



Milnor-Witt 理論にもとづく向きづけられた交点数 の初等的計算例

中田, 雅之

(Citation)

研究紀要 : 神戸大学附属中等 論集, 10:7-12

(Issue Date)

2026-03-31

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/0100502604>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100502604>



Milnor–Witt 理論にもとづく向きづけられた交点数の初等的計算例

中田 雅之

概要

In this paper, we discuss oriented intersection computations in light of recent developments in Milnor–Witt theory and Chow–Witt groups, using explicit calculations on the projective plane $\mathbb{P}^2$ over a field of characteristic not equal to 2. Beginning with elementary examples, we see how the relative orientability of the associated vector bundle affects the resulting local index in the Grothendieck–Witt group. Next, we explain how the twist naturally appears in the framework of Chow–Witt groups. We also observe that transfers associated to field extensions help us to compute Euler numbers when not all closed points are defined over the base field. Although no new general results are presented, these computations clarify the relationship between classical Chern class calculations in Schubert calculus and their refined counterparts in Chow–Witt theory.

Keywords: Milnor–Witt K -theory, Chow–Witt groups, oriented intersection theory, oriented Schubert calculus, Chow–Witt Euler number, $\mathbb{A}^1$ -homotopy theory

1 はじめに

Hilbert の第 15 問題としても有名な Schubert 計算は、複素 Grassmann 多様体上の幾何学的な数え上げの問題を、Grassmann 多様体の Chow 環上に定義される Chern 類を用いて計算する理論として発展してきた [3]. その計算は、幾何学的な条件を組合せ論的な情報に落とし込んで行われる. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 3 次元射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ における一般の位置にある 4 本の直線に同時に交わる直線が 2 本存在することを示す計算や、同じく $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ における 3 次曲面が 27 本の直線を含むことを示す計算などが有名である.

一方で、 $\mathbb{C}$ 上で考察するだけでは見えてこない幾何学的な性質に着目したいこともある. 例えば、実数体 $\mathbb{R}$ 上の幾何学的な捩れは、 $\mathbb{C}$ 上に引き戻すと見えなくなってしまう. Bézout の定理は、複素 2 次元射影空間における代数曲線の交点数についての統一された理論を与えるが、 $\mathbb{R}$ 上の交点数は曲線に依存して変化するため、より複雑である [7]. 近年、 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論とそれを基礎とする Chow–Witt 環や Milnor–Witt K 理論の発展により、これらの事情を精密に扱う枠組みが整備されてきた [8]. これらの理論では、Euler 数は整数ではなく Grothendieck–Witt 環の元として定義され、向きや体の拡大に関する情報が統一的に記述される. 特に、Scharlau トランスファーは、体の拡大に伴って現れる交点の寄与を二次形式として捉える役割を果たす.

本稿の趣旨は、これらの最近の数え上げ幾何学の進展をさらに推し進めるような新たな定理を与えることではない. 体上の射影平面 $\mathbb{P}^2$ における極めて基本的な計算例を与えることを通して、新たな理論が古典的な Schubert 計算の枠組みをどのように精密化させているのかを示すことを目的としている. 特に、代数的サイクルや Schubert 計算について聞いたことがあるが、空間の捩れといった位相幾何学的な性質には必ずしも馴染みのない読者を念頭に、古典的な Schubert 計算がいかなる形で精密化されるのかを、例を通して追体験できることを目指す.

2 古典的 Schubert 計算

本節では、後の議論に必要となるいくつかの基礎的な事実を復習する. 以下、 $\mathbf{k}$ を標数が 2 とは異なる体とし、 $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n = \text{Proj } \mathbf{k}[x_0, \dots, x_n]$ を $\mathbf{k}$ 上定義された n 次元射影空間とする.

