



多変数大久保型微分方程式について（超幾何学校講義録その4）

加藤，満生
小川原，弘士

(Citation)

Rokko Lectures in Mathematics, 28:1-17

(Issue Date)

2025

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/0100497589>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100497589>



多変数大久保型微分方程式について

加藤 満生 述*
小川原 弘士 記

9月4日 [1日目]

1 序論

多変数大久保型微分方程式について話します。まず、大久保型微分方程式は対角化可能な行列 T_0 と、定数成分の対角行列

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

により定義される以下の n 階常微分方程式のことを指します:

$$dY = B(x)dxY = -(xI_n - T_0)^{-1}B_\infty dxY \quad (1.1)$$

T_0 を対角行列とする方もいますが、ここでは B_∞ を対角化, normalize することにします。こういったものを大久保型微分方程式といいます。 B_∞ は、複素関数論での留数と同様に、 $x = \infty$ における留数行列を意味しています。実際、無限遠点 $x = \infty$ において $\xi = 1/x$ とおくと、

$$B(x)dx = (I_n - \xi T_0)^{-1}B_\infty \frac{d\xi}{\xi}$$

と変換され、 B_∞ は $B(x)$ の $x = \infty$ における留数行列

$$B_\infty = \text{Res}_{x=\infty}(B(x)dx) = \text{Res}_{\xi=0} \left((I_n - \xi T_0)^{-1}B_\infty \frac{d\xi}{\xi} \right)$$

となります。

今回は多変数を考えるので、 m 変数に大久保型微分方程式を拡張します。

$$dY = \left(\sum_{i=1}^m B^{(i)}(x_1, \dots, x_m) dx_i \right) Y \quad (1.2)$$

どの方向でもいいですが、ここでは x_m -方向には大久保型微分方程式となるものを構成します:

$$B^{(m)}(x_1, \dots, x_m) = -(x_m I_n - T_0(x_1, \dots, x_{m-1}))^{-1}B_\infty$$

*超幾何学校 2017(小樽) での講演

T_0 には変数 x_m が入らないものとし, B_∞ については常微分と同じく定数行列として考えます. この方程式が今回のテーマです.

Section 2 では Gauss の超幾何微分方程式や Appell F_1 微分方程式が多変数大久保型微分方程式の一部であることを示します. Section 3 では多変数大久保型微分方程式の一般論について話します. Section 4 では大久保型微分方程式とその平坦座標や, 一般化された WDVV 方程式などを話します. Section 5 では複素鏡映群をモノドロミー群にもつ微分方程式を構成します. この構成に色々試行錯誤しましたが, 多変数大久保型方程式や WDVV 方程式の概念を使うと, きれいに構成できることがわかり, それがこの研究をやる動機になっています. 時間があれば, Painleve VI の微分方程式との関連性についても話したいと思います.

2 Gauss の超幾何微分方程式と Appell F_1 微分方程式

この節では, Gauss の超幾何微分方程式や Appell F_1 微分方程式がたしかに多変数大久保型微分方程式となっていることを示します. この多変数大久保型微分方程式については, 琉球大学の真野先生や関口先生と一緒に研究していましたが, あまり classical な例というのを考えていませんでしたが, 佐々木先生からメールで Appell F_1 についてはどうなんでしょう? というのを聞かれて, 考えてみたところ結果が得られたのでここで話したいと思います.

2.1 Gauss の超幾何微分方程式

Gauss の超幾何微分方程式

$${}_2E_1(a, b, c; x) : x(1-x)y'' + (c - (1+a+b)x)y' - aby = 0 \quad (2.1)$$

を連立型にするため,

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ xy' \end{pmatrix}$$

を未知関数にした微分方程式になおします:

$$\begin{aligned} dY &= \begin{pmatrix} y' \\ xy'' + y' \end{pmatrix} dx = \left(-\left(\frac{c}{x} + \frac{1+a+b-c}{x-1}xy'\right) - \frac{ab}{x-1}y + y' \right) dx \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{ab}{x-1} & \frac{1-c}{x} - \frac{1+a+b-c}{x-1} \end{pmatrix} dx Y \\ &= \left\{ \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} - \frac{1}{x-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab & 1+a+b-c \end{pmatrix} \right\} dx Y \\ &= \left\{ \frac{1}{x} B_0 + \frac{1}{x-1} B_1 \right\} dx Y = B dx Y \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで $B dx$ の $x = \infty$ での留数行列は, $x = 1/\xi$ とおいて $\xi = 0$ の留数行列を求めればよいので, 計算すると

$$B_\infty = \text{Res}_{x=\infty}(B dx) = -B_0 - B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ ab & a+b \end{pmatrix}$$

となります. これは対角行列ではないので, このままでは大久保型にはなりません. したがって, B_∞ を対角化する必要があります. ところで,

$$T_0 = B_\infty B^{-1} + xI_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} (c-1 \quad 1)$$

とおくと, $B = -(xI_2 - T_0)^{-1} B_\infty$ となり, 方程式

$$dY = (Bdx)Y = \{-(xI_2 - T_0)^{-1} B_\infty dx\} Y$$

を得ます. B_∞ を対角化するため, $a \neq b$ として行列 $R = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ により

$$Y \rightarrow RY, \quad T_0 \rightarrow RT_0R^{-1}, \quad B_i \rightarrow RB_iR^{-1}, \quad B_\infty \rightarrow RB_\inftyR^{-1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

と置き換えると,

$$Y = \begin{pmatrix} xy' + ay \\ xy' + by \end{pmatrix}$$

に対する大久保型微分方程式

$$dY = (Bdx)Y = \{-(xI_2 - T_0)^{-1} B_\infty dx\} Y, \quad (2.3)$$

$$T_0 = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b+c-1 & a-c+1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$B_\infty = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

を得ます. (ただし, 上記の $Y \rightarrow RY$ に置き換えることによる微分方程式の変換のように, 正則な定数行列を左からかけて互いに変換される微分方程式を互いに同値ということにします.) Gauss の超幾何微分方程式が (同値を除いて) 大久保型微分方程式 (1.1) の形をしていることが確かめられました. ここで重要なのは Y の 1 行目と 2 行目の成分が a と b に関して対称な形に書かれていることです.

