Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-06-29

２変数ガルニエ系の双線形形式について

津田，照久

(Citation)
Rokko Lectures in Mathematics,07. パンルヴェ方程式の眺望:173-182

(Issue Date)
2000

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/81001112

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/81001112

KOBE UNIVERSITY

2変数ガルニエ系の双線形形式について

津田 照久 (東京大学数理科学研究科)

1 はじめに

「パンルベ方程式 P_J $(J = I, \ldots, VI)$ はある2階線形常微分方程式

$$L_J : \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = R_J(x, \lambda, t)y$$

の**モノドロミーやストークス係数を不変にする変形理論**から導かれる.」

このことは, P_{VI} については Fuchs, 他の P_J $(J = I, \ldots, V)$ については Garnier によって最初にしめされました. ここでは変形理論について触れることはしませんが, パンルベ方程式 P_J たちの「生まれ故郷」である2階線形常微分方程式 L_J の特異点の個数等を下表にまとめておきます.

	L_J の特異点の個数	「4の分割」
P_{VI}	確定特異点4つ	$(1,1,1,1)$
P_V	確定特異点2つ + 1級不確定特異点1つ	$(1,1,2)$
P_{IV}	確定特異点1つ + 2級不確定特異点1つ	$(1,3)$
P_{III}	1級不確定特異点2つ	$(2,2)$
P_{II}	3級不確定特異点1つ	(4)

上表で「4の分割」とあるのは 特異点に

$$\text{確定特異点} = 1, \quad \text{1級不確定特異点} = 2, \quad \text{2級不確定特異点} = 3, \ \ldots$$

のように重みをつけておいて, 例えば P_{IV} なら

$$\text{確定特異点1つ} + \text{2級不確定特異点1つ} \to (1,3)$$

というようにある「4の分割」を対応させているわけです.
(なお P_I はパラメタを含まないので, これからの話では仲間外れにしておきます.)

上の表にみるように

「パンルベ方程式とは,『4の分割』に付随した方程式たち」

と理解することができそうです.
では「5の分割」,「6の分割」, ... に付随した方程式を考えることはできるのでしょうか?

2 ガルニエ系とは

ガルニエ系とは, パンルベ方程式の一般化 (多変数化) の１つです.

- (元祖) ガルニエ系 ([5], [2])
  R.Garnier による P_{VI} の N 変数への一般化.
  確定特異点 $N+3$ 個 ($N=1,2,\dots$) をもつ２階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形から得られる. $(1,1,\dots,1)$ 系列.
- H.Kimura の２変数退化ガルニエ系 ([4], [3])
  ２変数 (元祖) ガルニエ系の退化. 「５の分割」に付随した方程式たち.
- Okamoto, Liu の A_g 系 ($g=1,2,\dots$)([1], [7])
  $(4)-(5)-(6)-\cdots$ 系列.
- Kawamuko の多変数 IV 型パンルベ系 ([6])
  $(1,3)-(1,4)-(1,5)-\cdots$ 系列.

(上に列挙した方程式たちの出どころについては文献を当たってみてください.)