2.1

射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$ 上には、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n}$ 加群のよく知られた Euler 完全列

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n}^1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n}(-1)^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n} \longrightarrow 0$$

が存在する. $\text{Pic}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n) \cong \mathbb{Z}$ であることより、この完全列から、行列式束としての同型

$$\omega_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n} = \det \Omega_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n}^1 = \bigwedge^n \Omega_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n}^1 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n}(-n-1)$$

が得られる。

2.2

本稿では、射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ 上での計算を行う。

$\mathbb{P}_k^2$ 上の直線束の同型類全体はテンソル積に関して Abel 群をなし、Picard 群 $\text{Pic}(\mathbb{P}_k^2)$ と呼ばれる。特に、 $\text{Pic}(\mathbb{P}_k^2)$ は $\mathbb{Z}$ と同型であることが知られている。その生成元 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)$ に対し、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(m) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)^{\otimes m}$ ($m < 0$ のときは、双対束のテンソル積) が成り立つ。 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)$ の第 1 Chern 類を $h \in \text{CH}(\mathbb{P}_k^2)$ と表すとき、これらの直線束の第 1 Chern 類は $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(m)) = mh$ ($h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1))$ は $\text{CH}^1(\mathbb{P}_k^2) \cong \text{Pic}(\mathbb{P}_k^2)$ の生成元) と表される。

$\mathbb{P}_k^2$ 上の平面束 E に対し、一般の位置にある切断 $s: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow E$ の零点の個数は、第 2 Chern 類

$$c_2(E) \in \text{CH}^2(\mathbb{P}_k^2) \cong \mathbb{Z}$$

によって与えられる。

特に、本稿で扱う $\mathbb{P}_k^2$ 上の直線束の直和 (Whitney 和) については、

$$c_2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(m_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(m_2)) = m_1 m_2 h^2$$

が成り立つ。両辺を $\mathbb{P}_k^2$ 上で積分すると、

$$\int_{\mathbb{P}_k^2} h^2 = 1$$

により、平面上の交点数に関する Bézout の定理が得られる。

2.3

以下では、 $\mathbb{P}_k^2$ 上の 2 つの曲線の交点を、平面束の切断の零点として捉える。直線束の切断の零点の逆像が、 $\mathbb{P}_k^2$ 上の曲線を与えることに注意する。曲線については、直線と二次曲線を取り上げる。対応する平面束として

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1), \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(2)$$

を考える。

古典的な Schubert 計算の立場では、前節 2.2 で述べたことによれば、両者の違いは交点数が 1 か 2 というところに尽きる。しかし、以下の節で論じるように、両者の間には位相幾何学的な側面からは本質的な差異がある。そして、その差異は Chow–Witt 理論の枠組みにおいて自然な形で説明される。

3 射影平面における直線の交点と向き

本節では、射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ における 2 本の直線の交点という平易な例を通して、射影平面上の切断の成分の入れ

替えが Jacobian の値に与える影響について具体的にみる。この現象自体は初等的な計算であるが、後に述べる Chow–Witt 理論における向きの概念を理解する上で重要である。

本節では、 $\mathbb{P}_k^2$ の斉次座標を $[x:y:z]$ で表す。

3.1

$\mathbb{P}_k^2$ 上の 2 本の直線を考える：

$$f_1(x, y, z) = x - y, \quad f_2(x, y, z) = y.$$

これらの直線はそれぞれ、 $\mathbb{P}_k^2$ 上の直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)$ の切断を与えている。

直線 f_1, f_2 は、 $p = [0:0:1]$ を交点にもつ。この交点 $p \in \mathbb{P}_k^2$ は、 f_1 と f_2 を直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)$ の切断と見たときの共通零点を与える。

アフィン開集合 $U_z = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}_k^2 \mid z \neq 0\}$ 上では、

$$u = \frac{x}{z}, \quad v = \frac{y}{z}$$

によって、ベクトル束の局所自明化による切断の表示

$$f_1(u, v) = u - v, \quad f_2(u, v) = v$$

が与えられる。 $U_z \cong \mathbb{A}_k^2$ であり、局所座標 (u, v) において、共通零点 p は $(0, 0)$ に対応する。

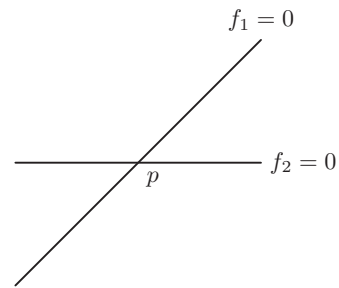


図 1 局所座標 U_z における切断 f_1, f_2 の零点の様子

3.2

本節では、 $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)$ とする。 E の階数は 2 であり、 $\mathbb{P}_k^2$ の次元、すなわち $\mathbb{P}_k^2$ の接束 $T_{\mathbb{P}_k^2}$ の階数と一致している。

