



数理認識の根幹をなす方法としての「思考実験」について

船越, 俊介

(Citation)

神戸大学発達科学部研究紀要, 1(2):21-35

(Issue Date)

1994

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/81000160>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/81000160>



数理認識の根幹をなす方法としての「思考実験」について

船 越 俊 介*

On “thinking experimentations” as the basic method in mathematical recognitions.

Shunsuke FUNAKOSHI

1. はじめに

数理認識論とは、数理（数学）を認識することについての考察である。

このことについての視座は多様である。たとえば、数理認識の本性（数学論）、数理認識の意義（目標論）、個人的・社会的数理認識の発達（発達論・史論）および数理認識の方法（教授＝学習論）などが考えられる。

本稿では、数理認識の根幹をなす方法と思われる「思考実験」について、算数・数学教育との関連で考察する。

なお、思考実験ということばが公的に算数・数学教育に関連して使われたのは、昭和62年12月に教育課程審議会から答申された算数・数学改善の基本方針が最初である。：「……。特に、高等学校においては生徒の能力・適性や進論等に応じて、適切な選択履修が可能となるよう科目の再構成を行う。その際、思考の過程を一層重視するために児童生徒の発達段階に応じた具体的な操作や思考実験などの活動ができるようにするとともに、数理的な考察処理の簡潔さ、明瞭さ、的確さなどの良さが分かるようにし、算数、数学を意欲的に学習しようとする態度を育てるよう配慮する。……………」

2. 科学の方法論としての「思考実験¹⁾」

「思考実験(Gedankenexperiment)」という言葉初めて用いたのは、オーストリアの物理学者であり哲学者でもあるマツハ(Mach, Ernst, 1818-1916) であるといわれている。彼は著作『思考実験について』で、思考実験の基本的な方法として、いろいろな要因を連続的に変化させる変化法に注目し、変化法の重要性を取り上げている²⁾：「人間は環境世界に生ずる変化を観察することによって経験を集積する。しかし、人間にとって最も興味があり、最も教訓に富む変化は、何とんでも自分の関与によって生ずる変化である。(中略) この種の変化こそが、人間にとって最も経済的で、実際の・知的な重要性を持つものである。実験が価値を持つのはまさしくそのためである。」、「思考実験の基本的方法は、現物実験のそれと同様、変化法である。いろいろな要因を連続的に変化させてみることによって、その要因と結びついている表象(期待)の妥当範囲が拡張される。当の要因を変化

* 神戸大学発達科学部児童発達論講座

させたり、特殊化したりすることによって、表象を変容させ、特殊化して、一層確定的なものにする。これら二通りの変化過程は交互に行われる。」、「ここでは図形を変えたり、移動したり、連続的に変形したり、或る要素を無限に小さくしてみたり、無限に大きくしてみたり、ということが、研究を活かし、新しい性質を知り、その連関を洞見するのに役立つ手段である。現物実験や思考実験の方法は、まさにこの数学という非常に単純な成果の多い、そして入り易い部門でまず最初に発達し、そこから自然科学に持ち込まれたのだと考えねばなるまい。」。

「思考実験」という概念を科学的に定義し、組織的に使用したのはポパー(Popper, Karl, Raimund)である。

森田俊雄は¹⁾、マッハからポパーにいたる思考実験に対する見方の移り変わりは、その背後に科学観の変遷があるとし、数学教育との関連で、上述のマッハの主張に対する見解を述べ、ポパーの思考実験と山内恭彦の自然科学の方法²⁾を基にして、**数学教育における思考実験について**、以下のような論説を行っている。

マッハの現物実験や思考実験の方法が、まず数学で発達したのではないか、とする見解はそのままでは受け入れ難いものである。

思考実験の代表的な例として、ガリレオの落下体の思考実験があげられる。それはガリレオ(Galilei, Galileo, 1564-1642)が、当時一般に信じられていたアリストテレス(Aristoteles, B. C. 384-B. C. 322)の運動についての仮説「各種の物体はおなじ媒質のなかでは、それぞれの重さに比例して各種の速度で運動する」を否定するに用いたものである。そこで、ガリレオは重さの違う2個の物体をひもで結んで落下させる、というアイディアで思考実験をしている。ここで用いられている推論の前提にはアリストテレスの仮説とともに、重さなどに関する常識がある。それらから演繹論理によって得られた結論の整合性を検証したもので、いわゆる帰謬法(reduction to absurdity)である。ところでマッハはガリレオの思考実験を「科学においては偉大な歴史的な役割を演ずる」として最大級の賛辞を送っているが、その論理的な構造には関心をはらっていない。マッハは「ある状況を表象し、その状況から生ずべきある結果の期待、推測を当の表象に結びつける」思考のすべてを思考実験といっているようである。思考実験をマッハのいうように捉えると、算数や数学で扱っている内容(教材)は「ある状況を表象」しているものとみることができるので、算数・数学を考えると、思考実験をすることとは同質のことになってしまう。それでは、算数・数学教育に、新しく思考実験という概念を導入して研究を進めることの意味は薄れてしまうことになる。マッハは、思考実験を科学の方法論の立場から検討していないのである。

ガリレオの落下体の思考実験は、完全な演繹論理によっている。こうした思考実験の特質を自然科学の方法論の立場から捉えているのはポパーである。古典的科学観では実験や経験によるデータの集積が、科学の一般的法則を生み出すものと考えられていたが、現在の科学観においては、ある仮説から演繹論理的によって何らかの予想を実験あるいは観察などによる帰納的な方法によって確認する、という手続きによって科学的な発見がなされる。

山内恭彦は自然科学の方法を次のようにモデル化している。

P;前提(premise), L;論理(logic), C;結果(conclusion), E;実験結果(experiment)とすると、

$$(P) \Rightarrow (L) \Rightarrow (C) \Leftrightarrow (E)$$

このようなモデルは、前提Pと実観(あるいは観察)によって検証するシステムで、自然科学の典型的な場面についてのモデルであって、これによって自然科学の方法が尽くされているわけではない。

Pは仮説(hypothesis)ともいわれるもので、これが設けられる過程ではそれまでのすべての知識・経験、それに直観・帰納・類比ならびに演繹等のあらゆる思考作用が結集される。見方を変えると、Pにはそれを産出する母体があり、Pを批判することにはその母体を構成している知識の是非を問う

こととなることもある。

Lという論理は演繹論理である。これによって実験可能な命題を導くことになる。

CはPとそれと共存する命題($\neg$ Pを産出する母体)とから、演繹的な推論の結果得られた検証の可能な実験命題である。従って、Pがそのまま検証可能な命題の場合にはCにはPを置くこともできる。

EはCを検証するための実験とその結果である。Eの実験結果により、次の3つの場合に分けて前提Pを評価することができる。①実験結果がCに反することになれば前提Pは棄却される。②実験結果がCを保証するならば前提Pは支持される。③実験結果を①、②以外の目的に利用する、例えば、実験の結果を利用して前提Pの修正を図る、あるいは、実験を利用してPの理論の妥当性を説明する、あるいは、教示するなどである。

