



ユークリッド『図形分割論』 : 伝統と翻訳

三浦, 伸夫

(Citation)

国際文化学研究 : 神戸大学国際文化学部紀要, 4:111-145

(Issue Date)

1995-07

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD01)

<https://doi.org/10.24546/81001156>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/81001156>



ユークリッド『図形分割論』：伝統と翻訳*

三浦 伸夫

序

近年、ユークリッドの著作の歴史的研究が大いに進展するようになった。その主著『原論』はいうまでもなく、『反射光学』、『カノンの分割』、『天文現象論』など従来あまり取り上げられてこなかった著作に関しても、その原典編纂や詳細な研究が出現しつつある。しかし『図形分割論』という小編はそのギリシア語原典が早い時期に消失したこともあってほとんど研究対象にはなっていない。ところで『図形分割論』は何らかの形でアラビア語訳され、さらにそれに基づいたアラビア語著作が現存している。11世紀の数学者アッ＝シジュズィーの著作である。ウェブケはその写本をパリのビブリオテク・ナショナルで発見し、1851年にその仏訳を発表した¹。それを受けて1883年ファヴァロは、ピサのレオナルドの『実用幾何学』にはユークリッド『図形分割論』の抜粋が採用されていることを明らかにした²。そしてアーチボールドは1915年にウェブケの仏訳を今度は英訳し、その断片に欠けている証明をピサのレオナルドの抜粋に基づいて再構成し、内容分析を行った³。いずれにせよ今日まで『図形分割論』は原典ではなくウェブケの仏訳をもとにして論ぜられてきた。実際、ハイベルク＝メンゲの編纂した『ユークリッド全集』に含まれている『図形分割論』はこの仏訳なのである⁴。こうしたなかようやく1993年にホゲンダイクはウェブケの発見したアラビア語訳を編集校訂し、それに英訳を付けて発表した⁵。ここにいたって『図形分割論』研究史は新しい一歩を踏み出したといえてよい。

本稿では、まず『図形分割論』の伝承史を明らかにし、次いでその内容を史的脈絡の中で分析検討し、最後にアラビア語訳をもとにして和訳を付けておく⁶。

1. 『図形分割論』の伝承史

ユークリッド以前に図形分割に関する著作が書かれたという証言はなく、おそらく以下に見る図形分割という伝承はユークリッドを嚆矢とするものである。

(1) ギリシアの伝承

プロクロス (Proclus, 410-485)

ユークリッド『図形分割論』の最古のそしてギリシアにおける唯一の証言はプロクロス『ユークリッド「原論」第一巻注釈』のものであり、次のように述べられている。

というのも円は定義や概念において異なる部分に分割されることができ、各直線図形も同様である。これは実際『原論』の著者が『分割論』で行う仕事である。そこでは彼は与えられた図形をある場合には同じ図形に、またある場合には異なる図形に分割している⁷。

また他では、

この人 [=ユークリッド] には、[[『原論』の] ほかに多くの驚くべきほど正確で正しい認識の理論に満ちた数学的著作がある。それは『光学』と『反射光学』であり、さらに『音楽原論』であり、また『分割についての本』(περὶ διαιρέσεων βιβλίον) である⁸。

これらの証言から、ユークリッドが『図形分割論』を著したことはほぼ確実であろう。なおこのギリシア語の書名には「図形」はなく、またアラビア世界でも同様であるが⁹、音楽論である『カノンの分割』(κατατομὴ κανόνος, *Sectio canonis*) と区別するため、本論攷では『図形分割論』と呼ぶことにする。

アレクサンドリアのヘロン (Heron, c.100?)

その『測量術』(μετρικῶν) 全3巻のうちの第3巻には図形分割論を扱った23の命題が含まれている。なかにはユークリッドのものと共通した命題もあるが、その名前には言及されていない¹⁰。ユークリッドに見られないものとしては円錐や円錐台の分割がある。ヘロンのこの著作の特徴はアナリュシス(ἀναλύσις)が用いられていることである。すなわち、作図がなされたと想定して議論をすすめていくのである。また具体的な数値例も用いられ、しかもいくつかの場合には近似値が求められている。たとえば命題4は、「三角形ABCが与えられ、大きさが与えられた三角形DEFをそこから切り取り、三角形AEF, BFD, CDEが同じ面積になるようにせよ」であるが、以下のように行われている。ここではヒースの解釈にしたがって内容を述べておく¹¹。

まず、 $AF : FB = BD :$

$DC = CE : EA$ となるよ

うに、F, D, Eをとると、

3つの三角形は面積が等し

い(このことは証明されて

いないが、明らかである)。

したがってD, E, Fの位

置を求めればよい。

ADを結ぶ。

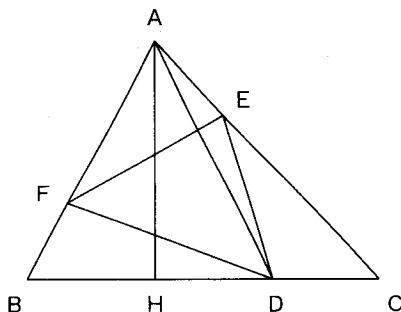


図1

$$BD : CD = CE : EA,$$

$$BC : CD = CA : AE,$$

$$\triangle ABC : \triangle ADC = \triangle ADC : \triangle ADE,$$

$$\triangle ABC : \triangle ABD = \triangle ADC : \triangle EDC$$

である。

ここで $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ とは既知である($\triangle DEF$ が既知なので)。

よって $\triangle ABD \cdot \triangle ADC$ が得られる。

したがって $AH^2 \cdot BD \cdot DC$ が得られる¹²。

よって $BD \cdot DC$ は既知となる.

BC は既知なので, D が求められる ($BD \cdot DC$ に等しく, しかも正方形だけ欠いている矩形を BC に面積付置する).

このあと, 具体的な数値が与えられる.

$AB=13$, $BC=14$, $CA=15$, $\triangle DEF=24$ とおく.

すると, $\triangle ABC=84$, $AH=12$ となる.

こうして, $\triangle EDC=20$, $AH^2 \cdot BD \cdot DC = 4 \cdot 84 \cdot 12 = 6720$.

よって, $BD \cdot DC = 6720 / 144 = 46\frac{2}{3}$.

したがって, $BD \approx 8^{13}$.

$BC : DC = CA : EA$ なので, $14 : 5\frac{1}{2} = 15 : \gamma$ とし, $\gamma = EA = 5\frac{25}{28}$.

同様にして, $FB = 5\frac{3}{28}$.

こうして, D , E , F が決定する.

ヘロンのこの書は, そこに見られる平方根近似法がアラビア数学でも見られることから, おそらくはアラビア語に翻訳されたと思われるが翻訳に関して詳細は不明である.

古代ギリシャにはユークリッド『図形分割論』に言及したものは他にはないが¹⁴, ユークリッドの図形分割という主題が後期ギリシャ数学に影響を与えたことはユークリッドの影響からして容易に想像できよう.

(2) アラビアの伝承

サービット・イブン・クッラ (Thābit ibn Qurra, 836-901)

アン・ナディームの『目録』(*al-Fihrist*) によると, ある未詳の人物がアラビア語に翻訳した『図形分割論』をサービット・イブン・クッラが改訂したとい

う¹⁵。彼はイスハーク・イブン・フナインがアラビア語に翻訳したユークリッド『原論』、『与件』を改訂したことが知られているので、この未詳の翻訳家はイスハーク・イブン・フナインであるのかもしれない。この改訂版は現存しないが、それへサービト・イブン・クッラがつけ加えた補遺の一部と考えられるものが残っている¹⁶。

アブル＝ワファー (Abū al-Wafā' al-Būzjānī, 940-997/98)

『技芸家に必要な幾何学作図についての書』(*Kitāb fī mā yahtāj ilaihi aṣ-ṣānī min al-ʿamāl al-handasiyya*, 990年以後) というアラビア語の数学書で、アブル＝ワファーは『図形分割論』からの抜粋を載せている。全12章のうち、とりわけ第7, 8, 9, 10章が三角形, 四角形, 円の分割にあてられている¹⁷。これは命題の証明を含み、次に挙げるアッ＝シジュズィーのものよりも数学的内容が完全であるのでそれより古いものであると考えられる。2つの写本で現存するが十分な研究はなされていない。

Istanbul, Aya Sofya 2753, f. 44.

Uppsala, Tornberg 324, Vet. 27, f. 39.

アッ＝シジュズィー (Abū Saīd Aḥmad ibn Muḥammad ibn ʿAbdaljalīl as-Sijzī, c. 945-c. 1020)

占星術で著名なアッ＝シジュズィーは『図形分割論』のすべての命題と、その中の4つの命題の証明を含んだ小著を残している。これは文体、証明の叙述形式などからユークリッド『図形分割論』の何らかのアラビア語訳とみなされ、ウェプケの発見したのがこれである。これはアッ＝シジュズィーの原本を1259 A.D. (657H.) に書き写したものである¹⁸。現存写本は一つのみ。

Paris, Bibliothèque Nationale Fonds Arabe, 2457, 53b-55b¹⁹.