E の切断 $s_1 = (f_1, f_2)$ の共通零点 p における Jacobi 行列を計算する。アフィン開集合 U_z における局所座標 (u, v) を用いると、

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって、Jacobian の値は 1 である。

同様にして、切断の成分を入れ替えた切断 $s_2 = (f_2, f_1)$ の Jacobi 行列を、局所座標を用いて計算すると

$$\frac{\partial(f_2, f_1)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となり、Jacobian の値は -1 となる。

ここまでで、切断の成分の順序の選び方によって、Jacobian の値が変化することを見てきた。本節で計算した Jacobi 行列は、 p におけるファイバーの間の射 $T_{\mathbb{P}_k^2, p} \rightarrow E_p$ の (局所座標 (u, v) から導かれる標準的な基底による) 行列表示を与えている。Jacobian の値は、点 p の周りでの局所的な「ベクトル束 E が接束 $T_{\mathbb{P}_k^2}$ から捻られている度合い」を示すと考えられる。よって、この例は、切断の成分の順序の選び方がファイバーの間の射 $T_{\mathbb{P}_k^2, p} \rightarrow E_p$ の捻り具合に影響を与えることを示唆する。

3.3

ここまで考察してきた切断の共通零点における Jacobian の符号の違いは、位相幾何学的には「(局所的な) 向き」としての意味をもつ。しかし、古典的な Schubert 計算の枠組みにおいては、この「向き」の情報は捨てられる。

実際、2.2 節で論じたように、平面束 $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)$ の切断の共通零点の個数は、Chern 類の計算から 1 であり、この結果には切断の順序による Jacobian の値の違いは反映されない¹⁾。純粋に直線の交点を数える上では、そもそも 2 直線の間に順序をつけること自体が情報過多であると解釈することもできよう。Chern 類を用いた交点数の計算は、このように幾何学的な情報を適切に捨て去ることと、安定した整数値を与えている。

一方で、ここで観測された Jacobian の値の違い、特に符号が反転している現象もまた、 $\mathbb{P}_k^2$ の幾何の顕れである。のちに述べるように、この現象は、ベクトル束 E の向きづけが大域的には破綻することの局所的な反映である。このような「向き」の情報を精密に扱うためには、ベクトル束の切断の零点について、その符号を含む Euler 数を、単なる整数値としてではなく、より精緻な不変量として捉える必要がある。

4 向きづけ不可能性と直線束による捻り

前節では、ベクトル束の切断における Jacobian の値、特に符号の変化が接束のファイバーからの射の捻り具合を反映していることを見た。本節では、この現象がベクトル

1) 切断の取り替えの前後で、直線は有理同値であり、その意味で交点は変化しない。

束の向きづけに関する障害として自然に説明されること、そしてその障害を正確に捉えるために Chow–Witt 群の振れが不可避であることを見る。

4.1

一般に、次元が n の滑らかな多様体 X 上の階数 n のベクトル束 E に対し、切断の零点に対する Euler 数を与えるためには、いわゆる**相対的向きづけ**が必要となる。これは、

$$\det E \otimes \omega_X$$

が直線束の平方で表されることとして定式化される [6]。

この条件が満たされると、局所的な Jacobian の情報をたし合わせることで大域的な不変量を定義することが可能となる [5]。逆に、この条件が破れると、局所的な捻りの情報は、局所自明化の形に依存して変動する。

4.2

3 節では、 $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)$ の切断の Jacobian の値について考察し、Jacobian が $\mathbb{P}_k^2$ の接束からの捻られた度合いを反映することを確認した。この例を、相対的向きづけの観点から見直してみよう。

$\det E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(2)$, $\omega_{\mathbb{P}_k^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(-3)$ である。ゆえに、

$$\det E \otimes \omega_{\mathbb{P}_k^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(-1)$$