(聴講者) この例のように大久保型方程式に書き直すと, 必ず Y の対称性や T_0 がランク 1 になるといった特徴が現れるのですか?

今回はたまたまそうなったというだけで, m 変数のとき必ずこのようなランク 1 の形になるとは限りません. この例は T_0 が定数行列になるということを強調したかったわけです.

2.2 Appell F_1 微分方程式

次に, Appell の超幾何関数 $y = F_1(a, b, b', c; x_1, x_2)$ が満たす微分方程式 $E_1(a, b, b', c; x_1, x_2)$ を大久保型に書き直します. $E_1(a, b, b', c; x_1, x_2)$ は Pfaff 型で表した次の方程式が良く知られています: (例えば, Kimura, T: Hypergeometric functions of two variables, Tokyo Univ.

1973)

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ x_1 \partial_{x_1} y \\ x_2 \partial_{x_2} y \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$dY = (Ad \log x_1 + Bd \log x_2 + Cd \log(x_1 - 1) + Dd \log(x_2 - 1) + Ed \log(x_1 - x_2)) Y, \quad (2.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - c + b' & 0 \\ 0 & -b' & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 - c + b \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -ab & c - a - b - 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab' & -b' & c - a - b' - 1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b' & b \\ 0 & b' & -b \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

この微分方程式を $dY = BY = (B^{(2)}dx_2 + B^{(1)}dx_1)Y$ と置き, 変数 x_1 と x_2 についてまとめると,

$$B^{(1)} = \frac{A}{x_1} + \frac{C}{x_1 - 1} + \frac{E}{x_1 - x_2}, \quad B^{(2)} = \frac{B}{x_2} + \frac{D}{x_2 - 1} + \frac{E}{x_2 - x_1} \quad (2.11)$$

となります. B_∞ は留数行列なので, 先ほどと同様に

$$B_\infty = -B - D - E = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & -1 \\ 0 & b' & 0 \\ \mathbf{a}b' & 0 & \mathbf{a} + b' \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

となります. ここで, 太字で表した箇所は Gauss の超幾何微分方程式の場合における B_∞ に対応しています. また, B_∞ の 2 列目については対角化されている, と見るができます. 従って, B_∞ を対角化するための行列は

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b' & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{a - b'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a - b' & 0 \\ -b' & 0 & a \end{pmatrix}$$

を取ることができます. もちろん, 今回は Appell の F_1 だったからたまたま B_∞ が定数行列で対角化できたわけで, 一般の大久保型では定数行列で対角化できるわけではありません.

$$Y \rightarrow RY, \quad B^{(1)} \rightarrow RB^{(1)}R^{-1}, \quad B^{(2)} \rightarrow RB^{(2)}R^{-1},$$

と置き換えると,

$$Y = (x_2 \partial_{x_2} y + ay \quad x_1 \partial_{x_1} y \quad x_2 \partial_{x_2} y + b'y)^t$$

に対する微分方程式

$$dY = (B^{(2)}(x_1, x_2)dx_2 + B^{(1)}(x_1, x_2)dx_1) Y, \quad (2.13)$$

$$B^{(2)} = -(x_2 I_2 - T_0(x_1))^{-1} B_\infty, \quad (2.14)$$

$$T_0 = \frac{1}{a-b'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b' + c - 1 & a - b' & a - c + 1 \end{pmatrix} \\ + \frac{x_1}{a-b'} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & -a + b' & b \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$B_\infty = \begin{pmatrix} b' & & \\ & b' & \\ & & a \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$B^{(1)} = \frac{RAR^{-1}}{x_1} + \frac{RCR^{-1}}{x_1 - 1} + \frac{RER^{-1}}{x_1 - x_2} \quad (2.17)$$

を得ます. T_0 は変数 x_2 を含まず, この方程式は x_2 方向に大久保型となる 2 変数大久保型方程式になっています. 後で使うため, 以下を用意しておきます:

$$RAR^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a - b' & 0 \\ 0 & b' - c + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$RCR^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & a + b - c + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$RER^{-1} = \frac{1}{a-b'} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a - b' & -b \end{pmatrix} B_\infty \quad (2.20)$$

というわけで, 上記のように Gauss の超幾何微分方程式や Appell F_1 微分方程式を大久保型方程式に書き直せることが分かりました.

(聴講者) Lauricella の F_D は大久保型に書き直すことは可能ですか

まだ計算していないです. ようやく Appell F_1 について計算できたところです. 今までの計算の方針を変えなければ出来て当然, と思いますが, まだやってないです¹.

(聴講者) 大久保型にならない例はあるんでしょうか

Appell F_2 は F_1 と同じ singular locus を持ちますが, rank は 4 となるため, 直接的な書き換えはできません.

