



有理曲面とPainleve方程式の幾何

坂井, 秀隆

(Citation)

Rokko Lectures in Mathematics, 07. パンルヴェ方程式の眺望:131-137

(Issue Date)

2000

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD01)

<https://doi.org/10.24546/81001104>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/81001104>



有理曲面と Painlevé 方程式の幾何

坂井 秀隆 (京都大学大学院理学研究科 学振特別研究員)

概要

Painlevé 微分方程式は独立した二つの起源を持っています。一つは P. Painlevé らが新しい特殊関数の充たすべき性質として課した条件 (Painlevé 性と呼ばれる) で、彼らはこの条件から六つの Painlevé 微分方程式を導出しました。二つ目は R. Fuchs の研究に始まる線形微分方程式の変形理論です。

今回の話の目的はこれらとは異なる視点、有理曲面の理論により、Painlevé 方程式を特徴づけることです。

1 背景

70、80 年代の岡本和夫氏による Painlevé 方程式の研究により二つの大きな進展がありました。一つは初期値空間とよばれる有理曲面の構成、二つ目はアフィン Weyl 群対称性です。我々は岡本氏の初期値空間の構成の逆を行なうことを目標とします。つまり微分方程式から始めるかわりに有理曲面の代数幾何的理論から出発して、微分方程式に触れずに対称性を導出し、更にその対称性の極限として微分方程式自身をとらえます。

我々は微分方程式をある差分系の極限としてとらえますが、これは離散 Painlevé 系とよばれ、近年研究されだした可積分系です。とくに Painlevé 性の離散版とみなせる特異点囲い込み判定法が、A. Ramani, B. Grammaticos らによって導入されたことが重要な発展をもたらしました。

この話で使われる代数幾何の理論は主に有理曲面の Picard 群に関するもので、del Pezzo 曲面を中心に多く研究されています。とくにその一般化は Weyl 群との関係もともなって P. du Val, M. Nagata, Y. Manin, M. Demazure, E. Looijenga, B. Harbourne らによって調べられています。このなかで、E. Looijenga は我々が multiplicative type とよぶ場合について詳細な解析を行なっています。我々は彼の方法にしたがって、elliptic type, multiplicative type, additive type のすべての場合について、より具体的な計算を行います。

2 分類

まず問題になるのがどのような代数幾何的対象を選べばよいかということです。ここでは非特異有理曲面で、 $|-K_X|$ の元で標準型とよばれる因子をもつものを、generalized Halphen 曲面と定義します。

Halphen 曲面というのは有理楕円曲面で、このときは Painlevé 方程式のかわりに楕円関数のみたす微分方程式が現れます。Painlevé らによって新しい特殊関数として導入された Painlevé 方程式の解を、代数幾何的にも楕円関数の一般化として考えようという気持ちがあるわけです。

generalized Halphen 曲面は $|-K_X|$ の次元が 0 か 1 によって区別されます。 $\dim |-K_X| = 1$ のときは、指数 1 の Halphen 曲面です。

$\dim |-K_X| = 0$ のとき、 $D = \sum m_i D_i \in |-K_X|$ の型 R によって曲面は以下のように分類できます。

	R
elliptic type	$A_0^{(1)} (= I_0)$
multiplicative type	$A_0^{(1)*} (= I_1), A_1^{(1)} (= I_2), A_2^{(1)} (= I_3), \dots, A_6^{(1)} (= I_7), A_7^{(1)}, A_7^{(1)'} (= I_8), A_8^{(1)} (= I_9)$
additive type	$A_0^{(1)**} (= II), A_1^{(1)*} (= III), A_2^{(1)*} (= IV), D_4^{(1)} (= I_0^*), \dots, D_8^{(1)} (= I_4^*), E_6^{(1)} (= IV^*), E_7^{(1)} (= III^*), E_8^{(1)} (= II^*)$