である。 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(-1)$ は $\text{Pic}(\mathbb{P}_k^2)/2$ において非零である。したがって、ベクトル束 E は相対的向きづけ可能ではないといえる。

相対的向きづけ可能でないことが、3 節で観察した Jacobian の値のずれを説明する。切断の順序を入れ替える操作は、 $\det E$ の局所自明化にその置換の符号を掛ける操作に対応する。相対的向きづけ可能でないとき、この局所的な操作が大域的には噛み合わなくなるのである。

4.3

接束から捻られたベクトル束に対しても、局所的な交点の情報を汲み上げるためには、その捻りを吸収する直線束を係数として添加すればよい。2 直線の交点を与えるベクトル束 E の切断の零点のクラスは、**捻られた Chow–Witt 群**

$$\widetilde{\text{CH}}^2(\mathbb{P}_k^2, \det E^\vee \otimes \omega_{\mathbb{P}_k^2}^\vee)$$

の元として定義される。

Chow–Witt 群は、Milnor–Witt K 理論から定義される Gersten 型の複体の複体のコホモロジーによって定義され

る. そして, Milnor–Witt K 理論に直線束の捻りをテンソルすることで, 捻られた Chow–Witt 群が得られる [2]. Chow 群が Milnor K 理論によって同様の手順で得られることから, Chow–Witt 群は Chow 群の $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論的な精密化であると理解できる. 特に, 余次元 0 の Chow–Witt 群は関数体の Grothendieck–Witt 環であり, 古典的な位相幾何学における向きを精密化したものである [8].

3 節の例では,

$$\det E^\vee \otimes \omega_{\mathbb{P}_k}^\vee \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(1)$$

であるから, 2 直線の交点のクラスは $\widetilde{\mathrm{CH}}^2(\mathbb{P}_k^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(1))$ に属する.

このように, Chow–Witt 群は古典的な Chow 群に対し, ベクトル束の捻りを精密にみることによって位相幾何学的な情報を取り込む枠組みを提供している.

5 向きづけ可能な計算例

3 節では, $\mathbb{P}_k^2$ 上の 2 本の直線の交点が相対的向きづけ可能でないベクトル束の切断の零点として現れる例を見た. 本節では, 相対的向きづけが可能な例を取り上げ, Euler 数が矛盾なく定義されることを確認する.

5.1

射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ 上で, 3 節で考察した直線 f_2 に加えて, 二次曲線

$$f_3(x, y, z) = x^2 - yz - z^2$$

を考える. この二次曲線は, 局所自明化 U_z 上では, 座標 (u, v) を用いて

$$f_3(u, v) = u^2 - v - 1$$

と表される放物線である. 直線 f_2 と二次曲線 f_3 は, $q_1 = [1 : 0 : 1]$, $q_2 = [-1 : 0 : 1]$ の 2 点で交わる.

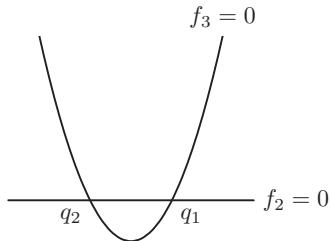


図 2 局所座標 U_z における切断 f_2 , f_3 の零点の様子

直線 f_2 は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(1)$ の切断, 二次曲線 f_3 は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(2)$ の切断を与える.

ベクトル束 $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(2)$ を考える. 3 と同様にして,

$$\det E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(3), \quad \omega_{\mathbb{P}_k} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(-3)$$

が分かる. よって,

$$\det E \otimes \omega_{\mathbb{P}_k} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}$$

が成り立つ. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}$ であるから, このベクトル束 E は相対的向きづけが可能であることが分かった.

特に, 対応する E の切断の零点のクラスは, 捻りのない Chow–Witt 群 $\widetilde{\mathrm{CH}}^2(\mathbb{P}_k^2)$ の元として定義される.

5.2

一般に, X が k 上有限型の滑らかなスキーム, $p: E \rightarrow X$ が階数 r のベクトル束であるとき, ベクトル束 E の Euler 類 $e(E) \in \widetilde{\mathrm{CH}}^r(X, \det E^\vee)$ が以下のようにして定義される.