『様々な幾何学的問題』(*Masā'il mutafarriqa handasiya*)

作者未詳のこの断片は15の幾何学的問題を含む。命題5は「ユークリッドの分割の書から」で始まり、角の三等分を扱った命題6は「それ [= 『図形分割

論』の翻訳者」のものとされている。この写本はショイが発見し、その内容が紹介されている²⁰。作者はアブー・バクル (Abū Bakr) と考えられるが²¹、この人物に関しては詳細不明。写本はつぎのものである。

Cairo, Dār al-Kutub Muṣṭafā Fāḍil Riyāḍa 41m.

ラテン世界へ進む前にアル＝バグダーディーについてどうしても言及しておかねばならない。

(3) アル＝バグダーディーの『図形分割論』

1570年にコンマンディーノ (Federico Commandino, 1509-1575) によって『平面分割論』という表題を含むラテン語の書物が公刊された²²。これは近年になるまでユークリッドの『図形分割論』のラテン語訳であるとみなされていた。この原写本は本来ジョン・ディー (John Dee, 1527-1608) が発見したもので、彼はその写本に付けた題ではマホメトゥス・バグデディヌス (Machometus Badgadinus) のものとしながらも、プロクロス『ユークリッド「原論」第一巻注釈』に『図形分割論』の書名が言及されていることからそれをユークリッドの作品であるとみなした。ディーは1563年にウルビノを訪問した際それを持参し、多くの古代ギリシア数学書の印刷刊行を計画しギリシア数学の復興を企画していたコンマンディーノに出版するよう手渡した。コンマンディーノはそれに自分自身が考案した問題とディーの序文とをつけ加え公刊し、しかも同年、コンマンディーノの弟子のよるそのイタリア語訳も現れた²³。さらにこれはちに英訳され、英訳ユークリッド『原論』のレイボーン版(1660)、リーク＝サール版 (1661) にも収録された。最終的にこのラテン語著作は、最初のユークリッド全集であるグレゴリー版『ユークリッド全集』にユークリッド著として収められた²⁴。したがって少なからず読まれたと推定される。しかし今日、これはユークリッドの『図形分割論』ではもはやなく、アル＝バグダーディー (Abū Bakr Muḥammad ibn Abdelbāqī al-Bagdadī, 1441年没) によるアラビア語論文のラテン語訳とみなされている。ただしアラビア語原文は現存しな

い。図形分割という主題は似てはいるが、真作に近いとみなされるウェブケが発見したアラビア語版と内容がかなり異なるからである。

これは22の命題から成り、三角形（命題1-6）、平行四辺形（命題11）、台形（命題8, 12, 13）、四角形（命題7, 9, 14-16）、五角形（命題17-20, 22）の分割、および補助定理（命題21）である。ただしユークリッドに見られる円の分割はここにはない。ユークリッドの著作と誤解されたその他の理由は、叙述がユークリッド的であるということによる。つまり、(1)まず命題が述べられ、次に作図、そして証明が整然と続くという構成、(2)証明に使用する定理がユークリッド『原論』から数多く引き出されていること（『原論』という名前には言及されていないが、その巻数と命題番号は記されている）、(3)そして最後に必ず「これが証明すべきことであつた²⁵⁾」という文が与えられていることである。これらのことからディーがユークリッド真作とみなしたのもっともなことであつた。

(4) ラテンの伝承

アブラハム・バル・ヒッヤ (Abraham bar Hiyya ha-Nasi, fl. 1136)

ラテン名サバソルダ (Savasorda) というバルセロナの学者である。その『面積の書』(Hibbūr ha-meshīḥah we-ha-tishboret, 1116) は本来ヘブライ語の著作であるが、その友人でかつバルセロナで活躍した翻訳家ティボリのプラトーネ (Platone di Tivoli) が翻訳したラテン語訳 (Liber embadorum, 1445年完成) が残されている。その第3章は図形分割で、「仲間と遺産相続人の間での土地や家の分割」を扱い、29個の命題からなる²⁶⁾。主題は実用的であるが、記述は『図形分割論』と同じく数学的である。そのほぼ三分の二は次のピサのレオナルドのものと内容が同一だが、用語法は異なり、しかも証明、叙述は簡略化されている。アラビア語の音訳が見られることから²⁷⁾、この書は本来アラビア語の著作をもとにしたものであつたろうと考えられる。なお、本書は2次方程式を扱った最初のラテン語著作として重要である。

クレモナのジェラルド (Gerardo Cremonese, c.1114-1187)

12世紀ルネサンス最大の翻訳家。アラビア語からラテン語へ翻訳した学術書は71種にもおよび、その19番目に『分割の書』(*Liber divisionum*)が含まれている²⁸。その作者は記されていないが、ユークリッドの『図形分割論』であると考えられる。このラテン語訳は現存しない。

ピサのレオナルド (Leonardo Pisano, 1170または1180-1240以降)

ピサのレオナルドの『実用幾何学』(*Practica geometriae*, 1220) はユークリッド、プトレマイオス、アルキメデスの数学、そしてアラビアの代数学を含む浩瀚な幾何学書である。この第4部は「共同者たちにすべての土地を分割すること」を主題とする²⁹。だが実際その内容はユークリッド『図形分割論』のアラビア語版にきわめて類似し、それを展開したものであることは疑いない。レオナルドは今は消失したジェラルド訳を利用したと考えられる³⁰。このレオナルドの著作に基づいてアーチボールドはアラビア語版断片しか残されていないユークリッド『図形分割論』を復元しようとしたのであった。ファヴァロの数え方を採用すると、そこには総計57の命題がある³¹。命題数、証明の詳細さから、この第4部は『図形分割論』の伝統中もっとも詳しいものである。それはレオナルドが別証明を数多くつけ加えているからに他ならない。この第4部はさらに4つに分けられ、分割される図形ごとにまとめられている——三角形(命題1-14)、四角形(命題15-41)、多角形(命題42-44)、円とその部分(命題45-57)。各図形はさらに、二等分、複数個の等しい部分、与えられた比をもつふたつの部分、そしてあたえられた比をもつ複数個の部分、に分割される。レオナルドの方法の特徴は、彼の他の著作でも同様、しばしば数値例を挙げ具体的に大きさを計算していること、および別証明を数多く列挙していることである。

ゲラルド・ディ・ディーノ (Cristofano di Gherardo di Dino, fl. 1428-1442)

ピサ市民で算法教師であった彼は、ピサのレオナルドの『実用幾何学』の一部を要約し、イタリア語に翻訳した。その『幾何学の実際』(*La pratica di*

geometria) はレオナルドの著作に含まれる図形分割論を収録している³²。一般に算法教師の扱う幾何学は図形の定義など初等入門の問題がほとんどであるが、ディーノのように図形分割を論じた者もいた。

ヨルダヌス(Jordanus Nemorarius, fl. 1230-60)

ヨルダヌスの『フィロデグニ』(*Liber philotegni*)³³は彼の『三角形論』(*Liber de trianglis Jordani*)の抜粋であるが、ここにも図形分割が扱われている。全部で64ある命題のうち、命題21, 22, 23, 25がユークリッド『図形分割論』の命題3, 25, 18, 13にそれぞれ対応する。ヨルダヌスの書には証明が含まれているがそれはレオナルドのものと異なることから、両者の間には関連はなく、むしろともに共通のラテン語原典を用いたと考えられる。おそらくジェラルド訳の『図形分割論』であろう。

ルカ・パチオリ(Luca Pacioli, c. 1445-1517)

