



Repunit 数の拡張の約数に関する考察

東島, 光祇

(Citation)

課題研究優秀ポスター, 2026:39

(Issue Date)

2026

(Resource Type)

conference poster

(Version)

Version of Record

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/0100505018>



Repunit 数の拡張の約数に関する考察

神戸大学附属中等教育学校 6325 東島 光祇 (13 回生)

研究背景

定義 1 (repunit 数)

$n, m \in \mathbb{N}, n \neq 1$ の下

$$R(m) = \frac{10^m - 1}{10 - 1} = \underbrace{1111 \cdots 111}_{m \text{桁}}_{(10)}$$

既存の repunit 数の基数を一般化して

定義 2 (repunit 関数)

$$R_n(m) = \frac{n^m - 1}{n - 1} = \underbrace{1111 \cdots 111}_{m \text{桁}}_{(n)}$$

repunit 素数やメルセンヌ素数 ($n = 2$) を表せる

▶ 基数, 桁数とその素因数の関係を調べたい

補題 1

m が合成数のとき, $R_n(m)$ も合成数である.

▶ 桁数を I. 合成数, II. 素数で場合分けして調査

I. 合成数桁 repunit 関数

注

▶ $\text{ord}_p(n)$: n が p で割り切れる回数の最大値

▶ $\star$: 本研究で明らかになった新定理

補題 2 (L.T.E)

奇素数 p が $\gcd(n, p) = 1, p \mid x - y, x \not\equiv y \pmod{p}$ で
 $\text{ord}_p(x^n - y^n) = \text{ord}_p(x - y)$

$x = n, y = 1$ を代入していじると

定理 $\star 1$

p 奇素数が $n \equiv 1 \pmod{p} (n \geq 2)$ で
 $\text{ord}_p(R_n(k)) = \text{ord}_p(k)$

定理 $\star 2$

p 奇素数が m と互いに素で

$$\text{ord}_p(R_n(p^e m)) = \begin{cases} 0 & (n^m \not\equiv 1 \pmod{p}) \\ \text{ord}_p(R_n(m)) + e & (n^m \equiv 1 \pmod{p}) \end{cases}$$

定理 $\star 3$

m が奇数で

$$\text{ord}_2(R_n(2^e m)) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0 \pmod{2}) \\ \text{ord}_2(n + 1) + e - 1 & (n \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases}$$

▶ 合成数桁 repunit 関数が p で割り切れるかだけでなく割り切れる回数も明らかに

II. 素数桁 repunit 関数

定理 $\star 4$

素数 p, q が $R_n(p) \equiv 0 \pmod{q}$ で

$$\begin{cases} p = q & (n \equiv 1 \pmod{p}) \\ q \equiv 1 \pmod{p} & (n \not\equiv 1 \pmod{p}) \end{cases}$$

この定理を用いて以下二定理が示せる

定理 素数次 repunit 多項式の完全分解定理

p 素数で

$q \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow F_p(x) \equiv 0 \pmod{q}$ は $p - 1$ 個の根を持ち,
その根は q を法とする $\frac{q-1}{p}$ 乗剰余から $0, 1$ を除いたもの

▶ 円分体の素イデアル分解法則の主張の一部

▶ 一例: $p = 7, q = 29$ だと...

$0, 1$ を除いた 29 を法とする $(29 - 1)/7 = 4$ 乗剰余は $7, 16, 20, 23, 24, 25$ で

Table: $p = 7$ のときの $F_p(x)$ とその $\pmod{29}$ の値

x	$F_p(x)$	素因数分解	$F_p(x) \pmod{29}$
7	137257	29×4733	0
16	17895697	$29 \times 43 \times 113 \times 127$	0
20	67368421	$29 \times 71 \times 32719$	0
23	154720133	$29 \times 271 \times 19687$	0
24	199411801	$29 \times 239 \times 28771$	0
25	256410257	29×8841733	0

であることから

$1111111(7), 1111111(16), 1111111(20), 1111111(23),$
 $1111111(24), 1111111(25)$
が 29 を約数にもつと分かる.

系 1

同じ素因数を持つ素数桁のレピュニット関数の組は存在しない.

▶ Zsigmondy の定理の主張の一部

結論

▶ repunit 関数の約数の様子の一部解明
▶ 類体論分野の定理との関連性の発見

今後の展望

▶ repunit 関数の乗法性の調査
▶ 類体論の視点での研究

参考文献

- [1] 著: G.H. Hardy / E.M. Wright 訳: 示野信一 / 矢神毅, 数論入門 I (原書 6 版), 丸善出版, 2022
- [2] 新庄慶基, 指数型不定方程式 $a^x + b^y = c^z$ に関する研究, 大分大学大学院工学研究科, 2021
- [3] A.H. Parvardy, Lifting The Exponent Lemma (L.T.E), 2011
- [4] Bart. Michels, Zsigmondy's Theorem, 2014
- [5] 都築信夫, 平成 17 年度後現代数学 D・代数学基礎講義 B, 徳島大学数理論理学研究室, 2005