$s: X \rightarrow E$ を零切断とするとき, 射

$$(p^*)^{-1}s_*: \widetilde{\mathrm{CH}}^0(X) \rightarrow \widetilde{\mathrm{CH}}^r(X, \det E^\vee)$$

による $\langle 1 \rangle \in \widetilde{\mathrm{CH}}^0(X)$ の像を $e(E)$ と表す.

Euler 類は, 構造射 $\mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathrm{Spec} k$ から定まる Chow–Witt 群の押し出し $\widetilde{\mathrm{CH}}^2(\mathbb{P}_k^2) \rightarrow \widetilde{\mathrm{CH}}^0(\mathrm{Spec} k) = \mathrm{GW}(k)$ によって, Grothendieck–Witt 環 $\mathrm{GW}(k)$ 上に Euler 数を定める.

5.3

Wickelgren らは, 相対的向きづけ可能なベクトル束 E に対して, Euler 類を経由せずに局所的な情報を寄せ集めて Euler 数を計算する方法を与えた [6]. Chow–Witt 群における Euler 類の定義 [2] では, Euler 類の属する Chow–Witt 群の係数となる直線束の捻りの選び方が $\det E^\vee$ でなければならなかったが, Wickelgren らの方法では, 局所的な Jacobian の情報を直接 Grothendieck–Witt 環に値をとるように集約することができる. その意味で, ここで紹介する方法は, 拡張された Euler 数と言ったべきものである.

特に, $\mathbb{P}_k^2$ 上で曲線が横断的に交わる本節の例を用いて, Grothendieck–Witt 環に値をとる Euler 数の計算例をここでは示したい. 直線 f_2 と二次曲線 f_3 は, 点 q_1 , q_2 において横断的に交わる. U_z における局所座標 (u, v) を用いて, それぞれの点における Jacobian を計算する. $q_1 = [1 : 0 : 1]$ においては,

$$\left. \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u, v)} \right|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

であるから, Jacobian の値は -2 である. 同様にして, $q_2 = [-1 : 0 : 1]$ においては,

$$\left. \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u, v)} \right|_{(-1, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

であるから, Jacobian の値は 2 である. これらの数値から, 点 q_1, q_2 における**局所指数**が Grothendieck–Witt 環 $\mathrm{GW}(\mathbf{k})$ の元としてそれぞれ $\langle -2 \rangle, \langle 2 \rangle$ と与えられる.

Wickelgren らの方法により Euler 数は

$$\langle -2 \rangle + \langle 2 \rangle = \langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle$$

と与えられる. 特に, この値は Grothendieck–Witt 環 $\mathrm{GW}(\mathbf{k})$ において**双曲形式**と呼ばれている.

この例のように, 相対的向きづけ可能なベクトル束の切断を与える曲線の交点が横断的に交わる場合には, Euler 数は各交点における切断の Jacobian の値 J から定まる Grothendieck–Witt 環の元 $\langle J \rangle$ を足し合わせたものとして計算すればよい.

5.4

ここでは, 古典的な Schubert 計算に立ち戻るため, $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ とする.

Chow–Witt 群からは, 古典的な Chow 群への忘却写像 $\widetilde{\mathrm{CH}}^r(X, \mathcal{L}) \rightarrow \mathrm{CH}^r(X)$ が存在する. この忘却写像により, Chow–Witt 群における Euler 類 $e(E)$ は, 古典的な Chow 群における Chern 類 $c_2(E)$ に写される.

この Chern 類について, 古典的な Schubert 計算により

$$\int_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2} c_2(E) = 2$$

が成り立つ. この値は, 上で E の Euler 数として得られた双曲形式 $\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle$ の階数に等しい²⁾.

6 体の拡大と Scharlau トランスファー

これまで紹介してきた Chow–Witt 群は, (標数が 2 の場合は注意が必要とされるが) 任意の体の上で定義することが可能である. 特に, 考察する幾何が体の拡大を伴う場合には, トランスファーを用いることができる.