自然科学における思考実験はこのモデルでEの段階に位置づけられるもので、思考実験は前提から得られた実験仮説Cを基にして、それから演繹論理によって帰結される実験なのである。通常の実験は帰納的な方法によるが、思考実験は演繹的に行われる。

ポパーは、思考実験を批判的用法、発見的用法および弁護的用法の3つの用法に分けている。これらは上述の①、②、③のそれぞれに対応しているものとみることができる。そして批判的用法を「最良の用法」、発見的用法を「非常に価値のあるもの」として位置づけ、弁護的用法については「より価値の少ない用法」としている。この価値判断の基準は、自然科学研究の方法論的評価であり、そのよりどころは思考実験が演繹論理によって構成されていることである。しかし、数学教育で思考実験を考察する場合、自ずとこれとは異なった評価基準をもつべきであり、特に授業で扱う場合は子どもとの関係で多様な評価がされることになる。

自然科学の方法であった思考実験が数学の研究に使われることは、数学の研究の1つの側面をポリャ(Polya, George, 1887~1985)が「厳密な形で述べられた数学は系統的演繹的科学であるが、でき上がりつつある数学は実験的帰納科学である」といっているように、演繹的科学である数学に、帰納的科学としての異なった顔があるからに他ならない。数学教育は数学とは異なる学問体系をもつものであることから、思考実験についてもさらに別な視点で位置づけることが必要となる。そこで、ポパーが分類した3つの様相：批判的・発見的・弁護的な用法という名称を数学教育の場に適合するように変えていくことにする。実験の場合、①に対応する批判的用法は、反例を見出すこと、あるいは背理に導くことなので、「反例的用法」とする。②に対応する発見的用法は(後述する)ポリャに従って「支持的用法」、③に対応する弁護的用法は必ずしもポパーの概念と同一の意味ではないので「説明的用法」とすることにする。

また、古藤 怜³⁾は、次のような論説を行っている。

A. パーマーは「思考実験と概念的探究」という論文の中で次のように述べている：「思考実験はむしろ実験であるが、決して経験的な実験ではない。それは、事実よりもむしろ事実でありうるものを、つまり、現実よりもむしろ可能性を扱うものである。計算機が可能にしてくれるものは、体系的に可能性を探究することである。コンピュータサイエンスによって我々は、アプリオリな考察を思考実験に転ずることができる。……」。ここに、情報化時代を迎えた学校数学において、「思考実験」という探究法の果たすべき新しい役割が示されているといえる。すなわち、新しい算数・数学の指導においては、形式的・機械的な作業はコンピュータ等(電卓を含む)にまかせ、「人間でなければならないことは何か」を明らかにすることが問題となる。換言すれば、これからの算数・数学科の授業においては、複雑な計算問題の練習に多くの時間をかける、いわゆる形式陶冶的な訓練は最小限度にとどめること。そして、問題解決の場合などにおいては、必要に応じてコンピュータ等を利用して、一人ひとりが見通しを持って試行接近していくシュミレーション的ストラテジーの指導を導入する必要がある。

ある。

ポリアは数学の研究においても実験的な態度が必要であるとの立場から、自然科学の思考実験に対応する概念として、数学教育の場に「擬実験(qnasi-experiment)」という言葉を導入している。そして、おおよそ次のように述べている。「証明されない推測は、たとえそれが偉大なる権威によって提案されたものであっても信頼してはいけない。あなたはそれを証明しようと試みるか、さもなければそれが真でないことを示そうとすべきです：あなたはそれを検定しなければならない。(中略)推測を決定するためにはオイラーが述べたような“擬実験”をやってみよう。」。そしてポリアは、整数論の研究で未解決な問題として知られている「ゴールドバッハの予想」つまり、 <6 以上のすべての偶数は、2つの(奇)素数の和で表せる $>$ を暗示的接触(suggestive contacts)、および、支持的接触(supporting contacts)という言葉を使って、それが確かな法則であるらしいことを、漸次、実験的に接近して行く過程を通して、おおよそ、次のように説明している。われわれは、 $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$ などから、 6 以上のすべての偶数は、つねに2つの素数の和で表されるのではないかと、予想することができる。これが「暗示的接触の段階」である。次に、任意の偶数、例えば60について考えてみると、 $60 = 7 + 53 = 13 + 47 = \dots\dots$ であることがわかる。従って、この段階でゴールドバッハの予想、つまり、 6 以上の偶数について、偶数=素数+素数という法則は、ますますその成立が確からしくなってくる。このように、はじめに推測された一般命題は、新たな特別の場合について確かめられるごとに、ますますその信頼性を増してくるのである。これが「支持的接触の段階」である。

さらに、数学者の小平邦彦⁴⁾は、数学の理解・研究における「思考実験」の重要性において、次のような論説を行っている。

数学者は物理学者が自然現象を研究するのと同様な意味で数学的現象を研究していると思う。物理学者はいろいろの実験をするが、数学者はただ考えるだけではないと言われるかもしれない。しかし、この場合「考える」というのは思考実験の意味であって、たとえば試験の問題を「考える」のとは性格が違うと思う。試験の問題の場合にはある定まった範囲の既知の事柄を適当に組み合わせれば1時間以内にかねらず解けることがわかっているのであって、考える対象も考える方法も目のまえに与えられている。ところが実験はもともと未知の自然現象を調べるためのものであるから、もちろんその結果は予想できないし、また何も結果がえられないかもしれない。数学の場合もまったく同様であって、未知の数学的現象を探究するための思考実験であるから、考えるといっても考える対象が未知であって、何を考えたらよいかわからないわけである。ここに数学研究上の最大の困難があると思う。一番わかりやすい形の思考実験は実例を調べることであろう。例として「偶数は最低何箇の素数の和として表されるか」という問題を考えてみよう。実際の偶数についてあたってみると、2は素数だから別として、 $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5$, $100 = 47 + 53$, $\dots\dots$ のように、いつでも二つの素数の和としてあらわされる。この実験の結果から、「2以外のすべての偶数は二つの素数の和としてあらわされる」と言う定理が成り立つことが予想される(；ゴールドバッハの予想、現在まだ解決されていない)。このように実例をいくつか調べて定理の形を予想できれば、後はその定理を証明することを考えればよいわけで、研究の最初の難関は完破されたのである。もちろん数学であるから、実例をいくら積かさねてもそれだけでは定理の証明にならない。証明は別に考えなければならない。

数学の本を理解するためには克明に証明をおっていきより他しかたがない。数学の証明は単なる論証ではなく、思考実験の意味があるのであろう。そして証明を理解すると言うのは、論証に誤りが無いことを確かめるのではなく、自分でもう一度思考実験をやり直して見るということであろう。理解することはすなわち自ら体験することであると言えよう。ここで不思議なのは、数学にはこれ以外の