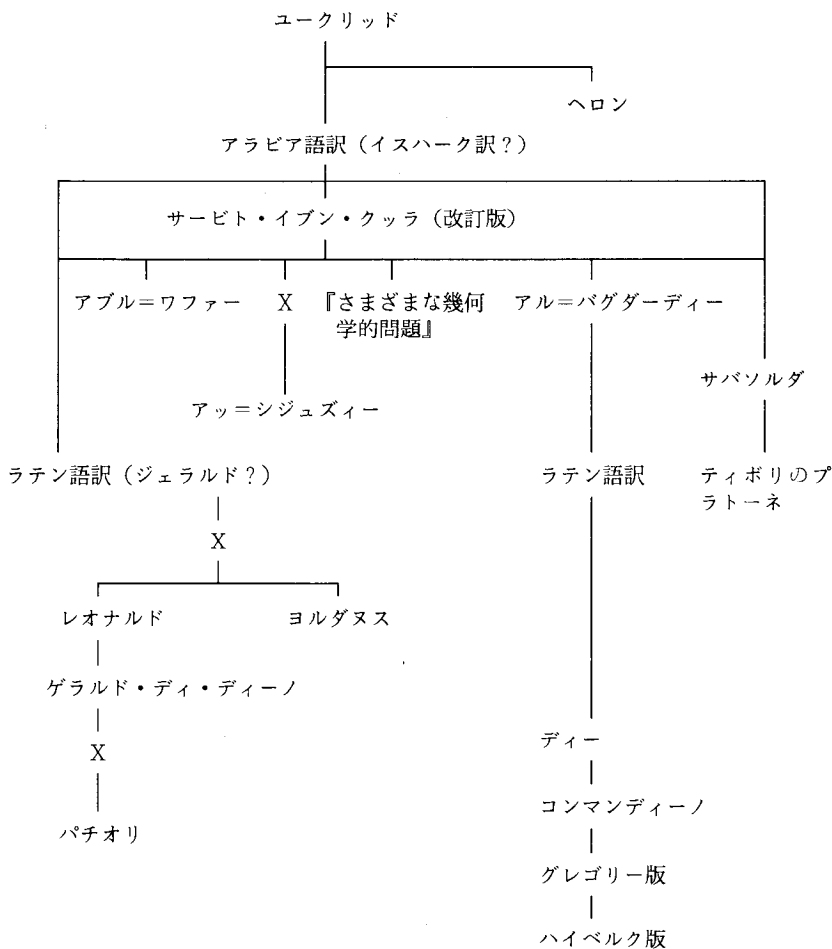
『算術、幾何学、比、および比例に関する大全』(*Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità...*, 1494; 通常その表題冒頭の一語をとって『スンマ』と称される)は、レオナルド以来の中世西欧数学の伝統の総決算を示す書物である。その幾何学の章で図形分割が扱われている³⁴。内容はレオナルドの書物をほぼイタリア語訳したものであるが、証明はしばしば簡約されている。なお、ゲラルド・ディ・ディーノの著作とは内容、用語法が異なる。

カルダーノ(Girolamo Cardano, 1501-1576)

『実用算術』(*Practica Arithmeticae*, 1539)の18, 19章は平面と立体の測定であるが、この18章には「土地分割」という項目がある³⁵。三角形から始まる正多角形の土地を、頂点から引かれた直線、対角線、そして辺に平行な線によって分割する方法が論じられている。この章の冒頭では様々な大きさの単位が説明され、分割は具体的数値とともに行われ、また弦の表を用いていることなどから、ユークリッドの著作とはかなり異なり、実用的傾向を備えた著作で

ある。この頃から土地測量の実用書が頻繁に印刷刊行されるが、それらはユークリッドとは直接には結びつかない。

以上のように、『図形分割論』の伝統はルネサンス期にいたるまで幾何学の重要なテーマの一つをなしたのである。伝承を図示すれば次のようになるであろう。



『図形分割論』の伝承図

2. 内容分析

(1) 構成

『図形分割論』は35の命題からなっており、アラビア語訳のその内容は次のように分類することができる³⁶。括弧内は命題番号。

1. 幾つの部分に分割されるか。

1. ふたつの等しい部分 (1,3,4,5,7,9,11,13,15,18,25,27)
2. 複数の等しい部分 (2,4,6,8,10,12,14,16,28)
3. 定められた比をもつふたつの等しい部分 (19,26,29,31,33,35)
4. 定められた比をもつ複数の等しい部分 (30,32,34,35)

2. 分割される図形

1. 三角形 (1,2,3,18,19,25,26,29,30)
2. 平行四辺形 (5,6,9,10)
3. 台形 (4,7,8,11,12,31,32)
4. 四角形 (13,14,15,16,33,34,35)
5. 円 (27,28)

3. 補助命題

1. 面積付置 (17)
2. 大小関係 (20,21,22,23,24)

したがってこれらをまとめると、『図形分割論』の主題は、「与えられた図形をひとつまたはそれ以上の直線で、等しい部分、または定められた比をもつ部分に分けること」³⁷と定式化でき、ひとつの主題をもった著作ということになる。命題はほぼ方法、図形別に整然と配列され、順次読み進めるのに便利なようになっている。

(2) 命題28の比較検討

命題28は、「与えられた円において、措定された部分をその円から切り取る二本の平行線を引きたい」というものである。この命題はその後多くの論著に

様々な形で見られるので興味深い。それぞれの特徴を検討することにしよう。
 ヘロンはこの問題に対応する命題18で次のように述べている。

与えられた円を二本の直線によって3つの等しい部分に分けること。この問題は明らかに有理 ($\rho\eta\tau\acute{o}\nu$) ではない。実用に便利のように、この分割をできるだけ正確に次のように行いなさい⁹⁸。

その後は次のようにすすめられる。

ΓB を円に内接する正三角形の一辺とする。
 それと平行に、中心 A を通る直径 $E \Delta$ を引く。図のように線分を結ぶと、円の切片 $B Z \Gamma \Delta$ はほぼ円の三分の一になる。その理由はこうである。

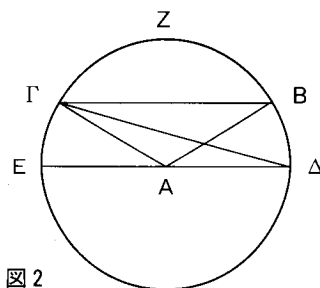


図2

ΓB は正三角形の一辺なので、扇形 $A \Gamma Z B = \frac{1}{3}$ 円。

$\triangle A B \Gamma = \triangle \Gamma \Delta B$ 。

したがって、円の切片 $\Gamma Z B + \triangle B \Gamma \Delta = \frac{1}{3}$ 円。

円の切片 $B \Gamma \Delta = \triangle B \Gamma \Delta +$ 円の切片 $B \Delta$ 。

ところが、円の切片 $B \Delta$ は小さいので知覚できず ($\acute{\alpha}\nu\epsilon\pi\alpha\iota\sigma\theta\acute{\eta}\tau\omicron\nu$) 無視できる。

このように、実用に供するようにと近似図形を求めていることがヘロンの特徴である。

さて、ユークリッドでは末尾は次のようになっている。

円からその四分の一あるいは五分の一あるいは他の任意の部分二本の平行線によって切り取りたいのなら、ここで示したように、この円の中に、内接する正方形あるいは〔正〕五角形の辺を描き、中心からそれに二本の直線を引き、以上と同じ方法で行えばよい。

しかし実際は任意の部分を切り取ることができるわけではない。円に内接する正多角形が描ける場合のみである。与えられた円に正方形、正五角形、正六角形、正十五角形を内接できることは、『原論』第4巻命題6, 11, 15, 16で示されている。だが任意の正多角形を内接できるとは限らない³⁹。したがってそのことを知っていたと思われるレオナルドでは三分の一の場合しか示されておらず、任意の部分とはいわれていない⁴⁰。

サービット・イブン・クッラはユークリッド『図形分割論』への補遺で、円の六分の一を切り取る場合を論じている。これはユークリッドのテキストから離れた別証明である。つまり、円に正三角形と正六角形とを内接し、三角形によって切り取られる円の切片が正六角形によって切り取られる円の切片の小さい側にある場合、それら二辺と円周とでつくる領域は円の六分の一となる、というものである⁴¹。図9にあてはめると、AGは正三角形の一辺なので、BD、DGは正六角形の一辺となる。したがってこの主張は内接する正三角形、正六角形によって円の六分の一を切り取ることをあらわし、命題28と関係づけられ、その補遺とみなされうる。

アブル＝ワファーでは次のようになっている。

どのようにして円ABGからその三分の一あるいは四分の一あるいは任意の部分を二本の平行線によって切り取ることができるか、というのなら、その円の中心をDとし、その円の中にその三分の一の弦（watar）つまり線分AGを引き、AGに平行に線分BDを引く。そしてBGを結ぶ。点Eで弧AGを二等分する。点EからBGに平行な線分EZを引く。すると二本の平行線の間にある図形ZBGEはその円の三分の一になり、これがその図である⁴²。

図はユークリッドの命題28と同じもの（図9）が用いられている。ただしアブル＝ワファーはこの命題に関しては証明をつけていない。アッ＝シジュズィーのアラビア語著作では中心Dがきちんと定められておらず、したがってこのアブル＝ワファーのほうが数学的に正確であり、そこではより原典に近いテクス

トが用いられたと考えられる。ここから、本来のユークリッドのテキストでは中心Dがきちんと定められていたこと、また任意の分割ができるという誤った付加がなされたのはおそらくアラビアであることが推定される。

また『様々な幾何学的問題』では次のようになっている。図形を示す文字記号が少し異なる以外にユークリッドのアラビア語訳とほぼ同じである(図9の、AをG, GをA, BをZ, ZをH, DをBにしたもの)。

