 0 & G_{21}^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & 0 & G_{31}^2 & 0 & 0 \\ J_{12}^1 & J_{13}^1 & 0 & 0 & H_{11}^1 & H_{12}^1 & 0 & 0 \\ J_{22}^1 & J_{23}^1 + J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{13}^2 & H_{21}^1 & H_{22}^1 + H_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ h_1 \\ h_2 \\ u_1 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ q_1^1 \\ q_2^1 + q_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

を得る. 解を求めるため, 未知数のみの剛性方程式をあらたにつくり, 剛性マトリクスを分離すると,

$$\begin{bmatrix} K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{22}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{21}^1 & G_{22}^1 \\ G_{31}^1 & G_{32}^1 + G_{11}^2 \\ 0 & G_{21}^2 \\ 0 & G_{31}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} J_{12}^1 & J_{13}^1 & 0 & 0 \\ J_{22}^1 & J_{23}^1 + J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{13}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 \\ H_{21}^1 & H_{22}^1 + H_{11}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 + q_1^2 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

が得られる. この操作により, 式(4.10)の左辺二項目の係数行列がフルランクとなり, 正方行列かつ正則行列であるといえるので, 逆行列が存在する. その後の計算手順は第3章で述べたとおりである.

5. 解析結果と考察

(1) 解の精度

以下に, 要素数10, 経過時間0.10日の場合における各節点の変位および間隙水圧の計算結果を示す. 従来の方法として用いたガウス消去法により得られた解を最適解とみなし, 新たに導入した段階的解法により

得られた解を比較した。

a) 段階的解法①

1 つ目の計算方法を用いて、以下の 2 つの手法を用いる。

(i) 先に変位量の解を求め、その解を用いて間隙水圧の解を求める

(ii) 先に間隙水圧の解を求め、その解を用いて変位量の解を求める

(i) の計算結果を図 2 と図 3 に示す。横軸は変位および水頭の節点番号を示し、縦軸は変位量[m]および間隙水圧[kPa]の解を表す。ここで、節点番号は計算モデルの上端を 0 とし、下端が最大節点番号である。

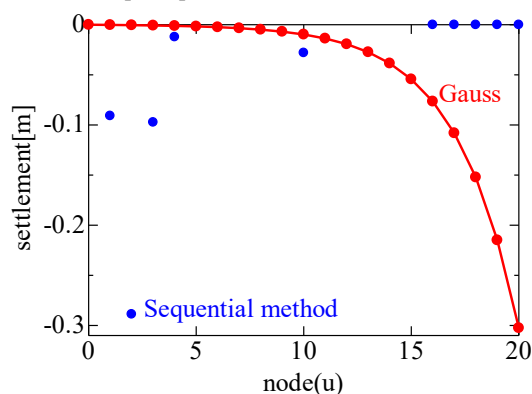


図 2 (i)各接点における変位量

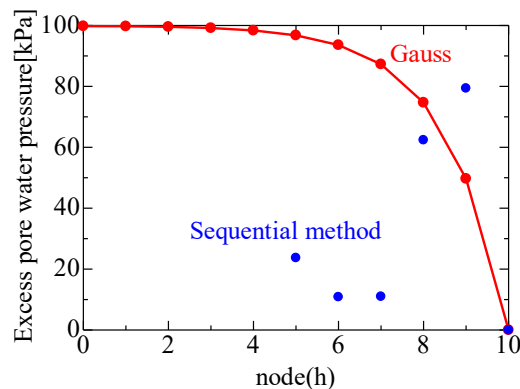


図 3 (i)各接点における間隙水圧

段階的解法で得られた結果が、変位および間隙水圧の双方において規則性を欠き、最適解から大きく乖離しており、適切な解を得られていない様子が見て取れる。

この原因として、変位量を求解する際に方程式の数と未知変数の数が一致していないことが挙げられる。具体的には、式(3.6)を参照すると、方程式の本数は m 本であり、未知変数の数は n 個である。 $m < n$ の関係であるため、未知変数に対する制約条件が不足しており、結果として解が一意に定まらない、あるいは不安定な解が得られる可能性が高いと考えられる。この制約条件の不足は、非正方行列に対して一般逆行列を求める過程において、係数行列の行数が減少することに起因すると考えられる。