理解のしかたがないことである。

3. 数理認識（数学の理解）

人間がものごとを認識するとは、対象を何らかの枠組を通して把えることである。たとえば、日本人は猫は「ニャー、ニャー」と鳴くといい、アメリカ人は“miaow, miaow”あるいは“mew, mew”と鳴くという。しかし、これは猫が2通りの鳴き方をしているわけではない。日本人は猫の声（音）を日本語という枠組を通して受けとめ、日本語の枠組の中で表現したということであり、アメリカ人は同じ声（音）を英語という枠組の中で表現したということである。

ものごとを、数・量・図形・文字・式・関数などの数学という枠組（数学の体系）を通して把握することが「数理（数学的）認識」である。つまり、数学という枠組は、一種の言語とみられるのである。そこで、数学という体系を「数学言語」ということにする。それに対して、日本語あるいは英語などの通常の言語を「日常言語」ということにする。

ところで、言語は、現象、事実、思想、感情、意志などを表現・伝達（コミュニケーション）する手段（道具）である。したがって、日常言語も数学言語も言語である以上、働きを持ったものであることを意味する。また、言語の意味は使われる中で、使い方をおして理解されて行くのである。

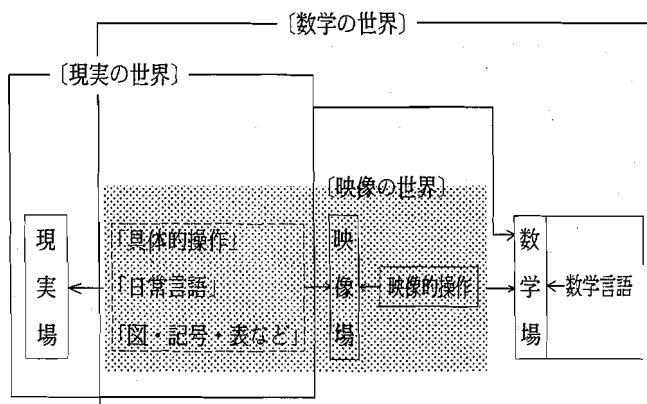
このように、数学言語とは、数学を働きとして把えることである。働き（手段、道具）が働きであるためには、働きかける対象としての場がある。日常言語の働く場は、日常（現実）の事象である。これを「日常場」あるいは「現実場」という。数学言語の働く場は、日常場と数学言語それ自体が形成する世界である。これを「数学場」という。数理認識は、現実場と数学場との関わりを通してなされる。

ところで、人間が、数理認識に限らず、抽象的な概念や法則を抽象的にそのまま把握することは少なく、具体的事物・具体的事例あるいは既知の知識・体験などをもとにして、概念や法則などの心理的像（映像、イメージなどによる心的対象）を構成し、それによって概念や法則などを把握する場合が多い。このように、ものごとの認識における心理的像の重要性を勘案して、現実場と数学場をつなぐ場として心理的像の形成する場、「映像場」を考えることにする。

これら、現実場、映像場および数学場が数理認識の対象となるものである。

これに対して、対象に働きかける手段や操作を、これら3つの場との関連で捉え、分析すれば、次のようなものが考えられる：「具体的操作」（；現実場で、具体的な事物を行動的、感覚的、視覚的に扱う操作）、「映像的操作」（；映像場で、心理的像を念頭的、直観的に扱う操作）、「日常言語」（；現実場、映像場および数学場に働きかけ、表現する。）、「図・記号・表など」（；現実場、映像場および数学場に働きかけ、表現する。）、「数学言語」（；現実場、映像場およびそこでの手段である具体的操作、映像的操作、日常言語および図・記号・表などを数学場化つまり概念化したもの。）。また、さらに数学言語は数学場に働きかける。この数学場に働きかける側面を「数学的（形式的、抽象的）操作」という。

それぞれの場(対象)における手段（方法）は、舞台とその上で演じられる劇、都市とそ
 の中で営まれる市民生活、楽器と楽曲、組織



と個人、人間の肉体と精神などと同じように相補的な性格をもっており、これらの前者はハードウェア、後者はソフトウェアと理解しうるものである。

いま、この相補的な関係にある前者と後者を合わせて「世界」と呼ぶことにする。すなわち、「現実の世界」、「映像の世界」および「数学の世界」となる。

新しい数学言語の習得(認識)の際の基本的な過程は、現実場あるいは現実場への働きかけ(手段)である具体的操作や日常言語を映像場へイメージ化し、映像的操作を加えて学習者なりの概念像(言語像)を築き、その概念像を数学の世界において同化、調節することによって数学言語として認識する。

ところで、数学の内容を数学言語として把握することは、数学を働きとして把えることであった。その働きは数学の世界における働きであると同時に、現実場(生活の場面)における働きにもならなくてはならない。このように、数学の世界における言語であると同時に、現実場(生活の場面)における言語にもなり得た状態の言語を、「生活言語としての数学言語」ということにする。生活言語としての数学言語は、日常言語と同じように、生活の場で日常的に使われるはずのものである。また、生活言語としての数学言語は、日常言語とともに、次の新しい数学言語を習得して行くための手段(方法)、つまり「メタ言語」というべきものになる。

数学言語の習得の過程は、数学言語の形式の過程である。そして、数学言語の形式の過程は、数学を働き(手段)として把えることであった。したがって、数学言語の習得の過程つまり数理認識は手段の内容化ということになる。何らかの手段(操作)が内容(数学言語)化されるのである。そして、既習の内容(言語)が新しい内容(言語)を習得するための手段(メタ言語)となる。このような、手段の内容(言語)化、内容(言語)の手段化の繰り返しが、数学言語の形成の過程なのである。

生活言語としての数学言語は概念というよりむしろ観念というべきものである。つまり、主観的・個人的なものである。この生活言語としての数学言語像を、その人(学習者)のその数学概念についての「シエマ」と呼ぶことにする。

数理認識とはシエマを形成することである。

4. 認識と脳の機能

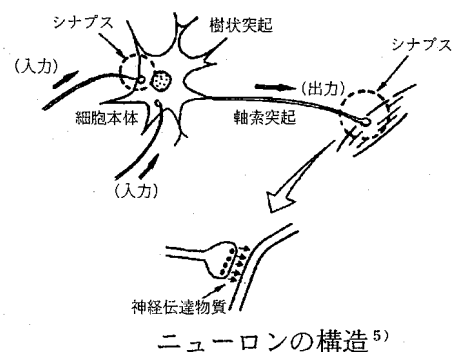
ものごとを思考し・認識するのは脳である。脳の仕組と機能についての研究は近年めざましく発展している。

ここでは、脳の仕組と機能およびそのことに関連する数学教育についての考察・主張を、文献より引用してまとめてみる。

(1) 脳の仕組(構造)と機能について⁵⁾

脳、その中でも感覚、知覚、運動などを司る大脳には約百四十億個の神経細胞(ニューロン)がある。それらのいくつかが連結し合って1つの働きをしている。

ニューロンをより詳しくみると、細胞本体とこれから長く伸びた軸索突起、やや短い樹状突起という突起が多く出ている。これらの突起は隣り合うニューロンにつながり、全体として大きなネットワークを形成している。突起とこれにつながる細胞の間には狭い隙間があり、こうした隙間を介した結合をシナプスという。シナプスを