5. ユークリッドが『分割の書』の中でいうところによれば[次のようである]。円AD [Bを指すと考えられる] Gが与えられ、そのなかに扇形ABGが与えられている。二本の平行線とふたつの弧とで挟まれ、その扇形に等しくなるような円の切片をその円から切り取りたい。さて弧AGを点Eで二等分し、AGを結ぶ。AGに平行な線分BZを引き、ZAを結ぶ。ZAに平行な線分EHを引く。すると弧ZHは弧AEに等しくなるが、このことは明らかである。こうして弧HZと弧AEと[の和]は弧AGに等しくなる。弧AZが共通なので、弧ZGは弧EHに等しくなる。ZGを結ぶ。すると三角形AZGは三角形ABGに等しい。したがって弧GAと線分AZ, ZGとによって囲まれた図形は扇形と等しくなる。弦AZで囲まれた円の切片を共通とすると、弦がGZである円の切片は扇形と弦がAZの円の切片と[の和]に等しくなる。しかし弦がGZの円の切片は弦がEHの円の切片と等しいので、弦がAZの円の切片を共通に取り除くと、弧HZ, 弧AEと、互いに平行である弦AZ, 弦EHとで囲まれる図形が残り、これは扇形に等しい。これが証明したかったことである⁴³。

(3) 面積付置

命題17は、「直線上に、線分AB, AGで囲まれた面積に等しく線分の完成に正方形だけ欠いている矩形を付置したい」であり、他の命題とは性質が明らかに異なる。主張されていることは数学史上いわゆる「面積付置」といわれて

いるものである。なお「付置する」には dāfa の第Ⅳ型が用いられている。この主張はそれに続く命題18, 19で使用されるために挿入された補題となりうるものであり、ユークリッド『原論』題6巻命題28に相応する。その命題はいう、

与えられた線分上に与えられた直線図形に等しく、与えられた平行四辺形に相似な平行四辺形だけ欠けている平行四辺形をつくること。ただし与えられた直線図形は与えられた線分の半分の上に描かれかつ欠けている部分に相似な平行四辺形より大きくてはならない⁴⁴。

ここで、「欠けている図形」を平行線ではなく「正方形」とし、また、「与えられた直線図形」を「ふたつの線分で囲まれた面積」にすれば『図形分割論』の補助命題になる。また『原論』には先の命題28と一組になった命題があり、そこでは「欠けた」ではなく「はみだす」平行四辺形をつくることが求められる(『原論』命題29)。しかしこれに相応する命題は『図形分割論』には見られない。ところが、それは命題25, 26に用いられたであろうと推定される。というのもこれら2つの命題の証明はアラビア語版にはないが、ピサのレオナルドのそれらに相応する命題(4と11)では、確かに「はみだす」(superhabundo)という単語が用いられ、面積付置による証明が付けられているからである⁴⁵。他方、レオナルドには『図形分割論』の補題17に相当するものがない。それは彼が『実用幾何学』の前半部で、面積付置を幾何学的代数ととらえ解説しているからである⁴⁶。すなわち彼は面積付置を幾何学的、代数的の双方の解釈でとらえているのである。

さて面積付置の問題はきわめてギリシャ的であり、したがってこの『図形分割論』がギリシャ起源以外にあり得ないことがうかがえる。かつて数学史家ソイテンやヒースによって、面積付置は数学史上では幾何学的代数に関連し、今日的には2次方程式に還元できるとされた。したがってこの補助命題17の主張は、 $AB=a$, $BZ=x$, $AB \cdot AG=b^2$ とおくと、 $ax-x^2=b^2$ の x を求めるものというのである(図3)。左辺にマイナスがあるので、平方だけ不足といわれている。しかしサボーなどによって、今日ではこの代数的解釈には疑義が

挟まれている。その詳細はここでは省くとして、今ここで重要なことは、なぜ面積付置にかかわる命題（17, 18, 25, 26）が『図形分割論』に用いられているかである。「面積付置」とはそもそも図形を「傍らに置くこと」つまりパラボラ (parabola, $\pi\alpha\lambda\alpha\beta\omicron\lambda\eta$) であり、「欠けている」はエリプシス (ellipsis, $\acute{\epsilon}\lambda\lambda\epsilon\psi\iota\varsigma$)、「はみだす」はヒュペルボラ (hyperbola, $\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta\omicron\lambda\eta$) であり、これらはまさしくギリシア数学の最高峰である円錐曲線論の主題でもあった。これらの主題はギリシア数学の精髓として、本書のような小著であったかも練習問題のごとく挿入されたのであろう。『与件』は『原論』を学び終えた者が新たな問題の解決に向かうための必読書であったが⁴⁷、この『図形分割論』も同様に『原論』を終えた者のための練習問題集であったのかもしれない。

終わりに

ある史家によれば幾何学はエジプトにおける土地の測量に発するという。たしかにアブル＝ワファーやレオナルドの図形分割論でははっきりと土地分割用と記されている。だがユークリッドが『図形分割論』を著したのもそうした目的のためであろうか。あるいは、インドや、ギリシアのデロスの神託の問題（立体倍積問題）のように、祭壇の区分けなど宗教的目的からであろうか。ユークリッドの著作には序文が付けられておらず、その執筆動機を見いだすことはおそらく永遠に不可能である。したがって一つの仮説をたてておこう。ユークリッドは『原論』の著作後、そこに含まれる命題を適用する練習のために『図形分割論』を残したのである、と。そこで論じられる命題はユークリッドの『原論』以外の著作には直接には関連せず（ただし消失した『ポリスマタ』は除く——これは『与件』や『図形分割論』に関連した命題を含んでいた可能性がある）、また『図形分割論』にはとりたてて数学的に新奇な命題は含まれていないので、まさしく『原論』の幾何学部分のためだけの簡潔な練習用小著となった。ところがその書物がアラビアやラテン世界へ伝承されて行くにしたがって、その取り扱う題材がもつ具体性から実用幾何学と結びつき、その題材の古

典的源泉ともなり（アブル＝ワファーやレオナルドは『図形分割論』の著者がユークリッドであることを知っていたのかもしれない）、多くの別証明、別問題がそれにつけ加えられたのである。とはいえその内容はあくまで古典ギリシア数学的であり、現実問題への適用性には欠け、その点でそれはそのままの形ではルネサンス期以降数多く印刷された土地測量術を含む実用数学書に採用されることはなかったようである。

3. アラビア語版ユークリッド『図形分割論』の翻訳⁴⁸

慈悲深く慈悲あまねき神の御名において

9⁴⁹. 分割に関するユークリッドの書⁵⁰

1⁵¹. 与えられた三角形をその底辺に平行な線でいかに二等分できるかを証明したい⁵².

2. 与えられた三角形をその底辺に平行な2本の線でいかに三等分できるかを証明したい.

3. 与えられた三角形をその一辺上にある与えられた点から引かれた直線によって二等分したい.

4. 与えられた台形をその底辺に平行な線で二等分したい. また三角形を分けたのと同じような方法で、与えられた台形は三等分される⁵³.

[5.] 平行四辺形をその一辺上にある与えられた点から引かれた直線で二等分したい.

[6.] 与えられた平行四辺形から、その一辺上にある与えられた点から引かれた直線によって、指定された部分⁵⁴あるいは任意の部分をどのようにして切り取ることができるのかを証明したい。

[7.] 台形のもっとも長い線⁵⁵の上にある与えられた点から引かれた直線によって、与えられた台形をどのようにして二等分できるかを証明したい⁵⁶。

8. 台形のもっとも長い [線] の上にある与えられた点から引かれた直線によって、与えられた台形から指定された部分を切り取りたい⁵⁷。

9. 平行四辺形をその外部にある与えられた点から引かれた直線によって、どのようにして二等分できるかを証明したい。

10. 平行四辺形から、その外部にある与えられた点から引かれた直線によって、指定された部分をどのように切り取ることができるかを証明したい。

11. 与えられた台形をこの台形のもっとも長い線の外部にある点から引かれた直線によって、どのようにして二等分できるかを証明したい。そしてその点は二辺の交わる位置の外部には決していない⁵⁸。

12. 与えられた台形から、この台形のもっとも長い線の外部による与えられた点から引かれた直線によって、指定された部分をどのようにして切り取ることができるかを証明したい。そしてその点はその台形の二辺の交わる位置の外部には決していない。