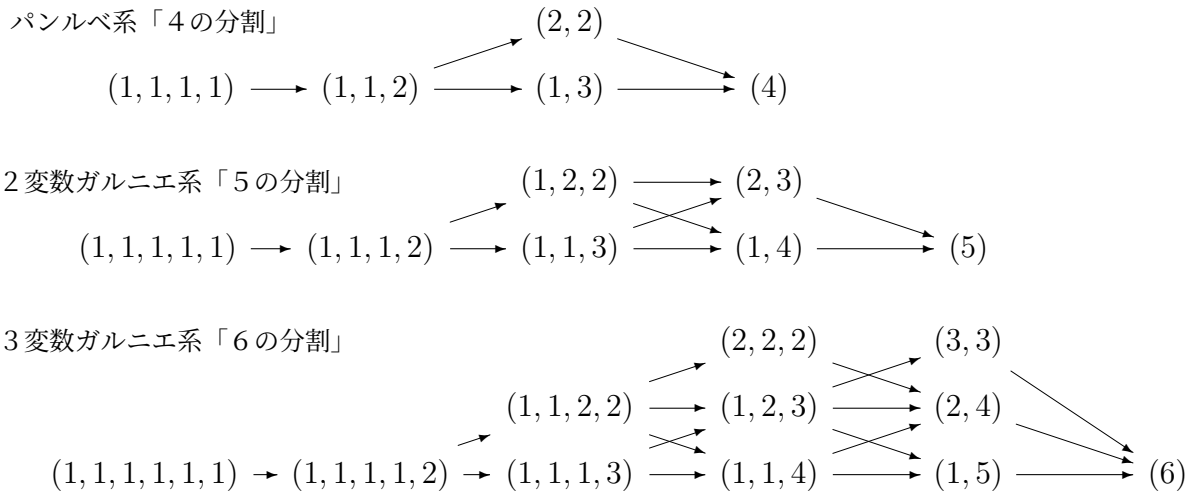

図 1: パンルベ, ガルニエ系の地図

上の地図を見ていると

「任意の自然数 $N(\geq 4)$ の分割に対してそれに付随する方程式系があるだろう」

と想像できて, 少しだけ気が遠くなります.

3 Painlevé II について

ガルニエ系の話の準備として, 1 変数の場合についてしばらくおさらいします. P_I (これはパラメタをもたない) をのぞいた 5 つのパンルベ系の中で, 1 番かんたんな P_{II} を例にとります. パンルベ II 型方程式は

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = 2\lambda^3 + t\lambda - \left(\kappa_\infty + \frac{1}{2}\right), \qquad (\text{パラメタ}\kappa_\infty \in \mathrm{C})$$

で与えられます. あとの話の都合上 $\lambda = 2^{-1/3}u$, $t = 2^{1/3}z$ と変数を書き直して

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 2u^3 + 2uz - 2\kappa_\infty - 1 \tag{1}$$

この小文では, これをパンルベ II 型方程式 P_{II} と呼ぶことにします.
また (1) は次のハミルトン系 $\mathcal{H}_{II}(u, v, z, L; \kappa_\infty)$:

$$L = v^2 - (u^2 + z)v + \kappa_\infty u$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dz} = \dfrac{\partial L}{\partial v} = 2v - u^2 - z \\ \dfrac{dv}{dz} = -\dfrac{\partial L}{\partial u} = 2uv - \kappa_\infty \end{cases} \tag{2}$$

と同値ですので, これからはこのハミルトン系 $\mathcal{H}_{II}(u, v, z, L; \kappa_\infty)$ で物を考えることにします.

ベックルント変換

天下りに変数変換 $\rho_\infty : (u, v; z) \to (U, V; z)$ を以下で与えます.

$$V = -v + u^2 + z \tag{3}$$

$$U = -u + \frac{\kappa_\infty + 1}{-v + u^2 + z} \tag{4}$$

上は u, v について解けるので, それを (2) に代入すると $(U, V; z)$ についての方程式系が得られます.

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dz} = 2V - U^2 - z \\ \dfrac{dV}{dz} = 2UV - (\kappa_\infty + 1) \end{cases} \tag{5}$$

あら不思議！ これはもとの系 (2) とまったく同じ格好をしています. パラメタ $\kappa_\infty \to \kappa_\infty + 1$ に変わったこと (平行移動) をのぞけば！

この ρ_∞ のような変数変換を「**パンルベ系のベックルント変換**」とよびます.
少し正確にいいますと, ベックルント変換とは

「**従属変数 u, v の有理変換で, パラメタを動かすことは許して系を不変にするようなもの**」
とここでは定義します.
また P_{II} には次の自明な対称性があります.

$$s : u \to -u, \quad \kappa_\infty \to -\kappa_\infty - 1$$

の置き換えで (1) は不変です. ((1) が両辺とも u について奇であることに気をつければあきらか).
この s もハミルトン系のコトバに直せて, パラメタ $\kappa_\infty \to -\kappa_\infty - 1$ と変える (つまり $\kappa_\infty = -1/2$ での鏡映) ベックルント変換になっています.
実は P_{II} のベックルント変換 (群) は, 平行移動 ρ_∞ と 鏡映 s で生成されることが知られていて, それは $A_1^{(1)}$ **型のアフィン・ワイル群**と同型な群になります.

注意 ベックルント変換 ρ_∞ について.
系 (5) についてのハミルトニアン $\overline{L}$ は

$$\overline{L} = V^2 - (U^2 + z)V + (\kappa_\infty + 1)U$$

と書かれます. これに (3), (4) を代入すると

$$\begin{aligned} \overline{L} &= v^2 - (u^2 + z)v + (\kappa_\infty + 1)u \\ &= L + u \end{aligned} \tag{6}$$

となります. つまり

$$\rho_\infty : (u, v, z, L) \to (U, V, z, \overline{L})$$

は「**ハミルトニアンの形を変えない**」(平行移動の) 変換になっています.