介してネットワークを組んでいるニューロンは、LSI（大規模集積回路）を構成するトランジスタ1つ1つに対応するといつてよい。

ニューロンの大きな特徴は、細胞の外と内側にマイナス70ミリボルトほどの電位差（膜電位）があり、他のニューロンから何らかの信号が入ってくると、この膜電位がほんの一瞬、1000分の1秒の間だけ0ボルト位になることがある。これを活動電位というが、ニューロンで発生した活動電位は軸索突起を通して次のニューロンに伝わる。一個のニューロンには別のたくさんのニューロンから軸索突起が伸びてきており、それらから受け取る信号（活動電位）の合計がある値（しきい値）を起えると、そのニューロンは興奮して新たに活動電位を発生させる。

ところで、ニューロン同士を結ぶシナプスには隙間があり、そのままでは信号は伝わらない。そこに1つのからくりがある。軸索突起の末端に活動電位が達すると、そこからは神経伝達物質と呼ばれる一群の化学物質が放出される。これが相手方のニューロンにある受容体に結合し信号を伝える。神経伝達物質には相手を興奮させるものと興奮しにくくするものの2種類ある。

このように、ニューロンでの電位（電気信号）の発生、シナプスでの神経伝達物質の放出がうまくからみ合つて、複雑な脳の働きが行われているのである。このニューロンのメカニズムをIC（集積回路）を使って再現したのがニューラルネットワーク（神経回路網）である。

ニューラルネットワークの特徴を一番よく表しているのが記憶である。コンピュータに記憶させる場合、メモリーの決められた番地（アドレス）に計算結果を納め、このアドレスを指定して記憶を呼ぶ手順を踏む。これは何百回繰り返そうと、同じ結果が出る。しかし、人間はものを考えるとき、「甘い」→「砂糖」→「白い」→「雪」→「氷」→「透明」というように、ある事柄から次々といもづる式に記憶をたどる。しかもその場その場に応じて、思いつく内容はたいてい異なる。これは連想記憶といい、コンピュータにはできない。連想記憶はさまざまな機能のニューロンが密接につながっている証拠である。ニューロン自体は決して再生しないため、年を取るごとに減っていくが、これとは逆にニューロン同士の相互の結びつきであるニューラルネットワークは一定の年齢まで年を取るにつれてどんどん密度が濃くなることも可能である。

最近のモデルによると、ニューラルネットワークは多層構造になっており、刺激が入力層から出力層に行きつく過程は、神経細胞間の結びつき（シナプス結合）の強さに左右される。結合の強さは自由に変わるため、望ましい出力が得られるように学習すれば、込み入った問題でもうまく解けることが実証されている。同じ物を何度も見たり、学習するうちに、特定の神経細胞間の結びつきが強くなり、ネットワークそのものが柔軟に変化するのである。

(2) 右脳と左脳の役割について⁶⁾

ニューロンの集合である脳、特に大脳を外から見ると、左右2つの半球からできている。ノーベル賞医学生理学受賞者であるエックルスによると、脳の左半球（左脳）に意識への連絡がある。つまり、左脳が意識的、言語的であるのに対して、右脳は無意識的、音楽的であるという。

以前から大脳の左半球に外傷や卒中で損傷を受けると言語障害と意識障害が起りやすく、右半球の損傷ではその率が小さいことが知られていた。これは大部分の人が、左半球に言語中枢をもつことと関係がある。1949年に開発された和田法と呼ばれる検査法によると、右ききの人は言語中枢が高率（92%）に左半球にあるが、左ききの人では少し率が低い（69%）。また、6才以前に左半球が冒かされると、言語中枢が右半球に移ることもわかった。1968年、ゲシュヴィントと和田は、ヒトの大脳で左半球の上側頭葉の側頭平面が、右半球の対称部分に比べて広いことを発見した。これは言語野のある領野で、対応する右半球の領野はずっと狭いのである。このような肉眼的な左右の非対称は65%の脳にみられた。幼児期に左半球に損傷を受けると、言語中枢は右半球に移るが、そのときでもこの非

対称はそのまま残る。左右の脳にこのような非対称が存在するにもかかわらず、人が一つの心を持ち統一的な行動をとれるのは、脳梁で左右の脳が連結されているからである。脳梁には二億本の神経線維があり、毎秒40億個のインパルス運び左右の脳を結びつけている。この脳梁を切断する手術を受けた患者、すなわち分離脳をもつ人、についての研究で、初めて左右の脳の機能の非対称性があきらかになったのである。

分離脳の意味が明らかになったのはスペリー等の1970年以後の研究によってである。スペリーの実験は左右の視野を衝立で分離して行なうもので、右視野に見せた文字や物の名前については、分離脳の患者にも常人と何ら変わったことはなかった。右視野で見たものは左脳に入り、言語中枢で判断されるので、何ら異常はみとめられないのである。それに反して、左視野に示した文字や物体の像は右脳に送られ、右脳には言語中枢がないため、言葉で判断することができないのである。

こうして人間の意識は、言語および左脳と密接に関係していることが明らかになった。しかし、これまで劣位脳、沈黙脳と呼ばれ、重要ではないと思われていた右脳にも意識があることが明らかになったのである。

それまでよくわからなかった右脳の役割が、スペリーの研究をきっかけにして解明されるようになった。従来の優位脳、劣位脳という名称はよくないので、デジタル脳、アナログ脳という名称を使うことにする。

左右の脳の分業・協業をまとめると、右の表のようになる。

	デジタル脳	アナログ脳
別名 旧名	左脳、言語脳 優位脳	右脳、音楽脳 劣位脳、沈黙脳
一般的機能	意識 言語、声 論理的 代数的 文字 記号 分析的 細分的 ロゴスの	無意識 音楽、楽器音 直観的 幾何学的 イメージ 図形、絵画 総合的 全体的 パトスの