同様に、(ii)の計算結果を図 4 と図 5 に示す。

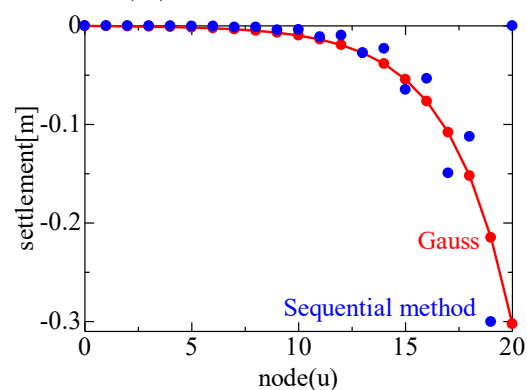


図 4 (ii)各接点における変位量

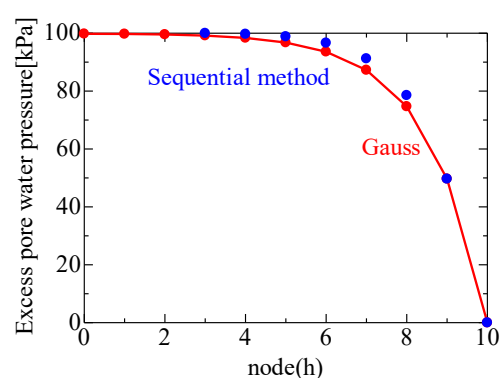


図 5 (ii)各接点における間隙水圧

(i)の結果と比較すると、(ii)の手法では最適解により近い解を得ることができたができたものの、完全には一致していない。

(ii)の手法は(i)の場合とは反対に、間隙水圧を求解する際に、未知数に対して制約条件が過剰となっていることが適切な解を得られなかった原因だと考えられる。

b) 段階的解法②

2 つ目の計算方法を用いて、以下の 2 つの手法を用いる。

(iii) 先に変位量の解を求め、その解を用いて間隙水圧の解を求める

(iv) 先に間隙水圧の解を求め、その解を用いて変位量の解を求める

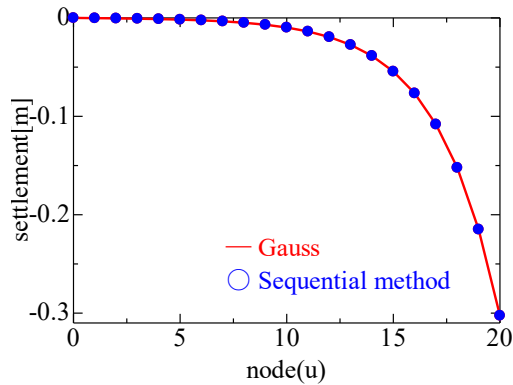


図 6 (iii)各接点における変位量

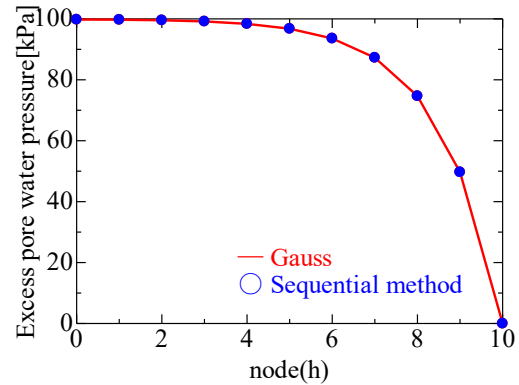


図 7 (iii)各接点における間隙水圧

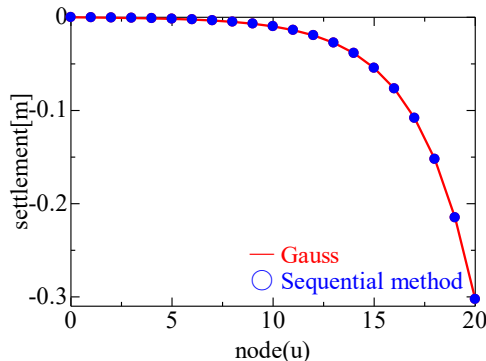


図 8 (iv)各接点における変位量

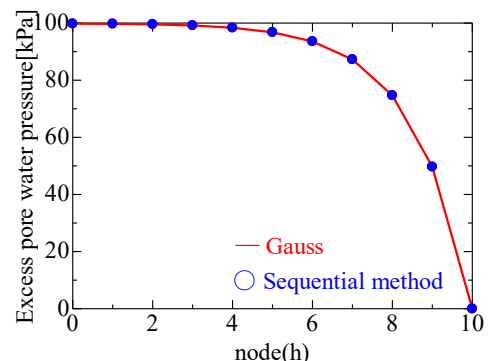


図 9 (iv)各接点における間隙水圧