13. 与えられた四角形を与えられた一頂点から引かれた直線によってどのように二等分することができるのかを証明したい。

14. 与えられた四角形から、与えられた一頂点から引かれた線で、指定された

部分をどのように切り取ることができるかを証明したい。

14. 与えられた四角形から、与えられた一頂点から引かれた線で、指定された部分をどのように切り取ることができるかを証明したい。

15. 与えられた四角形をその一辺上にある与えられた点から引かれた直線によってどのように二等分することができるのかを証明したい。

16. 与えられた四角形から、その一辺上にある与えられた点から引かれた直線によって、指定された部分をどのように切り取ることができるかを証明したい。

17. 直線上に、線分 AB 、 AG で囲まれた面積に等しく線分の完成に正方形だけ欠いている矩形を付置したい。

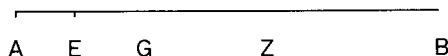


図 3

我々は今述べたばかりのことをすでに証明しているので⁵⁹、もし

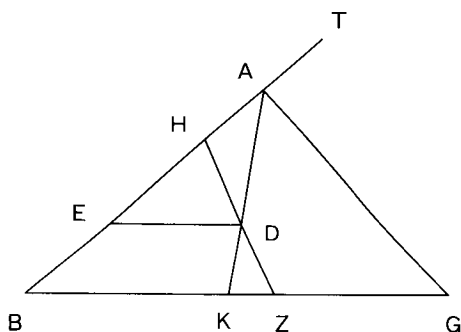
$AB \cdot AG$ ⁶⁰ に等しくその完成に

正方形だけ欠いていて、しかも $AE \cdot EB$ に等しい面積を AB に付置することがなぜ我々にはできないのかというのなら、我々はこう答える。それができないのは、 AB が BE より大きく、 AG が AE より大きく、したがって $BA \cdot AG$ が $AE \cdot EB$ より大きくなるからである。したがって $AB \cdot AG$ に等しい平行四辺形を AB に付置すれば、それは $AZ \cdot ZB$ [と同じ面積] になる⁶¹。

[18.] 三角形内の与えられた点を通る直線によって、与えられた三角形をどのように二等分することができるのかを証明したい。

さて、与えられた三角形を三角形 ABG とし、その内部にある点を D とせよ。 D を通り三角形 ABG を二等分する直線を引きたい。こうして線分 BG に平行な線分つまり DE を点 D から引く。 $AB \cdot BG$ の半分に等しい領域を DE に付置し、それを $TB \cdot ED$ とせよ。 $BT \cdot BE$ に等しくその完成に正方形だけ欠

く平行四辺形を線分TBに付置し、その付置された領域をBH・HTとせよ。線分DHを結び、それをZまで延長する。すると線分HDZは三角形ABGを2つの部分、つまりHBZ、HZGAに等分するように引かれていることを私はいう。



証明はこうである。TB・ 図4

BEはTH・HBに等しいので、BT対THの比はHB対BEの比に等しい。そして分割すると⁶²、TB対BHの比はBH対HEの比にも等しくなる。ところがBH対HEの比はBZ対EDの比に等しい⁶³。こうしてTB対BHの比はBZ対EDの比に等しい。したがってTB・EDはBH・BZに等しい。だがTB・EDはAB・BGの半分に等しく、BH・BZ対AB・BGの比は三角形HBZ対三角形ABGの比に等しい。なぜならBにおける角が共通だからである。したがって三角形HBZは三角形ABGの半分である。こうして三角形ABGはふたつの等しい部分、つまりHBZ、AHZGに分けられたのである。もしTB・BEに等しくその完成に正方形だけ欠く平行四辺形をTBに付置するのなら、そしてその面積がAB・ATであるのなら、そのとき線分ADを結びそれをKに向けて延長すれば、三角形ABKは三角形ABGの半分であることを同様に証明することができる。これが証明しなかったことである。

[19.] 三角形内の与えられた点を通る直線によって、与えられた三角形からどのように措定された部分を切り取ることができるのかを証明したい。

さて、与えられた三角形を三角形ABG、その内部の与えられた点をDとせよ。三角形ABGから措定された部分を切り取る直線が点Dを通るようにし、措定された部分を三分の一にしたい。点Dから線分BGに平行な線分つまりDEを引く。AB・BGの三分の一に等しい矩形をDEに付置し、この領域を

$BZ \cdot ED$ とせよ。 $ZB \cdot BE$ に等しくその完成に正方形だけ欠く領域を ZB に付置し、その付置された領域を $BH \cdot HZ$ とせよ。線分 HD を結びそれを T まで延長する。三角形 HTB が三角形 ABG の三分の一であることも同様に証明できる。同じ方法でそれを任意の大きさの部分に大

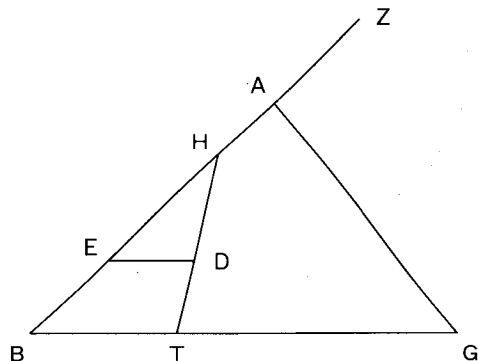


図 5

きさの部分に分けることができる。これが証明したかったことである⁶⁴。

[20.]⁶⁵そして四本の線分を A, B, G, D とし、 $A \cdot D$ は $B \cdot G$ より大きいとせよ。 A 対 B の比は G 対 D の比より大きいと私はいう⁶⁶

[21.] そしてまた $A \cdot D$ が $B \cdot G$ より小さいのなら、 A 対 B の比は G 対 D の比より小さいと私はいう⁶⁷。

[22.] そして二直線 AB, DE があり、 AB 対 BG の比が DE 対 EZ の比より大きいのなら、分離することによって⁶⁸、 AG 対 BG ⁶⁹ の比は DZ 対 ZE の比より大きくなると私はいう⁷⁰。

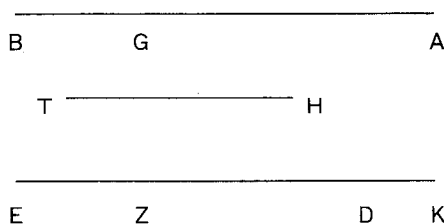


図 6

[23.] そして全く同じこの図形で、 AG 対 GB の比が DZ 対 ZE の比より大きいとせよ。すると複合することによって⁷¹、 AB 対 BG の比は DE 対 EZ の比より大きくなると私はいう⁷²。

[24.] そしてまた AB 対 BG の比が DE 対 EZ の比より小さいとせよ。そのとき、分離することによって、 AG 対 GB の比は DZ 対 ZE の比より小さくなる⁷³。

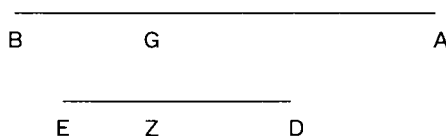


図 7

[25.] 与えられた三角形をその三角形外の与えられた点を通る直線によっていかに二等分することができるかを証明したい。

[26.] 与えられた三角形からその三角形外の点から引かれた直線によって、指定された部分をいかに切り取ることができるかを証明したい⁷⁴。

[27.] ある角を挟む二直線と円弧とによって囲まれた与えられた図形を二等分したい。

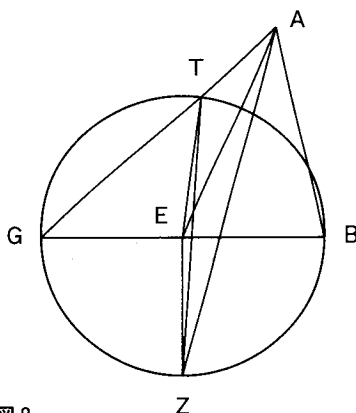


図 8

円弧 BG と、角 BAG を挟む直線 AB 、 AG とが囲む図形 ABG が与えられているとせよ。図形 ABG を二等分する直線を引きたい。

さて線分 BG を結び、それを点 E で二等分する。点 E から線分 BG に垂直に線分を引き、それを EZ とする。直線 AE を結ぶ。線分 BE は線分 EG に等しいので、領域 BZE は領域 EZG に等しい。

だが三角形 ABE は三角形 AGE に等しいので、図形 $ABZE$ は図形 $ZGAE$ に等しくなる。もし線分 AE が線分 EZ の延長線上にあるのなら、図形 ABG はふたつの等しい部分 $ABZE$ 、 $GAEZ$ に分割されていることになる。

もし線分 AE が線分 EZ の延長線上にないのなら、線分 AZ を結び、点 E か

ら線分 AZ に平行線つまり ET を引き、 TZ を結ぶ。さて線分 TZ は図形 ABG をふたつの等しい部分、つまり $ABZT$ 、 ZGT とに分割するように引かれていることをいう。三角形 TZA と三角形 EZA とは同一底面、つまり AZ 上にあり、二本の平行線、つまり AZ 、 TE の間にあるので、三角形 TZA は三角形 EZA に等しい。それらに同じものつまり図形 AZB が加えられるとせよ。こうして $TZBA$ は $ABZE$ に等しくなり、それは図形 ABG の半分である。こうして直線 TZ は BZG をふたつの部分、つまり $ABZT$ 、 TZG とに二等分するように引かれているのである。これが証明したかったことである。