生死とか宇宙の構造を認識するためには、言語は、単なるコミュニケーションの手段であるばかりでなく、宇宙の構造を反映するようなそれ自身の構造をもたねばならない。人間の意識のあり方は、自分自身の中に全世界が反映しており、その反映された世界の中に自分自身も存在している。生とは何か、死とは何か、自分はどこから来たか、どこへ行こうとしているのか等々のことがらは、この世界の中での自分の存在を客観する枠組をもたない限り、認識できない問題である。人類は、人間と宇宙の起源に関する物語を語りはじめた時に、こうした世界観の最初の形を創りあげた。人間の言語は、この世界観を表現できるような構造をもっていたのである。あるいは逆に、こうした言語を発明することができたゆえに、宇宙観と生死観を形式することができたのである。それでは動物のコミュニケーション＝言語と、人間の言語の構造の差は、具体的にはどのようなものか、またそれはどのようにして生じたのであろうか、われわれは動物の言葉をよく知っているとはいえないが、幸いにして右脳というよいモデルをもっている。かつては、右脳は言葉をもたないと考えられていたが、現在では右脳にも簡単な言語があることがわかっている。イメージや図形は自由に操れることを考え併せると、動物の言語の中ではかなり進んだ形のものである。一方、左脳の言語は、霊長類の中でも進んだ種にだけ類似のものがみられるに過ぎない、独特の構造をもっている。これを利用して人間の言語の構造を考えることができる。動物の言語では、概念は事物から抽象されることはあっても、概念から概念が作られることはないか、ほとんどない。人間の言語では、概念から概念が作られ、概念の1人歩きが起ることが多い。概念の世界に住むようになると、事物を事物として見るができなくなる場合

さえあるが、情報処理速度としては、これが最も速い。このために、物の名前としての概念から、さらに抽象化された概念、概念についての概念が作られる。こうしてイメージに直結した概念から、記号化されたデジタル情報としての言語が誕生したと考えることができる。そのような言語が生まれると、言語からイメージが作られるので、情報獲得速度はさらに速くなる。人間は外界から大量の情報を取り入れているが、この能力は進化と共に進んできた能力であり、動物と人間の間に断絶があるようには見えない。しかし、情報獲得速度が一定の値を越えたとき、記号化された言語が発明されたと考えることができる。動物にとっての世界は、彼に対して与えられた閉じた世界であるように見える。彼の世界が、たとえ物理的には拡大していても、動物は自分の生活圏より外の世界について考えをめぐらしているようには見えない。人間は、本質的には山のあなたや海のはての未だ見ぬ世界、彼の五感で決して感じることでできない世界のことを考えようとする傾向がある。人間にとっての世界は常に拡張される傾向がある。これが宇宙感を生み出した原動力ともいえるものであり、常に知識の増大を求める傾向といってもよい。知識情報の増加が、情報獲得速度の増大と共に、人間の情報系の中に言語という構造を造り出したと考えることができる。人間の意識は、この言語構造に結びつけられている。動物の意識が右脳の世界になぞらえられるのに対して、人間の意識は左脳の言語構造の方に重点をおいた世界である。そして、この言語構造の世界は、その内部に宇宙を反映している。動物と同じように、人間の右脳には、外界の姿が反映しているが、左脳はその脳内の宇宙を解釈して、言語で宇宙を再構築しているのである。こうして人間の意識とは、宇宙の中に自分がいるという意識であり、その自分が宇宙を意識していることを意識している。意識そのものが、宇宙の情報構造の1つであり、その情報構造が宇宙を認識している。意識とは宇宙の自己認識であるということもできる。人類の文化も、このような認識の上に立って理解されるべきものであろう。

(3) 人間の本能と学習⁷⁾

数学基礎論を専門とする竹内外史氏（現在イリノイ大学教授）への「ゲーデルの不完全性定理の代わりを求めて」と題するインタビュー記事の後半部分（人間の本能と学習、数楽？数我苦？）より抜粋する。

「動物でも人間でも、持って生まれた本能というものが非常に大きい。本能というのは、ある種のプログラムのようなものが与えられていることだと思います。昆虫の場合だったら、非常にはっきりしている。例えばクモは生まれた途端からクモの巣という非常に複雑なものを作ることができるという能力を持って生まれる。他の動物も似たようなものだと思います。人間の赤ちゃんというのは、そういう点では無力に見える。本能という意味でいくと、複雑で高度なプログラムは何一つないように見える。ところがこれは逆で、人間の子供の方がはるかに高度なプログラムというか本能をもっている。ただ形態が違う。どこが違うかというと、本能というか、プログラムは子供の発達に伴って完成するようにできている。だからクモの巣のようにプログラムがきちっと与えられているのではなくて、子供の成長の過程とか発達に伴って本能ができあがってくる。初めから、固定してきちんと動くというプログラムよりはるかに高級プログラムなんです。それはなぜいいか、子供が大きくなるに連れていろいろな体験を織り込んで本能は成長してできあがるようになっているからです。

いちばん典型的な人間の本能の例でいうと、言語学のチョムスキーが、次のようなことを言っています。言語を扱う能力は人間固有に授かった特殊な能力で、他の動物にはない、そしてそれは民族が違ってもかなり共通だと。（中略）

もう一つの人間独特の能力は論理的思考だと思います。たとえば、赤ちゃんなら『いないいないバア』なんていうのはすごく関心を持つ。初めは顔を隠すと物がなくなったと思い泣く。しかし、次の段階になると、どこに行ったんだろうとさがす。その頃の行動をみると、非常に論理的なんです。因

果律の習得といいますかね。人間の本能として論理的思考というのはある程度プログラムされている。もちろん動物でも因果律の習得はゼロとはいえない。しかし上の言語本能と同じく、論理的本能は人間特有の本能といってよい。ただ人間の本能というのは初めから与えられているのではなくて、成長とともに完成していく。そういう与えられ方をした高級な本能だというのが、僕の意見です。その考え方の中心的なものを示す理論がある。セオリー・オブ・ラーニングというんですが、さっきのバリエーションなんかやっていて、ロジックの一部だと考えていい、そこには基本定理というのがあって、「教師なしの学習能力は、どんなにうまいプログラムを作っても、ほとんどゼロに近い」というものです。赤ちゃんにとって教師というのは、初めはほとんど母親であり、時には父親であったりを仮定しているわけですが、その後成長とともにたとえば本を読むとか学校へ行って学ぶということも含まれています。この意味で先ほど言った学習を含んだ人間の高級な本能の中には暗に教師という存在が仮定されている。つまり、そこには教育と学習というものが基本的に仮定されている。というのが僕の予想理論なんです。」

「教育ということを考えると、今アメリカは数学や物理の学校教育が遅れているから理科系の教育が大切だといわれている。いろいろな学校の先生から数学教育の新しい試みがしょっちゅう出てくる。そういう試みというのは全部、いかに数学を面白くするか、楽しくするかというものです。いちばん初めに興味をもたせるということは、すごくけっこうなことだと思う。だけどそれだけでは絶対にうまくいかない。数学というのはトレーニングが必要だし、自分で考えなければならない。そして自分で考えるときには、楽々と楽しく考えるというのではなくて、いちばん初めは自分の意思というか、意図というか、そういう決心みたいなものがある。考えようと思って考える。そのうちに夢中になって考えるかもしれないけれど、いつでもそんなものじゃないと思うんです。それは計算のトレーニングでもそうです。計算なんて機械的といいますけど、僕はそうは思わない。計算の直観というのはかなりの程度、現代数学の直観だと。要するに機構に対する直観です。機構に関する直観というのは、現代数学の直観のかなり大きい部分だと、僕は思っているんです。(中略)