本節では, $\sqrt{-1} \notin \mathbf{k}$, $L = \mathbf{k}(\sqrt{-1})$ とする.

6.1

$f_4(x, y, z) = x^2 - yz + z^2$ とする.

直線 f_2 と二次曲線 f_4 は, $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$ 上では交点をもたないが, $\mathbb{P}_L^2$ 上では $Q_1 = [\sqrt{-1} : 0 : 1]$, $Q_2 = [-\sqrt{-1} : 0 : 1]$ の 2 点

2) そもそも, $\mathbb{C}$ 上では $\langle -1 \rangle = \langle 1 \rangle$ であるから, $\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle = 2 \langle 1 \rangle$ である.

で横断的に交わる. f_2 と f_4 もベクトル束 $E = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(2)$ の切断を与えるため, 相対的向きづけ可能である. そこで, $\mathbb{P}_L^2$ 上での局所指数を計算する.

まず, Q_1 において, Jacobi 行列は

$$\left. \frac{\partial(f_2, f_4)}{\partial(u, v)} \right|_{(\sqrt{-1}, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\sqrt{-1} & -1 \end{pmatrix}$$

であるから, Jacobian の値は $-2\sqrt{-1}$ である. 同様にして, Q_2 においては,

$$\left. \frac{\partial(f_2, f_4)}{\partial(u, v)} \right|_{(-\sqrt{-1}, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{-1} & -1 \end{pmatrix}$$

であるから, Jacobian の値は $2\sqrt{-1}$ である. これらの数値から, 点 Q_1, Q_2 における局所指数が Grothendieck–Witt 環の元としてそれぞれ $\langle -2\sqrt{-1} \rangle, \langle 2\sqrt{-1} \rangle$ となる.

よって, $\sqrt{-1} \in L$ であることに注意すると, $\mathbb{P}_L^2$ 上での Euler 数は

$$\langle -2\sqrt{-1} \rangle + \langle 2\sqrt{-1} \rangle = \langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle = 2 \langle 1 \rangle \in \mathrm{GW}(L)$$

と求まる.

6.2

もともとは基礎体を $\mathbf{k}$ として考えていたので, $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$ 上での Euler 数が知りたい. そのためには, 体の拡大 $L/\mathbf{k}$ における二次形式の Scharlau トランスファーを用いる.

f_2 と f_4 の交点を表す $\mathbf{k}$ 上の余次元 2 のサイクルは, 局所座標 U_z において $(u^2 + 1, v)$ と表される 1 点である. このサイクルに対し, 交点の分解体である $L = \mathbf{k}(\sqrt{-1})$ における閉点の二次形式 $\langle -2\sqrt{-1} \rangle$ を用いて, $\mathbf{k}$ 上の階数 2 の二次形式

$$(a, b) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/\mathbf{k}}(-2\sqrt{-1}ab)$$

とみなすことができる. このようにして導かれる対応 $\mathrm{Tr}_{L/\mathbf{k}}: \mathrm{GW}(L) \rightarrow \mathrm{GW}(\mathbf{k})$ を, **Scharlau トランスファー** (Scharlau transfer) と呼ぶ. この二次形式を $L/\mathbf{k}$ 上の基底 $1, \sqrt{-1}$ を用いて行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから, Grothendieck–Witt 環 $\mathrm{GW}(\mathbf{k})$ の元としては $\langle 4 \rangle + \langle -4 \rangle$, すなわち $\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle$ となり, やはり双曲形式に等しい.

$\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$ 上のベクトル束 $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2}(2)$ の切断としての (f_2, f_3) と (f_2, f_4) は, 交点の現れ方が異なるが, Euler 数は一致している. このことは一般に成り立つことが, Wickelgren らによって示されている [6, Theorem 3]. すな

わち、相対的向きづけ可能なベクトル束の切断の Euler 数は、切断の選び方に依存しない。

7 まとめと展望

本稿では、射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の極めて基本的な例を通して、古典的 Schubert 計算において見えなくなっている「向き」の情報が、Chow–Witt 理論および Grothendieck–Witt 環に値をとる Euler 数によってどのように回収されるかを具体的に検討した。