4 Painlevé II の双線形形式

パンルベ系の双線形形式は, いろいろな方がいろいろな双線形形式について論じていますが, ここでは「K.Okamoto による方法」について述べてみます. (K.Okamoto はその方法でパンルベ系, および A_2 系について双線形形式を構成しています. [1] 参照.)
ひとことで言うと,

双線形形式をつくる Okamoto's idea
$\Vert$
ρ_∞ の様な「平行移動」の変換 から 2つの τ 函数 を用意して構成する.

ともかく P_{II} の場合で具体的に見てみることにしましょう.

2つのハミルトン系 $\mathcal{H}_{II}(u,v,z,L;\kappa_\infty)$ と $\mathcal{H}_{II}(U,V,z,\overline{L};\kappa_\infty+1)$ のハミルトニアンの差を

$$\overline{L}-L \;=\; u \;=:\; X$$

とおきます. またハミルトニアン $L(u,v,z)$ の微分を計算します.

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dz} &= \frac{\partial L}{\partial u}\frac{du}{dz}+\frac{\partial L}{\partial v}\frac{dv}{dz}+\frac{\partial L}{\partial z}\\ &= \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial L}{\partial v}+\frac{\partial L}{\partial v}\left(-\frac{\partial L}{\partial u}\right)+\frac{\partial L}{\partial z}\\ &= \frac{\partial L}{\partial z}\\ &= -v\end{aligned}$$

すると, もとの系 (2) の1式目:

$$\frac{du}{dz}=2v-u^2-z$$

は X, L を用いて

$$\frac{dX}{dz}=-2\frac{dL}{dz}-X^2-z \tag{7}$$

と書き直すことができます.
また当然 $X(=u)$ は (1) を満たすので

$$\frac{d^2X}{dz^2}=2X^3+2Xz-2\kappa_\infty-1 \tag{8}$$

が成り立ちます.

まとめ

じつは

$$P_{II}\Longleftrightarrow\begin{cases}(7)\;\; \dfrac{dX}{dz}=-2\dfrac{dL}{dz}-X^2-z\\[2ex] (8)\;\; \dfrac{d^2X}{dz^2}=2X^3+2Xz-2\kappa_\infty-1\end{cases}$$

であることがいえます. (ようするに $(u,v,z)\leftrightarrow(X,L,z)$ の変数変換.)
この2式 (7),(8) から P_{II} の双線形形式はただちに導かれますが, その前に広田微分のはなしをしておく必要があります.

広田の双線形作用素 (広田微分)

z の関数 $g(z)$, $f(z)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}g\cdot f &= \frac{dg}{dz}f - g\frac{df}{dz}\\
\mathcal{D}^2g\cdot f &= \frac{d^2g}{dz^2}f - 2\frac{dg}{dz}\frac{df}{dz} + g\frac{d^2f}{dz^2}\\
\mathcal{D}^3g\cdot f &= \frac{d^3g}{dz^2}f - 3\frac{d^2g}{dz^2}\frac{df}{dz} + 3\frac{dg}{dz}\frac{d^2f}{dz^2} - g\frac{d^3f}{dz^3}\\
&\cdots
\end{aligned}$$

のように定義された作用素 $(g,f)\mapsto \mathcal{D}^jg\cdot f$ を**広田微分**といいます. $(j=1,2,\ldots)$
(広田微分はもともとは KdV 方程式などのソリトン方程式の解を構成するために R.Hirota によって導入されたものです).
天下りですが以下の公式が成り立ちます.

- 公式

$$\frac{d}{dz}\log\frac{g}{f} = \frac{\mathcal{D}g\cdot f}{g\cdot f} \tag{9}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\log gf = \frac{\mathcal{D}^2g\cdot f}{g\cdot f} - \left(\frac{\mathcal{D}g\cdot f}{g\cdot f}\right)^2 \tag{10}$$

$$\frac{d^3}{dz^3}\log\frac{g}{f} = \frac{\mathcal{D}^3g\cdot f}{g\cdot f} - 3\frac{\mathcal{D}^2g\cdot f}{g\cdot f}\frac{\mathcal{D}g\cdot f}{g\cdot f} + 2\left(\frac{\mathcal{D}g\cdot f}{g\cdot f}\right)^3 \tag{11}$$

上の公式の証明は, たとえば (9) は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\log\frac{g}{f} &= g'/g - f'/f\\
&= \frac{g'f - gf'}{g\cdot f}\\
&= \frac{\mathcal{D}g\cdot f}{g\cdot f}
\end{aligned}$$

といったように単純計算により確かめられます.
さあ準備がととのったところでいよいよ P_{II} の双線形形式をあたえましょう.