たとえば自然数に対する直観、西田哲学的に行為的直観の問題と考えるかどうかによって違いますが、普通の意味の自然数についての直観というのは、自然数の計算、足し算とかかけ算とかをいろいろやることから来る直観だと僕は思うんです。だからそういう意味で楽しくするというのはいいいことには違いないけれど、それだけでうまくいくと思ったら大変な間違いだ。それはいちばん初めのステップであって、後はちゃんと覚悟を決めて、勉強しようと思って、かなりの勉強をする。そのとき楽しいだけでは絶対できない。ちゃんときちんと勉強する。どんどん進んでできるから面白いし、楽しいときもあるだろう。だけど少し苦痛だけどやらなければならないときもある。しかし例外なしに数学教育の新しい方法という、いかに楽しくて興味をもたせるかということばかりです。それは大切だと思うんです。だけどそれだけでは数学教育はうまくいかないと思っているんです。昔風のトレーニングみたいなものが必ずどこかになくてはならない。それからもう一つ大切な、これはちょっと数学者の見た数学かもしれないけれど、自分で考えることが何と云って大切です。どんなにうまい講義を聞いても何でも、受け身だけでは数学というのはできないというのが、僕の理論です。」

「数学の場合はとにかく自分が計算して、自分がある程度考えなければならない。それが数学の学習のいちばん基本的なものだと、僕は思います。」

5. 問題解決

数理認識には二面性がある。1つは数学概念(ものごとを認識する枠組)の理解と、獲得した数学概念を用いての問題解決である。しかし、新しい数学概念の理解は対象を数理的に把握するという問

題（課題）解決のためにという問題解決の形式によってなされるのが普通である。

そこで、数理認識としての問題解決に関連する考察・主張を、文献より引用してまとめてみる。

(1) 情報処理としての思考⁸⁾

認知科学の創設以来、認知科学研究の流れの一つを作ってきたものとして、主にニューウェル(A. Newell)とサイモン(H. A. Simon)の二人の研究者によって確立された、思考の「情報处理的アプローチ」と呼ばれるものがある。これは、いわゆる「問題解決」における思考過程のコンピュータ・シミュレーションを中心として発展したものである。

この理論で扱える「問題」というのは、初期状態（問題解決にとりかかる出発点での認識状態）、目標状態（問題が解決したときの認識状態）およびそこに至るすべての可能な係留状態が、すべて明確に定義されていなければならない。そのような定義された認識状態の全体は「問題空間」と呼ばれる。問題解決というのは、与えられた制約条件と演算規則を満足させる、初期状態から目標状態までの連続的な状態推移の経路を発見することである。その場合、すべての可能な経路をしらみつぶしに探索するのではなく、その問題領域に即して、何らかの「発見法的探索」が行なわれる。もちろん、その場合の探索も何らかの「発見法的ルール」の適用である。そこで、研究の最大の関心は、どのような発見法的ルールを設定すれば、初期状態から目標状態に比較的「インテリジェント」に探索を実行してくれるかということになる。

このようなニューウェルやサイモンたちの研究は、「人間情報処理研究」と呼ばれたが、彼らがもたらしたものを大ざっぱにまとめると次のようになる。

(i) 行動主義心理学からの脱皮。それまでの行動主義心理学者たちは、動物（人間も含めて）の行動はすべて、刺激に対する反応の「条件づけ」というレベルで記述できるとしていた。たとえば、問題解決行動も、文字通りの「試行錯誤」の結果、正しい刺激と反応の結びつきが強化されて形成されたものにすぎない、という考えが主流であった。そこでは、解決の「ヒラメキ」とか「見通し」などというとらえどころのないメンタリスティックな概念は非科学的であるとして排除されていた。ニューウェルたちは、目標とか手段とか、探索方略とかいったことを平気で使いながら、しかもそれらがすべてコンピュータのプログラムで表現できるという厳密さを保ち、さらにそのプログラムが実際に稼動するという事実による検証可能性を持つ、立派に科学的な概念として扱えることを示したのである。

(ii) 認知レベルの自律性と表象主義。行動主義者たちは、行動はすべて「刺激」に対する「反応」の連合であり、学習とはその連合が強化されることであった。しかし、ニューウェルたちは、目標、下位目標、手段、条件、行為ということばで、「頭の中でやっていること」をそのまま記述するのである。人間の行動を説明するにあたって、いちいち刺激や反応というレベルに無理やりに還元して説明するのではなく、「認知レベル」という独自の記述レベル（立派に科学的記述のレベル）が存在することを示したのである。さらに「問題解決」とか「定理証明」という人間の思考の働きを解明する場合は、そのような認知レベルだけで十分に記述できて、それが計算機の実稼動という因果的世界としての「裏付け」が可能となった。ところで、この認知レベルが自律性を保ち、独自の規則に従って「演算」されるためには、どうしても頭の中に明確な記号系が表象されていると仮定しなければならない。さらにその記号系は、厳密に定義された記号変換規則（シンタックス）に従って演算が実行されるべきものであるとするのである。このような考え方のことを、通常、表象主義と呼ぶ。人間の知的営みのすべては、そのような内的記号操作以外の何ものでもないという考え方である。

(iii) 発見法的推論の定式化。ニューウェルとサイモンが中心となって開発した定理証明のプログラムで、認識状態を初期状態から目標状態に推移させるのは、帰納でも演繹でもない、「発見法的

推論」である。発見法的推論というのは、現在与えられている認識のパターンから、仮説的にある種の予想を立てて、その予想に従って「探索的試行」を遂行して、その結果を「望ましき」の尺度で評価するのである。これによって、人間の推論が帰納でも演繹でもない、独自の「心理論理」に従うことを示したのである。また、「予想」とか「期待」とか「確からしさ」というような概念を、それらを独立の変数とするのではなく、「頭の中で実行すること」（すなわち内的な「手続き」）に還元して記述するのである。

人間の情報処理過程というのは、大ざっぱにいってしまうと、感覚器官を通して入力された膨大なまでの情報からなんらかの意味構造を構成し、必要ならばそれを新たな知識として貯蔵し、あるいは、それに基づいて適切な行為を決定するということになる。膨大な量の入力情報から意味構造を抽出することができるためには、特徴子による特徴検出だけでは足りない。それらの特徴が通常はどのような関係構造を持っているかについての予想や期待が人間の側に既有知識として貯蔵されており、それに「当てはめてみる」という形で意味抽出が実行され则认为られる。もちろん、無理やりに当てはめて終わりというわけではなく、入力情報がうまく当てはまらなければ、ただちに別の予想や期待の「枠組み」を呼び出したり、枠組み自体を修正しなければならない。いずれにせよ、とりあえず当てはめてみるべき知識の枠組みともいうべき関係構造が人間の頭の中にすでに貯蔵されていると想定できるのである。そのような知識の枠組みのことをスキーマという。入力情報の中の何らかの重要な特徴が検出されると、まず関連すると想定されるスキーマが呼び出される。入力情報から意味単位を抽出して少しずつ関連スキーマを喚起していくプロセスを、ボトムアップ・プロセスという。スキーマの関係構造の中の意味単位には、「特に入力によって修正されない限りは、既有知識として、一般的にはこういう値が入っているとみなす」という予備設定が行なわれている。そのような予備設定のことをデフォルトという。デフォルトが設定されているから、たとえあいまいな入力でも、仮説的に意味が抽出されるのである。ひとたびスキーマが呼び出された後、そのスキーマに従って入力情報が照合されていくプロセスをトップダウン・プロセスという。実際にはボトムアップ・プロセスとトップダウン・プロセスの両方が絶えず行き来しながら最終的な意味構造の抽出が行なわれるのである。