3 多変数大久保型微分方程式の一般論

一般論と書いてますが, 全て証明は constructive なもので, 存在証明みたいなものはありません. こういう風に計算すればできる, という形になっています.

¹この講義の後, 計算ができて, M.Kato, Okubo type differential equations derived from hypergeometric functions F_D , Kyushu Journal of Mathematics 95 (2021), 1-21 に結果が掲載されている.
<https://doi.org/10.2206/kyushujm.75.1>

以降, 簡単のために $(x) = (x_1, \dots, x_m)$, $(x') = (x_1, \dots, x_{m-1})$ と略記する. また, 行列 A の (p, q) 成分を $A_{p,q}$ と表記する. x_m 方向に大久保型で微分可能な rank n の微分方程式

$$dY = \left(\sum_{i=1}^m B^{(i)}(x) dx_i \right) Y, \quad (3.1)$$

$$B^{(m)} = -(x_m I_n - T_0(x'))^{-1} B_\infty, \quad (3.2)$$

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$h(x) = \det(x_m I_n - T_0(x')) = \prod_{i=1}^n (x_m - z_i(x')) \quad (3.4)$$

を考えます. $h(x', x_m)$ は x_m について n 次 monic な多項式で, 特異点の位置を表します. $h(x', x_m)$ の判別式 $\delta_h(x') = \prod_{i < j} (z_i(x') - z_j(x'))^2$ は恒等的には 0 でない (すなわち, generic な n 根を持つ) と仮定します. このとき $T_0(x')$ は対角化可能となります. 対角行列 B_∞ は定数行列で, 次の仮定をおきます:

$$\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \quad \lambda_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.5)$$

$\lambda_i = \lambda_j$ となる場合は仮定を満たします. たとえば Appell の F_1 では $B_\infty = \begin{pmatrix} b' & & \\ & b' & \\ & & a \end{pmatrix}$

でしたが, 1 行目と 2 行目の固有値は同じ値となっています. 等式 (3.2) より $h(x)B^{(m)}$ の各成分は x_m の高々 $n-1$ 次の多項式となるので, $B^{(m)}$ は部分分数分解することで

$$B^{(m)}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{B_j^{(m)}(x')}{x_m - z_j(x')} \quad (3.6)$$

の形で表せます. 実際, $T_0(x')$ を対角化して

$$T_0(x') = P(x') \begin{pmatrix} z_1(x') & & \\ & \ddots & \\ & & z_n(x') \end{pmatrix} P(x')^{-1}$$

とし, (3.2) に代入します. 行列 E_j を

$$(E_j)_{p,q} := \begin{cases} 1 & (p = q = j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義すると,

$$\begin{aligned} B^{(m)} &= -P(x') \begin{pmatrix} x_m - z_1(x') & & \\ & \ddots & \\ & & x_m - z_n(x') \end{pmatrix}^{-1} P(x')^{-1} B_\infty \\ &= -P(x') \left(\sum_{j=1}^n \frac{E_j}{x_m - z_j(x')} \right) P(x')^{-1} B_\infty \end{aligned}$$

と計算されます. 部分分数分解の係数を比較すると,

$$B_j^{(m)}(x') = -P(x')E_jP(x')^{-1}B_\infty \quad (3.7)$$

より

$$\sum_{j=1}^n B_j^{(m)}(x') = -B_\infty, \quad \text{rank}(B_j^{(m)}) = 1. \quad (3.8)$$

が成り立ちます. ここで, 今後

$$r_j = \text{tr}(B_j^{(m)})$$

とおき, $r_j \notin \mathbb{Z}$ を仮定します.

他の $B^{(1)}, \dots, B^{(m-1)}$ については次の補題が成り立ちます:

Lemma 3.1. $1 \leq i \leq m-1$ に対し $h(x)B^{(i)}(x)$ の各成分が x_m に関して多項式で, 方程式 (3.1), (3.2) が可積分と仮定する. このとき次が成り立つ:

1. x' の正則関数を成分とする $n \times n$ 行列 $\tilde{B}^{(i)}(x')$ ($1 \leq i \leq m-1$) と $\mathcal{E}(x')$ が存在して,

$$B^{(i)}(x) = -(x_m I_n - T_0(x'))^{-1} \tilde{B}^{(i)}(x') B_\infty + \frac{\partial \mathcal{E}(x')}{\partial x_i} \mathcal{E}(x')^{-1}, \quad (3.9)$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \mathcal{E}_{i,j}(x') = 0 \quad (3.10)$$

を満たす.

2.

$$T_0(x') = P(x') \begin{pmatrix} z_1(x') & & \\ & \ddots & \\ & & z_n(x') \end{pmatrix} P(x')^{-1}$$

をみたす正則行列 $P(x')$ に対し

$$\tilde{B}^{(i)}(x') = -P(x') \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1(x')}{\partial x_i} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial z_n(x')}{\partial x_i} \end{pmatrix} P(x')^{-1}, \quad 1 \leq i \leq m-1 \quad (3.11)$$

となる. 特に $P(x')$ で同時対角化されているため, $T_0(x'), \tilde{B}^{(1)}(x'), \dots, \tilde{B}^{(m-1)}(x')$ は可換である.

Proof. 1. の証明.