(iii)と(iv)の計算結果を図 6 と図 7 および図 8 と図 9 にそれぞれ示す。どちらの手法も、変位および間隙水圧の双方について、ガウス消去法により算出された解と段階的解法②により算出された解が完全に一致していることが確認された。このことは、段階的解法②が本問題に対して数値的に妥当な解法であることを示唆しており、今後は、従来の計算方法と段階的解法②における計算コストを比較し、それぞれの効率性について検討を行う。

(2) 計算コスト

初期過剰間隙水圧を与えてから 0.10 日が経過するまでの変位分布および間隙水圧分布を求める際にかかるプログラム処理時間を計測した。計算モデルの要素数は 1 から 150 まで変化させ、要素数の変化に伴う処理時間の変化をグラフとして示した。

段階的解法②と従来の解法の処理時間を示したものが図 10 である。図 10 より、従来の解法が段階的解法よりも処理時間が短いことは明らかである。一方で、段階的解法の二つの手法を比較すると、(iii)の方が、処理時間が短い。これは、手法(iii)は手法(iv)より、サイズの小さい行列を逆行列の対象としているからだと考えられる。

これらの計算結果から、段階的解法②の手法(iii)の方が計算コストの削減に寄与していると考え、手法(iii)を基にして計算プログラムのさらなる効率化を目指す。

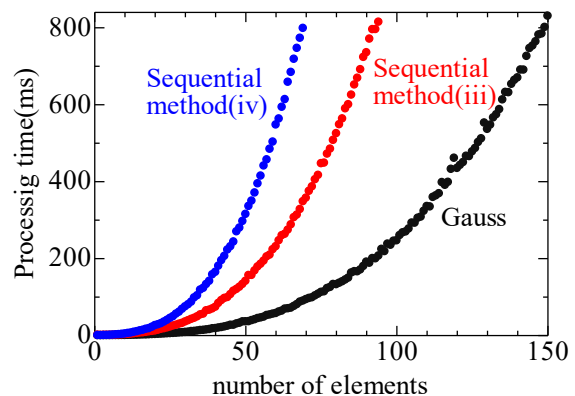


図 10 各要素数における計算処理時間

(3) 段階的解法の最適化

段階的解法が従来の解法に比べて計算コストが大きくなる原因として、逆行列を求める際に多くの計算時間を要している点が挙げられる。そこで、逆行列を求める効率的な方法を検討する。