(2) 問題解決の思考法⁹⁾

問題解決法の本として有名なポリヤ(G. Polya)の「How to solve it」¹⁰⁾は、問題解決の過程を、次の4段階に分けている：題意の理解、解法の計算、解法の実行、解法の反省

数学では、このような1つの問題の解法に働く思考だけでなく、数学の学習全体に流れていく思考がある。たとえば、割合（倍概念）をとってみると、2年で整数倍を学び、4・5年で少数倍、6年で分数倍を学ぶ。これらが脈絡のないものになっていたのでは、数学（算数）は理解できたことにならない。これらがひとつながりになっているという感覚がなくてはならない。このような感覚があって、初めて、文章題（問題）を考えると、小数倍や分数倍ではむずかしいから、整数倍の場合から考えてみようといった思考が生まれてくる。これは、思考法というよりも、文章題解決法の素地となる知識の理解の問題のようにも思われるが、上で問題にしたのは、個々の知識でなく、それらをつなぐ考え方である。つまり、整数倍、小数倍、分数倍の個々でなく、その間の橋渡しをするものである。だから、根本的に考えるなら、個々の問題を解くときの局所的な思考だけでなく、数学の学習全体での思考もあわせて考えなくてはならない。数学の学習では、次のような考え方がよく働いている：・ものごとを見分けること・ものごとを理由づけて考えること・ことがらを細かいことがらに分けて見ること・ことがらの要点(要素)を抜き出すこと・いろいろな場合について調べること・場合をつくして抜かりのないようにすること・ものごとを関係づけてみること・ものごとやその関係を順

序立てて整理すること ・ものとやその関係を違った角度から見ること ・場合や状態をひろげたり変えたりして試みる。これは、いろいろな思考の単なる羅列にすぎないが、数理認識としての問題解決の教育（学習）を考えるには、こうした思考を組織的に分析して、数学の考え方全体の系統にまとめることが望まれるところである。しかし、それは非常にむずかしいことなので、全体的な思考の分析は、今後の問題として、ここでは、問題解決の局所的な思考に限ることとする。

問題解決の過程を考えたとき、ポリヤの4段階のうち、解法の計画と実行では、部分的な実行が計画に先んずることもあるし、実行の結果また最初に戻るようなこともあるので、これを一括して、次のような過程を想定した：Ⅰ．問題の理解（①問題の場面や状態を知る。②どんな要素が含まれているかを知る。③要素やことからの関係を読みとる。④求めたいものが何であるかを知る。）Ⅱ．解決の計画と実行（①問題の場や要素の関係を整理して眺める。②解法の筋道を予想し、考えて行く方向をきめる。③関係を分析して、推理を積み重ねていく。④個々の場合を調べ、あてはまるものを見つける。⑤行きづまりを打開する。）Ⅲ．結果と解決の反省（①結果が問題に適しているかどうかを調べる。②解決やその進め方をふり返って検討する。）このうち、ⅠやⅢの中の考え方は、数学の学習全体での思考に近いものではないかと思う。問題解決の特徴的な思考は、Ⅱの段階にあると思われる。そこで、ここでは、Ⅱの①～⑤の各項について述べることにする。

①問題の場や要素の関係を整理して眺める：④問題に出てくる要素の依存関係を考える ⑤要素や関係の取捨選択補足をする ⑥要素や条件をわかりやすくする ⑦問題の内容を具体化してみる。

②解法の筋道を予想し、考えていく方向をきめる：⑧静的（分析的）に見ていくか、動的（帰納的）に見ていくかをきめる ⑨似た問題を思い出して、その利用をはかる ⑩どこから手をつけるかをきめる。③関係を分析して推理を積み重ねていく：⑪要素の結びつきや条件の及ぼす効果を考え、新しい要素を作り出す ⑫状態を反対向きに考えて、新しいものを導き出す ⑬与えられた関係を変形して、新しい関係を引き出す ⑭簡単な場合をもとにして関係をとらえる ⑮特別な場合を仮定して、条件との違いを調べる。④個々の場合を調べ、あてはまるものを見つける：⑯見当をつけてたしかめてみる（試行錯誤的調べ方）⑰場合を挙げて調べる ⑱場合を分類して調べる ⑲要素の値や条件を順に変えていって調べる。⑤行きづまりを打開する：⑳初めから出なおしてみる ㉑条件や目的を少し変えた類似の問題を解き、その方法や結果を利用する ㉒別の角度から見なおしてみる。

算数での（いわゆる）文章題は、数量関係（客体）を思考法（主体）によって探究することによってなされる。解法の実際の手続きでは、主体と客体を結ぶ具体的処理が必要になる。たとえば、線分図とか表をかくて考を進めるとか、立式されたものを実際に計算する、ということも、主体と客体を結ぶ具体的処理の1つである。このような処理を「基礎操作」と呼ぶ。算数（数学）で学ぶ知識や方法は、何らかの問題解決に役立たなければ意味がないのだから、数と計算、量と測定、図形の各領域で学んだことがら「計算」、「計量」、「作図」などが基礎操作であることは当然である。また、数量関係をとらえる手続きとして、「記録する」、「分類する」、「対応させる」などの作業も基礎操作になり、とくに、数量関係の表し方である「図」、「表」、「グラフ」、「式」などを使うことは、重要な基礎操作といえる。

最近、アメリカ等でも問題解決のストラテジー(strategy)という言葉がよく使われている。このストラテジーという言葉の意味は、戦術とか戦略というようなことであるが、実際の内容を見てみると、我々の思考法と基礎操作が混在しているようである。ストラテジーは、総合的ストラテジーと一般的ストラテジーの2つに大きく分類できる。総合的ストラテジーは、問題解決の全般的な手順を示すもので、その代表的な例は、ポリヤによって示された（前述の）4段階である。一般的ストラテジーは、問題の解き方を発見するのを助ける具体的な手だてのことである。たとえば、G. Lenchner¹¹⁾は、算数で指導できる一般的ストラテジーを12個あげている：①整理されたリストをつくる ②絵や

図をかく ③パターンを見つける ④表をつくる ⑤簡単な場合から考える ⑥試行し、検討する
⑦実演（劇化）する ⑧実験する ⑨逆向きに考える ⑩方程式をつくる ⑪観点を変更する ⑫演
繹的に考える。