- $h(x)B^{(m)}(x)$ は

$$h(x)B^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{m,k}(x') x_m^k, \quad C_{m,n-1} = -B_\infty$$

と x_m の多項式に展開されます. ここで, $i \leq m-1$ に対しては $h(x)B^{(i)}(x)$ を

$$h(x)B^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{k_i} C_{i,k}(x') x_m^k$$

と展開したとき,

$$k_i > n \Rightarrow C_{i,k_i} = O$$

となることを示します. 実際, 可積分条件を書き下すと,

$$\frac{\partial B^{(i)}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial B^{(j)}(x)}{\partial x_i} + [B^{(i)}(x), B^{(j)}(x)] = 0$$

となります. この式に $h(x)^2$ をかけると,

$$h(x)^2 \frac{\partial B^{(i)}(x)}{\partial x_j} - h(x)^2 \frac{\partial B^{(j)}(x)}{\partial x_i} + [h(x)B^{(i)}(x), h(x)B^{(j)}(x)] = 0, \quad (3.12)$$

さらに

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (h(x)^2 B^{(i)}(x))}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial h(x)}{\partial x_j} h(x) B^{(i)}(x) - \frac{\partial (h(x)^2 B^{(j)}(x))}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} h(x) B^{(j)}(x) \\ & + [h(x)B^{(i)}(x), h(x)B^{(j)}(x)] = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

という式に変形します. $j = m$ として x_m の最高次 $x_m^{k_i+n-1}$ の係数を見ると,

$$(k_i + n)C_{i,k_i}(x') - 2nC_{i,k_i}(x') - [C_{i,k_i}(x'), B_\infty] = 0 \quad (3.14)$$

を得ます. ここで $k_i > n$ とすると, $(k_i - n)C_{i,k_i}(x') \neq O$ で, B_∞ の条件 $\lambda_p - \lambda_q \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ($p \neq q$) より $C_{i,k_i}(x') = O$ となります.

- 以下, $C_{i,n}(x') = B_\epsilon^{(i)}(x')$ と書くこととします. $j = m$ として (3.13) の x_m^{2n-1} の係数を見ると

$$[B_\epsilon^{(i)}(x'), B_\infty] = O$$

となります. 従って

$$\lambda_p \neq \lambda_q \Rightarrow B_\epsilon^{(i)}(x')_{p,q} = 0, \quad 1 \leq i \leq m-1 \quad (3.15)$$

を得る.

- $1 \leq i, j \leq m-1$ に対して, (3.13) の x_m^{2n} の係数 (x_m に関しては微分されていない) を取ると

$$\frac{\partial B_\epsilon^{(i)}(x')}{\partial x_j} - \frac{\partial B_\epsilon^{(j)}(x')}{\partial x_i} + [B_\epsilon^{(i)}(x'), B_\epsilon^{(j)}(x')] = O$$

を得ます. これは微分方程式

$$d\mathcal{E}(x') = \left(\sum_{i=1}^{m-1} B_\epsilon^{(i)}(x') dx_i \right) \mathcal{E}(x'), \quad (3.16)$$

すなわち

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x')}{\partial x_i} \mathcal{E}(x')^{-1} = B_\epsilon^{(i)}(x'), \quad 1 \leq i \leq m$$

の可積分条件となります. したがって方程式 (3.16) の解となる行列 $\mathcal{E}(x')$ が存在します. (3.15) より,

$$\lambda_p \neq \lambda_q \Rightarrow \mathcal{E}(x')_{(p,q)} = 0 \quad (3.17)$$

ととることが出来ます.

2. の証明.

上記の 1. の証明から,

$$\tilde{B}^{(i)}(x) = -(x_m I_n - T_0(x')) (B^{(i)}(x) - B_\epsilon^{(i)}(x')) B_\infty^{-1}$$

とおきます. このとき, 計算は省略しますが,

$$P(x')^{-1} T_0(x') P(x') = \text{diag}(z_1(x'), \dots, z_n(x'))$$

を満たす行列に対し

$$P(x')^{-1} \tilde{B}^{(i)}(x) P(x') = -\text{diag}\left(\frac{\partial z_1(x')}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial z_n(x')}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i \leq m-1$$

が成り立ちます. 従って特に $\tilde{B}^{(i)}(x)$ は x_m に依存しない x' の関数 $\tilde{B}^{(i)}(x')$ となります. $\square$

方程式 (3.1) は Lemma 3.1 の (3.9) により

$$Y \rightarrow \mathcal{E}^{-1} Y, \quad T_0 \rightarrow \mathcal{E}^{-1} T_0 \mathcal{E}, \quad \tilde{B}^{(i)} \rightarrow \mathcal{E}^{-1} \tilde{B}^{(i)} \mathcal{E}$$

と置き換えると, B_∞ は不変で, $\mathcal{E}$ -term をもたない ($\mathcal{E} = I_n$ の) 方程式

$$dY = \left(\sum_{i=1}^m B^{(i)}(x) dx_i \right) Y, \quad (3.18)$$

$$B^{(i)} = -(x_m I_n - T_0(x'))^{-1} \tilde{B}^{(i)}(x') B_\infty, \quad \tilde{B}^{(m)}(x') = I_n \quad (3.19)$$

という形の方程式に変換されます. この方程式 (3.18), (3.19) を (標準形) 多変数大久保型微分方程式と呼ぶことにします.

(聴講者) Gauss の超幾何微分方程式の場合における $\mathcal{E}$ はどのような形になっていますか

Gauss の場合は何もしなくても $\mathcal{E}$ -term をもたないことが分かります. Appell F_1 は明日 $\mathcal{E}$ -term があることを紹介したいと思います.