[28.] 与えられた円において、指定された部分をその円から切り取る二本の平行線を引きたい。

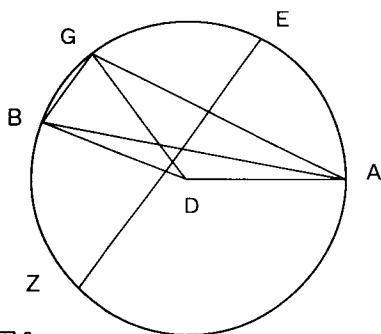


図9

さてこの部分を三分の一、その円を ABG としよう。こうしていま述べたことを [示] したい。円 ABG の中心 [を点 D]、この円に内接する [正] 三角形の一边を AG とする。そして線分 AD 、 DG を結ぶ。線分 AG に平行な線分を点 D から引き、 DB とする。線分 GB を結ぶ。点 E で弧 AG を二等分する。線分 BG に平行な線分を点 E から引き、 EZ とする。線分 AB を結ぶ。さて平行線 EZ 、 GB は、円 ABG からその三分の一、つまり図形 $ZBGE$ だけ切り取るように引かれていることをいう。

証明はこうである。線分 AG は線分 DB に平行であるので、三角形 DAG は三角形 BAG に等しい。共通な超過つまり円の切片⁷⁵ AEG をそれらに加えよ。こうして図形全体 $DAEG$ は図形全体 $BAEG$ と等しくなる。しかし $DAEG$ は円 ABG の三分の一であるので、図形 $BAEG$ もこの円の三分の一となる。 EZ は GB に平行なので、弧 EG は弧 BZ に等しい。だが EG は EA に等しく、したがって EA は ZB に等しくなる。弧 EGB は共通である。した

がって弧 AB 全体は弧 EZ 全体に等しく、線分 AB は線分 EZ に等しい。したがって円の切片 $A E G B$ は円の切片 $E G B Z$ に等しくなる。共通部分すなわち円の切片 GB を取り除くと、図形 $E Z B G$ が残りそれは図形 $B A E G$ に等しい。ところで図形 $B A E G$ は円 $A B G$ の三分の一である。したがって図形 $E Z B G$ は円 $A B G$ の三分の一となる。これが証明したかったことである。

円からその四分の一あるいは五分の一あるいは他の任意の部分を二本の平行線によって切り取りたいのなら、ここで示したように、この円の中に、内接する正方形あるいは〔正〕五角形の辺を描き、中心からそれに二本の直線を引き、以上と同じ方法で行えばよい。

[29.] 与えられた三角形をその底辺に平行な線によってふたつの部分に分け、それらの一方の他方に対する比が与えられた比になるようにしたい。

[30.] 与えられた三角形をその底辺に平行な線によって、与えられた比をもつ部分に分けたい⁷⁶。

[31.] 与えられた台形をその底辺に平行な線によってふたつの部分に分け、それらの一方の他方に対する比が与えられた比になるようにしたい。

[32.] 台形をどのように底辺に平行な線分によって分割すれば、それらの間の比があたえられた比に互いに等しくなるのかを証明したい。

[33.] 与えられた四角形を与えられた角から引かれた線によってふたつの部分に分け、それらの一方の他方に対する比が与えられた比になるようにするにはどのように分ければよいのかを証明したい。

[34.] 与えられた四角形を与えられた角から引かれた直線によって分け、与えられた比をもつ部分にするにはどのように分ければよいのかを証明したい。

[35.] さて、以上の事柄が知られるのなら、与えられた四角形を、その一辺上の与えられた点から引かれた一本あるいはいくつかの直線によって、ひとつのあるいはいくつかの与えられた比になるように分けることができる。ただし上で述べられた条件を心に留めておくならばである。

この書のおわり。我々は叙述を証明なしに限定した。というのも証明は容易だからである”。

*本研究の一部は平成6年度文部省科学研究費補助金（一般(C)）の交付を受けて行われたものである。

¹ Woepcke, F., “Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d’Euclide”, *Journal Asiatique*, 4^e série, 18 (1851), pp.217-247. Reprinted in F. Woepcke, *Études sur les mathématiques Arabo-Islamiques*, ed. F. Sezgin, Frankfurt, 1986, pp.17-47.

² cf. Favaro, E. A., “Notizie storico-critiche sulla Divisione delle Aree”, *Memorie del reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, xxii, 1883, pp.129-154.

³ Archibald, Raymond Clare, *Euclid’s Book on Divisions of Figures, With a Restoration Based on Woepcke’s Text and on the Practica geometirae of Leonardo Pisano*, Cambridge, 1915.

⁴ Euclides, *Opera omnia*, t. 8, ed. J. L. Heiberg et H. Menge, Leipzig, 1916, cc.227-235.

⁵ Hogendijk, Jan P., “The Arabic Version of Euclid’s *On Divisions*”, in *Vestigia mathematica: Studies in Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H. L. L. Busard*, eds. M. Folkerts and J. P. Hogendijk, Amsterdam, 1993, pp.143-162. しかしここではテキスト内容の詳細な分析はなされていない。

*『図形分割論』に関しては, Archibald, *op. cit.*; Heath, Thomas L., A

History of Greek Mathematics, vol.1, Oxford, 1921:rep. New York, 1981, pp.8-10 が詳しい。日本語では、伊東俊太郎「ユークリッドと『原論』の歴史」、中村幸四郎、寺坂英孝、伊東俊太郎、池田美恵 訳・解説『ユークリッド原論』共立出版社、1971, pp.437-487 が参考になる。オフテルディンガーの次の著作は参照できなかった。ただしこれはアル＝バグダーディーの著作のラテン語訳をドイツ語訳したものといわれ、そうであればここではあまり参考にはならない。cf. Ofteldinger, L. F., *Beitäge zur Wiederherstellung der Schrift des Euklides über die Theilung der Figuren*, Ulm, 1853.

⁷Proclus, *In primun Euclidis elementorum librum commentarii*, ed. G. Friedlein, Leipzig, 1873: rep. Hildesheim, 1967, p.144. cf. 伊東, 前掲書, P.452.

⁸Proclus, *op. cit.*, p.69.

⁹注50参照.

¹⁰Heron, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, t.3, ed. H. Schoene, Leipzig, 1903: rep. Stuttgart, 1976, pp.150-185. 扱われているのは、三角形 (命題 1-4, 10, 15, 19), 四角形 (11-13), 台形 (5-8), 円 (9, 18, 23), 角錐 (20), 球 (17), 多角形 (14), 円錐 (21), 円錐台 (22), 球の表面積 (23). またアポロニオス『面積切断』やアルキメデス『球と円柱について』第2巻が、前者は命題10, 13, 後者は命題17, 23の証明の途中で言及されている。

¹¹Heath, Thomas L., *A History of Greek Mathematics*, vol.2, Oxford, 1921: rep. New York, 1981, pp.336-337. cf. Heron, *op. cit.*, pp.148-151.

¹²この4つの線分の積は3次元を越え、したがって通常のギリシア数学では考えられない数であることに注意せねばならない。ここにヘロンのギリシア数学を越えた特異性がある。

¹³ἔγγιστα (より近い). $BD = x$ とおくと, $x(14-x) = 46\frac{2}{3}$. これをとくと, $x = 7 \pm \sqrt{2\frac{1}{3}}$. 平方根内を $1\frac{1}{2}$ として, $DC = 5\frac{1}{2}$. また $BD = 8\frac{1}{2}$ であるが, これを近似的に8とする. Heron, *op. cit.*, p.150. このように方程式に変形するのは, 幾何学的代数という一つの解釈にすぎないということを

断っておく。なお、ヘロンの数値にはいくらか混乱があるが、ここではヒースの解釈にしたがう。

¹⁴アーチボールドによれば、パップス『数学集成』に記載されたアポロニオス『面積切断』（2巻からなり、命題を124含んでいるという）の内容紹介から、後者には図形分割に関連する問題が含まれていたという。Archibald, *op. cit.*, pp.27-28.

¹⁵Dodge, B., *The Fihrist of al-Nadim*, vol.2, New York, 1970, p.636.

¹⁶セシアーノが論文にその写真版を収録している。Sesiano, J., “Un complément de Tābit ibn Qurra au *ΠΕΡΙ ΔΙΑΠΕΣΕΩΝ* d'Euclide”, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaft*, 4 (1987-88), SS.149-159. とくに SS.157-159.