(3) メタ認知

(i) メタ認知とモニタリング機構⁸⁾。人間は単に入力情報をその場その場で「処理」するだけではない。自らの「処理」の仕方を長期的に監視し、それを適正化しようという、内部情報処理機構を持っている。そのような情報処理のためには、自らの現時点での「処理」がどのようなものかについての認知が必要となる。つまり、自らの認知プロセスの評価である。そのような認知活動を「メタ認知」と呼ぶ、メタ認知の能力は発達とともに上昇する。幼児はたとえば単純な単語リストを覚える作業でも、自分が「覚えたか否か」の判断ができにくい。さらに「どう工夫すれば覚えやすいか」がわからない。かなり年齢が進んだ子供でも、本来解けないはずの問題を解こうとしたり、決定的に重要な情報を欠いた指示でただちに「実行」に移ろうとする。問題の答えが非現実的でも意に介さない。メタ認知をもとに、認知方略全体を再構成するのが「モニタリング機構」である。メタ認知やモニタリング機構は子供にとってのものごとの「理解」がどのようなものかについて、学習と発達の重要な鍵になっていると考えられている。

(ii) 認知、メタ認知と思考¹²⁾。問題解決における思考の中には、次の2つの側面が認められる：①問題に対する直接的な解決行動としての思考活動 ②この直接的な解決行動をコントロールしようとする間接的な解決行動としての思考活動。①の思考活動を「認知的活動」といい、この認知的活動をコントロールする活動をも含めて、②の活動を「メタ知識的活動」という。

認知は、狭い意味では、知覚と同じとみられるが、ここでは計算する、測定する、作図する、グラフをかくというような、環境に対して直接働きかける数学的活動に作用する知識や技能をも含めた認知作用を意味するものとする。これに対して、知識や技能がうまく活用されているかなど、その認知作用を調整する作用がメタ認知であると考えられる。このようにみると、メタ認知は環境に対する直接的行動というよりは、認知を対象とする認知作用、つまり認知についての認知であり、頭の中で起こるものといえる。認知が認識と技能に分けられるように、メタ認知も、次の2つのカテゴリーで定義される：A.メタ認知的知識（メタ認知）；認知作用の状態を判断するために蓄えられた環境、課題、自己、方略についての知識をいう。①環境に関するメタ知識（例、試験ではないから、間違ってもいい）、②課題に関する知識（例、前にやった問題は易しい） ③自己に関するメタ知識（例、式さえわかれば、計算には自信がある） ④方略に関するメタ知識（例、わかったことを図に書いたほうがわかりやすい）。B.メタ認知的技能（メタ技能）；メタ知識に照らして認知作用を直接的に調整するモニター、自己評価、コントロールの技能という。①モニターに関する技能（例、前にやった問題か） ②自己評価に関するメタ技能（例、おもしろい） ③コントロールに関するメタ技能（例、やった通りにしろ）。なお、これら3つのメタ技能は、それぞれ独立して機能しているのではなく、一連の作用であると考えられる。

6. 問題解決（数理認識、数学教育）と思考実験

算数・数学教育は、5で述べたような問題解決の意味において、一人ひとりの児童・生徒に、真に生きて働く問題解決の力を育成することであるといえる。

ここでは、1～5の考察に基づいて、数学教育（数理認識）の視座から、「問題解決についての仮説（定義）」を与え、それとの関連で、「思考実験」の定義を与える。

問題解決についての仮説：個人の既習の知識の全体を、その人の「知識空間」ということにする。知識空間のうち、数学に関連する部分は、3の「数理認識」によって習得された「生活言語としての数学言語（「日常言語」も含める）」およびその習得の過程で育成された「数学的な考え方」、5の(2)の「問題解決の思考方」および「基礎操作」（したがって、「ストラテジー」を含む）、そして5の(3)の「メタ知識・技能」によって形成されているものとする。問題解決は、対象とする課題（問題）を解決するために、知識空間から必要な知識を選択し、それらを結合・系列化することによって行なわれる。ただし、問題解決は、5で述べたように、新しい概念（知識）を創る場合と、既存の知識を使って問題解決する場合の両方を含んでいる。

この知識の選択と結合・系列化の見通しを立てるために行う頭の中での操作を「思考実験」ということにする。したがって、思考実験は、数理認識の根幹をなす方法なのである。

5の(1)で解説した「問題解決（システム）」の考え方は、上述の「問題解決についての仮説」に類似のものである。そこでの「発見法的推論」が、上述の「思考実験」に対応している。

2で解説したような科学の方法論としての思考実験（「前提」から得られた「実験仮説」を基にして、それから演繹論理によって帰結される実験）の手法・考え方を数学の問題解決に援用することを「狭義の思考実験」ということにする。

4で解説した「認識と脳」と「思考実験」との関連は、次のようになる。

3で解説したような「数理認識」を可能にするには、右脳と左脳が相互に関連しながら働くことが必要である。逆の観点からみれば、右脳と左脳の機能から考えて、数理認識（つまり、数学を理解すること）は3で述べたような機構のもとで行なわれることが妥当であるといえるのである。

4の(1)で解説したように、認知をつかさどるニューラルネットワークは多層構造になっており、刺激が入力層から出力層に行きつく過程は神経細胞間の結びつき（シナプス結合）の強さに左右され、結合の強さは自由に変わるため、望ましい出力が得られるように学習すれば、込み入った問題でもうまく解けるようになる。この「シナプス結合を強くするような教育（＝学習）」の1つの手法として「思考実験」を意識して教育の中に取り込むことが強調されることになる。また、4の(3)は、数理認識において、このような教育と練習の重要性を主張したものである。

参考・引用文献

- 1) 森田俊雄著『算数・数学教育の新展開局所的な数学と思考実験』、pp.51-61、東洋館出版社、1991.
- 2) 山内恭彦編著『現代科学の方法』、日本放送出版協会、1971.
- 3) 古藤 怜「思考実験と学校数学」、『数学教育研究（上越教育大学）』第3号、1988, pp.1-10.
- 4) 小平邦彦著『怠け数学者の記』、岩波書店、1986.
- 5) 日本経済新聞社編『ニューロコンピューター』、日本経済新聞社、1988.
- 6) 品川嘉也著『意識と脳』、紀伊国屋書店、1982.
- 7) 竹内外史「ゲーデルの不完全性定理の代わりを求めて」、『数学セミナー』、1993年2月号、pp.56-62.
- 8) 伊藤正男・佐伯胖編『認識し行動する脳 脳科学と認知科学』、東京大学出版会、1988.
- 9) 細川藤次他著『新改訂 算数指導書 第一部 総説』、啓林館、1988.
- 10) G. ポリア著（柿内賢信訳）『いかにして問題をとくか』、丸善株式会社、1954.
- 11) G. Lenchner著『Creative Problem Solving in School Mathematics』、Houghton Mifflin, 1983.
- 12) 岩合一男編『算数・数学教育学』、福村出版、1990.