9月5日 [2日目]

Theorem 3.1. 多変数大久保型微分方程式 (3.18), (3.19) に対する可積分条件は次と同値:

$$\left[T_0(x'), \tilde{B}^{(i)}(x') \right] = O, \quad \left[\tilde{B}^{(i)}(x'), \tilde{B}^{(j)}(x') \right] = O, \quad 1 \leq i, j \leq m-1, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial T_0(x')}{\partial x_i} + \tilde{B}^{(i)}(x') + \left[\tilde{B}^{(i)}(x'), B_\infty \right] = O, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}^{(i)}(x')}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{B}^{(j)}(x')}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i, j \leq m-1. \quad (3.22)$$

Remark 3.1. B_∞ に対する条件 (3.5) より (3.22) は (3.21) から導かれることがわかる.

Example (Appell F_1 微分方程式). Appell F_1 微分方程式は前の (2.13) の形のように, x_2 -方向に大久保型微分方程式にすることが出来ました. Appell F_1 微分方程式に対し行列 $\mathcal{E}(x_1)$ を求めます. 補題 3.1 より $B_\epsilon^{(1)} = (\partial_{x_1} \mathcal{E}(x_1)) \mathcal{E}(x_1)^{-1}$ は $h(x) B^{(1)}(x)$ を x_2 に関し

て展開したときの x_2^3 の係数です. Appell F_1 微分方程式を大久保型に記述し直したときの式 (2.17) から

$$h(x)B^{(1)}(x) = \frac{h(x)RAR^{-1}}{x_1} + \frac{h(x)RCR^{-1}}{x_1 - 1} + \frac{h(x)RER^{-1}}{x_2 - x_1} \quad (3.23)$$

となります. ここで $h(x) = x_2(x_2 - 1)(x_2 - x_1)$ です. $RAR^{-1}, RCR^{-1}, RER^{-1}$ は定数行列のため, (3.23) での $h(x)B^{(1)}(x)$ の x_2^3 における係数は第1項と第2項から得られるので,

$$B_\epsilon^{(1)} = \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} 0 & a - b' & 0 \\ 0 & b' - c + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{x_1 - 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b & -a - b + c - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

となります. (2.16) において $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ という B_∞ の形になっていますので, (3.10) より

$$\mathcal{E}(x_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(x_1) & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

というブロック対角行列となり, 2×2 行列 $\mathcal{E}_1(x_1)$ は

$$\frac{d\mathcal{E}_1(x_1)}{dx_1} \mathcal{E}_1(x_1)^{-1} = \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} 0 & a - b' \\ 0 & 1 - c + b' \end{pmatrix} - \frac{1}{x_1 - 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a + b + 1 - c \end{pmatrix}$$

を満たします. ここで, Gauss の超幾何微分方程式は

$$dY = \left\{ \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 - c \end{pmatrix} - \frac{1}{x - 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab & 1 + a + b - c \end{pmatrix} \right\} Y$$

でした. $\mathcal{E}_1(x_1)$ の微分方程式とほとんど同じですが, Gauss の超幾何微分方程式として $\mathcal{E}_1(x_1)$ を記述するために, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a - b' \end{pmatrix}$ とおきます. このとき

$$\begin{aligned} \frac{d(Q\mathcal{E}_1)}{dx_1} (Q\mathcal{E}_1)^{-1} &= \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 - (c - b') \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{x_1 - 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (a - b')b & 1 + (a - b') + b - (c - b') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります. 従って Gauss の超幾何微分方程式 ${}_2E_1(a - b', b, c - b'; x_1)$ の一次独立な任意の解 $y_1(x_1), y_2(x_1)$ により $Q\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 \frac{d}{dx_1} y_1 & x_1 \frac{d}{dx_1} y_2 \end{pmatrix}$ と表され, $\mathcal{E}_1(x_1)$ は以下の超幾何解を用いて記述されます:

$$\mathcal{E}_1(x_1) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{x_1}{a - b'} \frac{d}{dx_1} y_1 & \frac{x_1}{a - b'} \frac{d}{dx_1} y_2 \end{pmatrix}$$

予告では, Painlevé VI 方程式の解について話つもりでしたが, 時間の都合上省略します. Appell F_1 微分方程式から得られる多変数大久保型微分方程式を用いて Painlevé VI 方程式の超幾何解が構成できます.

4 斉次大久保型微分方程式とその平坦座標, 一般化された WDVV 方程式

これから考える関数は weight を入れて全て斉次関数となるように設定します. 以降の話は n 変数の n 階の微分方程式, つまり $m = n$ とします. なぜなら, m を大きくして沢山

の変数を用意しても, 結局は (3.4) のように x_m について n 次多項式になっているため, n 変数であれば十分であるためです.

$V_1 = \sum_{i=1}^n w_i x_i \partial_{x_i}$ を Euler vector field とし, weight を

$$w_i > 0, \quad w_n = 1 \quad (4.1)$$

と設定します. また多変数大久保型微分方程式およびその解もすべて weighted homogeneous と仮定します. すなわち, 多変数大久保型微分方程式

$$\begin{aligned} dY &= \left(\sum_{i=1}^n B^{(i)}(x) dx_i \right) Y = T(x)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{B}^{(i)}(x') dx_i \right) B_\infty Y, \\ T(x) &= -x_n I_n + T_0(x'), \quad \tilde{B}^{(n)} = I_n \end{aligned}$$

において, $Y, B^{(i)}, T$ の各成分が weighted homogeneous とします.

Lemma 4.1.

1.

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \tilde{B}^{(i)} = -T, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i B^{(i)} = -B_\infty, \quad (4.3)$$

2.