ここで、elliptic type, multiplicative type, additive type という区別はそれぞれ $\text{rank } H_1(D_{red}, \mathbb{Z}) = 2, 1, 0$ に対応しています。(D_{red} は $D = \sum m_i D_i$ にたいし $D_{red} = \bigcup D_i$ とする。) R は $E_8^{(1)}$ 型のルート系の既約アフィン部分ルート系に対応しています。括弧の中の記号は小平の特異ファイバーに対応した記号です。この表の中で、 $D_l^{(1)}, E_l^{(1)}$ と表される記号に対応した曲面が Painlevé 微分方程式の初期値空間です。Painlevé 微分方程式は六つなのに $D_l^{(1)}, E_l^{(1)}$ 型の曲面は八つあるじゃないかと思う方がおられるかも知れませんが、これは、Painlevé III 型の方程式が parameters の値によって $D_6^{(1)}, D_7^{(1)}, D_8^{(1)}$ の三つの型に分類されることによります。

the type of surface	$D_4^{(1)}$	$D_5^{(1)}$	$D_6^{(1)}$	$D_7^{(1)}$	$D_8^{(1)}$
Painlevé equation	P_{VI}	P_V	$P_{III}^{D_6^{(1)}}$	$P_{III}^{D_7^{(1)}}$	$P_{III}^{D_8^{(1)}}$

$E_6^{(1)}$	$E_7^{(1)}$	$E_8^{(1)}$
P_{IV}	P_{II}	P_I

3 Parameterizations

これらの曲面は射影平面への双有理射をもち、射影平面の九点ブローアップとして実現できます。よって、これらの曲面の同型類は射影平面の (infinitely near な点を含む) 九点で決まります。

これとは別に、周期写像の考え方をういた parameterization の方法があります。二次のホモロジーの基底と正則 2-形式のカップリングの値で parameterize するのですが、問題なのはこの有理曲面には正則 2-形式が存在しないことです。そこで有理 2-形式を取り、これと曲面 X からこの 2-形式の極因子 D_{red} をのぞいた non-compact な曲面の二次のホモロジー $H_2(X - D_{red}, \mathbb{Z})$ の元とのカップリングで parameterize します。

$$\hat{\chi}(\Gamma) = \int_{\Gamma} \omega, \quad \Gamma \in H_2(X - D_{red}, \mathbb{Z}),$$

ω は X 上の有理 2-形式。

ここで $H_2(X - D_{red}, \mathbb{Z})$ は次の分解をもちます。

$$0 \rightarrow H_1(D_{red}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X - D_{red}, \mathbb{Z}) \rightarrow Q(R^\perp) \rightarrow 0,$$

ただし $Q(R^\perp)$ は $R^\perp$ 型のルート系のルート・ラティスで、 $\text{Pic}(X)$ のなかで $Q(R) = \sum \mathbb{Z}D_i$ に直交するラティスを表す。よって周期写像を通して次のような写像が構成でき、ルート系 $R^\perp$ の定める値で parameterize できます。

$$\chi : Q(R^\perp) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mod} \quad \hat{\chi}(H_1(D_{red}, \mathbb{Z})).$$

実はこの二通りの方法、射影平面上の九点と周期写像による parameterization は、 $D_l^{(1)}$, $E_l^{(1)}$ 型の曲面においては、その次元が一致しません。これは極因子をのぞいた non-compact な曲面 $X - D_{red}$ よりももとの compact な曲面 X の方が変形空間が 1 次元大きいので、 X の非自明な変形で $X - D_{red}$ では同型となっているものが存在するというを表していると考えられます。このような考察は小平-Spencer の変形理論により、あるコホモロジーの次元の計算から正当化されることですが、これについては最近の梅村、斉藤両氏らの結果により示されています。この変形が Painlevé 方程式による時間発展です。

4 対称性と Painlevé 方程式

しかしこれらの parameterizations は例外曲線の選び方あるいはルート系の基底の取り方だけ任意性を持ちます。例外曲線を $\text{Pic}(X)$ の基底の構成元と思うことで、ひとつの marking をえます。この marking の取り替えを詳しく調べるために、次の用語を導入します。