説明のため、式を再掲する。

$$[J]_{mn}\{u\}_n + [H]_{mm}\{h\}_m = \{q\}_m \quad (3.3)$$

$$[H^{-1}]_{mm}[J]_{mn}\{u\}_n + \{h\}_m = [H^{-1}]_{mm}\{q\}_m \quad (3.7)$$

第2節で用いたプログラムでは、式(3.3)の左辺第二項の係数行列の逆行列を直接求めたのち、行列やベクトルの積を行っていた。そこで、式(3.3)から式(3.7)への変形の際に、逆行列を明示的に求めるのではなく、係数行列 $[H]_{mm}$ が正定値対称行列という特性を活かし、数値計算の効率化を図るためにコレスキー法⁹⁾を適用した。

コレスキー法を用いた計算手順を反映したプログラムでの処理時間を図 11 に示す。

これまでの結果と同様に、依然として従来の解法の方が計算処理時間は短い、図 10 に示された結果と比較すると、段階的解法の計算コストが大幅に削減されていることが分かる。

この結果から、逆行列の計算を明示的に行う方法から、コレスキー分解を活用した効率的な計算手法に切り替えたことで、段階的解法②の効率化が実現されたとみなせる。

さらに、従来の解法と段階的解法の双方の計算コストの差を明確にするため、次のように計算を行った。

(A) 従来の解法による計算処理時間の値

(B) 段階的解法②による計算処理時間の値

要素数ごとに(B)の値を(A)の値で割った値を計算コストの比率(ratio of computational time)とし図 12 に示す。

図 12 より、要素数の増加に伴い、計算コストの削減に寄与するものの、要素数が 250 程度から、計算コストの比率が 1.2 程度に収束していく様子が確認できる。このことから、要素数を 600 からさらに増加させても、段階的解法②の計算コストが従来の解法の計算コストを下回ることとはないと推測される。

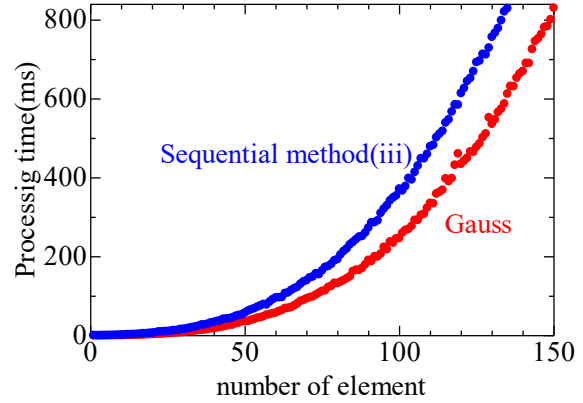


図 11 各要素数における計算処理時間

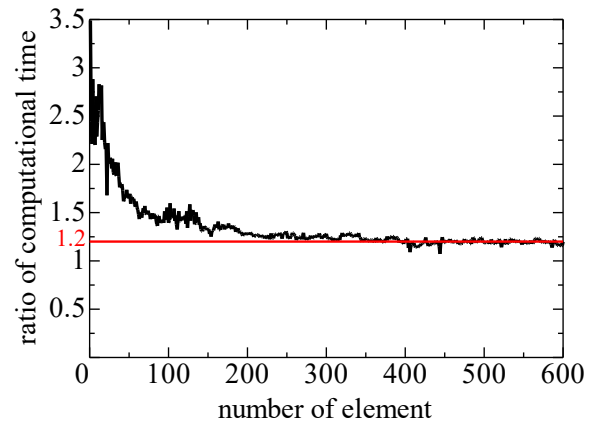


図 12 計算コストの比率

(4) 考察

今回導入した、段階的解法を用いて連立 1 次方程式を解く場合、解の精度は確保されたが、従来の解法よりも計算コストを削減することはできなかった。本節ではその原因を考察する。