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ならば $V_1 Y = -B_\infty Y$, すなわち

$$w(y_i) = -\lambda_i.$$

3.

$$w(B_{i,j}^{(k)}) = -w(x_k) - \lambda_i + \lambda_j, \quad w(T_{i,j}) = 1 - \lambda_i + \lambda_j, \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Proof. 1. の証明. T の成分は weighted homogeneous なので, 式 (3.11) より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i x_i \tilde{B}^{(i)} &= -P(x') \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial z_n}{\partial x_i} \end{pmatrix} \right) P(x')^{-1} \\ &= -P(x') \left(V_1 \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix} \right) P(x')^{-1} \\ &= -P(x') \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix} P(x')^{-1} = -T(x), \\ \sum_{i=1}^n w_i x_i B^{(i)} &= T^{-1} \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \tilde{B}^{(i)} \right) B_\infty = -B_\infty. \end{aligned}$$

2. の証明. 大久保型微分方程式 $\frac{\partial Y}{\partial x_k} = B^{(k)}Y$ より,

$$V_1 Y = \sum_{i=1}^n w_i x_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i B^{(i)} \right) Y = -B_\infty Y.$$

従って $V_1(y_i) = -\lambda_i y_i$, $1 \leq i \leq n$ を得る.

3. は 2. から従う. □

このように, weighted homogeneous と仮定すると, B_∞ から $Y, B^{(i)}, T$ の成分の weight が決定されます.

(3.22) より, $\partial_{x_i} C(x) = \tilde{B}^{(i)}(x')$, $1 \leq i \leq n$ を満たす weighted homogeneous な行列 $C(x)$ は一意に求められます. $\partial_{x_n} C(x) = I_n$ より $C(x) = x_n I_n + C'(x')$ という形に解けます. 更に 補題 4.1 の 1., 3. より

$$V_1 C(x) = -T(x), \quad w(C_{i,j}(x)) = 1 - \lambda_i + \lambda_j, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (4.4)$$

となります. 従って多変数大久保型微分方程式は行列 $C(x)$ により与えられ,

$$\begin{aligned} dY &= \left(\sum_{i=1}^n T(x)^{-1} \tilde{B}^{(i)}(x') dx_i \right) B_\infty Y, \\ &= -(V_1 C(x))^{-1} (dC(x)) B_\infty Y \end{aligned}$$

と書いてしまいます. このとき, 積分可能条件は次のようになります:

$$\left[\frac{\partial C(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial C(x)}{\partial x_j} \right] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

以上のことをまとめると, 次の定理として記述されます:

Theorem 4.1. *weighted homogeneous* な多変数大久保型微分方程式は $B_\infty = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, および $w(C_{i,j}(x)) = 1 - \lambda_i + \lambda_j$ となるような各成分が *weighted homogeneous* な行列 $C(x) = x_n I_n + C'(x')$ によって

$$dY = -(V_1 C(x))^{-1} (dC(x)) B_\infty Y \quad (4.5)$$

と決定される. この方程式の積分可能条件は

$$\left[\frac{\partial C(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial C(x)}{\partial x_j} \right] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (4.6)$$

で与えられる.

このような行列 $C(x)$ を取れば多変数大久保型微分方程式をつくることができますが, 定理の条件に合うような $C(x)$ を実際に見つけることは大変です. 何行目でもいいですが, 例えば行列 $C(x)$ の第 n 行が

$$\det \left(\frac{\partial (C_{n,1}(x), \dots, C_{n,n}(x))}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \right) \neq 0 \quad (4.7)$$

となるならば,

$$t_1 = C_{n,1}(x), t_2 = C_{n,2}(x), \dots, t_n = C_{n,n}(x)$$

を新たな座標関数として取ります. C を x の関数から t の関数としてみると,

$$C = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix}, \quad C = C(t)$$

となります. この座標 $(t_1, \dots, t_n)$ を多変数大久保型微分方程式 (4.5) に関しての平坦座標 (flat coordinate) と呼びます.

(聴講者) この定義における平坦座標は有名な方の平坦座標と同じですか?

そうです. 斎藤恭司先生の実鏡映群の理論で構成した平坦座標と一致して, なおかつ, この大久保型微分方程式は実領域に制限する必要はないので複素鏡映群の場合でも平坦座標が定義できる, というわけです.

$$C(x) = x_n I_n + C'(x)$$

より,

$$t_j = \begin{cases} t'_j(x'), & (j < n) \\ x_n + t'_n(x'), & (j = n) \end{cases}$$

の形をしています. この平坦座標のもとでは積分可能条件

$$\left[\frac{\partial C(t)}{\partial t_i}, \frac{\partial C(t)}{\partial t_j} \right] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

の第 n 行を見ると

$$\frac{\partial C_{i,k}(t)}{\partial t_j} = \frac{\partial C_{j,k}(t)}{\partial t_i}, \quad 1 \leq i, j, k \leq n$$

という形になっています. したがって, C は積分することができます.

$$\frac{\partial g_k(t)}{\partial t_i} = C_{i,k}(t), \quad 1 \leq i, k \leq n, \quad (4.8)$$

すなわち,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial t_n} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

となり, かつ

$$g_k(t) = \begin{cases} t_k t_n + g'_k(t'), & (k < n) \\ \frac{1}{2} t_n^2 + g'_n(t'), & (k = n) \end{cases} \quad (4.9)$$