$\text{Pic}(X)$ の自己同型で

1. 交叉形式をかえない
2. 標準類を動かさない
3. 有効類のなす $\text{Pic}(X)$ の部分半群を不変にする

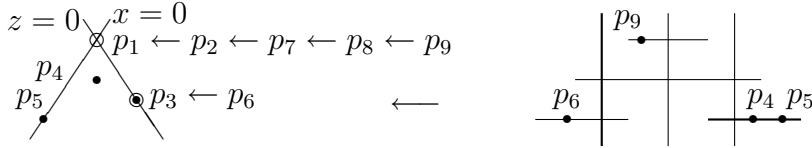
ものを Cremona isometry といい、それらのなす群を $\text{Cr}(X)$ と書きます。

$\text{Cr}(X)$ は marking の変換を通して曲面の族に作用し、 $D_i^{(1)}$ 型、 $E_i^{(1)}$ 型においては、これが Painlevé 方程式の対称性になります。我々は $\dim |-\mathcal{K}_X| = 0$ となる全ての generalized Halphen 曲面 X にたいして、 $\text{Cr}(X)$ の構造を決定しました。ほとんどの曲面についてはルート系 $R^\perp$ に関するアフィン Weyl 群によって記述されます。さらに曲面の族への作用の具体的な実現は適当なブローアップとブローダウンによって構成できますから、簡単に計算することができます。

Painlevé 微分方程式自身についてはこのアフィン Weyl 群対称性の平行移動部分が離散 Painlevé 方程式として知られる差分系になっていることがわかります。曲面の退化とともに連続極限がとれて、その極限として Painlevé 微分方程式が得られます。

5 例

例としてまず $E_6^{(1)}$ 型の曲面を見てみましょう。



$$\begin{aligned}
 p_1 : (0 : 1 : 0) &\leftarrow p_2 : \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x} \right) = (0, 0) \leftarrow p_7 : \left(\frac{x}{y}, \frac{yz}{x^2} \right) = (0, 1) \leftarrow \\
 &\leftarrow p_8 : \left(\frac{x}{y}, \frac{y(yz - x^2)}{x^3} \right) = (0, s) \leftarrow \\
 &\leftarrow p_9 : \left(\frac{x}{y}, \frac{y(y(yz - x^2) - sx^3)}{x^4} \right) = (0, -a_0 + s^2), \\
 p_4 : (0 : 0 : 1), \quad p_5 : (0 : a_1 : 1), \\
 p_3 : (1 : 0 : 0) &\leftarrow p_6 : \left(\frac{z}{x}, \frac{y}{z} \right) = (0, -a_2).
 \end{aligned}$$

上記は $(x : y : z)$ を斉次座標とした射影平面を九回ブローアップして $E_6^{(1)}$ 型曲面をつくるさいの、九点の位置を parameterize したものです。この描き方だと曲面の張り合わせのデータを与えるかわりに九点の位置だけで曲面の全てのデータを与えることができるので、記述は非常に簡単になっていることができると思います。

この記述はまだ

$$(a_1, a_2, a_0; s; x : y : z) \sim (\mu^2 a_1, \mu^2 a_2, \mu^2 a_0; \mu s; x : \mu y : \mu^{-1} z) \quad \mu \in \mathbb{C}^*$$

のような射影変換で適当に正規化することができます。

では周期写像の方はどうでしょうか。これはルート系 $E_6^{(1)\perp} = A_2^{(1)}$ の基底を

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_5, & \alpha_2 &= \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_6, \\ \alpha_0 &= 2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8 - \mathcal{E}_9\end{aligned}$$