P_{II} の双線形形式

2つの τ 函数 f, g を次のように導入します.

$$L = \frac{d}{dz}\log f, \quad \overline{L} = \frac{d}{dz}\log g \tag{12}$$

つまり 2 つのハミルトン系 $\mathcal{H}_{II}(u,v,z,L;\kappa_\infty)$ と $\mathcal{H}_{II}(U,V,z,\overline{L};\kappa_\infty+1)$ の τ 函数 をそれぞれ f, g とおいていると思ってください.

ここでもう 1 度

$$P_{II} \Longleftrightarrow (7),(8)$$

であることを思い出しておきます.

(7) は $\overline{L} = L + X$ に気をつけると

$$\frac{d}{dz}(\overline{L}+L) = -(\overline{L}-L)^2 - z$$

と同値. また τ 函数の定義 (12) によって

$$\frac{d^2}{dz^2}\log gf = -\left(\frac{d}{dx}\log\frac{g}{f}\right)^2 - z \tag{13}$$

と τ 函数のコトバに直せます. ところで上式は公式 (9), (10) から

$$\frac{\mathcal{D}^2 g\cdot f}{g\cdot f} = -z$$

と書けます. 両辺に gf を掛けて

$$(\mathcal{D}^2+z)g\cdot f = 0 \quad \text{(双線形形式 1 式目)}$$

が得られました!

同様に (8) から

$$(\mathcal{D}^3+z\mathcal{D}+2\kappa_\infty+1)g\cdot f = 0 \quad \text{(双線形形式 2 式目)}$$

が得られます.

まとめ：P_{II} の双線形形式

$$\begin{cases} (\mathcal{D}^2+z)g\cdot f = 0 \\ \\ (\mathcal{D}^3+z\mathcal{D}+2\kappa_\infty+1)g\cdot f = 0 \end{cases} \tag{14}$$

双線形形式を味わう

ここで双線形形式の「御利益」をいくつか見てみることにしましょう.

- 観察その 1 (超幾何型の特殊解)
  (14) の 2 式目は 1 式目に形式的に $\mathcal{D}$ を掛けたもの (+定数項) になっています. これに気をつけると, $\kappa_\infty = 0$ の時 $f =$ 定数. なる解があって, g は

  $$(\frac{d^2}{dz^2}+z)g = 0 \quad \text{(エアリーの微分方程式)}$$

  をみたすことがわかります.

また 変数変換 $\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} = \exp(-z^3/12)\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix}$ を施すと

$$(14) \Longleftrightarrow (14') \begin{cases} \mathcal{D}^2 G \cdot F = 0 \\ \\ (\mathcal{D}^3 - 2z\mathcal{D} + 2\kappa_\infty + 1)G \cdot F = 0 \end{cases}$$

- 観察その 2(有理関数の特殊解)
  $(14')$ 式を見ると $\underline{\kappa_\infty = -1/2}$ の時 G, F には微分作用素しか掛かりません. よって

  $$G, F = \text{定数}$$

  は解. すべての有理関数解はこれにベックルント変換を施すことで得られます.

5 ２変数ガルニエ系の双線形形式

２変数ガルニエ系 (「５の分割」に付随する方程式たち) の中で比較的あつかいやすい $(1,4)$ 型ガルニエ系 についてここでは考えることにします.

$(1,4)$ 型ガルニエ系

パラメタ $(\kappa_0, \kappa_\infty) \in \mathrm{C}^2$ として, 次であたえられる２次元ハミルトン系 :

$$\begin{cases} L_1 = v_1^2 - u_2 v_2^2 + v_1(u_2 - u_1^2 - z_1) \\ \qquad\qquad + v_2(-u_1 u_2 + u_2 z_2 + \kappa_0) + \kappa_\infty u_1, \\ L_2 = -2u_2 v_1 v_2 - u_2(u_1 + z_2)v_2^2 + v_1(-u_2 u_1 + u_2 z_2 + \kappa_0) \\ \qquad\qquad + v_2(-u_2^2 + u_2 z_2^2 + u_2 z_1 + u_1\kappa_0 + z_2\kappa_0) + \kappa_\infty u_2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial z_i} = \frac{\partial L_i}{\partial v_j}, \quad -\frac{\partial v_j}{\partial z_i} = \frac{\partial L_i}{\partial u_j} \qquad (i, j = 1, 2)$$

を $(1,4)$ **型ガルニエ系** とよびます. このハミルトン系について H.Kawamuko は [6] の中で「平行移動」のベックルント変換などについて論じています.