を満たす weighted homogeneous な関数 $g_k(t)$ が一意に求まります. ベクトル $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)$ をこの多変数大久保型微分方程式の **potential vector** と呼びます. この potential vector $\vec{g}$ は行列 $C(t)$ で書かれ, 逆に $C(t)$ は potential vector $(g_1, \dots, g_n)$ により与えられます. したがって可積分条件 (4.6) も $g_k(t)$ に対する関係式で表すことができます. 実際,

$$\left[\frac{\partial C(t)}{\partial t_i}, \frac{\partial C(t)}{\partial t_j} \right] = 0$$

の (p, q) 成分は

$$\sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial^2 g_r}{\partial t_i \partial t_p} \frac{\partial^2 g_q}{\partial t_j \partial t_r} - \frac{\partial^2 g_r}{\partial t_j \partial t_p} \frac{\partial^2 g_q}{\partial t_i \partial t_r} \right) = 0 \quad (4.10)$$

となります.. この方程式 (4.10) を (4.9) を満たす斉次関数 $g_k(t)$ に対する一般化された **WDVV** 方程式という. 一般化された, というのは質問にあったように斉藤先生の実鏡映群の理論で WDVV 方程式がありましたが, 平坦座標が複素の場合に一般化されているので, ここでも一般化された WDVV 方程式と名付けることにします.

5 (有限かつ既約な) 複素鏡映群をモノドロミー群にもつ大久保型微分方程式

G を n 次元ベクトル空間 $U_n = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_i \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}_{(u_1, \dots, u_n)}^n$ に作用する有限既約複素鏡映群 $G \curvearrowright U_n$ とし, G による orbit space を

$$X = U_n/G = \{(x_1, \dots, x_n)\}$$

とかくと, この X も n 次元ベクトル空間になります. G には n 個の斉次 G -不変多項式 $F_i(u)$, $1 \leq i \leq n$ があり (不変式の基本形), 任意の G -不変多項式 $F(u)$ は $F_i(u)$ の多項式として表されます. x_i 達は U_n 上の関数ですが G 上不変なので, $x_1, \dots, x_n$ は不変式で書くことができます. F_i の次数を d_i とすると, $\{d_1, \dots, d_n\}$ は G によって決まります.

$$d_1 \leq \dots \leq d_n$$

とすることとします. また $w_i := d_i/d_n$ とし, $w(x_i) := w_i$ で weight を定義します. このとき $w(u_i) = 1/d_n$, $1 \leq i \leq n$ です.

以下 F_i を固定し, X 上の座標関数として $x_i = F_i(u)$, $1 \leq i \leq n$ をとります. G -quotient map $\pi_G : U_n \rightarrow X$ を

$$\pi_G(u) := x = (x_1, \dots, x_n), \quad \begin{array}{c} U_n \\ \downarrow |G|:1 \\ X \end{array}$$

で定義します. 定義から, この π_G は G の元の個数だけ branch があります. $\pi_G(u)$ の branch locus $D \subset X$ の (reduced) defining function $h(x)$ を G の判別式と呼びます. $h(x)$ は上の weight に関し斉次多項式となります.

以下 D を特異点集合とする大久保型可積分系で, G をそのモノドロミー群にもち, 行列 $T(x), C(x)$ の各成分が x の斉次多項式になるような大久保型微分方程式を構成していきます. そのためには, $h(x)$ が x_n につき n 次多項式である必要があります. そこで, 次の (少し強い) 仮定を置きます:

G の判別式 $h(x)$ は x_n に関して monic な n 次多項式である.

このような仮定を満たす群を **well-generated** な群ということにします.

Lemma 5.1. 次の条件を満たす多項式係数の斉次 vector field V_i , $1 \leq i \leq n$ が存在する.

- 1) $V_1 = \sum_{k=1}^n w_k x_k \partial_{x_k} : \text{Euler vector field,}$
- 2) $V_i = x_n \partial_{x_{n-i+1}} + \sum_{k=1}^n v_{i,k}(x') \partial_{x_k}$, $(v_{i,k}(x'))$ は x' の多項式 従って $w(V_i) = 1 - w_{n-i+1}$,
- 3) V_i は D に沿った *logarithmic vector field*, すなわち $(V_i h(x))/h(x)$ は多項式となる.

行列 $M_V(x), M_{\hat{V}}(u)$ を

$$\begin{pmatrix} V_n \\ V_{n-1} \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} = M_V(x) \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_n \\ V_{n-1} \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} = M_{\hat{V}}(u) \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \partial_{u_2} \\ \vdots \\ \partial_{u_n} \end{pmatrix}$$

により定義します. ここで, Lemma 5.1 より $M_V(x) = x_n I_n + (x' \text{の多項式})$ となります. 定義より

$$M_{\hat{V}}(u) = M_V(x) \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right)^{-1}$$

となります. $y(u)$ を $u_1, \dots, u_n$ の斉次一次関数とすると, 偏微分したのち外微分をかける
と O ですから,

$$\begin{aligned} O &= d \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \vdots \\ \partial_{u_n} \end{pmatrix} y(u) = dM_{\hat{V}}^{-1} \begin{pmatrix} V_n \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} y(u) \quad (\hat{Y} = \begin{pmatrix} V_n \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} y(u) \text{ とおく}) \\ &= M_{\hat{V}}^{-1} d\hat{Y} - M_{\hat{V}}^{-1} (dM_{\hat{V}}) M_{\hat{V}}^{-1} \hat{Y} \quad (\text{行列の積の微分}) \end{aligned}$$