と取ることで

$$\chi(\alpha_1) = a_1, \quad \chi(\alpha_2) = a_2, \quad \chi(\alpha_0) = a_0$$

と計算できます。ただし、ここで $\mathcal{E}_0$ は射影平面上の直線の $E_6^{(1)}$ 型曲面への引き戻しのなす線形同値類、 $\mathcal{E}_i$ ($i \neq 0$) は p_i に対応した例外曲線の線形同値類です。また値の計算については有理 2-形式の取り方が定数倍だけ決まらないことから、九点による parameterization と同じように

$$(a_1, a_2, a_0) \sim (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_0) \quad \mu \in \mathbb{C}^*$$

のような変換で適当に正規化することができます。周期写像で出てこない $s \in \mathbb{C}$ が Painlevé IV 型方程式の独立変数になります。

さて、 $E_6^{(1)}$ 型曲面の $\text{Cr}(X)$ は $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \simeq \text{Aut}(E_6^{(1)}) \ltimes W(A_2^{(1)})$ となります。 $\text{Cr}(X)$ の元は $Q(A_2^{(1)})$ の自己同型を引き起こすので、その意味で $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) = \text{Aut}(A_2^{(1)}) \ltimes W(A_2^{(1)})$ と思うのが自然なのですが、実際に計算をするときには Dynkin automorphism の作用は $R^\perp$ の基底の取り替えと見るより R の基底、つまり D の既約成分の取り替えと見た方がわかりやすいのでそのように考えます。

$$\begin{aligned}-\sigma_{(15)(24)} &: (a_1, a_2, a_0; s; x : y : z) \mapsto (-a_2, -a_1, -a_0; s; yz : -xy : -zx), \\ -\sigma_{(10)(26)} &: (a_i; s; x : y : z) \mapsto (-a_1, -a_0, -a_2; s; xz : -(yz - x^2 - sxz) : z^2), \\ w_1 &: (a_i; s; x : y : z) \mapsto (-a_1, a_2 + a_1, a_0 + a_1; s; x : y - a_1z : z), \\ w_2 &= \sigma_{(15)(24)} \circ w_1 \circ \sigma_{(15)(24)}, \quad w_0 = \sigma_{(10)(26)} \circ w_2 \circ \sigma_{(10)(26)},\end{aligned}$$

ここで (15)(34) というのは D_1 と D_5 , D_3 と D_4 を取り替えることを意味し、マイナスは $\chi(\delta)$ ($\delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_0$) の値の符号が入れ替わることを意味しています。ただし

$$\begin{aligned}D_1 &= \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_5, & D_2 &= \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, & D_3 &= \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_7, \\ D_4 &= \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3, & D_5 &= \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_6, \\ D_6 &= \mathcal{E}_7 - \mathcal{E}_8, & D_0 &= \mathcal{E}_8 - \mathcal{E}_9\end{aligned}$$

とします。

さらに a_1, a_2, a_0, s とともに $\mathbb{C}(a_1, a_2, a_0, s, x/z, y/z)$ の生成元として $f = -\frac{y}{x}$, $g =$

$s - \frac{x}{z} + \frac{y}{x}$ を取ると

$$\begin{aligned} w_1 : (a_1, a_2, a_0; s; f, g) &\mapsto \left(-a_1, a_2 + a_1, a_0 + a_1; s; f + \frac{a_1}{s - f - g}, g - \frac{a_1}{s - f - g} \right), \\ w_2 : (a_1, a_2, a_0; s; f, g) &\mapsto \left(a_1 + a_2, -a_2, a_0 + a_2; s; f, g + \frac{a_2}{f} \right), \\ w_0 : (a_1, a_2, a_0; s; f, g) &\mapsto \left(a_1 + a_0, a_2 + a_0, -a_0; s; f - \frac{a_0}{g}, g \right), \\ -\sigma_{(15)(24)} : (a_1, a_2, a_0; s; f, g) &\mapsto (-a_2, -a_1, -a_0; s; s - f - g, g), \\ -\sigma_{(10)(26)} : (a_1, a_2, a_0; s; f, g) &\mapsto (-a_1, -a_0, -a_2; s; g, f) \end{aligned}$$