¹⁷このペルシア語訳の内容がウェブケによって紹介されている。Woepcke, F., “Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans. deuxième article. Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ”, *Journal Asiatique*, 5^e serie, 5 (1855), pp.218-256; 309-359. Reprinted in F. Woepcke, *Études sur les mathématiques Arabo-Islamiques*, ed. F. Sezgin, Frankfurt, 1986, pp.483-572. さて全12章の後半部分の表題は次の通り。三角形の分割（第7章）；四角形の分割（第8章）；円の分割（第9章）；道をそのままにしておく方法、つまり、ある指定された大きさの道をそのままにしておいて、ある大きさの土地を部分に分けること（第10章）；正方形をある個数の正方形に分割すること、そして正方形をある個数の正方形から構成すること（第11章）；球と、球上のさまざまな種類の図形の分割（第12章）。ウェブケによると、第9章1,2-3がそれぞれユークリッド『図形分割論』命題29, 28に対応するという。Woepcke, *op. cit.*, pp.340-341. しかし実際は他にも数多く対応する命題がある。またこの第12章は図形分割論の伝統上きわめて興味深いものである。球面の分割を扱ったものはヘロンにしかないが、それがここに現れているからである。そこには、「球面を4つの正三角形に分割せよ」（命題5）, 「球（面）を14の部分に分割し、そのうち6個を四角形、8個を三角形にせよ」

(命題14),「球(面)を12個の五角形と20個の六角形に分割せよ」(命題17)などが見られる。

¹⁸筆写したものであることは、誤って上の行を下の行に繰り返して書き写している箇所がある(f.55a)ことからわかる。ただしそこには消線が引かれている。

¹⁹この写本は総計219葉に49編の論文が収録され、その大部分は幾何学に関するものである。そのうちアル＝シジュジーの作は4編。ff.52-53, 136-137, 151-156, 195-198. cf. Sezgin, F., *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band 5, Mathematik bis ca. 430 H., Leiden, 1974, SS.331-332.

²⁰ Schoy, C., “Graeco-arabische Studien nach mathematischen Handschriften der Viceköniglichen Bibliothek zu Kairo”, *Isis* 8 (1926), pp.21-40.

²¹King, David, A., *A Survey of the Scientific Manuscripts in the Egyptian National Library*, Winona Lake:Indiana, 1986, p.52. 末尾の問題は「アブー・バクルは言った」で始まる。cf. Sezgin, *op. cit.*, S.396. なお、アブー・ベクル (Abū Bekr) という人物にはクレモナのジェラルドによるラテン語訳の『計測の書』(*liber mensurationum*) という著作が残されているが、これと『図形分割論』との内容には類似はない。この人物とアブー・バクルとは、名前はおなじだが同一人物であるかどうかは不明。アブー・ベクルの『計測の書』はブザールによって編集校訂されている。Busard, H. L. L., “L’algèbre au moyen âge: Le “Liber mensurationum” d’Abu Bekr”, *Journal des Savants*, 1968, pp. 65-124. また次の項のアル＝バグダーディー(名前にアブー・バクルが含まれている)との関係も不明。

²²正式の表題は次の通り。 *De superficierum divisionibus liber Machometo Bagdedino ascriptus nunc primum Ioannis Dee Londinensis et Federici Commandini Urbinatis opera in lucem editus. Federici Commandini de eadem re libellus*, Pesaro, 1570.

²³*Libro del modo di dividere le superficie attribuito a Machometo Bagdedino. Mandato in luce la prima volta da M. G. Dee...e da M. F. ...*

Commandino...Tradotti dal Latino in volgare da F. Viani de' Malatesti,... Pesaro, 1570. ディーとコンマンディーノとの出会いについては次のローズの2つの論著が詳しい。Rose, Paul Lawrence, *The Italian Renaissance of Mathematics. Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Genève, 1975; Rose, Paul Lawrence, "Commandino, John Dee, and the *De superficierum divisionibus* of Machomentus Bagdedinus", *Isis* 63 (1972), pp.83-93.

²⁴Gregory, David, *ΕΤΚΛΕΙΔΟΤ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ. Euclidis quae supersunt omnia. Ex rescensione Davidis Gregorii...*, Oxoniae, 1702, cc.667-684.

²⁵quod fuit probandumまたはquod fuit propositum. ユークリッドの著作によく見られ、もっともユークリッド的表現といってよい。

²⁶Curtze, M., *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*, Leipzig, 1902: rep. New York, SS.130-159.

²⁷たとえばalmuncharifで、それはアラビア語al-munḥarif（台形）に由来。Curtze, *op. cit.*, *passim*.

²⁸Grant, Edward, *A Source Book in Medieval Science*, Cambridge: Mass., 1974, p.36.

²⁹Boncompagni, Baldassarre, *Scritti di Leonardo Pisano. Matematico del Secolo Decimoterzo*, vol.2, Roma, 1862, pp.110-148.

³⁰レオナルド『実用幾何学』と、ジェラルドの他の翻訳書の文体とは必ずしも一致しないと言われるので (cf. Clagett, Marshall, *Archimedes in the Middle Ages, Quasi-Archimedean Geometry in the Thirteenth Century*, Princeton, 1984, p.581, n.1)., レオナルドはジェラルド訳をもとにして書かれた別の論文を参照したのかもしれない。ただしレオナルドはアル＝フワーリズミー『代数学』のジェラルド訳を利用したようである。cf. Miura, Nobuo, "The Algebra in the *Liber Abaci* of Leonardo Pisano", *Historia Scientiarum*, 21 (1981), pp.57-65.

³¹Favaro, *op. cit.*, ユークリッドとレオナルドの類似した命題の対照は

次の通り。番号はユークリッド『図形分割論』の命題を示し、括弧内の番号はレオナルド『実用幾何学』の命題番号。

1(5), 2(14), 3(1, 2), 4(23), 5(16), 6(20), 7(27), 8(30, 31), 9(18), 11(28), 12(32), 13(36), 14(40), 15(37), 16(39), 18(3), 19(10), 25(4), 26(11), 27(57), 28(51), 31(29), 32(35), 33(40). cf. Archibald, *op. cit.*, pp.16-18.

³² Arrighi, Gino, *Leonardo Fibonacci: La pratica di geometria, Volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino cittadino Dal Codice 2186 della Biblioteca Riccardiana di Firenze*, Pisa, 1966, pp.71-135. アッリギ編集の図版番号にしたがうと、次のものが論じられている。71-87(三角形); 88, 93, 97(正方形); 89, 92, 94, 100, 103, 104(矩形); 90, 95, 98, 101, 105, 106(菱形); 91, 96, 102, 110, 117(平行四辺形); 107-109, 111-116(台形); 118-119(四角形); 120-128(五角形); 129-131(六角形); 132, 133(円); 134, 135(半円)。

³³ 書名は、「技艺を愛好する者」の意味でギリシア語に由来する。ここで技艺とは幾何学を指すことは内容から明らかである。テキストはクラーゲットによって編集されている。Clagett, *op. cit.*, pp.196-257.

³⁴ Pacioli, Luca, *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita...*, Venezia, 1494: rep. Kyoto, 1973, 35v-43v.

³⁵ Cardano, Girolamo, *Opera omnia*, vol.IV, 1662: rep. New York, cc.118-127.

³⁶ Archibald, *op. cit.*, pp.15-16.

³⁷ 伊東, 前掲書, p.453.

³⁸ Heron, *op. cit.*, p.172. cf. Heath, *op. cit.*, pp.339-340.

³⁹ 定規とコンパスだけで円に内接可能な正多角形は次のような n 角形だけであることが、ガウスによって1801年に証明された。

$$n = 2^p (2^{2^{s_1}} + 1) (2^{2^{s_2}} + 1) \cdots (2^{2^{s_m}} + 1),$$

ここで、 p, s_i は正整数あるいはゼロ、しかも $2^{2^{s_m}} + 1$ ($m = 1, 2, \dots, m$) は素数である。cf. Archibald, *op. cit.*, p.67.

⁴⁰Boncompagni, *op. cit.*, pp.146-147.

⁴¹正三角形と正六角形の辺が、(1)平行、(2)終端を共有、(3)平行でもなく終端を共有することもない、と場合分けされ、ユークリッドを彷彿させる厳密な証明がつけられている。Sesiano, *op. cit.*

⁴²cf. Hogendijk, *op. cit.*, 162.

⁴³cf. Hogendijk, *op. cit.*, p.161.

⁴⁴ユークリッド、『ユークリッド原論』中村幸四郎、寺坂英孝、伊東俊太郎、池田美恵 訳・解説、共立出版社、1971、p.142.

⁴⁵注74参照。またピサのレオナルドの命題10では、"deinde lineae applicabiles paralilogramum deficiens figura tetragona, quod sit equale superficies *ge* in *gz*", と「欠けている」をdeficiensと呼んでいる。

Boncompagni, *op. cit.*, p.115.『図形分割論』の命題18と25、19と26は、前者が「二等分」、後者が「指定された部分」、また18と19、25と26は、前者が「欠けている」、後者が「はみだす」という点で対応している。

⁴⁶Boncompagni, *op. cit.*, pp.15-16.

⁴⁷伊東、前掲書、p.448.