となるので,

$$d\hat{Y} = (dM_{\hat{V}}) M_{\hat{V}}^{-1} \hat{Y} \tag{5.1}$$

となって, めでたく微分方程式ができました. ただしこのままでは大久保型微分方程式ではなくて, 無限遠点で対角行列になってなければいけません. つまり, $x_n = \infty$ での留数行列 B_∞ を対角化する必要があります. $R(0) = I_n$ をみたすある斉次上三角行列

$$R(x') = \begin{pmatrix} 1 & (x' \text{の関数}) & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

によって B_∞ を対角化することが出来て, $Y = R\hat{Y}$ に対する微分方程式

$$dY = d(R\hat{Y}) = \left(R(dM_{\hat{V}}) M_{\hat{V}}^{-1} + dR \right) R^{-1} Y \tag{5.2}$$

は斉次大久保型微分方程式になります. また,

$$w(Y_i) = w(\hat{Y}_i) = w(V_{n-i+1}) + w(y(u)) = 1 - w_i + \frac{1}{d_n}$$

より,

$$B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i = w_i - 1 - \frac{1}{d_i}$$

となります. $\hat{Y}, Y$ の第 n 成分を $\hat{Y}_n, Y_n$ とすると,

$$\hat{Y}_n = Y_n = V_1 y(u) = \frac{1}{d_n} y(u)$$

であるので, (5.1), (5.2) のモノドロミー群は G になり, 目的の大久保型微分方程式が得られたわけです.

以前, この有限既約複素鏡映群をモノドロミー群にもつ大久保型微分方程式を原岡先生と一緒に作ったときは大変な計算をして rank 3 のときに成功したと書いたわけですが, この構成方法なら rank 4 でも 5 でも計算機の性能が良ければ計算できるわけです.

(聴講者) potential vector が出てきましたが, primitive form などと関係ありますか

primitive form とは直接関係ないと思います. 単に potential vector の偏微分で大久保型微分方程式を与える行列 $C(t)$ が書けるので, potential と名付けました.

(聴講者) 斉藤先生の話とこの話はどのようにつながっていますか

斉藤先生が大久保型方程式を作ったわけではなくて, 真野先生の話では orbit space の上に bilinear form があって, それを大久保型方程式というのだそうですが, 今回の場合は大久保型微分方程式から bilinear form がすぐ作れて, 実鏡映群の場合に一致するというわけです. もちろん実鏡映群は複素鏡映群の一部なわけですから, 複素鏡映群にたいして大久保型微分方程式を作れば, 実の場合でも大久保型方程式を作れているわけです.

(聴講者) Shephard-Todd のリストのどこまで作れたのですか

私の計算機では rank 3 と rank 4 の途中です. rank 6 などは恐ろしく高性能な計算機を使えばできるかもしれません.

(聴講者) 計算のネックはどこにあるんですか. たとえば, 多項式行列の逆行列とかの計算が大変になりますか.

途中に出てきた行列の積とか, $x_1, \dots, x_n$ の有理式ではなくて $u_1, \dots, u_n$ の有理式で出発してますから, u の有理式が G 不変だから x で書ける, という風にして

(聴講者) 消去法の計算が激しくなるわけですね

ええ. x に直す前は u の巨大な有理式になるわけです.

(聴講者) 消去法をもうちょっと考える必要があるんですね

G 不変なものを $x_1, \dots, x_n$ で書くということは, 対称式を基本対称式で書くことと同じようなことです. 対称式が基本対称式で書けるか, という問題は誰も難しいとは言わないですが, 具体的に書き下せと言われたら大変というだけです.

(聴講者) 群の不変式や生成系 $x_1, \dots, x_n$ の取り方で標準形の大久保型微分方程式が変わってきますか

方程式を平坦座標に直したら生成系によらず同じ大久保型微分方程式になります.

9月6日 [演習 (モノドロミーについて)]

有限既約複素鏡映群 G の作用を $G \curvearrowright U_n = \mathbb{C}_{(u_1, \dots, u_n)}^n$ とすると, $g(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n)M_g$ と $n \times n$ 行列 M_g で表現されます. ここで, G -quotient map $\pi : U_n \rightarrow X = U_n/G$ は $|G|:1$ でした.

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} V_n y(u) \\ \vdots \\ V_1 y(u) \end{pmatrix}$$

と置きます. ここで,

$$V_1 = \sum_{i=1}^n w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad V_1(u_i) = \frac{1}{d_n} u_i.$$

したがって, $V_1 y(u) = cy(u)$ となります. 今, $\hat{Y} \rightarrow R(x')\hat{Y} = Y$ とおくと,

$$R(x') = \begin{pmatrix} 1 & (x' \text{の多項式}) \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{の形のため} \quad Y = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ cy(u) \end{pmatrix}$$

と一番下の成分は変わりません.

ここで Y についての大久保型微分方程式 $dY = BY = (\sum_i B^{(i)} dx_i) Y$ において, 基本解系 Φ を

$$\Phi = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * \\ cu_1 & cu_2 & \cdots & cu_n \end{pmatrix},$$

と取ります. 基本解 Φ を path γ に沿って解析接続すると, $\gamma_* \Phi = \Phi M_\gamma$ となりますが, 一番下の行をみると

$$\gamma_*(cu_1, \dots, cu_n) = cg(u_1, \dots, u_n) = c(u_1, \dots, u_n)M_g$$

となっています. したがって

$$(u_1, \dots, u_n)M_\gamma = (u_1, \dots, u_n)M_g$$

となり, $M_\gamma = M_g$. したがって, 確かに与えられた G が大久保型微分方程式のモノドロミー群になっています.