というようにきれいに書くことができます。この表示が野海、山田両氏によって導入された対称形式です。

ここまでで Painlevé IV 型方程式の初期値空間と Bäcklund 変換を構成できたわけですが、こんどは Painlevé 微分方程式自身を得る過程を見てみましょう。例として今構成した $E_6^{(1)}$ 型曲面を $E_7^{(1)}$ 型曲面に退化させて、Painlevé II 型微分方程式を得る計算を取り上げます。

$\widetilde{W}(A_2^{(1)})$ の平行移動の一つ T は

$$\begin{aligned} T &= w_2 \circ w_1 \circ \sigma_{(15)(24)} \circ \sigma_{(10)(26)} : \\ (a_i; s; f, g) &\mapsto \left(a_1, a_2 - \lambda, a_0 + \lambda; s; s - f - g + \frac{a_0}{g}, s - g - \bar{f} - \frac{a_2 - \lambda}{\bar{f}} \right) \end{aligned}$$

のように書くことができます。これは離散 Painlevé II 型方程式 $d-P_{II}$ とよばれる非自励非線形の差分方程式のワンステップになっています。

$E_6^{(1)}$ 型曲面を $E_7^{(1)}$ 型曲面に退化させるために p_3 を p_1 の infinitely near な点に持っていきます。このため $E_6^{(1)}$ 型曲面の新しい座標を $(\tilde{x} : \tilde{y} : \tilde{z}) = (-x : (x + y)/\epsilon : \epsilon^2 z)$ のように取ります。このとき

$$\begin{aligned} s &= 2, \quad a_0 = 1 + \tilde{s}\epsilon^2 + \beta_0\epsilon^3, \quad a_2 = -1 - \tilde{s}\epsilon^2 + \beta_2\epsilon^3, \quad a_1 = \beta_1\epsilon^3 \\ (\tilde{a}_0 &= \beta_0 + \beta_2, \quad \tilde{a}_1 = \beta_1) \end{aligned}$$

と置き、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることによって $E_7^{(1)}$ 型曲面が得られます。

$\tilde{f} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} - \frac{1}{2}\epsilon\frac{\tilde{x}}{\tilde{z}} \ (\rightarrow \tilde{y}/\tilde{x}), \ \tilde{g} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{z}} - \epsilon\frac{\beta_0 - \beta_2}{4} \ (\rightarrow \tilde{x}/\tilde{z})$ とすると差分方程式 $d-P_{II}$ は Painlevé II 型微分方程式

$$\begin{aligned} \tilde{f}' &= \tilde{f}^2 - 2\tilde{g} - \tilde{s}, \\ \tilde{g}' &= \beta_1 - 2\tilde{f}\tilde{g}, \\ \tilde{s}' &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_0 \end{aligned}$$

となります。こうして曲面論のみから Painlevé II 型微分方程式を得ることができました。

6 理論から得られる知見

Painlevé 微分方程式のアフィン Weyl 群対称性はその由来がはっきりしたものではありませんでしたが、この理論では $\text{Pic}(X)$ のなかにルート系が構成できることから、その来歴が明らかなものとしてみなせるようになりました。

離散 Painlevé 方程式については幾何学的な構成を与えたことで、知られている多くの例の統一的理解をえました。とくに曲面が multiplicative type のとき q -差分方程式、additive type のとき普通の差分方程式が得られるのに対応して、elliptic type の場合に、係数が時間発展にたいし楕円関数の加法公式にしたがって変化する、楕円差分方程式でもいべき離散系が、最も退化していない曲面の対称性から得られます。

また曲面の同型類を parametrize することにより、Painlevé 方程式に現れる係数や独立変数の幾何学的特徴づけを得ました。とくに、Painlevé 微分方程式の Riccati 型の特殊解の存在と nodal root の存在を parameter の値を介して、対応づけました。さらに Painlevé 方程式は楕円関数のみたす微分方程式を極限として持ちますが、これらは曲面論においては $\dim |-\mathcal{K}_X| = 1$ の場合の有理楕円曲面に対応していることがわかります。