計算コスト(計算処理時間)は演算回数⁷⁾に大きく影響されるため、従来の解法と段階的解法のそれぞれの演算回数について比較を行った。

ガウス消去法を用いた場合、一般に $n \times n$ 次の行列 A の演算回数は n^3 回である。今回用いた計算モデルは、変位の自由度数を n 、水頭の自由度数を m としており、全体剛性マトリクスのサイズは $(n + m) \times (n + m)$ 次であるため、

$$\text{従来の解法の演算回数} \quad (n + m)^3 \text{回}$$

である。

一方、段階的解法の演算回数について考える。段階的解法における式変形を再掲する。

$$[[K]_{nn} - [G]_{nm}[H^{-1}]_{mm}[J]_{mn}]_{nn}\{u\}_n = \{f\}_n - \{[G]_{nm}[H^{-1}]_{mm}\{q\}_m\}_n \quad (3.9)$$

式(3.9)ではコレスキー法を用いて逆行列を求めたあと、行列およびベクトルの乗算を行っている。一般的に

$n \times n$ 次の行列 A のコレスキー法の演算回数は、 n^3 回である。また、一般的に $n \times m$ 次の行列 A と $m \times p$ 次の行列 B の乗算の演算回数は、 $n \cdot m \cdot p$ 回である。これらを式(3.7)に適応すると、

$$\begin{array}{ll} [H^{-1}]_{mm}[J]_{mn} & m^3 + nm \text{ 回} \\ [H^{-1}]_{mm}\{q\}_m & m^2 \text{ 回 (コレスキー分解は一回でよい)} \\ [[G]_{nm}[H^{-1}]_{mm}[J]_{mn}]_{nn} & n^2 m \text{ 回} \\ \{[G]_{nm}[H^{-1}]_{mm}\{q\}_m\}_n & nm \text{ 回} \end{array}$$

また、式(3.9)の連立方程式を解く際の演算回数が n^3 回、変位量の解を代入して間隙水圧の解を求める際の演算回数が nm 回。したがって、支配的な項を整理すると、

$$\text{段階的解法の演算回数} \quad n^3 + n^2 m + m^3 \text{ 回}$$

以上より、従来の解法と段階的解法の総計算コストを比較すると、従来の解法では $O(2n^2 m)$ および $O(3nm^2)$ の項が加わるため、大規模問題においては段階的解法の方が計算コストを抑えられると推測される。

しかし、実際の計算処理時間は、段階的解法の方が長くなるという解析結果が得られた。そこで、演算回数と実際の演算時間の関係を明確化することを目的として、各ステップにおける計算処理時間を記録した。図 13 は段階的解法を反映したプログラムを用いて、要素数を 1 から 250、経過時間を 0.1 日として解析を行った際の各ステップにおける計算処理時間を示したものである。

ここで、各ステップは以下のように表す。

$$[[K]_{nn} - [G]_{nm}[H^{-1}]_{mm}[J]_{mn}]_{nn}\{u\}_n = \{f\}_n - \{[G]_{nm}[H^{-1}]_{mm}\{q\}_m\}_n \rightarrow n^3$$

$$[H^{-1}]_{mm}[J]_{mn} \rightarrow m^3$$

$$[[G]_{nm}[H^{-1}]_{mm}[J]_{mn}]_{nn} \rightarrow mn^2$$

一般に演算回数の観点からは $n^3 > mn^2 > m^3$ の関係が成立する。しかし、図 13 を参照すると、実際の計算処理時間は $O(mn^2) > O(n^3) > O(m^3)$ となっており、演算回数の大小関係が計算処理時間の大小関係と一致していないことが分かる。この結果からも、計算コストの増加には演算回数以外の要因が関与していると考えられる。

特に、段階的解法では複数の式変形を経て解を導く過程が存在する。この過程で、式変形の途中で生じる計算結果(行列など)をコンピュータ内に記憶しておく必要があり、メモリ使用量が増大する。その結果、全体剛性マトリクスを分離することで個々の演算回数は削減される一方で、メモリアクセスの頻度増加やキャッシュ効率の低下が生じ、計算コストの増加につながっていると推測される。