⁴⁸鈎括弧内は訳者が補ったもの。写本は、Paris, Bibliothèque Nationale Fonds Arabe, 2457, 53b-55b. cf. Hogendijk, *op. cit.* 写本には筆写上の誤りがいくつか見られる。ホゲンダイクはそれらを正確に編集している。ただし、図形の文字記号の誤りには気づいていない(図4のEとZが写本では反対になっている)。

⁴⁹写本の第9番目の論攷であることを示す。もちろん数字はいわゆるアブジャド数字である。

⁵⁰Kitāb uqlīdis fī al-qisma.『様々な幾何学的問題』の写本(Cairo, Dār al-Kutub Muṣṭafā Fāḍil Riyāḍa 41m)ではkitāb al-qismaとなっている。ともに「図形の」という語は付けられていない。

⁵¹命題番号について述べておくと、写本の欄外では、この翻訳文4の「そして」以下に5という番号が付けられ、さらに5、6はそれぞれ6、7となっており、また7には番号が付けられていない。この写本番号をそのままうけて、

ウェプケ、さらにアーチボールドは「そして」以降を5とし、それ以降を本訳文とは1つつつずらしている。したがって写本の8を9とし、命題の総計を36としている。しかし7は確かに命題の形を取っており、したがって以上の番号付けは明らかに誤りであると思われ、また、8以降の写本の番号付けが生かされなくなってしまうので、ここでは写本の番号を一部訂正して総計を35とする。
cf. Hogendijk, *op. cit.* p.148.

⁵²「証明したい」とは1人称複数。ここでは、主語を省略して訳しておく。

⁵³後半は、命題2を指す。

⁵⁴'juz' mafrūd.

⁵⁵khatt alā. 原義は「もっとも高い線」。台形の平行二辺のうち長いほうの辺を指す。

⁵⁶ここでは述べられていないが、もっとも長い辺上になくとも他の辺上でもよい。レオナルドはこのことを知っており、点が各辺上にあるとき、また各頂点上にあるときを場合分けして詳細に論じている。Boncompagni, *op. cit.*, pp.127-131.

⁵⁷レオナルドはこの問題の末尾で次のように述べる。「また、他の辺上に与えられたすべての点、さらに辺の内部あるいは外部に与えられたすべての点から〔引かれた線によって〕我々はこの四角形を分割できる」。Boncompagni, *op. cit.*, p.134.

⁵⁸この命題の後半部の意味は明らかではない（次の命題の後半部も同様）。レオナルドはこの条件を付けていない。しかしレオナルドの論法から判断すると次のようになる。

rsを求める線分、mをrsの中点とすると、ek上に点がある場合、三角形emrと三角形skmの合同性から、ekも分割線分になり得る。ところが点が測辺を結ぶxy上にある場合はこ

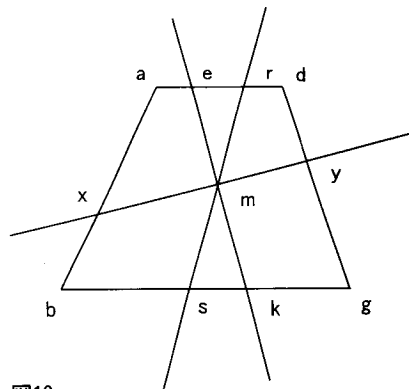


図10

のようにできない（2つの側辺は平行なので）。できるのは点が amg と dmb の延長線上の間の範囲にあるときだけである。したがって、「二辺」を側辺と上下底辺の「交わる位置」 a, d ととれば、先の外部の点では分割ができないことになる。

⁵⁰『図形分割論』では証明されておらず、この意味は不明。これは『原論』第6巻命題28の特殊な形であるので、『原論』での証明を指すのであろうか。なおこの箇所、 $id\ qad\ bayyannā\ mā\ qulnā$ を、アーチボールドは “after having done what was required” としているが、ウェブケの訳 “après avoir démontré ce que nous venons de dire” のほうが原文に忠実な訳である。cf. Archibald, *op. cit.*, p.51; Woepcke, *op. cit.*, p.36.

⁵¹ $AB \cdot AG$ は $alladhī\ yakūnu\ min\ AB\ fī\ AG$ 。つまり「 AG の A B 倍から生じるところのもの」を意味し、 $AB \cdot AG$ と表記しても誤解はないと思われる。

⁵²後半の条件は、求める点 Z が A, G の間にあってはならないことをいうのであろうが、舌足らずである。ウェブケはこの後の文章が欠けているとみなし補っているものの、それは適切ではないように思われる。Woepcke, *op. cit.*, p.36.

⁵³ $ida\ faṣalnā$ 。「もし我々が分割したのなら」の意。『原論』V巻定義15の「比の分割とは前項と後項の差を後項そのものに対してとることである」を、前項そのものとしたものである。

⁵⁴『原論』V I 巻命題2。

⁵⁵証明は簡約されているが、命題18と同様に進めることができる。レオナルドはきちんと証明をつけている（命題10）。Boncompagni, *op. cit.*, p.121.

⁵⁶命題20-24は命題25に使用されるために挿入された補題と考えられる。よって以下の命題は本来証明が備わっていたと推定できる。そうでなければ命題20-24の存在意味がなくなるからである。レオナルド自身はこれらの補題を明示してはいないが、その命題4で用いている。Boncompagni, *op. cit.*, pp.116-119.

$$^{57} A \cdot D > B \cdot G \rightarrow A/B > G/D.$$

$$^{58} A \cdot D < B \cdot G \rightarrow A/B < G/D.$$

⁶⁸alā jiha al-tafṣīl. 『原論』 V 卷定義15. この表現は命題24にも見える.

⁶⁹テキストはGB.

⁷⁰ $AB/BG > DE/EZ \rightarrow (AB - BG)/BG > (DE - EZ)/EZ$
 $\rightarrow AG/GB > DE/ZE.$

⁷¹alā jiha al-tarkīb. 『原論』 V 卷定義14.

⁷² $AG/GB > DE/ZE \rightarrow (AG + GB)/GB > (DE + ZE)/ZE$
 $\rightarrow AB/BG > DE/EZ.$

⁷³これは命題22の大小関係が逆になった命題. $AB/BG < DE/EZ$
 $\rightarrow (AB - BG)/BG < (DE - EZ)/ZE \rightarrow AG/GB < DE/ZE.$

⁷⁴証明が省略されているのでレオナルドの証明を補っておく (命題11).

ここでは超過による面積付置が用いられている.

「三角形を abg , その外に与えられた点を d とせよ. 点 d から引かれた線によって, 与えられた三角形 abg から, 与えられた部分, それを三分の一とする, が切り取られねばならない. まず点 c を通って辺 bg を切断する線 ad を結ぶ. もし bc が cg が線分 bg の三分の一なら, 点 d から上昇する線 ad によって三角形 abg の三分の一が確かに切り取られる. だがもしそうでないな

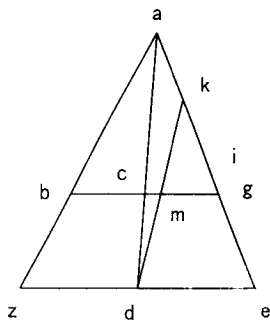


図11

ら, ab, ag を三角形 abg の外部の e, z まで延長し, 辺 bg に平行な線 ez を点 d から引く. $de \cdot gi$ の面を $ag \cdot gb$ の面の三分の一に等しいとおく. $eg \cdot gi$ に等しい正方形だけ超過する矩形を直線 gi に付置せよ (*applicabo recte gi paralilogramum, cui superhabundet figura tetragona equale ei quod fit ex eg in gi*). そしてその $eg \cdot gi$ を $ik \cdot kg$ の面とせよ. 点 k を通って直線 kmd を引け. 三角形 kmg は三角形 abg の三分の一であることを言う. このことは以下のように証明される. 面 $eg \cdot gi$ は面 $gk \cdot ki$ に等しいので, eg 対 gk は ki 対 ig である. それゆえ複合して ek 対 gk は gk 対 gi となる. だが ek 対 kg は de 対 gm である. それゆえ ed 対 gm は gk 対 gi . それゆえ面 $gk \cdot gm$ は面 $de \cdot gi$ に等しい. しかし $de \cdot gi$ は面 $ag \cdot gb$ の三分の一である. それゆえ面 $gk \cdot gm$

も面 $ag \cdot gb$ の三分の一になる。そして面 $gk \cdot gm$ 対面 $ag \cdot gb$ は三角形 kmg 対三角形 agb なので、前もって言ったように三角形 kmg は三角形 abg の三分の一となる」。Boncompagni, *op. cit.*, p.121.

⁷⁵qit'a दौरa.

⁷⁶命題29は2つの部分に、命題30は3つ以上の部分に分けることを示す。

以下、命題31と32とが、命題33と34とが対応する。

⁷⁷ここから『図形分割論』の命題総数は35であって、それ以下でもそれ以上でもないことがわかる。ユークリッドの他の著作との整合性から判断して、彼が証明を省いたとは考えにくいので、証明を略したのはおそらくアッ=シジュズィーあるいは彼が参照したテキストということになる。ただし証明容易というのは命題すべてにあてはまるとは限らない。面積付置や場合分けを要する命題は決して証明容易なわけではない。