3 節では、2 本の直線の順序を入れ替えることで Jacobian が変化する例を示した。この現象は、古典的な Chern 類による交点数では完全に忘却されるが、その後の 4 節でみたように、これはベクトル束の相対的向きづけが自然に定まらないことの局所的な反映であると理解することができる。

5 節では、相対的向きづけ可能な例として $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(2)$ を取り上げ、Euler 数が Chow–Witt 群に値をとる不変量として定義されることをみた。このとき、Chow–Witt 群から Chow 群への忘却射により、古典的な Schubert 計算における零点数が得られる。

さらに、6.2 節では、交点が幾何学的な点として現れない場合にも、拡大からの Scharlau トランスファーにより Euler 数が計算できることを例示した。この計算は、代数的閉体上でなくても、交点数が不変量として相応しいものであることを Grothendieck–Witt 環の言葉で明確に説明している。

ここまでみてきたのは、Chow–Witt 理論が古典的 Schubert 計算を精密化し、背後にある幾何学的な構造を可視化する枠組みであるということである。古典的な Schubert 計算が、向きや符号の情報を忘却した結果として得られるものであるのに対し、Chow–Witt 理論はその忘却の前段階に存在する幾何学的情報を体系的に保持している。

この分野において今後期待される進展としては、まず古典的な Schubert 計算を Chow–Witt 理論の枠組みで拡張することであり、Wendt らにより研究が進められている。交点理論との関連においては、Wickelgren らの研究によって計算例が徐々に蓄積されてきているが、これらの計算例の体系的な理解も待たれる。

また、Chow–Witt 群は Milnor–Witt コホモロジーから切り出すことができるが、Milnor–Witt コホモロジーに適用可能な計算技法が限られる³⁾こともあり、 $\mathbb{P}^n$ や $B\mathrm{Sp}_n$ など [4] を除き、具体的な計算例がまだまだ少ない。この

方面での研究も今後の重要な課題である。

本稿でもみてきたように、Chow–Witt 理論は、向きなどの位相幾何学的な情報を代数幾何学の文脈で取り扱うための強力な道具を提供する。例えば、Hoyois の Lefschetz 不動点定理 [5]、Ananyevskiy と Levine による球面上の接束の非零切断の存在 [1] など、位相幾何学における古典的な結果を Chow–Witt 理論によって代数幾何学的に拡張する試みが進められている。基礎体を取り替えることにより、古典的な結果がどのように体系化されるのか [7] ということも、今後の興味深い研究課題である。

本稿で行った計算は新しい定理を与えるものではない。古典理論とその精密化を与える理論の接合部を、ひとつの具体例の中で追跡する試みである。本稿が、Schubert 計算に馴染みのある読者や位相幾何学に関心のある読者にとって、Chow–Witt 理論や $\mathbb{A}^1$ ホモトピー理論に興味をもつきっかけとなれば幸いである。

参考文献

- [1] A. Ananyevskiy and M. Levine. Combining a hedgehog over a field. *Algebra Number Theory*, 19(12):2409–2431, 2025.
- [2] J. Fasel. Lectures on Chow–Witt groups. In *Motivic homotopy theory and refined enumerative geometry*, volume 745 of *Contemp. Math.*, pages 83–121. Amer. Math. Soc., 2020.
- [3] W. Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [4] J. Hornbostel and M. Wendt. Chow–Witt rings of classifying spaces for symplectic and special linear groups. *J. Topol.*, 12(3):916–966, 2019.
- [5] M. Hoyois. A quadratic refinement of the Grothendieck–Lefschetz–Verdier trace formula. *Algebr. Geom. Topol.*, 14(6):3603–3658, 2014.
- [6] J. L. Kass and K. Wickelgren. An arithmetic count of the lines on a smooth cubic surface. *Compos. Math.*, 157(4):677–709, 2021.
- [7] S. McKean. Rational lines on smooth cubic surfaces. 2025.
- [8] F. Morel. $\mathbb{A}^1$ -algebraic topology over a field, volume 2052 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2012.

3) 例えば、Künneth の公式が無条件には適用できないなど。