さて, 具体的な計算は省略しますが, この $(1,4)$ 型ガルニエ系の「双線形形式」も P_{II}

の場合と同様に 2つの τ 函数 $G(z_1, z_2)$, $F(z_1, z_2)$ を用いて

$$(15)\qquad \begin{cases} (\mathcal{D}_1^2 - \mathcal{D}_2)G \cdot F = 0 \\ (\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 - z_2\mathcal{D}_2 - \kappa_0)G \cdot F = 0 \\ (\mathcal{D}_1^3 - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 - 2z_1\mathcal{D}_1 + 2\kappa_\infty + 1)G \cdot F = 0 \\ (\mathcal{D}_1^2\mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_2^2 - (2z_2^2 + 2z_1)\mathcal{D}_2 - 2\kappa_0\mathcal{D}_1 - 2\kappa_0 z_2)G \cdot F = 0 \end{cases}$$

と作れます [8] . ここで $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ はそれぞれ z_1, z_2 についての広田微分.

双線形形式をよく見てみると [1]

$\underline{\kappa_0 = 0}$ の時, G, F **が** z_2 **によらない解がある** と分かります. このとき (15) の2式目, 4式目は「$0 = 0$」の自明な式になっています. つまり

$$(15) \longrightarrow (15*)\begin{cases} \mathcal{D}_1^2 G \cdot F = 0 \\ (\mathcal{D}_1^3 - 2z_1\mathcal{D}_1 + 2\kappa_\infty + 1)G \cdot F = 0 \end{cases}$$

と退化するような特殊解があるとわかります. ところで,

$(15*)$ は P_{II} の双線形形式 $(14')$ とまったく同じ格好をしています !

これはいったいどういうことなのでしょうか ?

6 ふたたび「パンルベ, ガルニエ系の地図」を眺める

ふたたび「パンルベ, ガルニエ系の地図」図 1 を眺めます (P_{II} は『分割 (4)』 に付随する方程式でした). 前節の最後に

> 『分割 $(1, 4)$』 に付随する方程式は『分割 (4)』 に付随する方程式の解で書かれる特殊解 を持つ [2]

ことを見ました. これをここだけの記号で

$$(4)eq \quad \subset \quad (1, 4)eq$$

[1] この小文では触れませんが双線形形式を見ることから「点対称」のベックルント変換を構成することもできます.

[2] もちろんこのことは (双線形形式を見なくとも) ハミルトン系を観察することで理解できます. Kawamuko はそれによって $(4)eq \subset (1, 4)eq$ を指摘しています.

と書くことにします．実は他のガルニエ系についても同様なことが起こっていて

$$\begin{aligned}(5)eq &\subset (1,5)eq\\ (1,1,2)eq &\subset (1,1,1,2)eq\\ (1,1,1,1)eq &\subset (1,1,1,1,1)eq\end{aligned}$$

などが今のところ確認できています．どうやら **１を付け加える** ことに何かがあるようです．

予想　$(\#)$ を自然数 N (≥ 4) の分割 として $(\#)eq \subset (1,\#)eq$ が起こる．

E-mail : tudateru@poisson.ms.u-tokyo.ac.jp

参考文献

[1] K.Okamoto : *The Hamiltonians associated with the Painlevé equations*, The Painlevé Property: One Century Later, eds. R.Conte (Springer,1999).

[2] H.Kimura and K.Okamoto : *On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier system*, J.Math.Pures et Appl., **63**(1984), 129-146.

[3] K.Okamoto and H.Kimura : *On particular solutions of the Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables* , Quarterly J. Math., **37**(1986), 61-80.

[4] H.Kimura : *The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure*, Ann.Mat.Pura Appl., **155**(1989), 25-74.

[5] K.Iwasaki, H.Kimura, S.Shimomura and M.Yoshida : From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions (Vieweg Verlag, Braunschweig, 1991)

[6] H.Kawamuko : *Studies on the fourth Painlevé equation in several variables*, Thesis,Univ.Tokyo.1997.

[7] D.Liu : *Holonomic deformation of linear differential equations of A_g type and polynomial Hamiltonian structure*, Thesis,Univ.Tokyo.1997.

[8] T.Tsuda : Master's thesis, Univ.Tokyo.2000. (予定)