6. 結論

本研究では、全体剛性方程式を従来の方法であるガウス消去法により求解した場合と段階的解法を用いて求解した場合のそれぞれの解および計算コストを比較、検討するために、一次元圧密問題の解析を行った。その結果、第 3 章で導入した 2 種類の段階的解法のうち、段階的解法②の手法では適切な解を得ることができ、問題を解決するうえで有効的であることが確認された。

一方で、段階的解法②の計算処理時間は従来の解法よりも長く、計算コストの削減には至らなかった。この要因として、段階的解法において複数回の式変形を行うことによる計算負荷の増大が挙げられる。しかし、演算回数自体は従来の解法よりも削減されていると推察されることから、計算過程の効率化や計算プログラムの改良を施すことで、さらなる計算コストの低減が期待される。

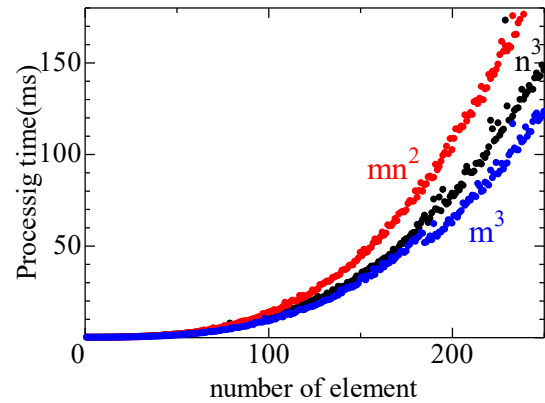


図 13 各ステップにおける計算処理時間

参考文献

- 1) 石井建樹, 只野裕一, 加藤準治, 車谷麻緒:例題で学ぶ連続体力学, 森北出版株式会社, 2016.
- 2) 社団法人地盤工学会:地盤技術者のための FEM シリーズ①, はじめて学ぶ有限要素法, 丸善出版株式会社, 2003.
- 3) 内山知実:Java による連続体力学の有限要素法, 森北出版株式会社, 2001.
- 4) 日本機械学会編:流れの数値シミュレーション, コロナ社, 1988.
- 5) 川口健一:一般逆行列と構造工学への応用, コロナ社, 2011.
- 6) 河村哲也:理工系の数学教室 5, 線形代数と数値解析, 株式会社朝倉書店, 2005.
- 7) 森 正武:朝倉現代物理学講座7, 数値解析法, 株式会社朝倉書店, 1984.
- 8) 北野井智希:マルチフィジックスにおける分離型解法の収束性, 修士論文, 神戸大学大学院工学研究科市民工学専攻, 2020.
- 9) 片山剛之丞, 内藤圭一郎, 長野裕二, 鈴村文寛:マトリクス分割法による有限要素法の分割処理について(トラス構造物への適用について), 機械学会論文集, 61-586, pp160-165, 1995.

筆者:1) 倉知 万依, 工学部市民工学科, 学生;2) 橘 伸也、都市安全研究センター, 教授;3) 竹山 智英, 工学研究科市民工学専攻, 教授

Sequential solution of the overall stiffness equation for the coupled soil/water finite element method

Mai Kurachi
Shinya Tachibana
Tomohide Takeyama

Abstract

The objective of this study is to propose sequential solution for the finite element method for the overall stiffness equation and to compare the accuracy and computational cost of the solution with those of conventional methods, and to investigate its superiority. This study focuses on one-dimensional soil/water coupled problems. In general, the overall stiffness matrix becomes very large as the number of governing equations increases and the number of elements in the analyte increases. Therefore, we aimed to reduce the computational cost by separating the overall stiffness matrix and solving each type of unknown variable separately. As a result, the analysis using sequential solution confirmed the validity of the solution, but did not result in a reduction in computational cost.

©2025 Research Center for Urban Safety and Security, Kobe University, All rights reserved.